中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080408

三「幣」行必有「數」失

學校名稱：臺北縣三峽鎮三峽國民小學

作者：	指導老師：
小六 劉盈吟	龔凡凱

關鍵詞：三元F數的性質、「刪法」、Schur定理

三「幣」行必有「數」「失」

摘要

「硬幣問題」是指：給一些不同幣值的硬幣(幣值是整數，且它們的最大公因數必須是 1)，每種幣值的使用數量不限。已知只要夠大的數目，任意金額都可利用它們組成(註 1)，也就是並非所有金額都能被給定的幣值組成，問：這些無法組成的金額中，最大值是多少？

這個最大值稱 **Frobenius number**，本研究簡稱爲「**F 數**」。

歷屆國展國小數學組只有一篇探討了「**兩幣值的硬幣問題**」，用數學的話來說，就是探討 2 變數的 **F 數**；我不但將該作品推廣到三變數，比起原作有新進展的是：證明特殊通式，發現 3 變數的 F 數包含偶數，補充原作未討論的性質，探討 F 數和變數互質與否，最後，還重證了 Schur 定理的結論之一。

壹、研究動機

去年暑假，老師問：給你一些五公克和七公克的砝碼，請問它們秤不出的重量中，最大是多少？當我解出後，老師表示這是從日劇《考試之神》看來的，但我的解法和日劇給的不同，老師補充「考試之神」的作法後，告訴我對於一般的(a, b)的 F 數有表達式 “a×b－a－b”，要我證明這式子成立，我當日便證明完，於是老師便決定拿此做爲本屆科展的題目，經上網查詢後，才發現此題其實就是「硬幣問題」的翻版。

而歷屆國展國小組數學科的作品中，恰有一篇作品探討了「2 變數」的硬幣問題。

因此，我決定探討 3 變數的 F 數。

貳、研究目的

一、研究特殊三變數的 F 數。
二、探索三變數 F 數的奇偶性。
三、對於某個整數 N，是否可找到(a, b, c)，使得它們的 F 數是 N。
四、證明二變數的 F 數分別和變數互質。
五、研究三變數 F 數與各變數互質與否。
六、證明 Schur 定理的結論之一。

參、研究器材

一、筆、計算紙、電算器。

註 1：這是 Schur 定理的結論之一。

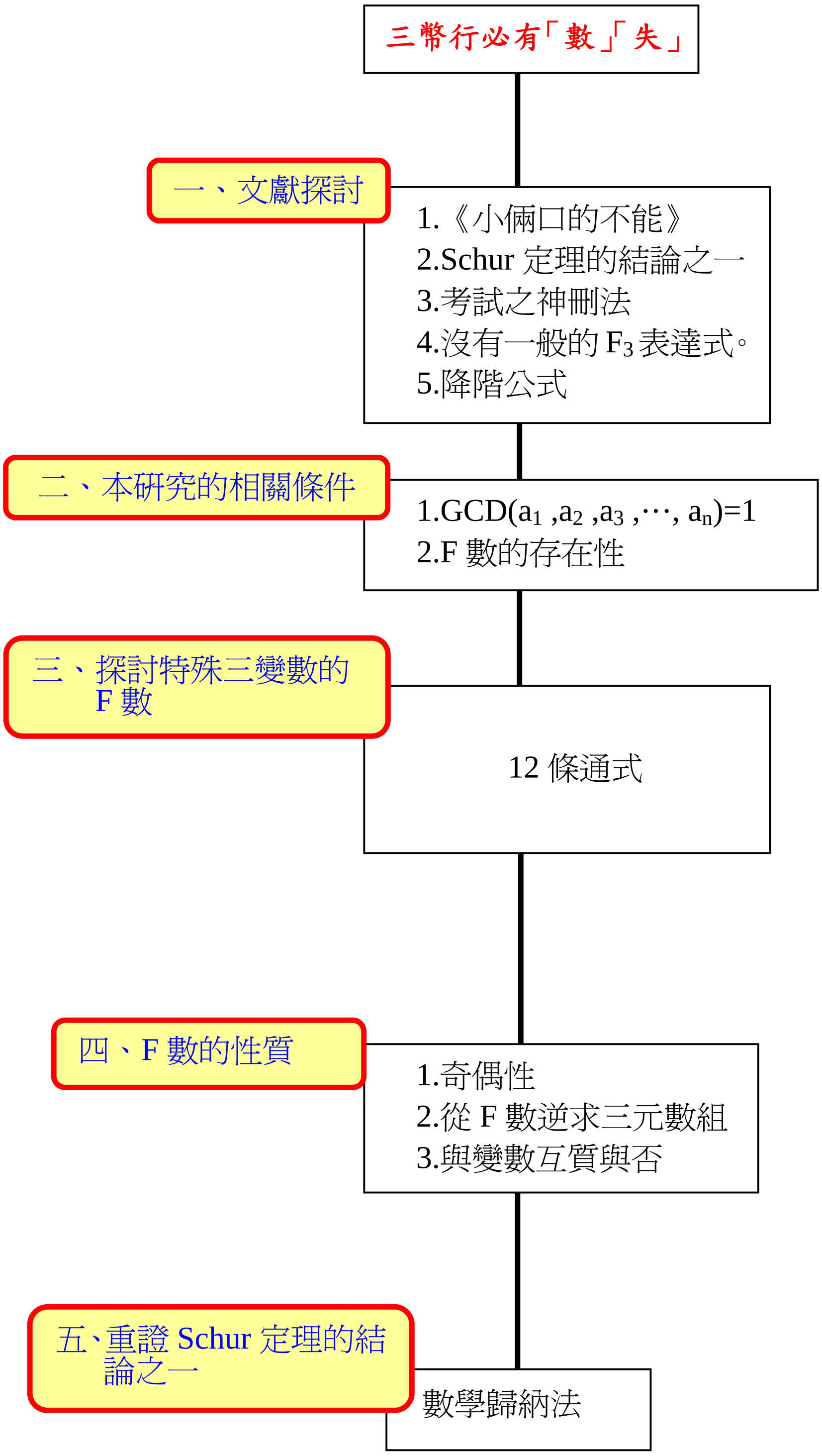
肆、名詞及符號解釋

(表一)

編號	名詞／符號	解釋
1	GCD$(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)$	$a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n$的最大公因數。
2	表示	N 可被數組$(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)$表示指：存在$(c_1, c_2, c_3,\cdots, c_n)$使得：$N=c_1\times a_1+c_2\times a_2+c_3\times a_3+\cdots\cdots+c_n\times a_n$，其中 c_k是 0 或正整數。
3	F 數	某數組$(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)$的最大公因數爲 1，則無法由它們表示的數中，其最大值稱 Frobenius number，本研究稱 F 數；而 F_n則代表 n 變數的 F 數。
4	$g(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)$	即表示數組$(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)$的 F 數，如 $g(3, 5)=7$，$g(7, 8, 9)=20$。
5	$g_n^{-1}(N)$	$g_n^{-1}(N)$是依據 N 所對應到的 n 變數組$(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)$，使得 $g(a_1, a_2, a_3,\cdots, a_n)=N$。

伍、研究過程與方法

◇研究過程



(圖一)

一、文獻探討

(一)歷屆作品

歷屆國展國小數學組只有第四十屆國小數學組作品《小倆口的不能》研究「兩變數的硬幣問題」，以下將它的結論列出來：

(表二)

《小倆口的不能》研究結果			
編號	結果	內容說明	備註
1	2 變數的 F 數表達式	g(a, b)=a×b－a－b。	
2	奇偶性	g(a, b)必是奇數。	
3	從 F 數逆求二元數組	給定奇數 N，則 g_2^{-1}(N)存在。	對於奇數 N，存在數對(2, N+2)使得 g(2, N+2)＝N。
4	g_2^{-1}(N)不唯一	g_2^{-1}(N)有可能對應兩個以上的數對。	當 N=5，g(2, 7)＝g(3, 4)＝5，故知 g_2^{-1}(N)不唯一。

接著，我再列出查詢到的其它資料。

(二)本研究會用到的資料

1. 讓硬幣問題成立的定理

定理一--Schur 定理的結論之一(註 2)：

若正整數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的最大公因數為 1，則存在一個數 x，使得比 x 大的數都可由 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 表示。

2.「考試之神」刪法-找出 2 變數 F 數的方法

日劇《考試之神》第 5 集出現一題；

題一：給你一些五公克和七公克的砝碼，請問它們秤不出的重量中，最大是多少？

這其實就是「硬幣問題」的不同形式，換成硬幣問題即是：5 和 7 所不能表示的數的最大值是多少？

日劇提供了很好的解法；原本電視畫面以動畫呈現解法，我將它**轉換**成如下的畫記方式，見圖二：

註 2：至於 Schur 定理的原來內容，老師表示涉及高中程度以上的教材，故不說明。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	$\boxed{23}$	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7x3+5k	7x1+5k	7x4+5k	7x2+5k	5k

(圖二)

