

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第二名

080409

數學 101～河內塔變身！

學校名稱：臺北縣永和市秀朗國民小學

作者： 小六 陶佳妤 小六 李羚毓 小六 王鈺能 小六 盧建方 小六 歐陽至宸	指導老師： 姜懿珊 鄭棕懌
--	-----------------------------

關鍵詞：河內塔、遞迴、2 的指數

摘 要

本次的研究主題是由河內塔遊戲延伸而成的，我們除了增加河內塔的柱數探討外，並另作形狀變化，探討最少步數間的規律，並歸納推論出數學式。

壹、研究動機

有一次，我們在電子辭典中發現河內塔的遊戲，當時很疑惑為什麼沒有河內塔四柱以上的版本。因此，我們決定從研究河內塔基本型三柱最佳的走法、策略，挑戰河內塔四柱到十柱是否有一定的走法規律可循，並嘗試河內塔其他的形狀變化，希望可以找到河內塔更多的新玩法。

貳、研究目的

- 一、探討原河內塔柱數及圈數累加後，最少步數之變化。
- 二、探討河內塔的變化型(包括上樓梯型、下樓梯型、V型、倒V型、凹一型、凹二型、凸一型、凸二型)柱數與圈數累加後，最少步數之變化。

參、研究器材及設備

一代版：壓克力板、剪刀、圓規、水彩筆、水彩、數字貼紙、紙、筆(記錄用)

二代版：一元硬幣、數字貼紙、紙、筆(記錄用)

肆、文獻探討

一、相關作品分析

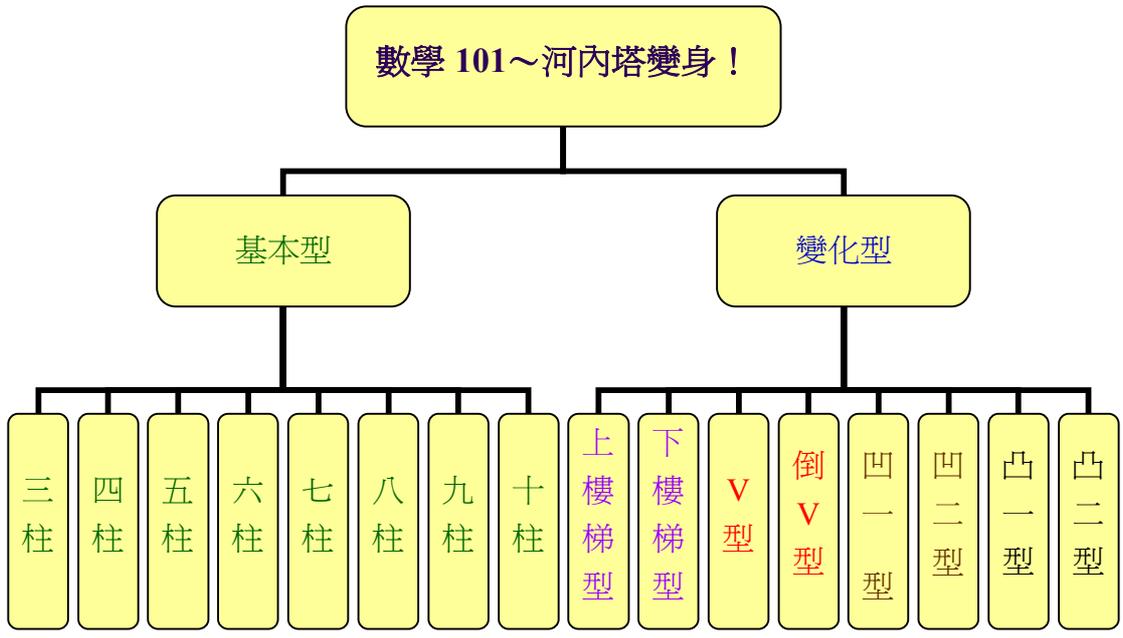
參展組別	研究主題	得獎名次	研究特色
第 27 屆 國小組	河內寶塔與九連環	第三名	將河內塔與九連環做比較，並思考到以增加柱數以減少步數，為多柱河內塔研究奠定了相當好的基礎。
第 43 屆 高中組	將錯就錯 Knuth 河內塔	第一名	以規則異動的河內塔遊戲進行研究，做了詳細的研究。
第 46 屆 國中組	河內塔問題	沒有得名	研究河內塔三柱，以增加圓盤、柱數不變為研究主題，對三柱河內塔有詳細的研究。
第 49 屆 國中組	三柱輪換之移動策略----雞尾酒法	第一名	以遞迴方式解開河內塔三柱輪換的最少步數，是研究河內塔三柱輪換的優秀作品。

二、我們的作品與特色：

- (一)第 27 和 49 屆的作品雖然都有柱數的變化，不過，他們的研究只有做到四柱為止，我們的研究更深入探討到十柱的變化和形狀的改變。
- (二)第 43 屆的作品做了規則的變化，我們的研究則延伸探討到形狀的改變。
- (三)第 46 屆的研究探討三柱多圈的河內塔遊戲，我們的研究有柱數與形體的多元變化，且難度擴大至十柱。

(四)我們的研究首創形體變化，並自製圓盤，與同儕分享河內塔的新玩法。

伍、研究架構



陸、名詞解釋

基本型：將所有擺在最左邊的圈圈移到最後一個柱子。(如圖 1-1)

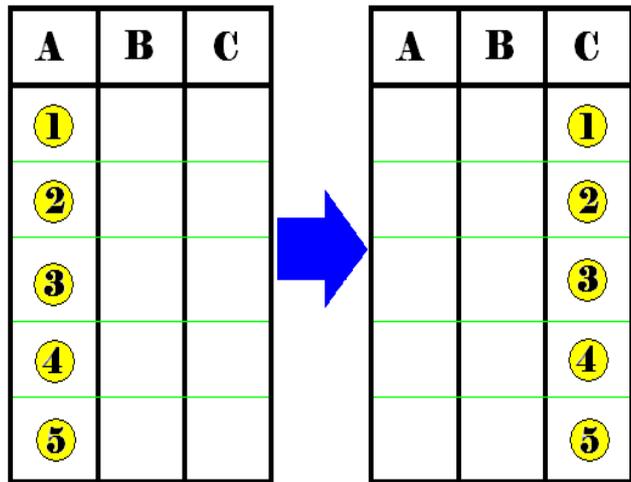
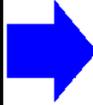


圖 1-1

上樓梯型：將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。
 (從左到右)：1 個→2 個→3 個。(如圖 1-2)

下樓梯型：將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。
 (從左到右)：3 個→2 個→1 個。(如圖 1-3)

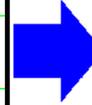
A	B	C
①		
②		
③		
④		
⑤		
⑥		



A	B	C
		●
	●	●
●	●	●

圖 1-2

A	B	C
①		
②		
③		
④		
⑤		
⑥		



A	B	C
●		
●	●	
●	●	●

圖 1-3

V 型：將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：2 個→1 個→2 個

五柱：3 個→2 個→1 個→2 個→3 個(如圖 1-4)

依此類推。

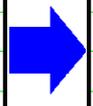
倒 V 型：將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：1 個→2 個→1 個

五柱：1 個→2 個→3 個→2 個→1 個(如圖 1-5)

依此類推。

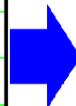
A	B	C	D	E
①				
②				
③				
④				
⑤				
⑥				
⑦				
⑧				
⑨				
⑩				
⑪				



A	B	C	D	E
●				●
●	●		●	●
●	●	●	●	●

圖 1-4

A	B	C	D	E
①				
②				
③				
④				
⑤				
⑥				
⑦				
⑧				
⑨				



A	B	C	D	E
		●		
	●	●	●	
●	●	●	●	●

圖 1-5

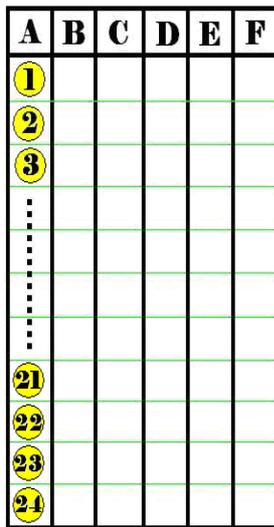


圖 1-8

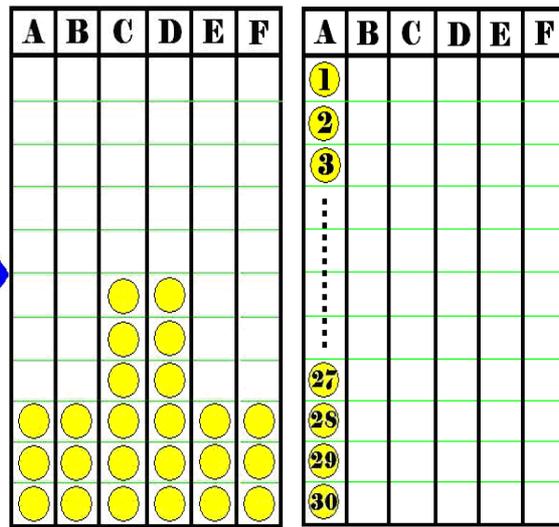
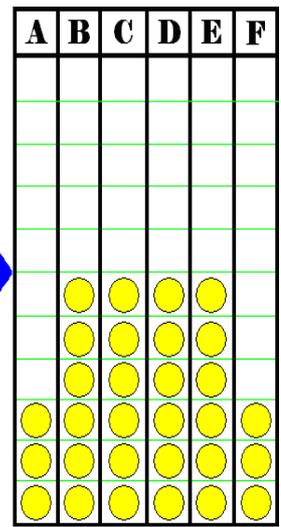


圖 1-9



柒、研究問題及過程

研究一：原河內塔三柱遊戲柱數與圈數增加後最少步數如何解？

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3. X =柱數， Y =圈數， T =最少步數，且 $X、Y、T \in \mathbb{N}$ 。

4.需將所有的圓圈從柱 A 移到最後一個柱子。(如圖 2-12)

表 2-1 $X=3, Y=5$ 時， $T=31$ 的記錄方式

1. 1→C	2. 2→B	3. 1→B	4. 3→C	5. 1→A	6. 2→C
7. 1→C	8. 4→B	9. 1→B	10. 2→A	11. 1→A	12. 3→B
13. 1→C	14. 2→B	15. 1→B	16. 5→C	17. 1→A	18. 2→C
19. 1→C	20. 3→A	21. 1→B	22. 2→A	23. 1→A	24. 4→C
25. 1→C	26. 2→B	27. 1→B	28. 3→C	29. 1→A	30. 2→C
31. 1→C					

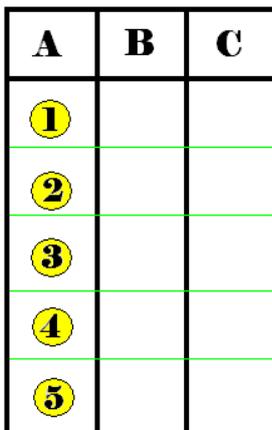


圖 2-1

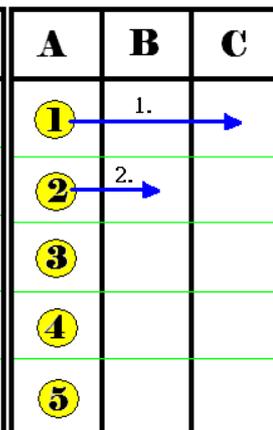


圖 2-2

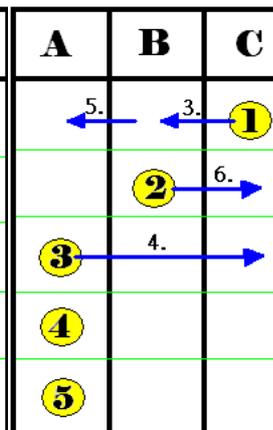


圖 2-3

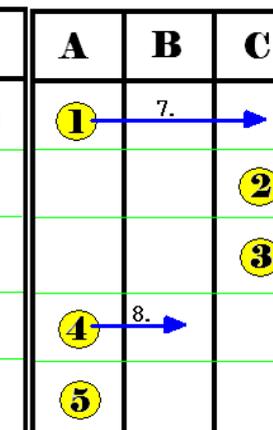


圖 2-4

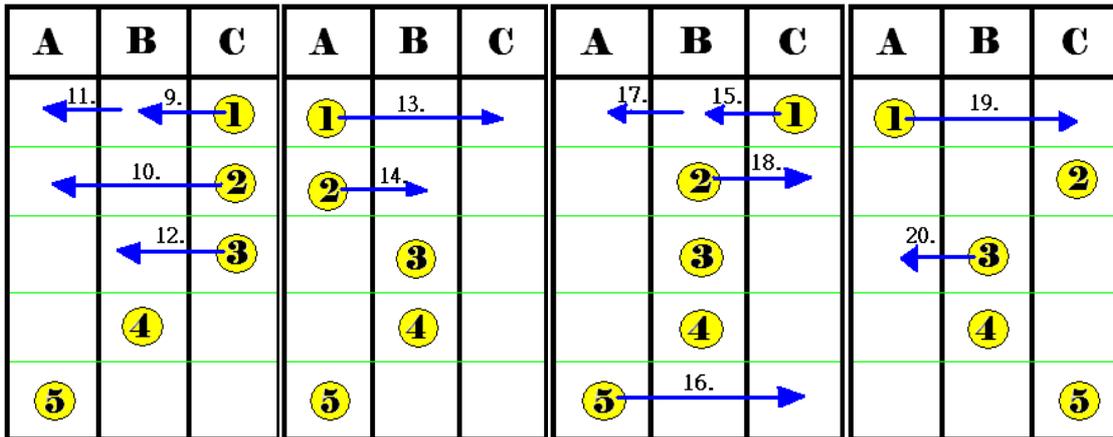


圖 2-5

圖 2-6

圖 2-7

圖 2-8

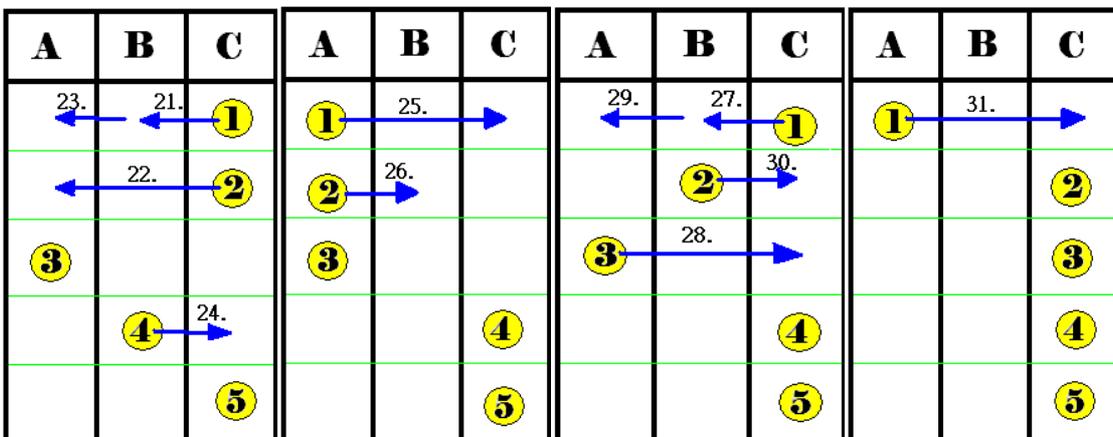


圖 2-9

圖 2-10

圖 2-11

圖 2-12

(一) 當柱數為 3，圈數遞增時，最少步數是多少？

當 $X=3$ 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=3										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
歸納推論出數學式：當 $X=3$ 時，則 $T=2^Y-1$										