我將日劇的解法稱之為「**考試之神刪法**」，簡稱「**刪法**」，說明如下：

刪法的說明：

(1)將數字按正整數序五個排成一列，如圖二。

(2)可由「5」或「7」表示的數以紅線刪去。

(3)顯然第五行可直接刪去，因為都是 5 的倍數。

(4)同一行上下相鄰的數都差「5」，所以「加 5 的倍數」這件事已含在圖一的排列中。

(5)因此我們只要從第一～四行中各找出「最小的 7 的倍數」即可，只要找到了就可在該行往下畫線，例如第一～四行，分別出現 7 的 3、1、4、2 倍。

(6)最後，未刪去的數最大值即為所求，即 g(5, 7)＝23。

補充說明一：

(1)使用刪法找 g(a, b)，排數字如圖二時，可 a 個一列，也可 b 個一列，但我們皆將不能被 a、b 組成的數劃掉，所以不管那一種排列方式，能被組成的數都會被刪去，故排列方式不影響找 F 數。

(2)可看出排的「行數」愈少，計算量較少，所以依最小的數排成一列。

(3)承(1)(2)，同樣的道理也適合於使用刪法找三變數的 F 數，不再贅述。

★為何刪法一定可以找出 F 數？

在用刪法時，會不會有一行「無法刪去」，導致找不到 F 數？其實這種情形不會發生，因為根據定理一即能保證，另可參考次頁關於「F 數的存在性」的說明。

3.沒有對任意三變數表達 F 數的公式

根據老師查詢的資料，顯示沒有公式可表示**任意**三變數的 F 數。

4. 降階公式

$g(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)=a_1\times(d-1)+d\times g(a_1, a'_2, a'_3, \cdots, a'_n)$，其中 $d=GCD(a_2, a_3, \cdots, a_n)$，$a_2=da'_2$, $a_3=da'_3$，…，$a_n=da'_n$。這個公式可以讓我快點求出三變數的 F 數，但如果 n 個數中，任 n—1 個數的最大公因數為 1，則降階公式派不上用場。

二、本研究的條件及存在性

(表三)

條件與存在性	說明
最大公因數爲 1	如果給定一些幣值 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，想要找出它們的 F 數，首要條件：$GCD(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)=1$，因爲如果它們的最大公因數＞1，那麼它們僅能表示<u>最大公因數的倍數</u>，而無法在某數後表示所有正整數。
F 數的存在性	接著說明對最大公因數爲 1 的$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$的 F 數存在，主要根據**定理一**。 令 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，則 a_1-1 便無法被表示，從定理一得知有「x」存在，若 x 本身不能被 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 表示，則 x 爲 F 數；若 x 可被表示，則繼續驗算 $x-1$，$x-2$，⋯，a_1-1，無法被表示的第一個數 y 即是 F 數，也就是 $g(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)=y$。

三、特殊 g(a, b, c)的通式。

(一)試算

1.由於沒有對任意三變數的 F 數表達式子，所以我就研究一些特定三變數的 F 數性質。先針對具體的數字，試算一些三元數組(a, b, c)的 F 數，觀察它們的是否有規律。
爲了方便計算，設定(a, b, c)的條件，不妨令 $a<b<c$，而且；

(1)$a\leqq 20$，$b\leqq 20$，$c\leqq 20$。

(2)$a\geqq 2$，$b\geqq 2$，$c\geqq 2$，因爲若數組中含「1」，則任何正整數都可被 1 表示。

(3)三數都相異，若有兩數相等，則視同求兩變數的情形，而這已經有表達式了。

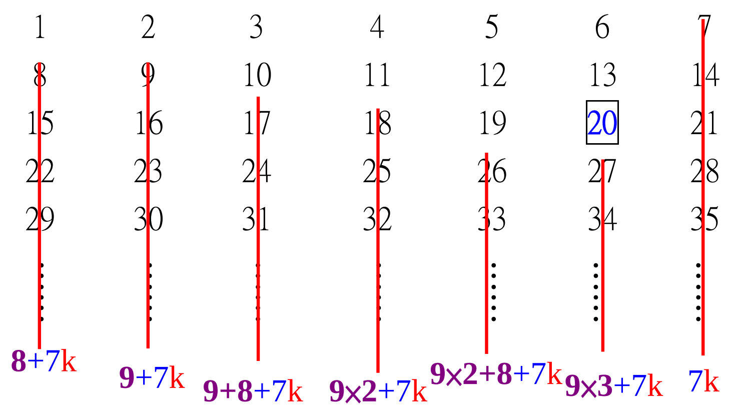
(4)$GCD(a, b, c)=1$。

2.承 1，依據(1)—(4)的條件，我計數出有 825 個數組符合條件。

3.**計算方法：**

我求三變數的 F 數時用了三種方法：**刪法**、**降階公式**、**性質一**，以下分別說明**刪法**及**性質一**。

(1)刪法：以求 g(7, 8, 9)為例



(圖三)

①將數字 7 個排成一列，依序排出。
②第七行都是 7 的倍數，直接刪去。
③同行上下相鄰的數都差 7，所以「加 7 的倍數」已含在每行中。
④觀察每行，找到可以由 8 或 9 表示的數之最小值，從它往下劃刪線。
⑤剩下來的最大值就是 F 數，所以 $g(7, 8, 9)=20$。

(2)性質 1：設 $GCD(a, b)=1$，$a<b<c$，$g(a, b)<c$，則 $g(a, b, c)=g(a, b)$
性質 1 是我在試算過程中得到的結果，此顯然成立。

然後將 825 個三元數組的 F 數列於表四(過次頁)。

(表四)

g(2,3,4)=1	g(2,5,11)=3	g(2,8,11)=9	g(2,12,13)=11	g(3, 4, 9)=5
g(2,3,5)=1	g(2,5,12)=3	g(2,8,13)=11	g(2,12,15)=13	g(3, 4, 10)=5
g(2,3,6)=1	g(2,5,13)=3	g(2,8,15)=13	g(2,12,17)=15	g(3,4,11)=5
g(2,3,7)=1	g(2,5,14)=3	g(2,8,17)=15	g(2,12,19)=17	g(3,4,12)=5
g(2,3,8)=1	g(2,5,15)=3	g(2,8,19)=17	g(2,13,14)=11	g(3,4,13)=5
g(2,3,9)=1	g(2,5,16)=3	g(2,9,10)=7	g(2,13,15)=11	g(3,4,14)=5
g(2,3,10)=1	g(2,5,17)=3	g(2,9,11)=7	g(2,13,16)=11	g(3,4,15)=5
g(2,3,11)=1	g(2,5,18)=3	g(2,9,12)=7	g(2,13,17)=11	g(3,4,16)=5
g(2,3,12)=1	g(2,5,19)=3	g(2,9,13)=7	g(2,13,18)=11	g(3,4,17)=5
g(2,3,13)=1	g(2,5,20)=3	g(2,9,14)=7	g(2,13,19)=11	g(3,4,18)=5
g(2,3,14)=1	g(2,6,7)=5	g(2,9,15)=7	g(2,13,20)=11	g(3,4,19)=5
g(2,3,15)=1	g(2,6,9)=7	g(2,9,16)=7	g(2,14,15)=13	g(3,4,20)=5
g(2,3,16)=1	g(2,6,11)=9	g(2,9,17)=7	g(2,14,17)=15	g(3, 5, 6)=7
g(2,3,17)=1	g(2,6,13)=11	g(2,9,18)=7	g(2,14,19)=17	g(3, 5, 7)=4
g(2,3,18)=1	g(2,6,15)=13	g(2,9,19)=7	g(2,15,16)=13	g(3, 5, 8)=7
g(2,3,19)=1	g(2,6,17)=15	g(2,9,20)=7	g(2,15,17)=13	g(3, 5, 9)=7
g(2,3,20)=1	g(2,6,19)=17	g(2,10,11)=9	g(2,15,18)=13	g(3, 5, 10)=7
g(2,4,5)=3	g(2,7,8)=5	g(2,10,13)=11	g(2,15,19)=13	g(3,5,11)=7
g(2,4,7)=5	g(2,7,9)=5	g(2,10,15)=13	g(2,15,20)=13	g(3,5,12)=7
g(2,4,9)=7	g(2,7,10)=5	g(2,10,17)=15	g(2,16,17)=15	g(3,5,13)=7
g(2,3,19)=1	g(2,7,11)=5	g(2,10,19)=17	g(2,16,19)=17	g(3,5,14)=7
g(2,4,13)=11	g(2,7,13)=5	g(2,11,12)=9	g(2,17,18)=15	g(3,5,15)=7
g(2,4,15)=13	g(2,7,14)=5	g(2,11,13)=9	g(2,17,19)=15	g(3,5,16)=7
g(2,4,17)=15	g(2,7,15)=5	g(2,11,14)=9	g(2,17,20)=15	g(3,5,17)=7
g(2,4,19)=17	g(2,7,16)=5	g(2,11,15)=9	g(2,18,19)=17	g(3,5,18)=7
g(2,5,6)=3	g(2,7,17)=5	g(2,11,16)=9	g(2,19,20)=17	g(3,5,19)=7
g(2,5,7)=3	g(2,7,18)=5	g(2,11,17)=9	g(3, 4, 5)=2	g(3,5,20)=7
g(2,5,8)=3	g(2,7,19)=5	g(2,11,18)=9	g(3, 4, 6)=5	g(3, 6, 7)=11
g(2,5,9)=3	g(2,7,20)=5	g(2,11,19)=9	g(3, 4, 7)=5	g(3, 6, 8)=13
g(2,5,10)=3	g(2,8,9)=7	g(2,11,20)=9	g(3, 4, 8)=5	g(3, 6, 10)=17