(二) 當柱數為 4，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-2 $X=4$ ， $Y=7$ 時， $T=25$ 的記錄方式

1. 1→D	2. 2→C	3. 3→B	4. 2→B	5. 1→B	6. 4→C
7. 5→D	8. 4→D	9. 6→C	10. 4→A	11. 5→C	12. 4→C
13. 7→D	14. 4→D	15. 5→A	16. 4→A	17. 6→D	18. 4→C
19. 5→D	20. 4→D	21. 1→A	22. 2→C	23. 3→D	24. 2→D
25. 1→D					

圖 2-13~圖 2-23 X=4, Y=7 時, T=25 的走法

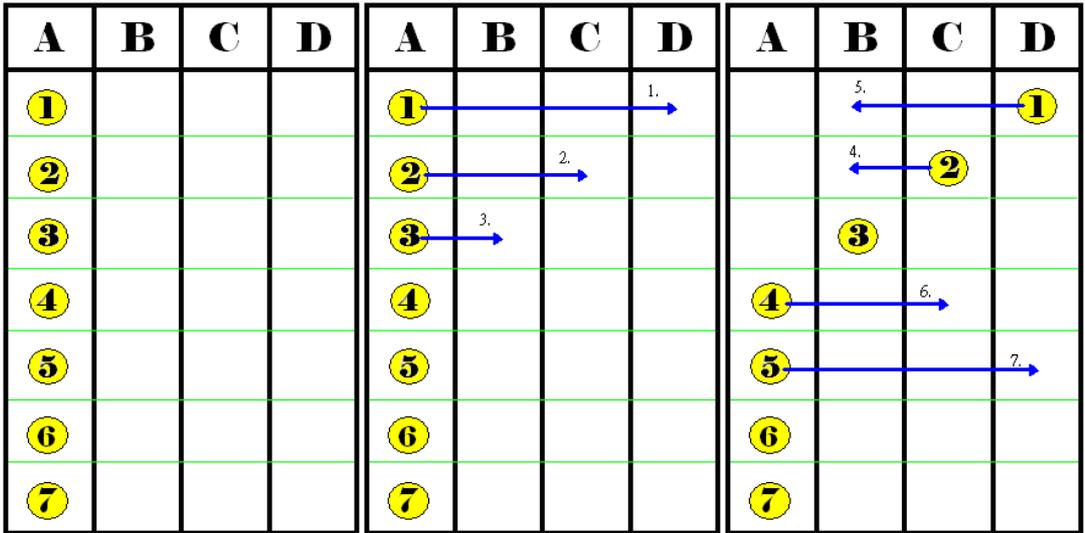


圖 2-13

圖 2-14

圖 2-15

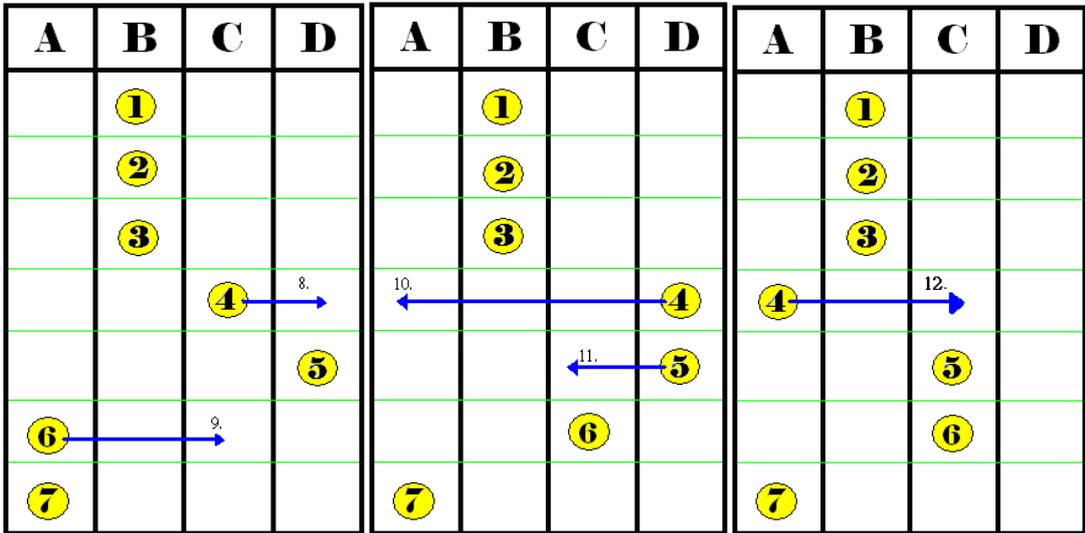


圖 2-16

圖 2-17

圖 2-18

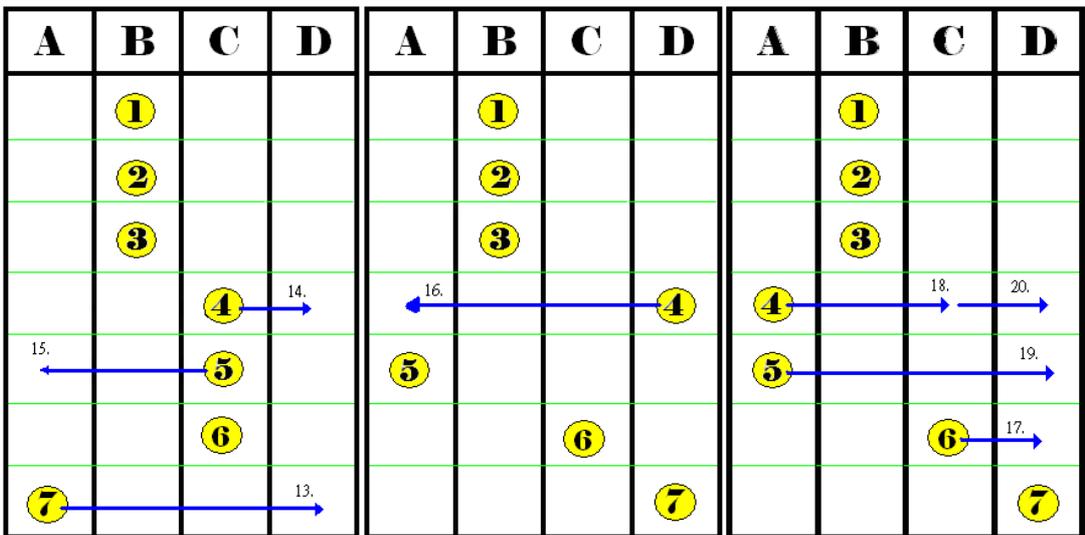


圖 2-19

圖 2-20

圖 2-21

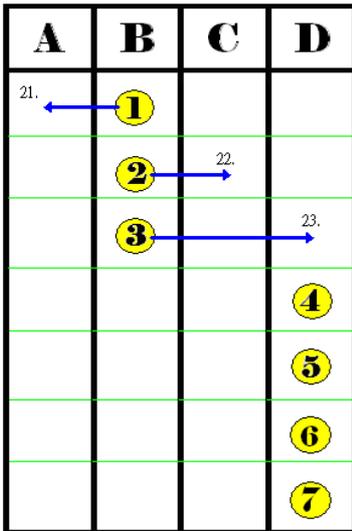


圖 2-22

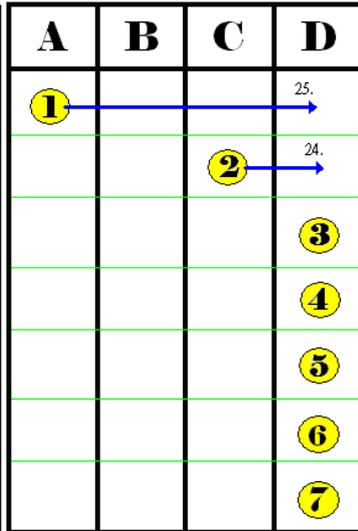


圖 2-23

當 X=4 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=4										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	65	81	97	113	129	161	193	225	257	289
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	321	385	449	513	577	641	705	769	897	1025

歸納推論出數學式：當 X=4, $1 \leq Y \leq 3$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
 當 X=4, $3 \leq Y \leq 6$ 時，數學式為 $T=4 \times (Y-2)+1$
 當 X=4, $6 \leq Y \leq 10$ 時，數學式為 $T=4 \times (2Y-8)+1$
 當 X=4, $10 \leq Y \leq 15$ 時，數學式為 $T=4 \times (4Y-28)+1$
 當 X=4, $15 \leq Y \leq 21$ 時，數學式為 $T=4 \times (8Y-88)+1$
 當 X=4, $21 \leq Y \leq 28$ 時，數學式為 $T=4 \times (16Y-256)+1$
 當 X=4, $28 \leq Y \leq 36$ 時，數學式為 $T=4 \times (32Y-704)+1$
 依序類推。
 $Y=(1+2+3+\dots+s)+m$
 $T=2^s(m+s-1)+1$

(三) 當柱數為 5，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-3 X=5，Y=8 時，T=23 的記錄方式

1. 1→E	2. 2→D	3. 3→C	4. 4→B	5. 3→B	6. 2→B
7. 1→B	8. 5→E	9. 6→D	10. 7→C	11. 5→D	12. 8→E
13. 7→E	14. 5→C	15. 6→E	16. 5→E	17. 1→A	18. 2→C
19. 3→D	20. 4→E	21. 3→E	22. 2→E	23. 1→E	

圖 2-24~圖 2-28 X=5，Y=8 時，T=23 的走法

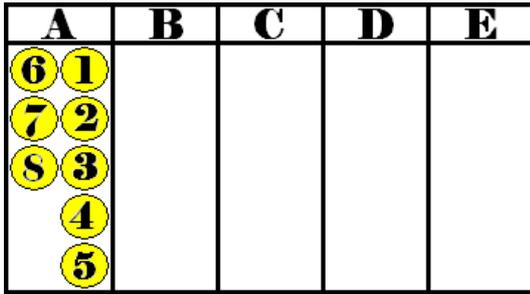


圖 2-24

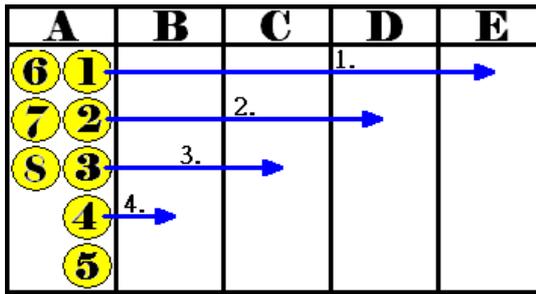


圖 2-25

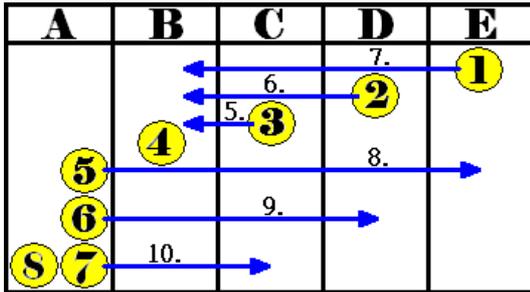


圖 2-26

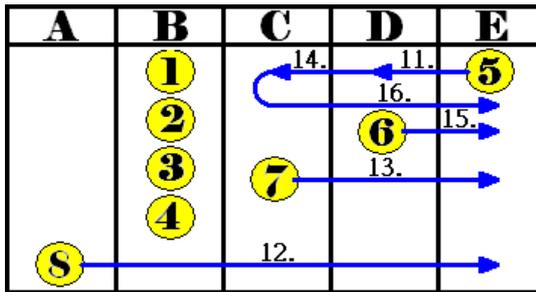


圖 2-27

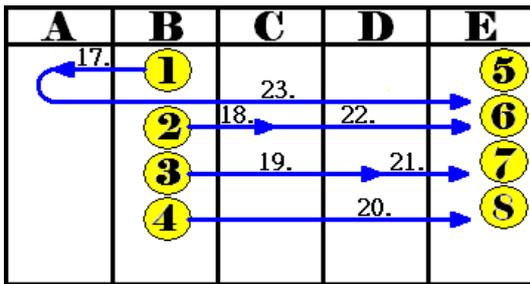


圖 2-28

當 X=5 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=5										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	127	143	159	175	191	207	223	239	255	271

歸納推論出數學式：當 X=5， $1 \leq Y \leq 4$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
 當 X=5， $4 \leq Y \leq 10$ 時，數學式為 $T=4Y-9$
 依序類推

(四) 當柱數為 6，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-4 X=6，Y=8 時，T=21 的記錄方式

1. 1→F	2. 2→E	3. 3→D	4. 4→C	5. 5→B	6. 3→C
7. 2→C	8. 1→C	9. 6→D	10. 7→E	11. 8→F	12. 7→F
13. 6→F	14. 5→F	15. 1→A	16. 2→B	17. 3→D	18. 4→F
19. 3→F	20. 2→F	21. 1→F			

圖 2-29~圖 2-35 X=6，Y=8 時，T=21 的走法

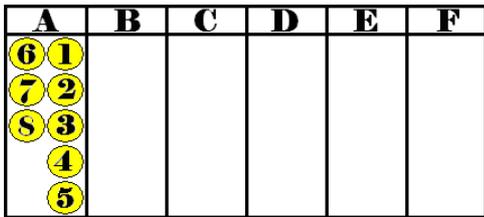


圖 2-29

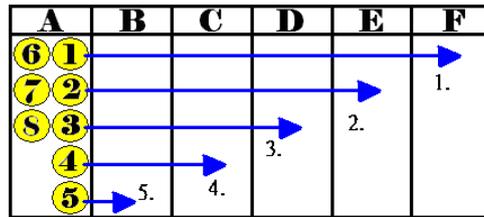


圖 2-30

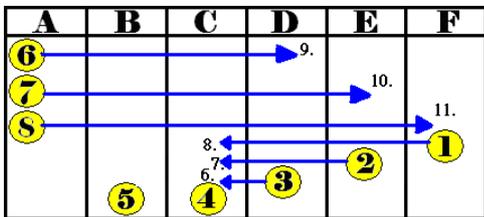


圖 2-31

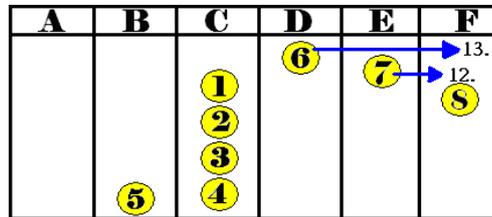


圖 2-32

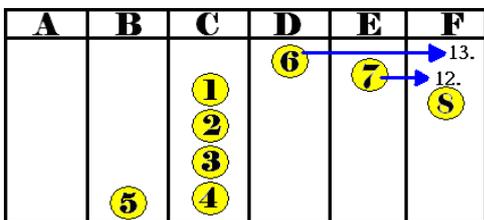


圖 2-33

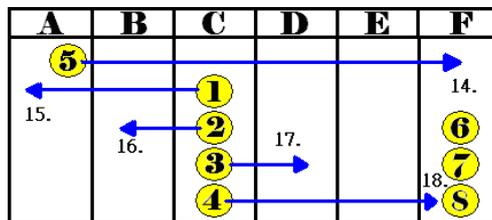


圖 2-34

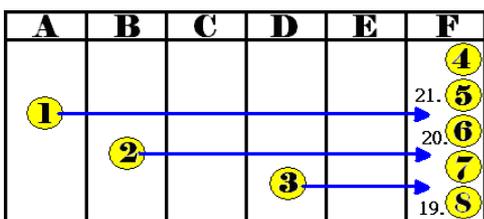


圖 2-35

當 X=6 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=6										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	9	13	17	21	25	29
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	33	37	41	45	49	57	65	73	81	89
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	97	105	113	121	129	137	145	153	161	169

歸納推論出數學式：當 $X=6, 1 \leq Y \leq 5$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
 當 $X=6, 5 \leq Y \leq 15$ 時，數學式為 $T=4Y-11$
 依序類推

(五) 當柱數為 7，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-5 $X=7, Y=9$ 時， $T=23$ 的記錄方式

1. 1→G	2. 2→F	3. 3→E	4. 4→D	5. 5→C	6. 6→B
7. 3→D	8. 2→D	9. 1→D	10. 7→E	11. 8→F	12. 9→G
13. 8→G	14. 7→G	15. 6→G	16. 5→G	17. 1→A	18. 2→B
19. 3→C	20. 4→G	21. 3→G	22. 2→G	23. 1→G	

圖 2-36~圖 2-41 $X=7, Y=9$ 時， $T=23$ 的走法

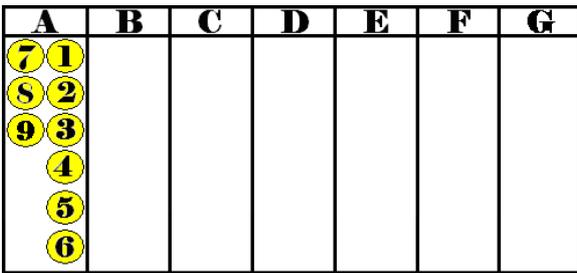


圖 2-36

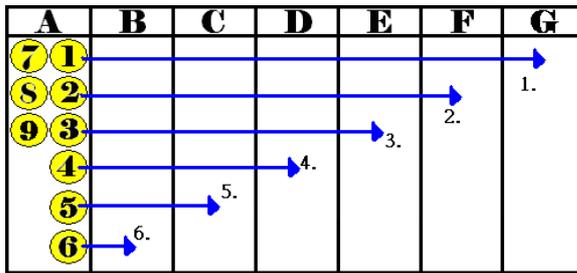


圖 2-37

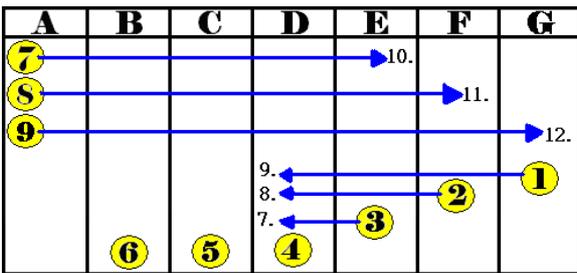


圖 2-38

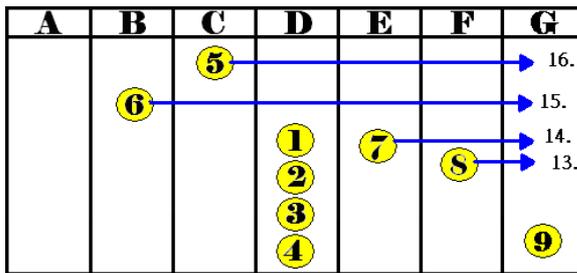


圖 2-39

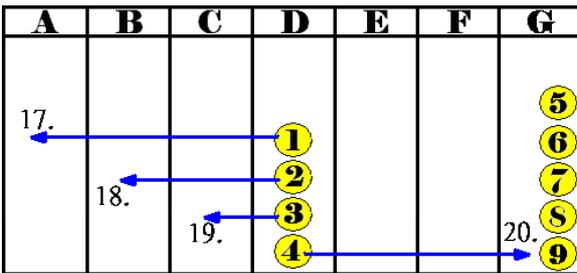


圖 2-40

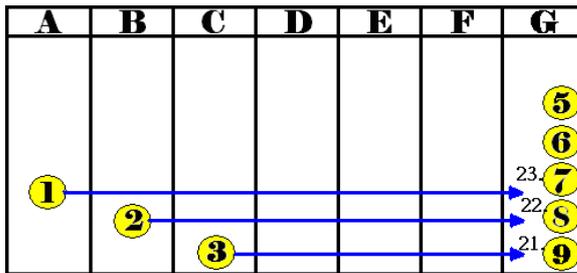


圖 2-41

當 $X=7$ 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=7										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	9	11	15	19	23	27
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	71	79	87	95	103	111	119	127	135	143

歸納推論出數學式：當 $X=7, 1 \leq Y \leq 6$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
 當 $X=7, 6 \leq Y \leq 21$ 時，數學式為 $T=4Y-13$
 依序類推

(六) 當柱數為 8，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-6 當 $X=8, Y=10$ 時， $T=25$ 的記錄方式

1. 1→H	2. 2→G	3. 3→F	4. 4→E	5. 5→D	6. 6→C
7. 7→B	8. 3→E	9. 2→E	10. 1→E	11. 8→F	12. 9→G
13. 10→H	14. 9→H	15. 8→H	16. 7→H	17. 6→H	18. 5→H
19. 1→A	20. 2→B	21. 3→C	22. 4→H	23. 3→H	24. 2→H
25. 1→H					

圖 2-42~圖 2-47 $X=8, Y=10$ 時， $T=25$ 的走法

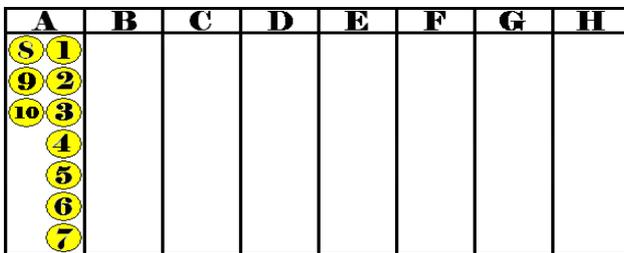


圖 2-42

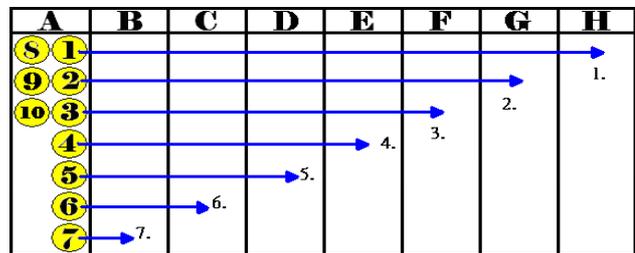


圖 2-43

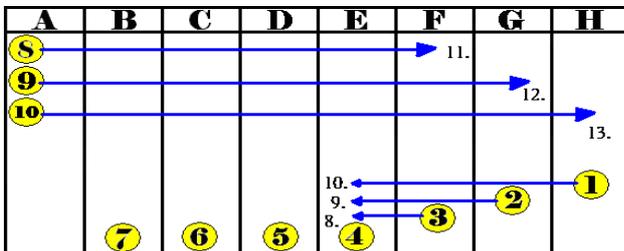


圖 2-44

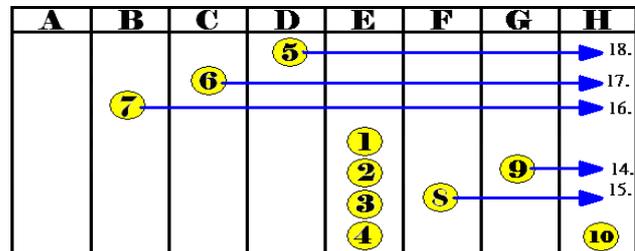


圖 2-45

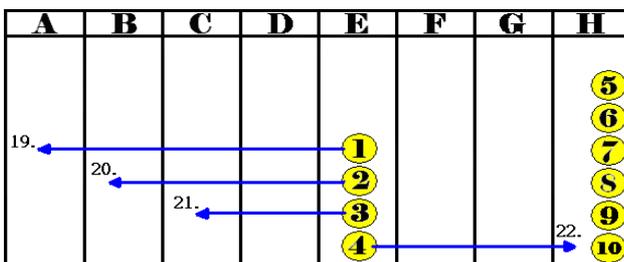


圖 2-46

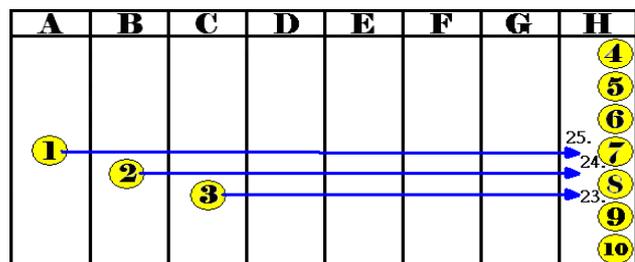


圖 2-47

當 $X=8$ 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=8										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	9	11	13	17	21	25
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65

Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	69	73	77	81	85	89	93	97	105	113

歸納推論出數學式：當 $X=8, 1 \leq Y \leq 7$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=8, 7 \leq Y \leq 28$ 時，數學式為 $T=4Y-15$
..... 依序類推

(七) 當柱數為 9，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-7 當 $X=9, Y=11$ 時， $T=27$ 的記錄方式

1. 1→I	2. 2→H	3. 3→G	4. 4→F	5. 5→E	6. 6→D
7. 7→C	8. 8→B	9. 3→F	10. 2→F	11. 1→F	12. 9→G
13. 10→H	14. 11→I	15. 10→I	16. 9→I	17. 8→I	18. 7→I
19. 6→I	20. 5→I	21. 1→A	22. 2→C	23. 3→D	24. 4→I
25. 3→I	26. 2→I	27. 1→I			