g(3,6,11)=19	g(3,8,19)=13	g(3,12,14)=25	g(3,18,20)=37	g(4,7,14)=17
g(3,6,13)=23	g(3,8,20)=13	g(3,12,16)=29	g(3,19,20)=17	g(4,7,15)=17
g(3,6,14)=25	g(3,9,10)=17	g(3,12,17)=31	g(4,5 6)=7	g(4,7,16)=17
g(3,6,16)=29	g(3,9,11)=19	g(3,12,19)=35	g(4,5,7)=6	g(4,7,17)=13
g(3,6,17)=31	g(3,9,13)=23	g(3,12,20)=37	g(4,5,8)=11	g(4,7,18)=17
g(3,6,19)=35	g(3,9,14)=25	g(3,13,14)=11	g(4,5,9)=11	g(4,7,19)=17
g(3,6,20)=37	g(3,9,16)=29	g(3,13,15)=23	g(4,5,10)=11	g(4,7,20)=17
g(3, 7, 8)=5	g(3,9,17)=31	g(3,13,16)=23	g(4,5,11)=7	g(4,8,9)=23
g(3, 7, 9)=11	g(3,9,19)=35	g(3,13,17)=14	g(4,5,12)=11	g(4,8,11)=29
g(3, 7, 10)=11	g(3,9,20)=37	g(3,13,18)=23	g(4,5,13)=11	g(4,8,13)=35
g(3,7,11)=8	g(3,10,11)=8	g(3,13,19)=23	g(4,5,14)=11	g(4,8,15)=41
g(3,7,12)=11	g(3,10,12)=17	g(3,13,20)=17	g(4,5,15)=11	g(4,8,17)=47
g(3,7,13)=11	g(3,10,13)=17	g(3,14,15)=25	g(4,5,16)=11	g(4,8,19)=53
g(3,7,14)=11	g(3,10,14)=11	g(3,14,16)=13	g(4,5,17)=11	g(4,9,10)=15
g(3,7,15)=11	g(3,10,15)=17	g(3,14,17)=25	g(4,5,18)=11	g(4,9,11)=14
g(3,7,16)=11	g(3,10,16)=17	g(3,14,18)=25	g(4,5,19)=11	g(4,9,12)=23
g(3,7,17)=11	g(3,10,17)=14	g(3,14,19)=16	g(4,5,20)=11	g(4,9,13)=23
g(3,7,18)=11	g(3,10,18)=17	g(3,14,20)=25	g(4,6,7)=9	g(4,9,14)=19
g(3,7,19)=11	g(3,10,19)=17	g(3,15,16)=29	g(4,6,9)=11	g(4,9,15)=14
g(3,7,20)=11	g(3,10,20)=17	g(3,15,17)=31	g(4,6,11)=9	g(4,9,16)=23
g(3, 8, 9)=13	g(3,11,12)=19	g(3,15,19)=35	g(4,6,13)=11	g(4,9,17)=23
g(3,8,10)=7	g(3,11,13)=10	g(3,15,20)=37	g(4,6,15)=13	g(4,9,18)=23
g(3,8,11)=13	g(3,11,14)=19	g(3,16,17)=14	g(4,6,17)=15	g(4,9,19)=15
g(3,8,12)=13	g(3,11,15)=19	g(3,16,18)=29	g(4,6,19)=17	g(4,9,20)=23
g(3,8,13)=10	g(3,11,16)=13	g(3,16,19)=29	g(4,7,8)=17	g(4,10,11)=17
g(3,8,14)=13	g(3,11,17)=19	g(3,16,20)=17	g(4,7,9)=10	g(4,10,13)=19
g(3,8,15)=13	g(3,11,18)=19	g(3,17,18)=31	g(4,7,10)=13	g(4,10,15)=21
g(3,8,16)=13	g(3,11,19)=19	g(3,17,19)=16	g(4,7,11)=17	g(4,10,17)=23
g(3,8,17)=13	g(3,11,20)=19	g(3,17,20)=31	g(4,7,12)=17	g(4,10,19)=25
g(3,8,18)=13	g(3,12,13)=23	g(3,18,19)=35	g(4,7,13)=10	g(4,11,12)=29

g(4,11,13)=18 g(4,11,14)=21 g(4,11,15)=29 g(4,11,16)=29 g(4,11,17)=18 g(4,11,18)=25 g(4,11,19)=29 g(4,11,20)=29 g(4,12,13)=35 g(4,12,15)=41	g(4,17,19)=30 g(4,17,20)=47 g(4,18,19)=33 g(4,19,20)=53 g(5,6,7)=9 g(5,6,8)=9 g(5,6,9)=13 g(5,6,10)=19 g(5,6,11)=19 g(5,6,12)=19	g(5,7,20)=23 g(5,8,9)=12 g(5, 8, 10)=27 g(5,8,11)=17 g(5,8,12)=19 g(5,8,13)=27 g(5,8,14)=17 g(5,8,15)=27 g(5,8,16)=27 g(5,8,17)=19	g(5,10,18)=67 g(5,10,19)=71 g(5,11,12)=19 g(5,11,13)=19 g(5,11,14)=23 g(5,11,15)=39 g(5,11,16)=39 g(5,11,17)=29 g(5,11,18)=24 g(5,11,19)=33	g(5,14,19)=51 g(5,14,20)=51 g(5,15,16)=59 g(5,15,17)=63 g(5,15,18)=67 g(5,15,19)=71 g(5,16,17)=29 g(5,16,18)=29 g(5,16,19)=33 g(5,16,20)=59
g(4,12,17)=47 g(4,12,19)=53 g(4,13,14)=23 g(4,13,15)=22 g(4,13,16)=35 g(4,13,17)=35 g(4,13,18)=27 g(4,13,19)=22 g(4,13,20)=35 g(4,14,15)=25	g(5,6,13)=14 g(5,6,14)=13 g(5,6,15)=19 g(5,6,16)=19 g(5,6,17)=19 g(5,6,18)=19 g(5,6,19)=13 g(5,6,20)=19 g(5,7,8)=11 g(5,7,9)=13	g(5,8,18)=27 g(5,8,19)=22 g(5,8,20)=27 g(5,9,10)=31 g(5,9,11)=17 g(5,9,12)=16 g(5,9,13)=21 g(5,9,14)=31 g(5,9,15)=31 g(5,9,16)=27	g(5,11,20)=39 g(5,12,13)=21 g(5,12,14)=23 g(5,12,15)=43 g(5,12,16)=23 g(5,12,17)=43 g(5,12,18)=31 g(5,12,19)=33 g(5,12,20)=43 g(5,13,14)=22	g(5,17,18)=31 g(5,17,19)=33 g(5,17,20)=63 g(5,18,19)=32 g(5,18,20)=67 g(5,19,20)=71 g(6,7,8)=17 g(6,7,9)=17 g(6,7,10)=15 g(6,7,11)=16
g(4,14,17)=27 g(4,14,19)=29 g(4,15,16)=41 g(4,15,17)=26 g(4,15,18)=29 g(4,15,19)=41 g(4,15,20)=41 g(4,16,17)=47 g(4,16,19)=53 g(4,17,18)=31	g(5,7,10)=23 g(5,7,11)=13 g(5,7,12)=23 g(5,7,13)=16 g(5,7,14)=23 g(5,7,15)=23 g(5,7,16)=18 g(5,7,17)=23 g(5,7,18)=16 g(5,7,19)=23	g(5,9,17)=21 g(5,9,18)=31 g(5,9,19)=31 g(5,9,20)=31 g(5,10,11)=39 g(5,10,12)=43 g(5,10,13)=47 g(5,10,14)=51 g(5,10,16)=59 g(5,10,17)=63	g(5,13,15)=47 g(5,13,16)=27 g(5,13,17)=29 g(5,13,18)=47 g(5,13,19)=27 g(5,13,20)=47 g(5,14,15)=51 g(5,14,16)=27 g(5,14,17)=26 g(5,14,18)=31	g(6,7,12)=29 g(6,7,13)=29 g(6,7,14)=29 g(6,7,15)=23 g(6,7,16)=17 g(6,7,17)=22 g(6,7,18)=29 g(6,7,19)=29 g(6,7,20)=29 g(6,8,9)=19

g(6,8,11)=21 g(6,8,13)=23 g(6,8,15)=25 g(6,8,17)=27 g(6,8,19)=29 g(6,9,10)=23 g(6,9,11)=25 g(6,9,13)=29 g(6,9,14)=31 g(6,9,16)=35	g(6,13,14)=35 g(6,13,15)=35 g(6,13,16)=33 g(6,13,17)=33 g(6,13,18)=59 g(6,13,19)=59 g(6,13,20)=47 g(6,14,15)=37 g(6,14,17)=39 g(6,14,19)=41	g(7,8,18)=27 g(7,8,19)=25 g(7,8,20)=33 g(7,9,10)=22 g(7,9,11)=38 g(7,9,12)=29 g(7,9,13)=24 g(7,9,14)=47 g(7,9,15)=26 g(7,9,16)=47	g(7,11,18)=59 g(7,11,19)=34 g(7,11,20)=37 g(7,12,13)=32 g(7,12,14)=65 g(7,12,15)=53 g(7,12,16)=41 g(7,12,17)=46 g(7,12,18)=41 g(7,12,19)=65	g(7,16,18)=47 g(7,16,19)=50 g(7,16,20)=45 g(7,17,18)=47 g(7,17,19)=46 g(7,17,20)=57 g(7,18,19)=48 g(7,18,20)=51 g(7,19,20)=57 g(8,9,10)=31
g(6,9,17)=37 g(6,9,19)=41 g(6,9,20)=43 g(6,10,11)=25 g(6,10,13)=27 g(6,10,15)=29 g(6,10,17)=31 g(6,10,19)=33 g(6,11,12)=49 g(6,11,13)=27	g(6,15,16)=41 g(6,15,17)=43 g(6,15,19)=47 g(6,15,20)=49 g(6,16,17)=43 g(6,16,19)=45 g(6,17,18)=79 g(6,17,19)=45 g(6,17,20)=47 g(6,18,19)=89	g(7,9,17)=29 g(7,9,18)=47 g(7,9,19)=31 g(7,9,20)=33 g(7,10,11)=26 g(7,10,12)=25 g(7,10,13)=32 g(7,10,14)=53 g(7,10,15)=33 g(7,10,16)=29	g(7,12,20)=37 g(7,13,14)=71 g(7,13,15)=38 g(7,13,16)=38 g(7,13,17)=36 g(7,13,18)=37 g(7,13,19)=50 g(7,13,20)=71 g(7,14,15)=83 g(7,14,16)=89	g(8,9,11)=39 g(8,9,12)=31 g(8,9,13)=28 g(8,9,14)=29 g(8,9,15)=37 g(8,9,16)=55 g(8,9,17)=55 g(8,9,18)=55 g(8,9,19)=39 g(8,9,20)=39
g(6,11,14)=27 g(6,11,15)=31 g(6,11,16)=37 g(6,11,17)=49 g(6,11,18)=49 g(6,11,19)=32 g(6,11,20)=27 g(6,12,13)=59 g(6,12,17)=79 g(6,12,19)=89	g(6,19,20)=53 g(7,8,9)=20 g(7, 8, 10)=19 g(7,8,11)=41 g(7,8,12)=25 g(7,8,13)=25 g(7,8,14)=41 g(7,8,15)=41 g(7,8,16)=41 g(7,8,17)=27	g(7,10,17)=53 g(7,10,18)=33 g(7,10,19)=32 g(7,10,20)=53 g(7,11,12)=41 g(7,11,13)=37 g(7,11,14)=59 g(7,11,15)=38 g(7,11,16)=59 g(7,11,17)=37	g(7,14,17)=95 g(7,14,18)=101 g(7,14,19)=107 g(7,14,20)=113 g(7,15,16)=41 g(7,15,17)=40 g(7,15,18)=41 g(7,15,19)=46 g(7,15,20)=53 g(7,16,17)=43	g(8,10,11)=25 g(8,10,13)=35 g(8,10,15)=37 g(8,10,17)=39 g(8,10,19)=41 g(8,11,12)=37 g(8,11,13)=36 g(8,11,14)=21 g(8,11,15)=36 g(8,11,16)=69

g(8,11,17)=31 g(8,11,18)=39 g(8,11,19)=69 g(8,11,20)=45 g(8,12,13)=43 g(8,12,15)=49 g(8,12,17)=55 g(8,12,19)=61 g(8,13,14)=33 g(8,13,15)=35	g(9,10,11)=35 g(9,10,12)=35 g(9,10,13)=34 g(9,10,14)=35 g(9,10,15)=41 g(9,10,16)=33 g(9,10,17)=42 g(9,10,18)=71 g(9,10,19)=71 g(9,10,20)=71	g(9,13,19)=43 g(9,13,20)=50 g(9,14,15)=49 g(9,14,16)=49 g(9,14,17)=47 g(9,14,18)=103 g(9,14,19)=67 g(9,14,20)=39 g(9,15,16)=53 g(9,15,17)=55	g(10,11,20)=89 g(10,12,13)=41 g(10,12,15)=53 g(10,12,17)=55 g(10,12,19)=45 g(10,13,14)=45 g(10,13,15)=57 g(10,13,16)=67 g(10,13,17)=68 g(10,13,18)=55	g(11,12,17)=54 g(11,12,18)=61 g(11,12,19)=51 g(11,12,20)=61 g(11,13,14)=45 g(11,13,15)=64 g(11,13,16)=69 g(11,13,17)=53 g(11,13,18)=64 g(11,13,19)=53
g(8,13,16)=83 g(8,13,17)=55 g(8,13,18)=59 g(8,13,19)=49 g(8,13,20)=51 g(8,14,15)=49 g(8,14,17)=43 g(8,14,19)=53 g(8,15,16)=97 g(8,15,17)=52	g(9,11,12)=37 g(9,11,13)=43 g(9,11,14)=52 g(9,11,15)=43 g(9,11,16)=46 g(9,11,17)=41 g(9,11,18)=79 g(9,11,19)=33 g(9,11,20)=79 g(9,12,13)=41	g(9,15,19)=59 g(9,15,20)=61 g(9,16,17)=56 g(9,16,18)=119 g(9,16,19)=77 g(9,16,20)=71 g(9,17,18)=127 g(9,17,19)=84 g(9,17,20)=59 g(9,18,19)=143	g(10,13,19)=54 g(10,13,20)=107 g(10,14,15)=61 g(10,14,17)=63 g(10,14,19)=65 g(10,15,16)=69 g(10,15,17)=73 g(10,15,18)=77 g(10,15,19)=81 g(10,16,17)=55	g(11,13,20)=69 g(11,14,15)=49 g(11,14,16)=93 g(11,14,17)=74 g(11,14,18)=87 g(11,14,19)=73 g(11,14,20)=63 g(11,15,16)=69 g(11,15,17)=57 g(11,15,18)=79
g(8,15,18)=43 g(8,15,19)=52 g(8,15,20)=57 g(8,16,17)=111 g(8,16,19)=125 g(817,18,)=51 g(8,17,19)=47 g(8,17,20)=63 g(8,18,19)=49 g(8,19,20)=69	g(9,12,14)=43 g(9,12,16)=45 g(9,12,17)=47 g(9,12,19)=49 g(9,12,20)=51 g(9,13,14)=47 g(9,13,15)=47 g(9,13,16)=62 g(9,13,17)=59 g(9,13,18)=95	g(9,18,20)=151 g(9,19,20)=71 g(10,11,12)=49 g(10,11,13)=38 g(10,11,14)=37 g(10,11,15)=49 g(10,11,16)=45 g(10,11,17)=46 g(10,11,18)=45 g(10,11,19)=56	g(10,16,19)=63 g(10,17,18)=38 g(10,17,19)=62 g(10,17,20)=143 g(10,18,19)=81 g(10,19,20)=161 g(11,12,13)=54 g(11,12,14)=43 g(11,12,15)=43 g(11,12,16)=53	g(11,15,19)=84 g(11,15,20)=69 g(11,16,17)=69 g(11,16,18)=89 g(11,16,19)=72 g(11,16,20)=61 g(11,17,18)=60 g(11,17,19)=65 g(11,17,20)=69 g(11,18,19)=64

g(11,18,20)=81	g(13,15,17)=89	g(15,17,18)=81
g(11,19,20)=67	g(13,15,18)=58	g(15,17,19)=118
g(12,13,14)=71	g(13,15,19)=85	g(15,17,20)=93
g(12,13,15)=59	g(13,15,20)=77	g(15,18,19)=80
g(12,13,16)=59	g(13,16,17)=89	g(15,18,20)=97
g(12,13,17)=83	g(13,16,18)=69	g(15,19,20)=101
g(12,13,18)=71	g(13,16,19)=101	g(16,17,18)=127
g(12,13,19)=118	g(13,16,20)=73	g(16,17,19)=94
g(12,13,20)=67	g(13,17,18)=110	g(16,17,20)=95
g(12,14,15)=61	g(13,17,19)=80	g(16,18,19)=97
g(12,14,17)=61	g(13,17,20)=75	g(16,19,20)=101
g(12,14,19)=77	g(13,18,19)=66	g(17,18,19)=135
g(12,15,16)=65	g(13,18,20)=81	g(17,18,20)=101
g(12,15,17)=67	g(13,19,20)=114	g(17,19,20)=83
g(12,15,19)=71	g(14,15,16)=97	g(18,19,20)=161
g(12,15,20)=73	g(14,15,17)=69	
g(12,16,17)=71	g(14,15,18)=67	
g(12,16,19)=77	g(14,15,19)=68	
g(12,17,18)=91	g(14,15,20)=81	
g(12,17,19)=90	g(14,16,17)=71	
g(12,17,20)=79	g(14,16,19)=69	
g(12,18,19)=101	g(14,17,18)=75	
g(12,19,20)=85	g(14,17,19)=77	
g(13,14,15)=77	g(14,17,20)=123	
g(13,14,16)=63	g(14,18,19)=81	
g(13,14,17)=63	g(14,19,20)=73	
g(13,14,18)=61	g(15,16,17)=104	
g(13,14,19)=63	g(15,16,18)=89	
g(13,14,20)=32	g(15,16,19)=74	
g(13,15,16)=66	g(15,16,20)=89	

4.表四的觀察結果：

(1)無法觀察出任意三變數 F 數的通式，如

例一：

$$g(4, 7, 9)=10，10=7\times2-4$$
$$g(4, 7, 10)=13，13=10+7-4$$
$$g(4, 8, 9)=23，23=9\times3-4$$