圖 2-48~圖 2-52 $X=9, Y=11$ 時， $T=27$ 的走法

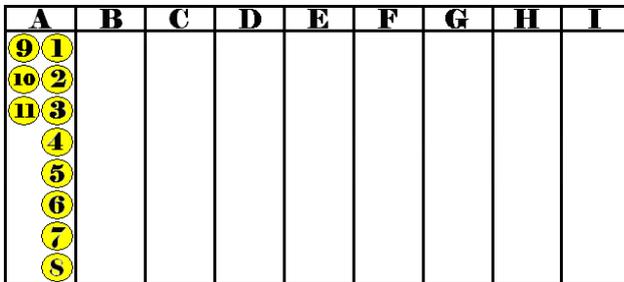


圖 2-48

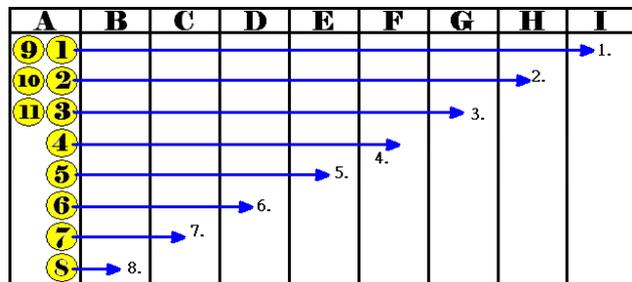


圖 2-49

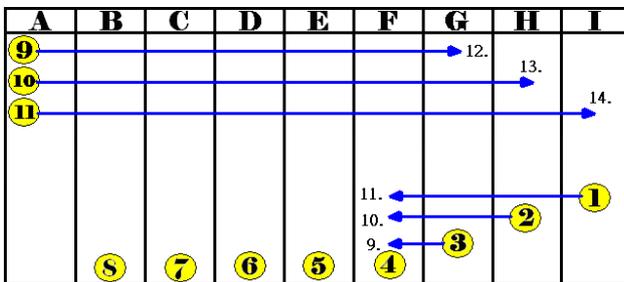


圖 2-50

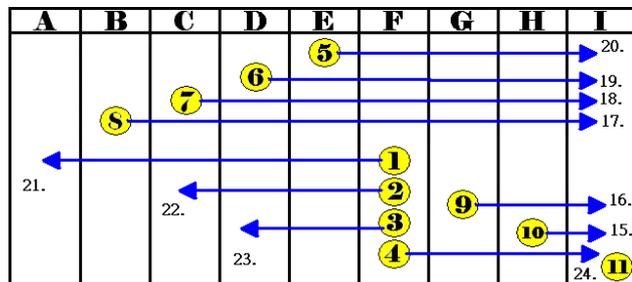


圖 2-51

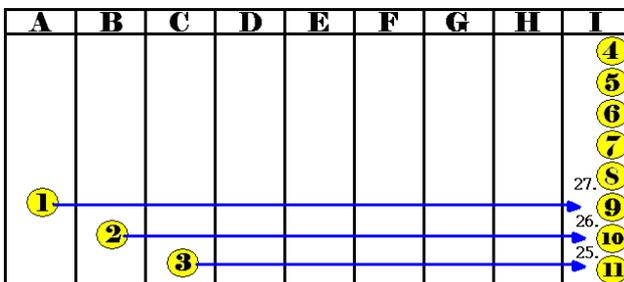


圖 2-52

當 $X=9$ 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=9										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	9	11	13	15	19	23
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

T	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103

歸納推論出數學式：當 $X=9, 1 \leq Y \leq 8$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=9, 8 \leq Y \leq 36$ 時，數學式為 $T=4Y-17$
..... 依序類推

(八) 當柱數為 10，圈數遞增時，最少步數是多少？

表 2-8 X=10, Y=12 時, T=29 的記錄方式

1. 1→J	2. 2→I	3. 3→H	4. 4→G	5. 5→F	6. 6→E
7. 7→D	8. 8→C	9. 9→B	10. 3→G	11. 2→G	12. 1→G
13. 10→H	14. 11→I	15. 12→J	16. 11→J	17. 10→J	18. 9→J
19. 8→J	20. 7→J	21. 6→J	22. 5→J	23. 1→A	24. 2→B
25. 3→C	26. 4→J	27. 3→J	28. 2→J	29. 1→J	

圖 2-53~圖 2-56 X=10, Y=12 時, T=29 的走法

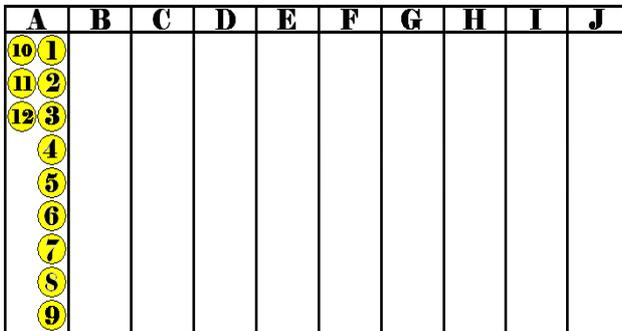


圖 2-53

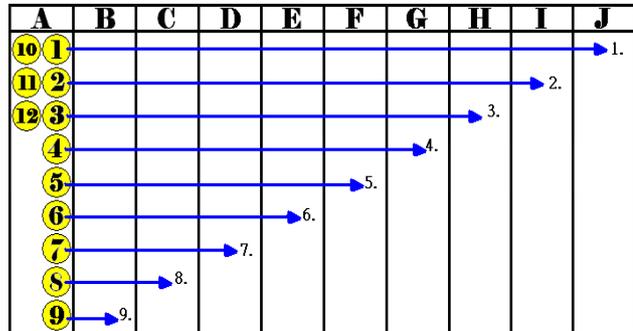


圖 2-54

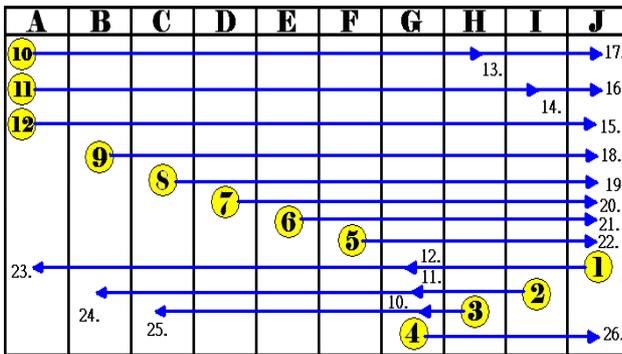


圖 2-55

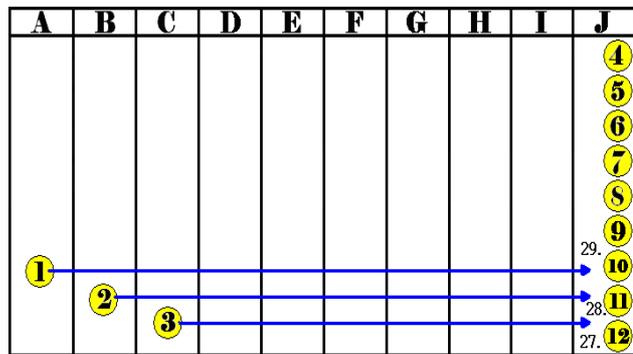


圖 2-56

當 X=10 時，我們將嘗試的結果統整如下：

X=10										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	9	11	13	15	17	21
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101

歸納推論出數學式：當 $X=10, 2 \leq Y \leq 9$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
 當 $X=10, 9 \leq Y \leq 45$ 時，數學式為 $T=4Y-19$
 依序類推

基本型小結：

表 2-9 基本型 $X=3\sim 10$ 時，最少步數的統計整合

X \ Y	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	7	5	5	5	5	5	5	5
4	15	9	7	7	7	7	7	7
5	31	13	11	9	9	9	9	9
6	63	17	15	13	11	11	11	11
7	127	25	19	17	15	13	13	13
8	255	33	23	21	19	17	15	15
9	511	41	27	25	23	21	19	17
10	1023	49	31	29	27	25	23	21
11		65	39	33	31	29	27	25
12		81	47	37	35	33	31	29
13		97	55	41	39	37	35	33
14		113	63	45	43	41	39	37
15		129	71	49	47	45	43	41
16		161	79	57	51	49	47	45
17		193	87	65	55	53	51	49
18		225	95	73	59	57	55	53
19		257	103	81	63	61	59	57
20		289	111	89	67	65	63	61
21		321	127	97	71	69	67	65
22		385	143	105	79	73	71	69
23		449	159	113	87	77	75	73
24		513	175	121	95	81	79	77
25		577	191	129	103	85	83	81
26		641	207	137	111	89	87	85
27		705	223	145	119	93	91	89
28		769	239	153	127	97	95	93
29		897	255	161	135	105	99	97
30		1025	271	169	143	113	103	101

討論歸納：

從統計整合表中，我們發現，三柱二圈與三圈步數相差四步，而四柱出現這種情況時則是在六圈，相差了三圈（如圖 2-57）；五柱出現這種情況是在十圈，與上個相差四圈（如圖 2-58）；六柱出現這種情況是在十五圈，與上個相差五圈（如圖 2-59）；依序可類推出各柱的規則性(如圖 2-57~圖 2-59；整合表以顏色區塊表示)。

2	3	3
3	7	5
4	15	9
5	31	13
6	63	17
7	127	25

圖 2-57

6	17	15
7	25	19
8	33	23
9	41	27
10	49	31
11	65	39

圖 2-58

10	31	29
11	39	33
12	47	37
13	55	41
14	63	45
15	79	49
16	87	57

圖 2-59

研究二：百變河內塔~河內塔變身

(一)-1.上樓梯型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。（如圖 2-2）

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3.X=柱數，Y=圈數，T=最少步數，且 X、Y、T ∈ N。

4.將所有擺在柱 A 的圈圈移成以下排列方式。

（從左到右）：1 個→2 個→3 個→4 個.....。（如圖 1-2）

以此類推。

表 3-1 X=5，Y=15 時，T=34 的記錄方式

1.1→E	2.2→D	3.3→C	4.4→B	5.3→B	6.2→B
7.1→B	8.5→C	9.6→D	10.7→E	11.6→E	12.5→E
13.1→A	14.2→C	15.3→D	16.4→E	17.3→E	18.2→E
19.1→E	20.8→B	21.9→C	22.10→D	23.9→D	24.8→D
25.1→D	26.11→C	27.12→B	28.11→B	29.13→C	30.11→A
31.12→C	32.11→C	33.14→B	34.2→B		

圖 3-1~圖 3-4 X=5，Y=15 時，T=34 的走法

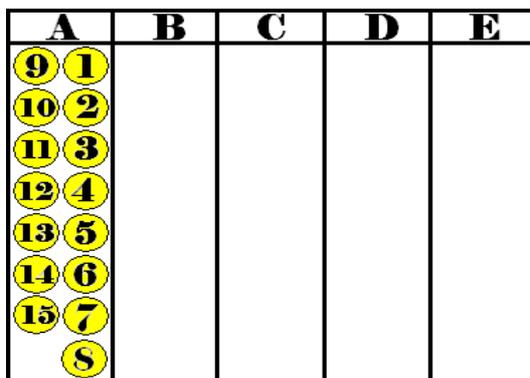


圖 3-1

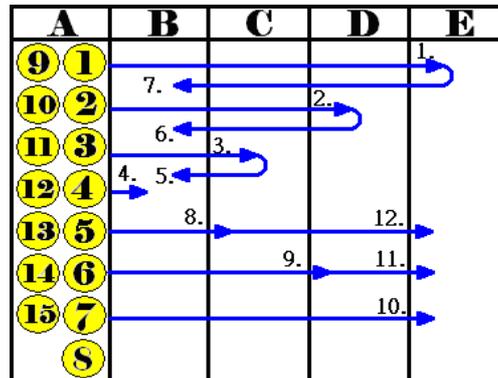


圖 3-2

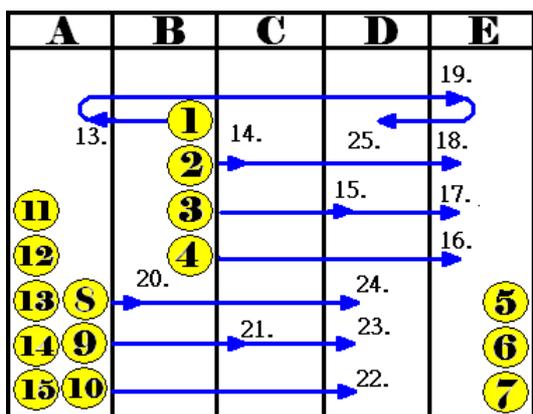


圖 3-3

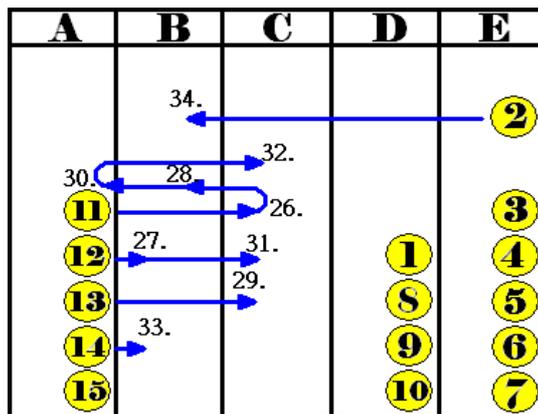


圖 3-4

討論分析：當上樓梯型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試結果統整如下：

X	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	6	10	15	21	28	36	45	55
T	17	22	34	48	64	82	102	124

歸納推論出上樓梯型數學式： $Y = \frac{1}{2} X (X+1)$
當 $X \geq 4$ 時， $T = X^2 + 3X - 6$

(一)-2.下樓梯型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3.X=柱數，Y=圈數，T=最少步數，且 X、Y、T ∈ N。

4.將所有擺在柱 A 的圈圈移成以下排列方式。

(從左到右)：4 個→3 個→2 個→1 個.....。(如圖 1-3)。以此類推。

表 3-2 X=6，Y=21 時，T=25 的記錄方式

1.1→F	2.2→E	3.3→D	4.4→C	5.5→B	6.4→B
7.3→B	8.2→B	9.1→B	10.6→F	11.7→E	12.8→D
13.9→C	14.8→C	15.7→C	16.6→C	17.10→F	18.11→E
19.12→D	20.11→D	21.10→D	22.13→F	23.14→E	24.13→E
25.15→F					