似乎沒有規則可尋，不過這也符合查詢到的資料——對三變數 F 數沒有一般的表達式，但我仍發現其他規律，如後。

(二)察覺規律

1.從表四可觀察出某些 F 數和三元數組特別的規律，列表如下：

(表五)

序號	察覺的規律	條件
1	$g(N, 2, 2n)=N-2$	$n\geqq2$，N 是奇數
2	$g(N, m, c_1N+c_2m)=g(N, m)$	$GCD(N, m)=1$
3	$g(N, 4, 6)=N+2$	$N\geqq3$ 是奇數
4	$g(3, 3+k, 3+2k)=2k$	$k\geqq1$ 且非 3 的倍數
5	$g(4, 3+2k, 5+2k)=2+4k$	$k\geqq0$
6	$g(8, 5+2k, 9+2k)=8K+12$	
7	$g(3, 4+k, 5+2k)=2k+2$	k 不可以有形如 3t+2 的因數
8	$g(4, 7+2k, 13+2k)=4k+10$	$k\geqq0$
9	$g(5, 3+5k, 4+5k)=10k+2$	
10	$g(5, 6+5k, 13+5k)=10k+14$	
11	$g(5, 4+5k, 7+5k)=10k+6$	
12	$g(5, 7+5k, 16+5k)=10k+18$	

接著我著手證明它們對一般情形成立。

(三)證明規律成立

主要證明方式為降階公式和刪法。

1.通式 1：$g(N, 2, 2n)=N-2$，$n\geqq2$，N 是奇數。

〈證明〉使用降階公式：$g(N, 2, 2n)=N\times(2-1)+2\times g(N, 1, n)=N+2\times(-1)=N-2$

補充說明二

這裡我可以**定義** $g(1, x, y)=-1$，因爲 1 可表示任意正整數，(1, x, y)也可表示“0”，故不能表示的數的最大值應爲「-1」；而且使用此定義在通式 1 的證明結果也與規律相符。

2. 通式 2：若 GCD(N, m)＝1，則 g(N, m, c_1N+c_2m)＝g(N, m)。

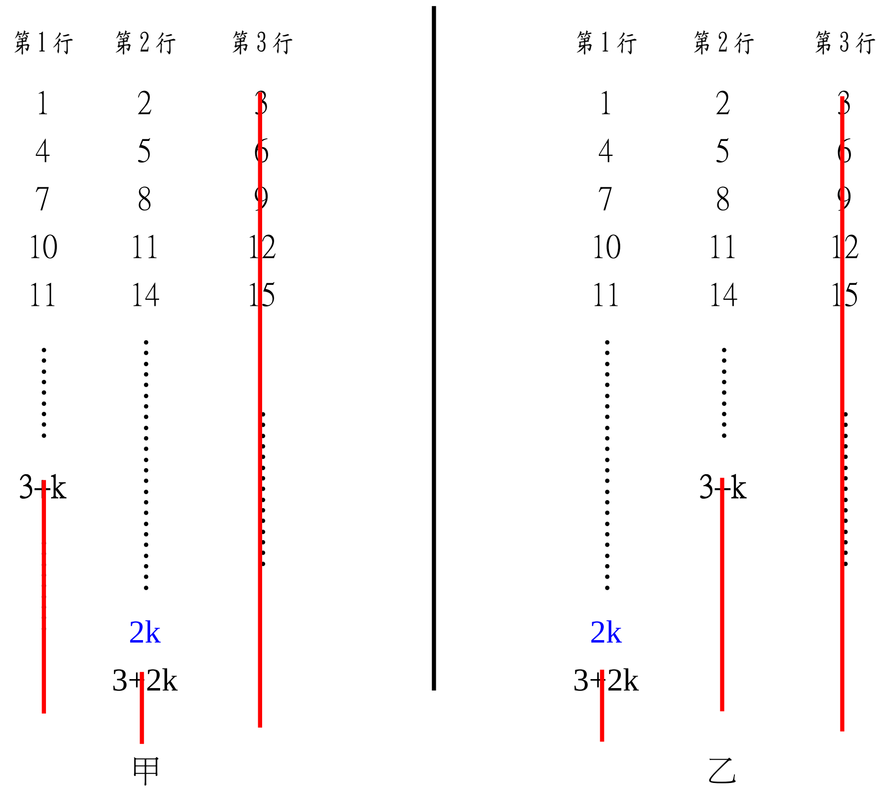
〈證明〉不能被(N, m)表示的數，必無法被(N, m, c_1N+c_2m)表示，故通式成立。

補充說明三：通式 2 是通式 1 的一般化，所以 g(N, 2, 2n)＝g(N, 2)＝g(2, N)

3. 通式 3：g(N, 4, 6)=N+2，N≧3 是奇數。

〈證明〉g(N, 4, 6)＝N×(2－1)＋2xg(N, 2, 3)＝N＋2

4. 通式 4：g(3, 3+k, 3+2k)=2k，k≧1 且非 3 的倍數。



(圖四)

〈證明〉

將數字每 3 個排成一列，第 3 行皆可被刪去，而且 k 不是 3 的倍數，所以 3+k 和 3+2k 不會在第 3 行；

(1) 如果 k 除以 3 餘 1，則 3+k＝3+(3t+1)，於是 3+2k＝3+2×(3t+1)＝3×(2t+1)+2，

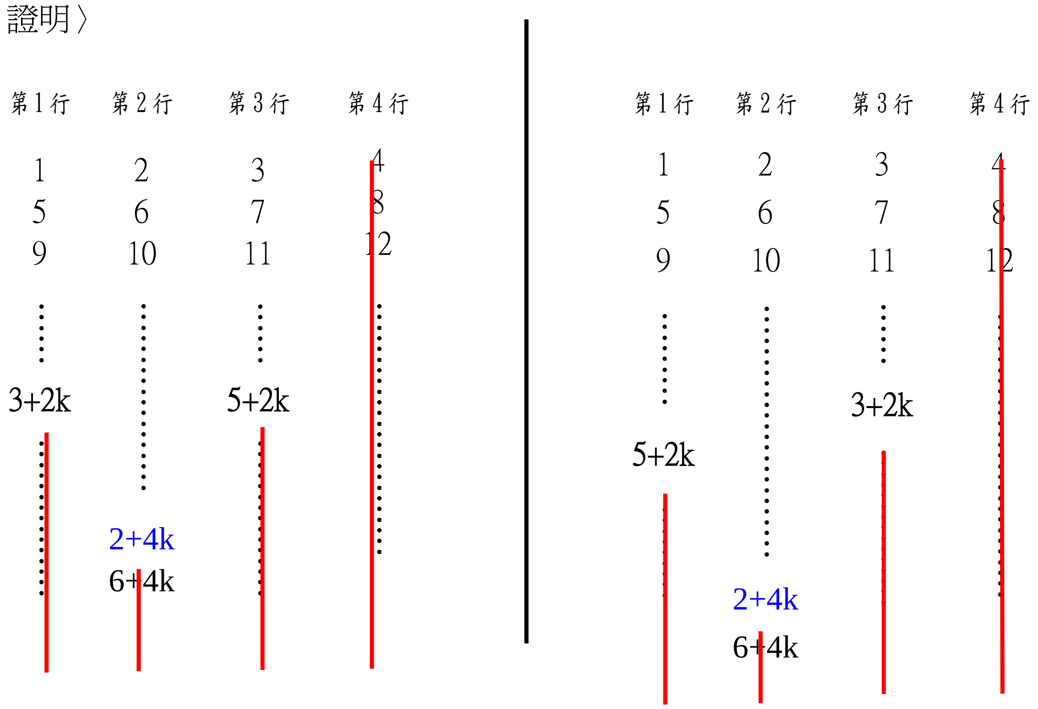
(2) 如果 k 除以 3 餘 2，則 3+k＝3+(3t+2)，於是 3+2k＝3+2×(3t+2)＝3×(2t+2)+1，

可知 3+k 和 3+2k 分別在第 1、2 行，如圖四所示，又 3+k＜3+2k，所以

g(3, 3+k, 3+2k)=3+2k－3＝2k。

5. 通式 5：g(4, 3+2k, 5+2k)=2+4k

〈證明〉



甲 乙

(圖五)

(1)將數字依序 4 個排成一列。若「3+2k」除以 4 餘 1，則「5+2k」除以 4 餘 3；若「3+2k」除以 4 餘 3，則「5+2k」除以 4 餘 1，所以這兩數必分別在第一、三行(如圖五甲、乙)。

(2)「4」的倍數都可被表示，第四行可刪去。

(3)接著看這三數：(3+2k)＋(5+2k)，(3+2k)x2，(5+2k)x2，

① (3+2k)＋(5+2k)＝8＋4k，是 4 的倍數，已在第四行中，

② (3+2k)x2＝6+4k、(5+2k)x2＝10+4k，兩數都除以 4 餘 2，都在第二行，但 6+4k＜10+4k，表示第二行自 6+4k 後皆可刪去，

③而 3+2k＜5+2k＜6+4k，故 g(4, 3+2k, 5+2k)=6+4k－4＝2+4k。

使用刪法的證明原理：

從通式 4，5 的證明可知，利用刪法證明時，只要先證給定的三元數組的某些組合數會分別出現在各行(最末行可不計)，拿各行出現的最小組合數去比較，找出最大值，該最大值減去行數即是 F 數。

6. 通式 6：g(8, 5+2k, 9+2k)=8k+12

〈證明〉將數字依序每 8 個排成一列如下：

第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行	第 5 行	第 6 行	第 7 行	第 8 行
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(圖六)

根據前頁提到的證明原理，只要取圖六每行最小的 5+2k 與 9+2k 組合數值，比較它們的最大值即可，列出四個表如下：

(表六-1)

5+2k 與 9+2k 的各種組合	在圖六的哪一“行”	「同行」的數值比較
5+2k	**1**	
9+2k	**5**	
(5+2k)+(9+2k)	6	
2x(5+2k)	2	2x(5+2k)＜2x(9+2k)
2x(9+2k)	2	
2x(5+2k)+(9+2k)	7	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
(5+2k)+2x(9+2k)	3	3x(5+2k)＜(5+2k)+2x(9+2k)
3x(5+2k)	3	
3x(9+2k)	7	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
4x(5+2k)	4	4x(5+2k)＜2x(5+2k)+2x(9+2k)
2x(5+2k)+2x(9+2k)	4	

若 5+2k 與 9+2k 的各種組合中在圖六為同一行的數，於上表的格子以同色為底標記，再經過比較則有：

5+2k＜9+2k＜2x(5+2k)＜(5+2k)+(9+2k)＜3x(5+2k)＜2x(5+2k)+(9+2k)＜4x(5+2k)

(表六-2)

5+2k 與 9+2k 的各種組合	在圖六的哪一“行”	「同行」的數值比較
5+2k	**3**	
9+2k	**7**	
(5+2k)+(9+2k)	2	
2x(5+2k)	6	2x(5+2k)＜2x(9+2k)
2x(9+2k)	6	
2x(5+2k)+(9+2k)	5	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
(5+2k)+2x(9+2k)	1	3x(5+2k)＜(5+2k)+2x(9+2k)
3x(5+2k)	1	
3x(9+2k)	5	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
4x(5+2k)	4	4x(5+2k)＜2x(5+2k)+2x(9+2k)
2x(5+2k)+2x(9+2k)	4	

(表六-3)

5+2k 與 9+2k 的各種組合	在圖六的哪一“行”	「同行」的數值比較
5+2k	**5**	
9+2k	**1**	
(5+2k)+(9+2k)	6	
2x(5+2k)	2	2x(5+2k)＜2x(9+2k)
2x(9+2k)	2	
2x(5+2k)+(9+2k)	3	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
(5+2k)+2x(9+2k)	7	3x(5+2k)＜(5+2k)+2x(9+2k)
3x(5+2k)	7	
3x(9+2k)	3	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
4x(5+2k)	4	4x(5+2k)＜2x(5+2k)+2x(9+2k)
2x(5+2k)+2x(9+2k)	4	

(表六-4)

5+2k 與 9+2k 的各種組合	在圖六的哪一“行”	「同行」的數值比較
5+2k	7	
9+2k	3	
(5+2k)+(9+2k)	2	
2x(5+2k)	6	2x(5+2k)＜2x(9+2k)
2x(9+2k)	6	
2x(5+2k)+(9+2k)	1	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
(5+2k)+2x(9+2k)	5	3x(5+2k)＜(5+2k)+2x(9+2k)
3x(5+2k)	5	
3x(9+2k)	1	2x(5+2k)+(9+2k)＜3x(9+2k)
4x(5+2k)	4	4x(5+2k)＜2x(5+2k)+2x(9+2k)
2x(5+2k)+2x(9+2k)	4	

綜合可得到 4x(5+2k)都是所求的的最大值，因此

$$g(8, 5+2k, 9+2k) = 4\times(5+2k) - 8 = 8k + 12$$ 。

其餘的通式，主要證明方法仍是刪法，因爲字數限制，故證明請參見實驗日誌，

通式 7：g(3, 4+k, 5+2k)=2k+2，k 不可以有形如 3t+2 的因數

通式 8：g(4, 7+2k, 13+2k)=4k+10

通式 9：g(5, 3+5k, 4+5k)=10k+2

通式 10：g(5, 6+5k, 13+5k)=10k+14

通式 11：g(5, 4+5k, 7+5k)=10k+6

通式 12：g(5, 7+5k, 16+5k)=10k+18

補充說明四：通式 5 和通式 8 皆同樣產生除以 4 餘 2 的偶數，通式 9 和 11 分別產生個位數爲 2、6 的偶數，通式 10 則產生大於 4、個位數爲 4 的偶數，通式 12 則產生大於 8、個位數爲 8 的偶數，通式 7 產生非 6 倍數的偶數。

補充說明五：通式 1~12 之中的三個數都符合最大公因數爲 1，證明請參考實驗日誌。

四、三元 F 數的性質

我從《小倆口的不能》得到啟示(表二)去研究 F_3 的奇偶性，從 F 數逆求三元數組；再依自己補充的性質，探討 F_3 與變數互質與否。

以下皆利用前面得到的通式去保證 F_3 的一些性質。

(一)F_3 奇偶性探討

從表四可知 F_3 有奇有偶，不同於只是奇數的 F_2。

1.F_3 可包含所有奇數

從通式 1 即可知，因為 N 是奇數，所以 N－2 和 N+2 也是，若 N≧3 代表所有的奇數，則 N－2 和 N+2 也是如此，所以，F_3 可包含所有的奇數。

2.F_3 包含的偶數種類

整理如下表

(表七)

	偶數種類	根據的通式	無法表示的偶數
1	2k，k 不可有 3 的因數	4	6 的倍數
2	4k+2	5，8	4 的倍數
3	2k+2，k 不可有形如 3t+2 的因數	7	6 的倍數
4	10k+2	9	
5	10k+14	10	
6	10k+6	11	
7	10k+18	12	
8	8k+12	6	4 的偶數倍

由於未得到可確定 F_3 的個位數為 0、以及部份 4 和 6 的倍數的通式，我整理出還無法確定 F_3 是否包含的偶數：

120k

這部份只能留待未來再研究了。

(二) 從 F 數逆求三元數組—g_3^{-1}(N)的探討

從表二已知 g_2^{-1}(N)不唯一，再由 g(4, 5, 6)=g(3, 8, 10)=7 也知 g_3^{-1}(N)不唯一，所以這裡使用“≈”表示 F 數為 N 的數組，即 $g_2^{-1}(5)\approx(2, 7)$，$g_2^{-1}(5)\approx(3, 4)$，$g_3^{-1}(7)\approx(4, 5, 6)$，$g_3^{-1}(7)\approx(3, 8, 10)$。

經過整理與轉換通式，將逆求三元數組的結果列在表八

(表八)-給定整數逆求的三元數組列表

給定的正整數 N		逆求的三元數組	備註
奇/偶	類型		
奇數	N≧1	$g_3^{-1}(N)\approx(N+2, 2, 2n)$	從補充說明三即可推得
		$g_3^{-1}(N)\approx(2, N+2, (N+2)n)$	
	N≧5	$g_3^{-1}(N)\approx(N-2, 4, 6)$	
偶數	4k+2	$g_3^{-1}(4k+2)\approx(4, 3+2k, 5+2k)$	k≧0
		$g_3^{-1}(4k+2)\approx(4, 7+2\times(k-2)\ 5+2\times(k-2))$	k≧2
	2k	$g_3^{-1}(2k)\approx(3, 3+k, 3+2k)$	k 不可有 3 的因數
		$g_3^{-1}(2k)\approx(3, 4+(k-1), 5+2\times(k-1))$	k≧1 且沒有形如 3t+2 的因數
	10k+2	$g_3^{-1}(10k+2)\approx(5, 3+5k, 4+5k)$	k≧0
	10k+4	$g_3^{-1}(10k+4)\approx(5, 6+5\times(k-1), 13+5\times(k-1))$	k≧1
	10k+6	$g_3^{-1}(10k+6)\approx(5, 4+5k, 7+5k)$	k≧0
	10k+8	$g_3^{-1}(10k+8)\approx(5, 7+5\times(k-1), 16+5\times(k-1)$	k≧1
	8k+12	$g_3^{-1}(8k+12)\approx(8, 5+2k, 9+2k)$	k≧0

但對於任意形如 120k 的偶數 N，是否存在(a_1, a_2, a_3)使得 $g(a_1, a_2, a_3)=N$？仍是我未來要努力的方向。

(三)F_3分別和變數互質與否

1. 補充 F_2的性質

《小倆口的不能》未提到下列性質：

性質 2：GCD(g(a,b), a)＝GCD(g(a,b), b)＝1

〈證明〉

我利用反証法來證。

1.假設 g(a, b)和 a 有公因數 c＞1，那麼 c 是 a×b－a－b 的因數。

2.已知 b 和 a 互質，故 c 不會是 b 的因數，而 a×b－a 有 c 的因數，再減去 b 就不會有 c 的因數，和「c 是 a×b－a－b 的因數」矛盾，故知道 GCD (g(a,b), a)=1。