圖 3-5~圖 3-9 X=6，Y=21 時，T=25 的走法

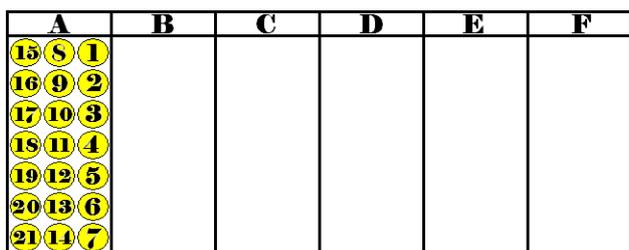


圖 3-5

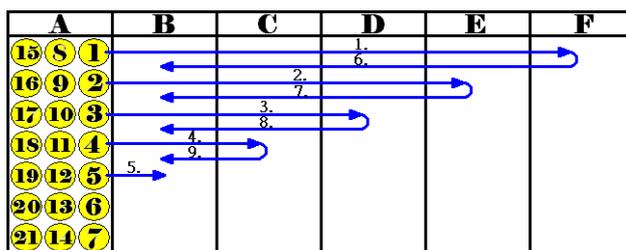


圖 3-6

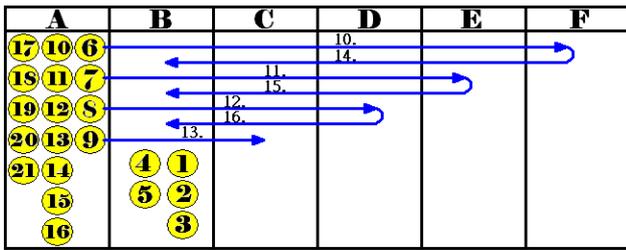


圖 3-7

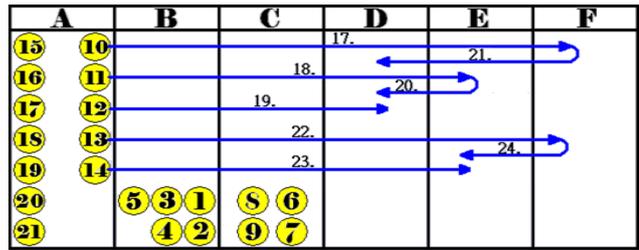


圖 3-8

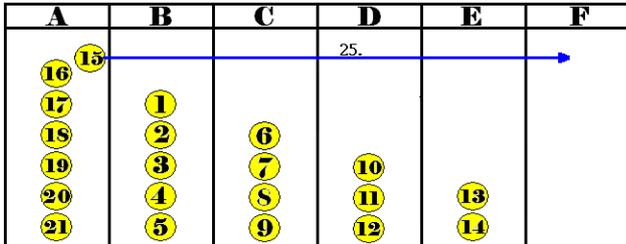


圖 3-9

討論分析：當下樓梯型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試結果統整如下：

X	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	6	10	15	21	28	36	45	55
T	4	9	16	25	36	49	64	81

歸納推論出下樓梯型數學式： $Y = \frac{1}{2} X(X+1)$
 $T = (X-1)^2$

(二)-1.V 型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3.X=柱數，Y=圈數，T=最少步數，且 X、Y、T∈N。

4.將所有擺在最左邊的圓圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：2 個→1 個→2 個

五柱：3 個→2 個→1 個→2 個→3 個(如圖 1-4)。依此類推。

表 3-3 X=7，Y=19 時，T=24 的記錄方式

1.1→B	2.2→C	3.3→D	4.4→G	5.3→G	6.2→G
7.1→G	8.5→B	9.6→C	10.7→F	11.6→F	12.5→F
13.8→E	14.9→D	15.10→B	16.9→B	17.8→B	18.11→D
19.12→E	20.11→E	21.13→D	22.14→C	23.13→C	24.15→D

圖 3-10~圖 3-13 X=7，Y=19 時，T=24 的走法

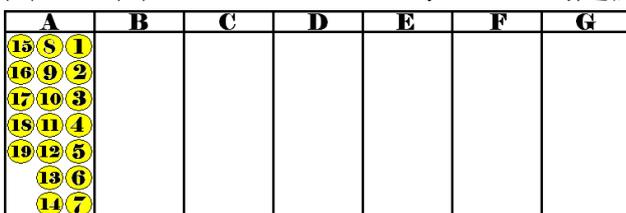


圖 3-10

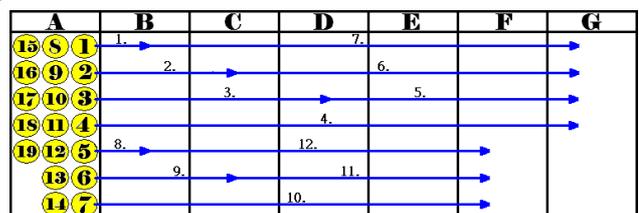


圖 3-11

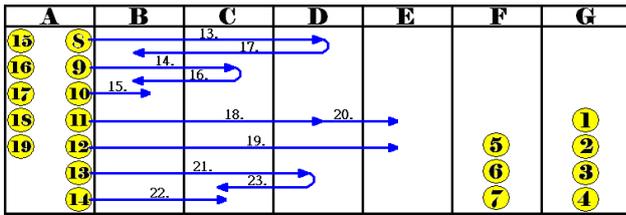


圖 3-12

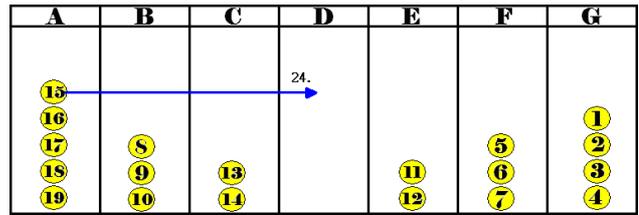


圖 3-13

討論分析：當 V 型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試的結果統整如下：

X	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Y	5	11	19	29	41	55	71	89	109	131
T	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220

歸納推論出 V 型數學式： $Y = \frac{1}{4}(X^2 - 1) + X$
 $T = \frac{1}{2}(X^2 - 1)$

(二)-2.倒 V 型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3.X=柱數，Y=圈數，T=最少步數，且 X、Y、T∈N。

4.將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：1 個→2 個→1 個

五柱：1 個→2 個→3 個→2 個→1 個(如圖 1-5)

依此類推。

表 3-4 X=7，Y=16 時，T=24 的記錄方式

1.1→G	2.2→F	3.3→E	4.4→D	5.3→D	6.2→D
7.1→D	8.5→G	9.6→F	10.7→E	11.6→E	12.5→E
13.8→G	14.9→F	15.10→C	16.9→C	17.8→C	18.11→G
19.12→F	20.11→F	21.13→G	22.14→B	23.13→B	24.15→G

圖 3-14~圖 3-16 X=7，Y=16 時，T=24 的走法

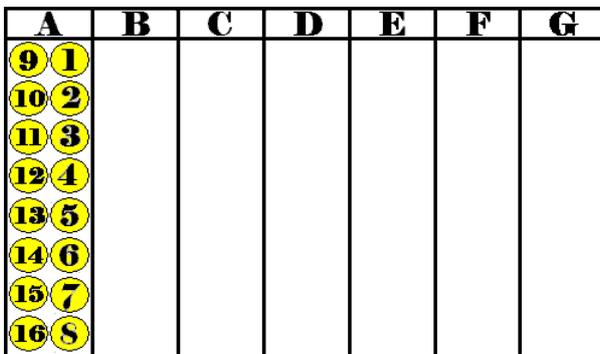


圖 3-14

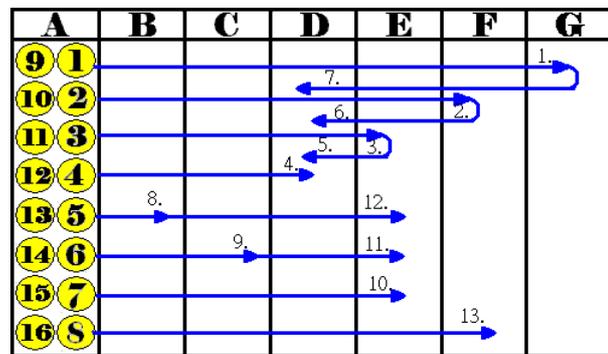


圖 3-15

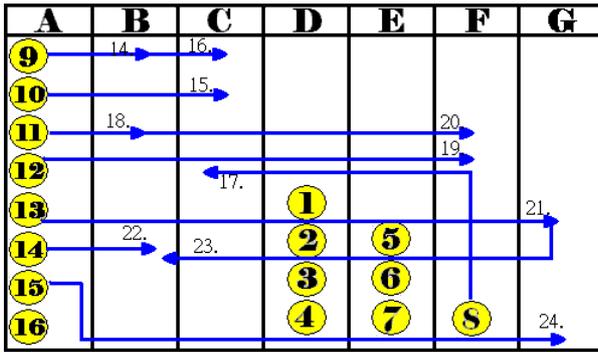


圖 3-16

討論分析：當倒 V 型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試的結果統整如下：

X	3	5	7	9	11	13	15
Y	4	9	16	25	36	49	64
T	4	12	24	40	60	84	112

$$\text{歸納推論出倒 V 型數學式：} Y = \frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$T = \frac{1}{2}(X^2 - 1)$$

(三)-1.凹一型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3.X=柱數，Y=圈數，T=最少步數，且 X、Y、T∈N。

4.將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：6 個→3 個→6 個

六柱：6 個→6 個→3 個→3 個→6 個→6 個(如圖 1-6)。依此類推。

表 3-5 X=15，Y=75 時，T=127 的記錄方式

1. 1→B	2. 2→C	3. 3→D	4. 4→E	5. 5→F	6. 6→G
7. 7→H	8. 8→O	9. 7→O	10. 6→O	11. 5→O	12. 4→O
13. 3→O	14. 2→O	15. 1→O	16. 9→B	17. 10→C	18. 11→D
19. 12→E	20. 13→F	21. 14→G	22. 15→N	23. 14→N	24. 13→N
25. 12→N	26. 11→N	27. 10→N	28. 9→N	29. 16→B	30. 17→C
31. 18→D	32. 19→E	33. 20→F	34. 21→M	35. 20→M	36. 19→M
37. 18→M	38. 17→M	39. 16→M	40. 22→B	41. 23→C	42. 24→D
43. 25→E	44. 26→F	45. 27→L	46. 26→L	47. 25→L	48. 24→L
49. 23→L	50. 22→L	51. 28→B	52. 29→C	53. 30→D	54. 31→E
55. 32→F	56. 33→K	57. 32→K	58. 31→K	59. 30→K	60. 29→K
61. 28→K	62. 34→F	63. 35→G	64. 36→H	65. 37→I	66. 38→J
67. 39→B	68. 38→B	69. 37→B	70. 36→B	71. 35→B	72. 34→B
73. 40→F	74. 41→G	75. 42→H	76. 43→I	77. 44→J	78. 45→C
79. 44→C	80. 43→C	81. 42→C	82. 41→C	83. 40→C	84. 46→F

85. 47→G	86. 48→H	87. 49→I	88. 50→J	89. 51→D	90. 50→D
91. 49→D	92. 48→D	93. 47→D	94. 46→D	95. 52→F	96. 53→G
97. 54→H	98. 55→I	99. 56→J	100. 57→E	101. 56→E	102. 55→E
103. 54→E	104. 53→E	105. 52→E	106. 58→F	107. 59→G	108. 60→J
109. 59→J	110. 58→J	111. 61→F	112. 62→G	113. 63→I	114. 62→I
115. 61→I	116. 64→F	117. 65→G	118. 66→H	119. 65→H	120. 64→H
121. 67→F	122. 68→G	123. 67→G	124. 69→F	125. 1→F	126. 2→G
127. 9→F					