3.同理可得 GCD g(a,b), b)=1。

性質 2 的証明用到下面的引理：

$\boxed{\text{引理 1}}$：如果 c 是 A 的因數，c 不是 B 的因數，則 c 不會是 A±B 的因數。

〈證明〉

令 A＝c×k_1，B＝c×k_2+r，1≦r＜c，則 A±B＝c×(k_1±k_2)+r，不會有因數 c。

故得知 2 變數的 F 數分別和變數互質，而 3 變數的情形呢？從表四發現 3 種情形，

第一種：F 僅和其中一變數不互質，

例二：g(2, 5, 6)＝3，GCD(3, 6)＝3，GCD(3, 2)＝GCD(3, 5)＝1。
第二種情形是 F_3 恰和 2 個變數不互質，
例三：g(10, 11, 18)=45，GCD(45, 10)=5，GCD(45, 18)=3。
第三種情形是 F_3 分別和變數互質，
例四：g(2, 4, 5)＝3，GCD(3, 2)＝GCD(3, 4)＝GCD(3, 5)＝1。

除了例二～例四外，從我找到的 F_3 通式及利用引理 1 和附錄一定理 A，就能推導出有無限多組數組，都能符合那三種情形，見表九-1~表九-3：

(表九-1)— F_3 恰和其中一個變數不互質的例子

	由通式產生的例子	說明
1	若 GCD(N, m)=1， g(N, m, g(N, m)×k×m)＝g(N, m)	從通式 2 產生的特例，其中 k≧1，依性質 2 已知 g(N, m)分別和 N、m 互質，接著找 g(N, m)＞1，如此一來，GCD(g(N, m), g(N, m)×k×m)=g(N, m)＞1。
2	g(6t+1, 4, 6)=3t+3	利用通式 3：g(N,4,6)=N+2，因爲 GCD(N+2, N)＝GCD(N+2, 4)＝1，所以只有 6 可能與 N+2 不互質。如果 N+2 和 6 不互質，則 GCD(N+2, 6)＝3，得知 N＝3k+1，但因爲 N 是奇數，所以 k＝2t，故當 N＝6t+1，GCD(g(N, 4, 6), 6)＝3＞1。
3	g(3,3+k,3+2k)=2k，k≧1 且非 3 的倍數。k 爲奇數	(1)從附錄一的定理 A 可知 2k 和 3+k 的公因數也是 2×(3+k)-2k＝6 的因數，但不會有因數 3，所以 GCD(2k, 3+k)≦2，而且可知當 k 爲奇數時 GCD(2k, 3+k)＝2 (2) GCD(2k, 3+2k)=1
4	g(4, 3+2k, 5+2k)=4k+2	GCD(2+4k, 3+2k)＝2， GCD(2+4k, 3+2k)＝GCD(2+4k, 5+2k)＝1。
5	g(3, 4+k, 5+2k)=2k+2，k 不可以有形如 3t+2 的因數，當 k 爲偶數。	(1)2k+2 不會是 3 的倍數。 (2) 2k+2 和 4+k 的公因數也是 2×(4+k)－(2k+2)＝6 的因數，但 2+2k 沒有因數 3，故得知當 k 爲偶數時，GCD(2k+2, 4+k)＝2。 (3)GCD(2k+2, 5+2k)=1。
6	g(4, 7+2k, 13+2k)=4k+10	(1) 4k+10 和 7+2k 的公因數也是 2×(7+2k)－(4k+10)＝4 的因數，但 7+2k 是奇數，故 GCD(4k+10, 7+2k)＝1。 (2) 同理，GCD(4k+10, 13+2k)＝1。 (3) GCD(4k+10, 4)＝2。
7		(1) 10k+6 和 4+5k 的公因數也是 2×(4+5k)－(10k+6)＝2 的因數，若 GCD(10k+6, 4+5k)＝2

9	g(5, 4+5k, 7+5k)=10k+6	則 k 必需是偶數。 (2)10k+6 和 7+5k 的公因數也是 2×(7+5k)－(10k+6)＝8 的因數，若 GCD(10k+6, 7+5k)≧2，則 k 必需是奇數。 (3)承(1)、(2)，因爲 k 只能是奇偶數其中一種，所以 GCD(10k+6, 4+5k)和 GCD(10k+6, 7+5k)必是其中一個大於 1，另一個爲 1。 (4) GCD(10k+6, 5)＝1
8	g(5, 7+5k, 16+5k)=10k+18，k=2t	當 k=2t，7+5k＝10t+7，16+5k＝10t+16，10k+18＝20t+18，GCD(20t+18,5)＝ ＝GCD(20t+18, 10t+7)＝1， GCD(20t+18, 10t+16)≧2。
9	g(5, 7+5k, 16+5k)=10k+18，k=2t+1，t 非 7 的倍數。	(1)當 k=2t+1，7+5k＝10t+12，16+5k＝10t+21，10k+18＝20t+28，GCD(20t+28, 10t+12)≧2。 (2)因爲 GCD(20t+28, 10t+21)只可能是 2×(10t+21)－(20t+28)＝14 的因數，但因爲 t 沒有 7 的因數，加上 10t+21 必是奇數，所以得知當 t 非 7 的倍數，GCD(20t+28, 10t+21)＝1

(表九-2)—F_3恰和 2 變數不互質的例子

	由通式產生的例子	說明
1	g(8, 5+2k, 9+2k)=8k+12，當 k＝3t	當 k＝3t，則 5+2k=6t+5，9+2k=6t+9，8k+12=24t+12，可得 GCD(24t+12, 6t+5)＝1，GCD(24t+12, 6t+9)≧3，GCD(24t+12, 8)＝4。
2	g(5, 3+5k, 4+5k)=10k+2，當 k＝6t+1	當 k＝6t+1，則 3+5k=30t+8，4+5k=30t+9，10k+2=60t+12，可得 GCD(60t+12, 30t+8)≧2，GCD(60t+12, 30t+9)=3，GCD(60t+12, 5)=1。
3	g(5, 6+5k, 13+5k)=10k+14，當 k＝6t+4	當 k＝6t+4，則 6+5k=30t+26，13+5k=30t+33，10k+14=60t+24，可得 GCD(60t+24, 30t+26)≧2，GCD(60t+24, 30t+33)≧3，GCD(60t+24, 5)=1。
4	g(5, 7+5k, 16+5k)=10k+18，k=2t+1，t 是 7 的倍數。	承表九-1 的說明第 9 列，若 t 爲 7 的倍數，則 GCD(20t+28, 10t+21)≧7。

(表九-3)—F_3分別和變數互質的例子

	由通式產生的例子	說明
1	g(N, m, mp)=g(N, m)，p 爲質數且大 g(N, m)。	通式 2 的特例，因爲 GCD(p, g(N, m)=1，再依據性質 2 便得證。
2	g(6t+3, 4, 6)=6t+5 g(6t+5, 4, 6)=6t+7	從通式 3：g(N,4,6)=N+2 來看，如果 GCD(N+2, 6)＝1，則 N＝3k 或 N＝3k+2，因爲 N 是奇數，

		所以 $k=2t+1$，因而 $N=6t+3$，或 $N=6t+5$。得到：若 $N=6t+3$，或 $N=6t+5$，則 $g(N, 4, 6)$分別和 N、4、6 互質。
3	$g(3,3+k,3+2k)=2k$，$k\geq 1$ 且非 3 的倍數，k 爲偶數	從表九-1 的說明第 3 列即可知。
4	$g(3, 4+k, 5+2k)=2k+2$，k 不可以有形如 3t+2 的因數，當 k 爲奇數。	從表九-1 的說明第 5 列即可知。

F_3有沒有可能分別和變數不互質？我百思仍不得解決，只好留待將來再研究了。

五、證明定理一

定理一（ Schur 定理的結論之一）：

給一些正整數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，它們的最大公因數為 1，則存在一個數 x，使得比 x 大的數都可由 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 表示。

當初老師問我題一(p4)時，我覺得很奇怪，如果不能確定在某數之後的數都能被 5 和 7 表示，如何算這一題？後來才知是定理一的結果，但正是先前的疑問引起我的好奇心，我想試著證明；主要證明方法爲「數學歸納法」。

(一)定理對 2 變數成立

雖然二變數的 F 數在《小倆口的不能》中已求出，但證明過程全爲文字敘述，我利用「刪法」重證一次，以圖示配合說明，使證明更簡潔。

命題一：如果 $GCD(a_1, a_2)=1$，則存在 $x_2=a_1\times a_2-a_1-a_2$，比 x_2 大的數，都可被(a_1, a_2)表示。

〈證明〉依據**刪法**，將數字排列如圖七：

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & a_1 \\
a_1+1 & a_1+2 & a_1+3 & \cdots\cdots & 2a_1 \\
2a_1+1 & 2a_1+2 & 2a_1+3 & \cdots\cdots & 3a_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
na_1+1 & na_1+2 & na_1+3 & \cdots\cdots & na_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

(圖七)

1.第 a_1 行可先刪去，因爲都是 a_1 的倍數。

2.接著要證明「在圖七的第一～(a_1-1)行，a_2 的 $1\sim(a_1-1)$倍不會在『同一行』」，若成立就表示定理對二變數成立。

3.利用反証法；假設「圖七中，a_2 的 $1\sim(a_1-1)$倍有兩數在『同一行』」，令它們是 ma_2，ka_2，且 $ma_2>ka_2$。首先，同一行的數字上下相差都是 a_1 的倍數，因此(ma_2-ka_2)是 a_1 的倍數，而 $ma_2-ka_2=(m-k)\times a_2$，$(m-k)<a_1$，如此一來 a_2 和 a_1 不互質，和條件矛

盾。

4.而且 F_2 就在 $a_2\times(a_1-1)$ 的上方，也就是 $g(a_1, a_2)=a_2\times(a_1-1)-a_1=a_1\times a_2-a_1-a_2$，意即比 $a_1\times a_2-a_1-a_2$ 大的數都可被 (a_1, a_2) 表示。