圖 3-17~圖 3-28 X=15, Y=75 時, T=127 的走法

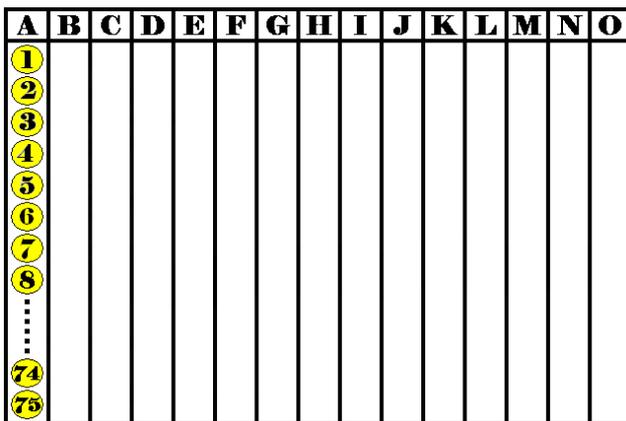


圖 3-17

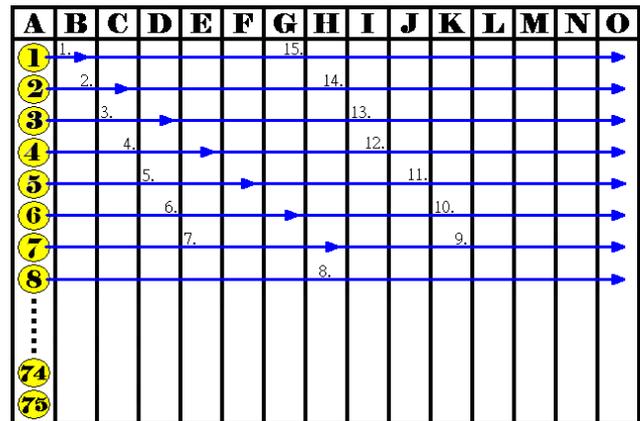


圖 3-18

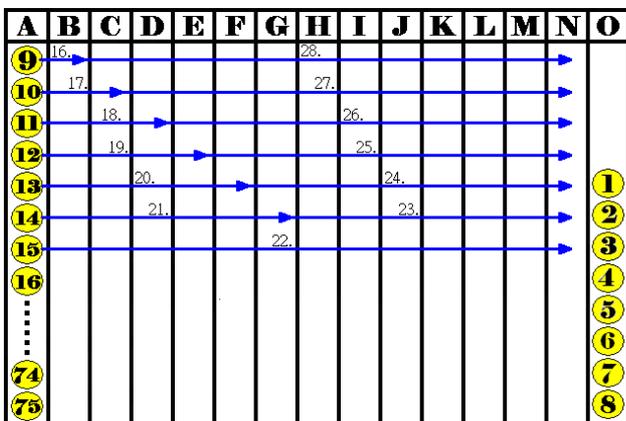


圖 3-19

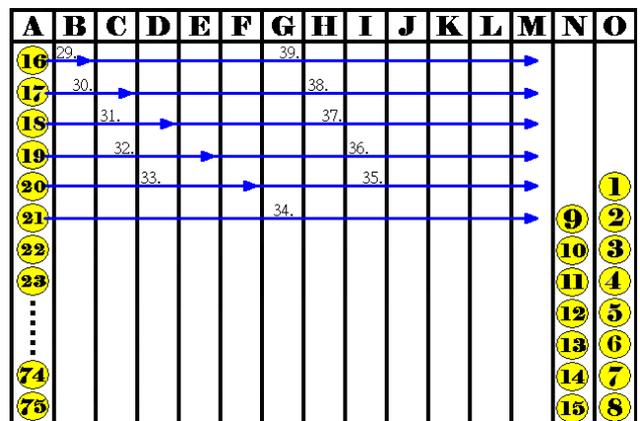


圖 3-20

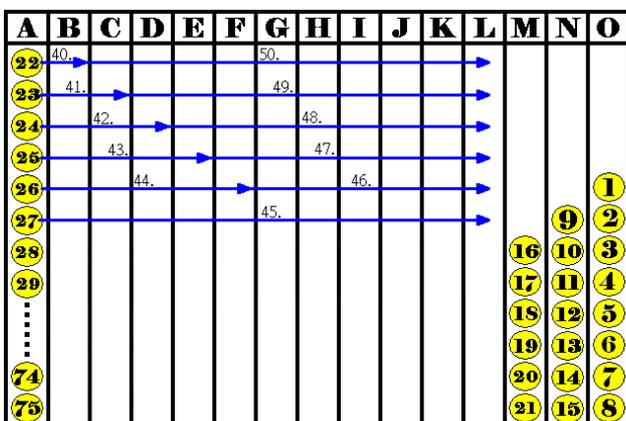


圖 3-21

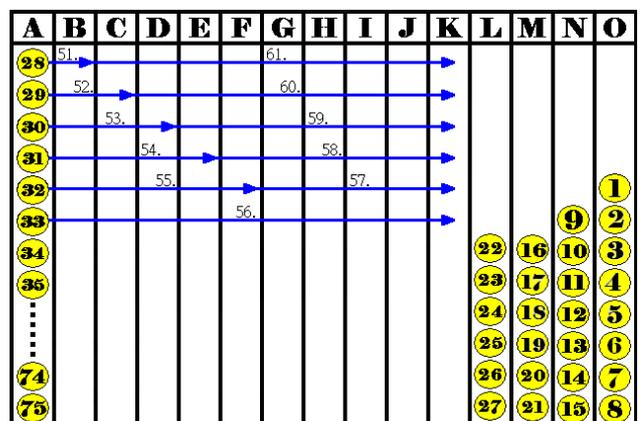


圖 3-22

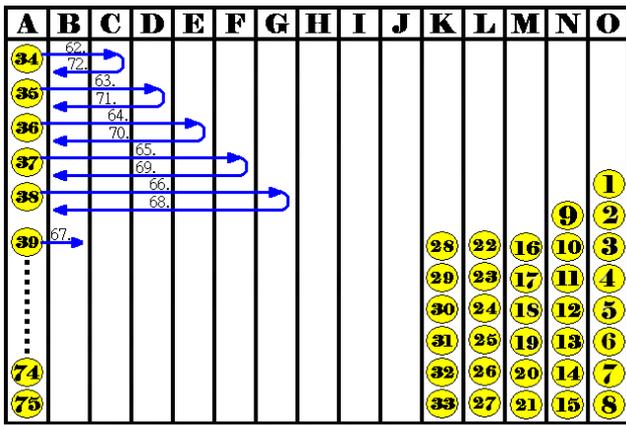


圖 3-23

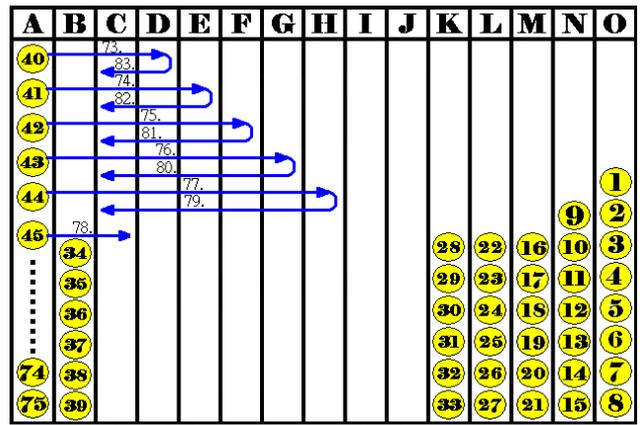


圖 3-24

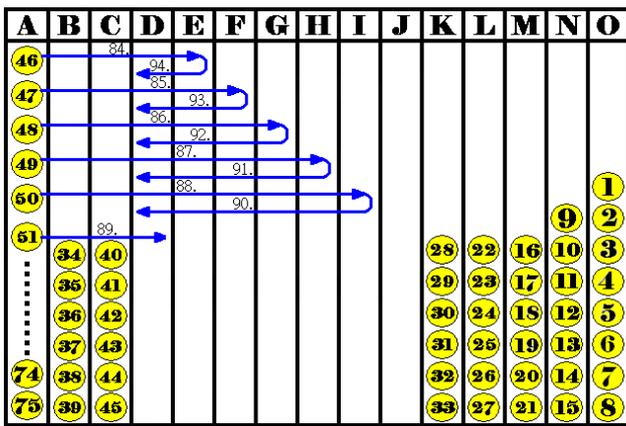


圖 3-25

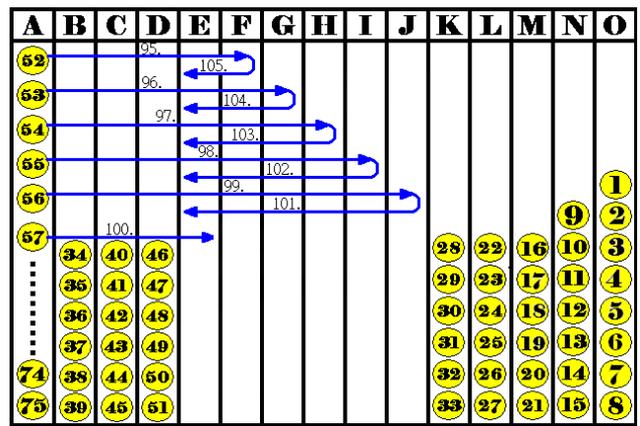


圖 3-26

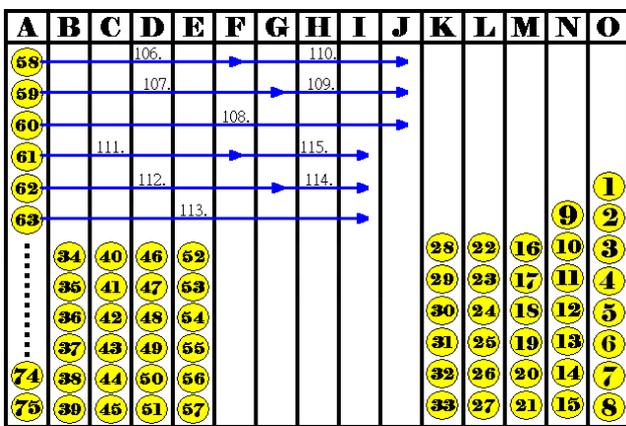


圖 3-27

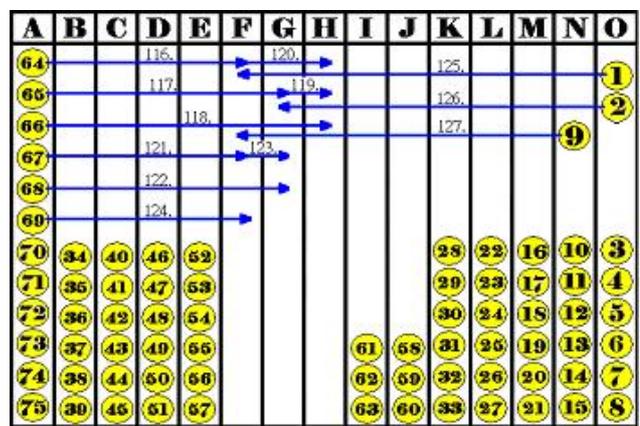


圖 3-28

討論分析：當凹一型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試的結果統整如下：

X	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Y	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
T	259	64	79	101	127	154	181	208	235	262

歸納推論出凹一型數學式：Y=5X

當 X ≥ 15 時，T=9X-8

(三)-2.凹二型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3. X =柱數， Y =圈數， T =最少步數，且 $X、Y、T \in \mathbb{N}$ 。

4. 將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：6 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 6 個

四柱：6 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 6 個

五柱：6 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 6 個

六柱：6 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 3 個 \rightarrow 6 個(如圖 1-7)依此類推。

表 3-6 $X=8, Y=30$ 時， $T=44$ 的記錄方式

1.1 \rightarrow B	2.2 \rightarrow C	3.3 \rightarrow D	4.4 \rightarrow E	5.5 \rightarrow F	6.6 \rightarrow G
7.7 \rightarrow H	8.6 \rightarrow H	9.5 \rightarrow H	10.4 \rightarrow H	11.3 \rightarrow H	12.2 \rightarrow H
13.1 \rightarrow H	14.8 \rightarrow B	15.9 \rightarrow C	16.10 \rightarrow D	17.11 \rightarrow E	18.12 \rightarrow G
19.11 \rightarrow G	20.10 \rightarrow G	21.9 \rightarrow G	22.8 \rightarrow G	23.13 \rightarrow D	24.14 \rightarrow E
25.15 \rightarrow F	26.14 \rightarrow F	27.13 \rightarrow F	28.16 \rightarrow C	29.17 \rightarrow D	30.18 \rightarrow E
31.17 \rightarrow E	32.16 \rightarrow E	33.19 \rightarrow B	34.20 \rightarrow C	35.21 \rightarrow D	36.20 \rightarrow D
37.19 \rightarrow D	38.22 \rightarrow B	39.23 \rightarrow C	40.22 \rightarrow C	41.24 \rightarrow B	42.8 \rightarrow B
43.9 \rightarrow C	44.1 \rightarrow B				

圖 3-29~圖 3-33 $X=8, Y=30$ 時， $T=44$ 的走法

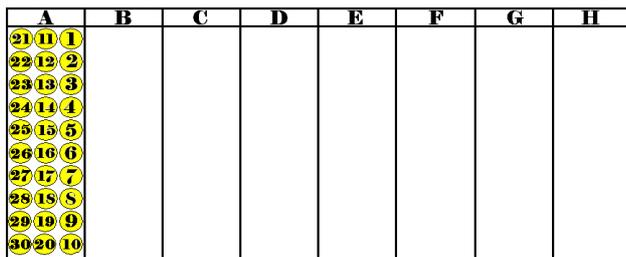


圖 3-29

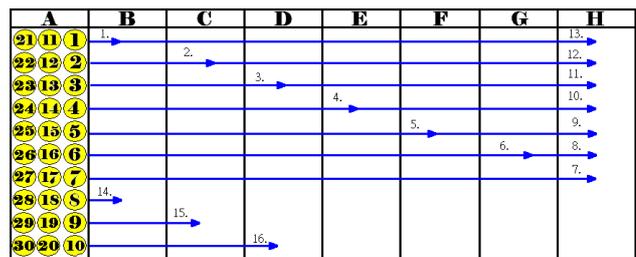


圖 3-30

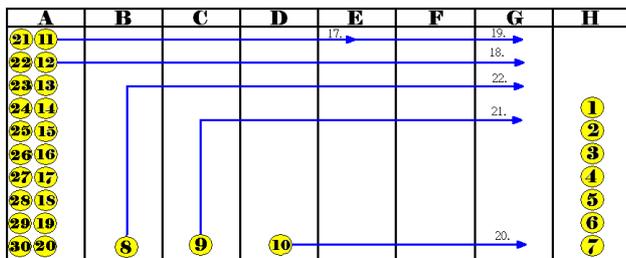


圖 3-31

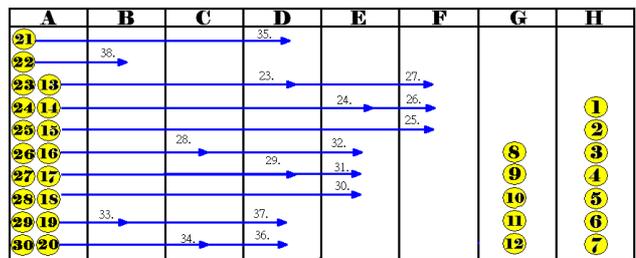


圖 3-32

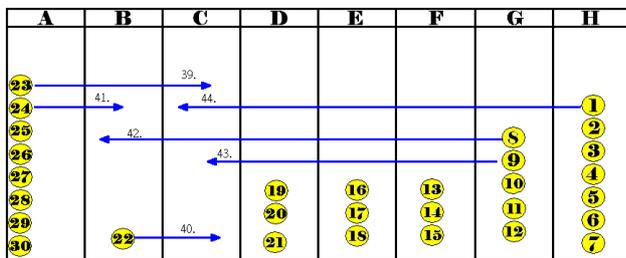


圖 3-33

討論分析：當凹二型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們嘗試的結果統整如下：

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57

T	259	43	38	39	42	44	49	54	59	64	69	74	79	84	89
歸納推論出凹二型數學式： $Y=3(X+2)$															
當 $X \geq 8$ 時， $T=5X+4$															

(四)-1.凸一型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3. X =柱數， Y =圈數， T =最少步數，且 $X、Y、T \in \mathbb{N}$ 。

4.將所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：3 個→6 個→3 個

六柱：3 個→3 個→6 個→6 個→3 個→3 個(如圖 1-8)。依此類推。

表 3-7 $X=9, Y=36$ 時， $T=61$ 的記錄方式

1. 1→I	2. 2→H	3. 3→G	4. 4→F	5. 5→E	6. 6→D
7. 5→D	8. 4→D	9. 3→D	10. 2→D	11. 1→D	12. 7→I
13. 8→H	14. 9→G	15. 10→F	16. 11→C	17. 12→E	18. 11→E
19. 10→E	20. 9→E	21. 8→E	22. 7→E	23. 13→I	24. 14→H
25. 15→G	26. 16→C	27. 17→B	28. 18→F	29. 17→F	30. 16→F
31. 15→F	32. 14→F	33. 13→F	34. 19→I	35. 20→H	36. 21→G
37. 22→C	38. 23→B	39. 22→B	40. 21→B	41. 20→B	42. 19→B
43. 24→I	44. 25→H	45. 26→G	46. 27→C	47. 26→C	48. 25→C
49. 24→C	50. 28→I	51. 29→H	52. 30→G	53. 29→G	54. 28→G
55. 31→I	56. 32→H	57. 31→H	58. 33→I	59. 24→I	60. 19→I
61. 20→H					

圖 3-34~圖 3-40 $X=9, Y=36$ 時， $T=61$ 的走法

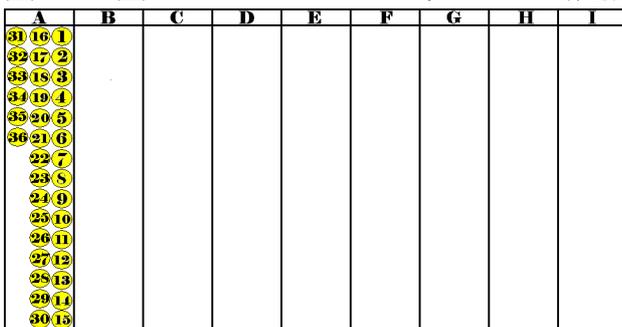


圖 3-34

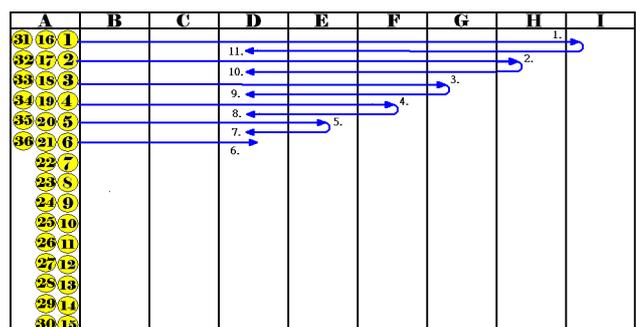


圖 3-35

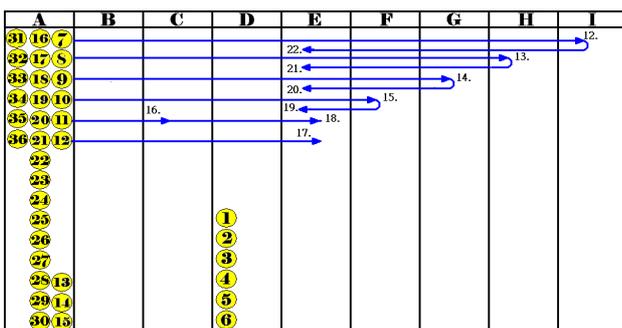


圖 3-36

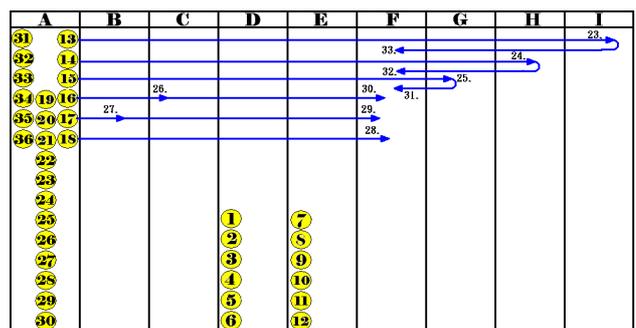


圖 3-37

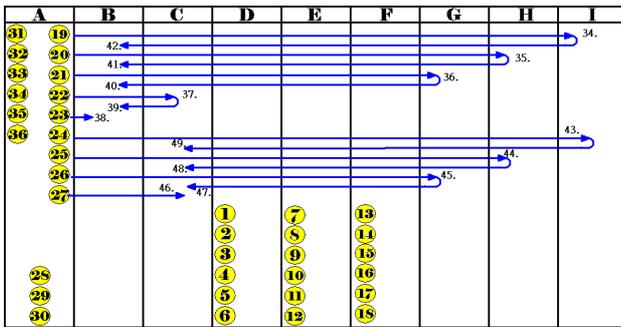


圖 3-38

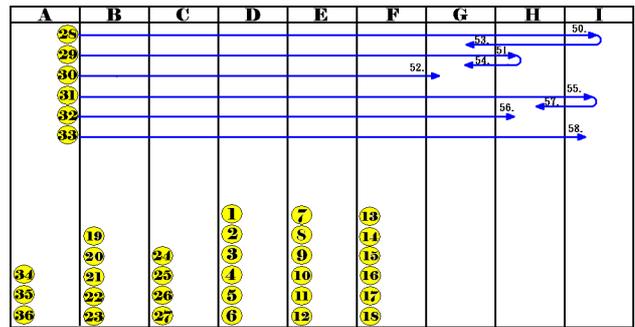


圖 3-39

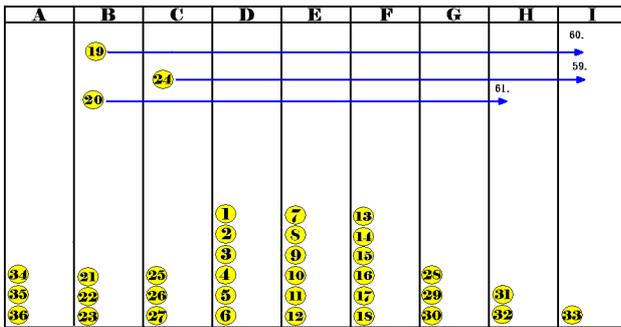


圖 3-40

討論分析：當凸一型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試的結果統整如下：

X	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Y	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
T	136	51	61	82	103	124	145	166	187	208

歸納推論出凸一型數學式： $Y=4X$

當 $X \geq 9$ 時， $T=7X-2$

(四)-2.凸二型

規則：1.圓圈可以跳著移。例：1 號圓圈可以從柱 A 直接移到柱 C。(如圖 2-2)

2.號碼較大的圓圈不能疊在號碼較小的圓圈上面。

3. X =柱數， Y =圈數， T =最少步數，且 X 、 Y 、 $T \in \mathbb{N}$ 。

4.把所有擺在最左邊的圈圈移成以下排列方式。(從左到右)

三柱：3 個→6 個→3 個

四柱：3 個→6 個→6 個→3 個

五柱：3 個→6 個→6 個→6 個→3 個

六柱：3 個→6 個→6 個→6 個→6 個→3 個(如圖 1-9)。依此類推。

表 3-8 $X=13$ ， $Y=72$ 時， $T=138$ 的記錄方式

1.1→F	2.2→G	3.3→H	4.4→I	5.5→J	6.6→K
7.7→L	8.8→M	9.9→B	10.8→B	11.7→B	12.6→B
13.5→B	14.4→B	15.3→B	16.2→B	17.1→B	18.10→F
19.11→G	20.12→H	21.13→I	22.14→J	23.15→K	24.16→L
25.17→M	26.18→C	27.17→C	28.16→C	29.15→C	30.14→C
31.13→C	32.12→C	33.11→C	34.10→C	35.19→F	36.20→G
37.21→H	38.22→I	39.23→J	40.24→K	41.25→L	42.26→M

43.27→D	44.26→D	45.25→D	46.24→D	47.23→D	48.22→D
49.21→D	50.20→D	51.19→D	52.28→F	53.29→G	54.30→H
55.31→I	56.32→J	57.33→K	58.34→L	59.35→M	60.36→E
61.35→E	62.34→E	63.33→E	64.32→E	65.31→E	66.30→E
67.29→E	68.28→E	69.37→F	70.38→G	71.39→H	72.40→I
73.41→J	74.42→L	75.41→L	76.40→L	77.39→L	78.38→L
79.37→L	80.43→F	81.44→G	82.45→H	83.46→I	84.47→J
85.48→K	86.47→K	87.46→K	88.45→K	89.44→K	90.43→K
91.49→F	92.50→G	93.51→H	94.52→I	95.53→M	96.54→J
97.53→J	98.52→J	99.51→J	100.50→J	101.49→J	102.55→F
103.56→G	104.57→H	105.58→M	106.59→I	107.58→I	108.57→I
109.56→I	110.55→I	111.10→I	112.60→F	113.61→G	114.62→M
115.63→H	116.62→H	117.61→H	118.60→H	119.19→H	120.11→H
121.64→F	122.65→M	123.66→G	124.65→G	125.64→G	126.28→G
127.20→G	128.1→G	129.67→M	130.68→F	131.67→F	132.29→F
133.21→F	134.12→F	135.2→F	136.69→M	137.30→F	138.3→F

圖 3-41~圖 3-52 X=13, Y=72 時, T=138 的走法

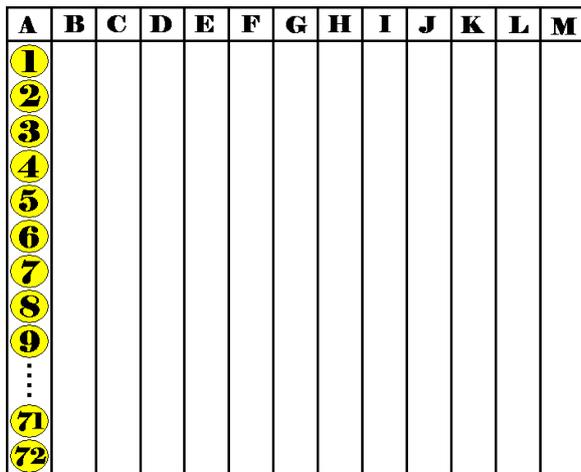


圖 3-41

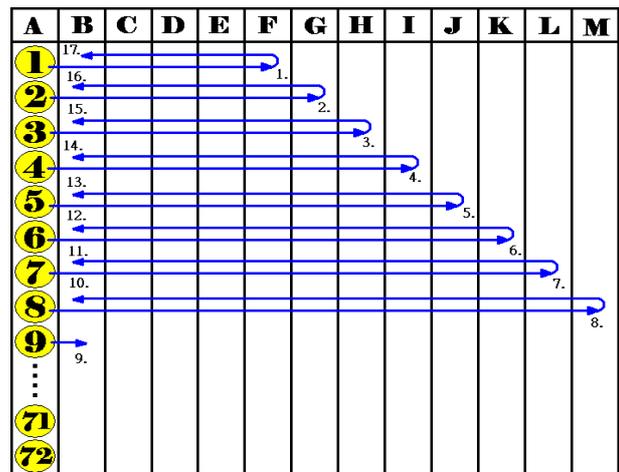


圖 3-42

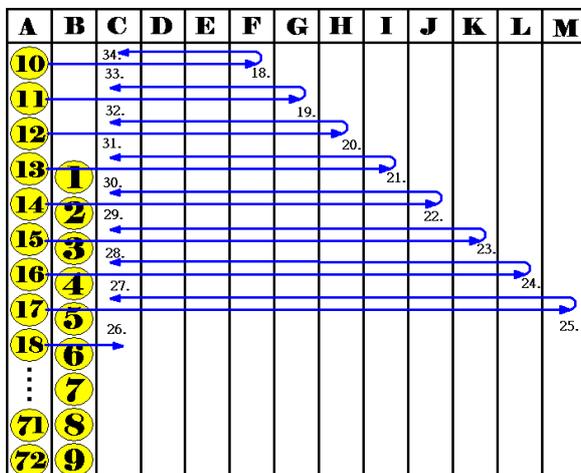


圖 3-43

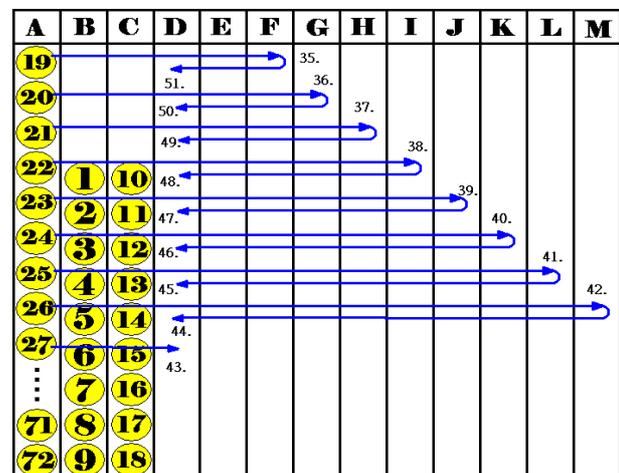


圖 3-44

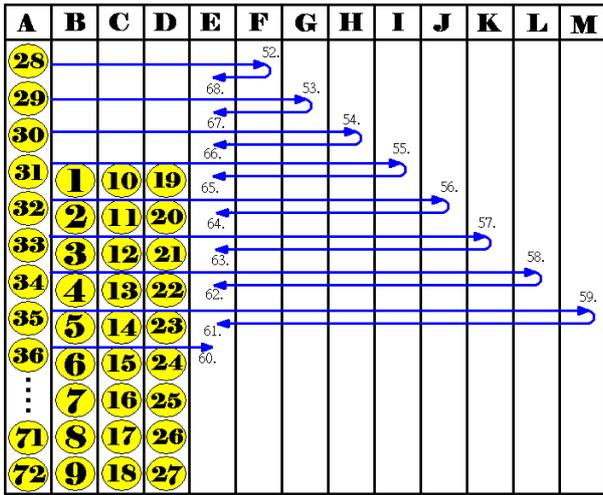


圖 3-45

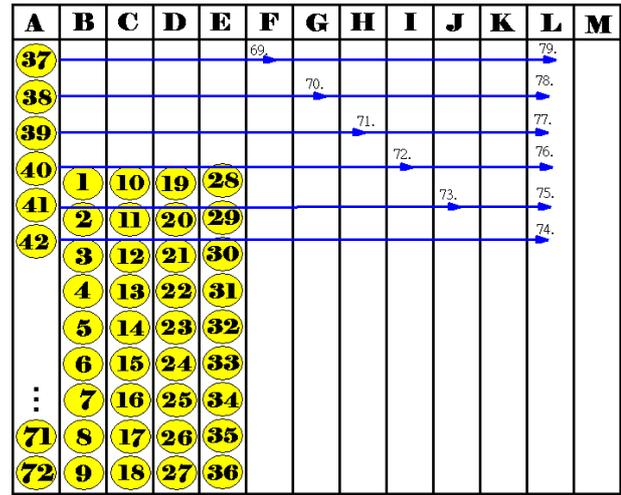


圖 3-46

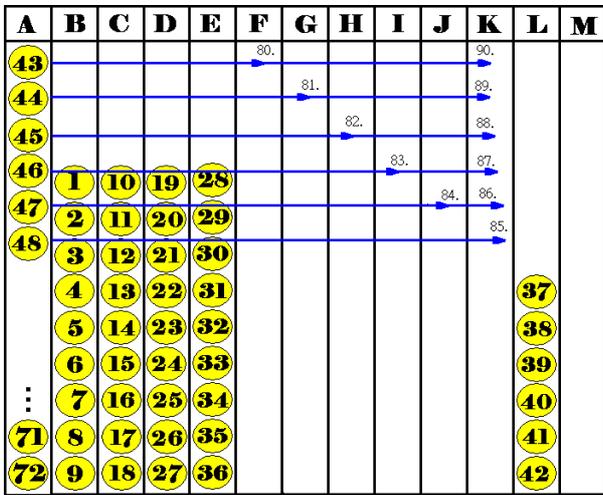


圖 3-47

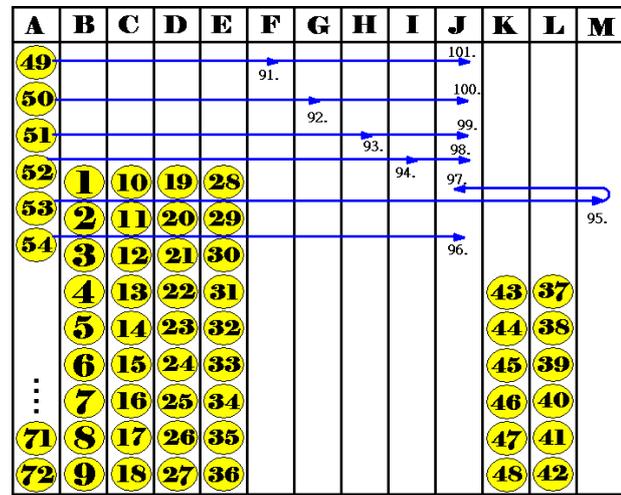


圖 3-48

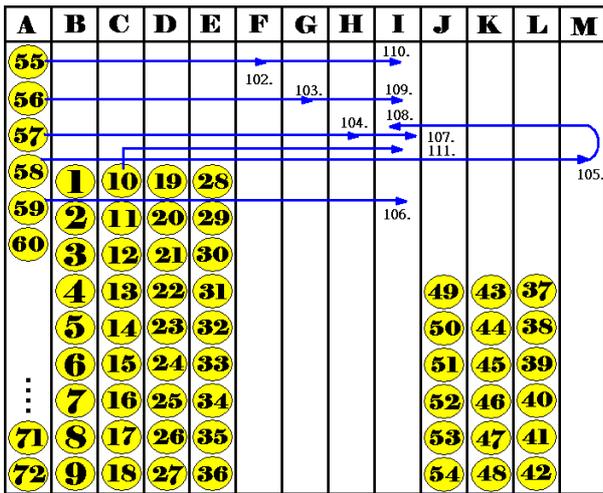


圖 3-49

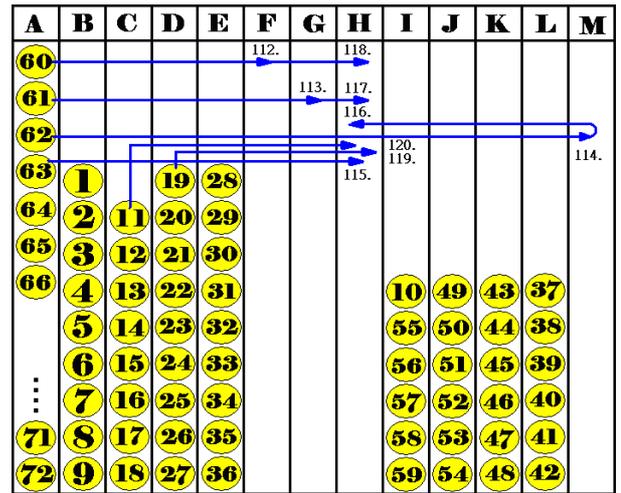


圖 3-50

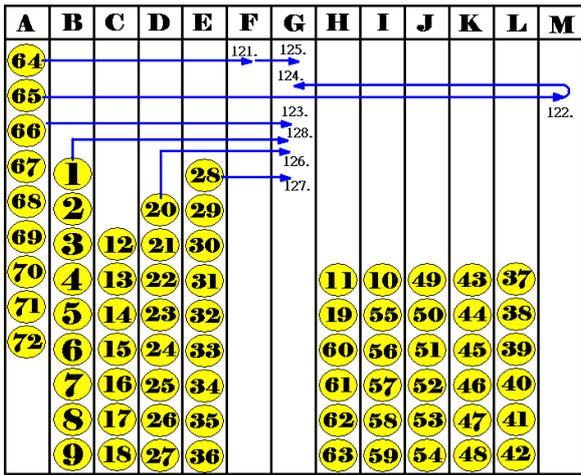


圖 3-51

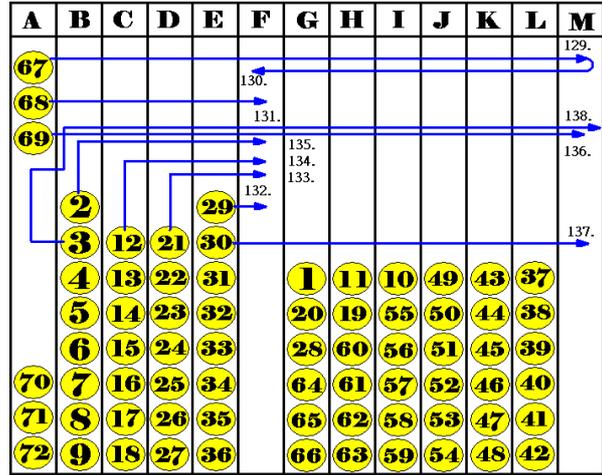


圖 3-52

討論分析：當凸二型的柱數逐漸遞增時，最少步數的變化如何？我們將嘗試的結果統整如下：

X	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	72	78	84	90	96	102	108	114
T	138	149	160	171	182	193	204	215
歸納推論出凸二型數學式： $Y=6(X-1)$								
當 $X \geq 13$ 時， $T=11X-5$								

捌、討論與結論

◎基本型

一、當 $X=3$ 時：

(一) 我們發現當 Y 遞增 1 時， T 的大小會隨著 2 的指數增加，且相差 2^1 、 2^2 、 2^3 、 2^4 等各有 1 次。由此可以歸納出：相差 2^n 的次數為 1 次。

(二) 我們歸納出當 $X=3$ 時的統整數學式： $T=2^Y-1$

例如：當 $X=3$ ， $Y=5$ 時， $T=2^5-1=31$

二、當 $X=4$ 時：

(一) 我們發現當 Y 遞增 1 時， T 的大小會隨著 2 的指數增加，且相差 2^1 的有 2 次， 2^2 的有 3 次， 2^3 的有 4 次……。由此可以歸納出：相差 2^n 的次數為 $(n+1)$ 次。

(二) 我們歸納出區塊的數學式：

當 $X=4, 1 \leq Y \leq 3$ 時，數學式為 $T=2Y-1$

當 $X=4, 3 \leq Y \leq 6$ 時，數學式為 $T=4(Y-2)+1$

當 $X=4, 6 \leq Y \leq 10$ 時，數學式為 $T=4(2Y-8)+1$

當 $X=4, 10 \leq Y \leq 15$ 時，數學式為 $T=4(4Y-28)+1$

當 $X=4, 15 \leq Y \leq 21$ 時，數學式為 $T=4(8Y-88)+1$

當 $X=4, 21 \leq Y \leq 28$ 時，數學式為 $T=4(16Y-256)+1$

當 $X=4, 28 \leq Y \leq 36$ 時，數學式為 $T=4(32Y-704)+1$

..... 依序類推。

三、當 $X=5$ 時：

(一) 我們歸納出區塊的數學式：當 $X=5, 1 \leq Y \leq 4$ 時，數學式為 $T=2Y-1$

當 $X=5, 4 \leq Y \leq 10$ 時，數學式為 $T=4Y-9$
..... 依序類推。

四、當 $X=6$ 時：

- (一) 我們歸納出區塊的數學式：當 $X=6, 1 \leq Y \leq 5$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=6, 5 \leq Y \leq 15$ 時，數學式為 $T=4Y-11$
..... 依序類推。

五、當 $X=7$ 時：

- (一) 我們歸納出區塊的數學式：當 $X=7, 1 \leq Y \leq 6$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=7, 6 \leq Y \leq 21$ 時，數學式為 $T=4Y-13$
..... 依序類推。

六、當 $X=8$ 時：

- (一) 我們歸納出區塊的數學式：當 $X=8, 1 \leq Y \leq 7$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=8, 7 \leq Y \leq 28$ 時，數學式為 $T=4Y-15$
..... 依序類推。

七、當 $X=9$ 時：

- (一) 我們歸納出區塊的數學式：當 $X=9, 1 \leq Y \leq 8$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=9, 8 \leq Y \leq 36$ 時，數學式為 $T=4Y-17$
..... 依序類推。

八、當 $X=10$ 時：

- (一) 我們歸納出區塊的數學式：當 $X=10, 1 \leq Y \leq 9$ 時，數學式為 $T=2Y-1$
當 $X=10, 9 \leq Y \leq 45$ 時，數學式為 $T=4Y-19$
..... 依序類推。

同時我們也歸納出當 $X=4$ 時的統整數學式： $Y=(1+2+3+\cdots+s)+m, T=2^s(m+s-1)+1$

例如：當 $X=4, Y=11$ 時， $Y=(1+2+3+4)+1$

因此， $s=4, m=1$ ，則 $T=2^4(1+4-1)+1=65$

◎變化型

一、上樓梯型

(一) 我們歸納出上樓梯型所需圈數的數學式： $Y=\frac{1}{2}X(X+1)$

(二) 我們歸納出上樓梯型的最少步數數學式：當 $X \geq 4$ 時， $T=X^2+3X-6$

二、下樓梯型

(一) 我們發現最少步數都是平方數。

(二) 我們歸納出下樓梯型所需圈數的數學式： $Y=\frac{1}{2}X(X+1)$

(三) 我們歸納出下樓梯型的最少步數數學式： $(X-1)^2$

三、V 型

(一) 我們歸納出 V 型所需圈數的數學式： $Y=\frac{1}{4}(X^2-1)+X$

(二) 我們歸納出 V 型的最少步數數學式： $T=\frac{1}{2}(X^2-1)$

四、倒 V 型

(一) 我們歸納出倒 V 型所需圈數的數學式： $Y = \frac{1}{4}(X+1)^2$

(二) 我們歸納出倒 V 型的最少步數數學式： $T = \frac{1}{2}(X^2-1)$

(三) 我們發現在柱數相同的情況下，V 型和倒 V 型的最少步數相同，例如五柱同樣都是疊一個三圈、兩個兩圈、一個一圈。(請見附件策略五)

五、凹一型

(一) 我們發現當 $X \geq 15$ ，且遞增 1 時，最少步數會相差 27 步，走法策略(請見附件策略六)相同，因此在 $X \geq 15$ 時才開始有規律。

(二) 我們歸納出凹一型所需圈數的數學式： $5X$

(三) 我們歸納出凹一型的最少步數數學式： $T = 9X - 8$

六、凹二型

(一) 我們發現當 $X \geq 8$ ，且遞增 1 時，最少步數會相差 5 步，走法策略(請見附件策略七)相同，因此在 $X \geq 8$ 時才開始有規律。

(二) 我們歸納出凹二型所需圈數的數學式： $Y = 3(X+2)$

(三) 我們歸納出凹二型的最少步數數學式： $T = 5X + 4$

七、凸一型

(一) 我們發現當 $X \geq 9$ ，且遞增 1 時，最少步數會相差 21 步，走法策略(請見附件策略八)相同，因此在 $X \geq 9$ 時才開始有規律。

(二) 我們歸納出凸一型所需圈數的數學式： $Y = 4X$

(三) 我們歸納出凸一型的最少步數數學式： $T = 7X - 2$

八、凸二型

(一) 我們發現當 $X \geq 13$ ，且遞增 1 時，最少步數會相差 11 步，走法策略(請見附件策略九)相同，因此在 $X \geq 13$ 時才開始有規律。

(二) 我們歸納出凸二型所需圈數的數學式： $Y = 6(X-1)$

(三) 我們歸納出凸二型的最少步數數學式： $T = 11X - 5$

玖、參考資料

1. [無時間] [無作者] 取自：數學是重要形式的科學
<http://sites.google.com/a/ymsh.tp.edu.tw/jameswang/shu-xue-zhi-shi/heneita>
2. [無作者] [無時間] 取自：河內之塔
<http://teach.ymhs.tyc.edu.tw/t1086/other/game/game4.htm>
3. 莊源根 (無日期)。取自：突破漢諾塔遞迴的限制，
http://content.edu.tw/junior/life_tech/ks_dz/content/area2/007/index.html
4. 蔡寶桂 (無日期)。取自：河內之塔—搬搬樂，
<http://residence.educities.edu.tw/oddest/math183.htm>
5. 王文源 (無日期)。取自：Tower of Hanoi 漢諾塔，
<http://www.ds.jhs.tyc.edu.tw/~wenyuan/9rings/Hanoi.files/Hanoi.htm>

【評語】 080409

- 1.本作品討論河內塔的推導，再研究的廣度及深入度也相當不錯。尤其對各種情形給予分類，並有相當完整的分析是件不錯的作品。
- 2.豐富河內塔問題的探討結果。
- 3.隊員對問題的了解也都很深入，並能流利地回答相關的問題。