(二)從 n 變數到 n+1 變數

先說明得到証明策略的思考過程，最後是正式的証明內容。

1. 策略的來源

(1)改變刪法的組成

老師提醒我可嘗試將三變數轉換成二變數的情形，好進行思考。一開始我想用求三變數的刪法去證明定理一對 3 變數成立，但一直沒有進展，直到有天我靈機一動——何不改變刪法中排數字的方法！以數組(6, 10, 15)為例，我把 6 和 10 的各種組合排成如圖八，而且做記號—若它們的組合數與 15 互質，以粉色底為標記；與 15 不互質，以黃色底為標記，填色結果如下：

10k+6×0	10k+6×1	10k+6×2	10k+6×3	10k+6×4	10k+6×5	10k+6×6	10k+6×7	10k+6×8	10k+6×9	10k+6×10
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70
20	26	32	38	58	50	56	62	68	74	80
30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110
60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
70	76	82	88	94	100	106	112	118	124	130
80	86	92	98	104	110	116	122	128	134	140
90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150

圖八-(6, 10)的各種表示數與 15 互質與否的分布圖

似乎(6, 10)的組合數與 15 互質與否有規律，於是我再找一些不同的三元數組，仿圖八再畫圖，以圖九、十為例：

15k+6×0	15k+6×1	15k+6×2	15k+6×3	15k+6×4	15k+6×5	15k+6×6	15k+6×7	15k+6×8	15k+6×9	15k+6×10	15k+6×11	15k+6×12	15k+6×13	15k+6×13
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
30	36	42	48	78	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	117	123	129
60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144
75	81	87	93	99	105	111	117	123	129	135	141	147	153	159
90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174

105	111	117	123	129	135	141	147	153	159	165	171	177	183	189
120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204
135	141	147	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	213	219
150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	222	228	234
165	171	177	183	189	195	201	207	213	219	225	231	237	243	249
180	186	192	198	204	210	216	222	228	234	240	246	252	258	264
195	201	207	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267	273	279

圖九-(15, 35)的各種表示數與 42 互質與否的分布圖

35k+15×0	35k+15×1	35k+15×2	35k+15×3	35k+15×4	35k+15×5	35k+15×6	35k+15×7	35k+15×8	35k+15×9	35k+15×10
0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
35	50	65	80	95	110	125	140	155	170	185
70	85	100	115	130	145	160	175	190	205	220
105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255
140	155	170	185	200	215	230	245	260	275	290
175	190	205	220	235	250	265	280	295	310	325
210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360
245	260	275	290	305	320	335	350	365	380	395
280	295	310	325	340	355	370	385	400	415	430
315	330	345	360	375	390	405	420	435	450	465
350	365	380	395	410	425	440	455	470	485	500

圖十-(6, 15)的各種表示數與 70 互質與否的分布圖

(2)觀察

原先我想整理出這些圖裡「粉紅色」與「黃色」分布的規律，但沒有得到具體結果，不過在整理過程中，我發現

$$GCD(6+10\times1,\ 15)=1$$
$$GCD(10+6\times1,\ 15)=1$$
$$GCD(35+15\times2,\ 42)=1$$
$$GCD(15+35\times2,\ 42)=1$$
$$GCD(15+6\times7,\ 70)=1$$
$$GCD(6+15\times7,\ 70)=1$$

觀察上述發現有了一個想法，以(6, 15, 70)舉例說明，利用課本教的質因數分解，可發現 GCD(6+15×7, 70)=1 的一種解釋，如式 1，

$$6+15\times7=2\times3+3\times5\times7, \qquad (1)$$

$$70=2\times5\times7,$$

70 的質因數有 2、5、7，利用引理 1 知道：2 是 6 的因數，但不是 15×7 的因數；5 是 15×7 的因數，但不是 6 的因數；7 是 15×7 的因數，但不是 6 的因數，則 70 的任何一個質因

數都不會是 6+15×7 的因數—這個解釋將成爲證明引理 2 的線索。

(3)擬定策略

上述讓我想到對 GCD(a, b, c)=1 應可找到一個 m 使得 GCD(a+mb, c)=1，爲什麼要有這個想法呢？因爲如果它是對的，則我就可以擬出證明定理一對 3 變數成立的策略，如下：

若 GCD(a_1, a_2, a_3)＝1，存在 m 使得 GCD(a_1+ma_2，a_3)＝1，此時(a_1+ma_2，a_3)如同兩變數，表示存在 x 使得比 x 大的數都可被(a_1+ma_2，a_3)表示，也推得比 x 大的數都可被(a_1, a_2, a_3)表示，因為 a_1+ma_2 是被 a_1, a_2 表示的數。

類似地，如果要證明 4 變數的情形，當 GCD(a_1, a_2, a_3, a_4)＝1，如果能證明存在 m 使得 GCD(a_1＋ma_2, a_3, a_4)＝1，如此一來就可轉換成三變數的情形。

而且，我觀察出似乎應先證 GCD(a_1＋ma_2, GCD(a_3, a_4))＝1，這就是引理 4 的由來。

2. 正式的證明

(1)引理

$\boxed{\text{引理 2}}$：若 GCD(a, b, c)＝1，則當 $m=\dfrac{c}{GCD(a,c)\times GCD(b,c)}$，GCD(a+mb, c)＝1。

〈證明〉

規定 d_{ij}＝GCD(i,j)。首先 GCD(d_{ab},d_{bc})= GCD(d_{ab},d_{ca})= GCD(d_{bc},d_{ca})=1，因爲若不然，則 GCD(a,b,c)＞1。所以可令 a＝d_{ab}×d_{ac}×a′，b＝d_{ab}×d_{bc}×b′，c＝d_{bc}×d_{ca}×c′，也可得 d_{ab}、d_{ac}、d_{ca}、a′、b′、c′兩兩互質。

故 a+mb= d_{ab}×d_{ac}×a′+m×d_{ab}×d_{bc}×b′，接著說明 GCD(a+c′×b, c)=1。

c 的因數可分三類：d_{bc}、d_{ca}、c′，便知 c 的因數不是 a 的因數就是c′×b 的因數，但不會同時成立，故根據引理 1 即可知 c 與 a+c′×b 沒有大於 1 的公因數，所以引理成立(註 3)。

老師分析還需要引理 3，才能完成證明，但老師要我自己證明，研究才能繼續。

$\boxed{\text{引理 3}}$：GCD(a_1, a_2, ⋯, a_n)＝GCD(a_1, a_2, ⋯, a_i, GCD(a_{i+1}, a_{i+2}, ⋯, a_n))

〈證明〉

設 GCD(a_1, a_2,⋯, a_n)＝d，a_1＝d×a'_1，a_2＝d×a'_2，⋯，a_n＝d×a'_n，則

GCD (a_{i+1}, a_{i+2},⋯, a_n)＝dk，接著證明 GCD($a'_1, a'_2, \cdots, a'_i$, k)＝1 即可，利用反證法，若

GCD($a'_1, a'_2, \cdots, a'_i$, k)＝e＞1，則

GCD(a_1, a_2,⋯, a_n)＝d×e，產生矛盾，故引理得證。

註 3：我也曾給出 m 的一般式，但老師檢查後發覺有誤，故把它更正。

$\boxed{\text{引理 4}}$：若 $GCD(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$，$d=GCD(a_3, a_4, \cdots, a_n)$，則當

$$m=\frac{d}{GCD(a_1,d)\times GCD(a_2,d)}，GCD(a_1+ma_2, a_3, a_4, \cdots, a_n)=1$$

〈證明〉

從引理 3 可知 $GCD(a_1, a_2, d)=1$，接著根據引理 2 得知當 $m=\frac{d}{GCD(a_1,d)\times GCD(a_2,d)}$

$GCD(a_1+ma_2, d)=1$，再依引理 3 則得 $GCD(a_1+ma_2, a_3, a_4,\cdots, a_n)=1$。

(2)完成證明

設命題對 $n=k$ 成立；即對 k 個最大公因數爲 1 的數，存在 x 使得比 x 大的數都可被這 k 個數表示。

現有 k+1 個數 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$，且 $GCD(a_1, a_2,\cdots, a_{k+1})=1$，根據引理 4 可得存在 m 使得 $GCD(a_1+ma_2, a_3, a_4, \cdots, a_{k+1})=1$，便轉換成 k 個變數的情形，表示比 x 大的數 N 都可被 $(a_1+ma_2, a_3, a_4, \cdots, a_{k+1})$ 表示，也就是

$$\begin{aligned} N&=C_1\times(a_1+ma_2)+C_2\times a_3+C_3\times a_4+\cdots+C_k\times a_{k+1} \\ &=C_1\times a_1+C_1\times ma_2+C_2\times a_3+C_3\times a_4+\cdots+C_k\times a_{k+1} \end{aligned}$$

■

陸、研究結論

一、得到 12 條特殊的 F_3 通式。

二、F_3 的奇偶性

(一)F_3 可以包含所有奇數及部份偶數。

(二)不確定 F_3 是否包含形如 120k 的偶數。

三、從 F_3 逆求三元數組

(一)對於任意奇數 $N\geqq1$，至少存在一個三元數組的 F 數為 N。

(二)除了形如 120k 的偶數尚待研究外，其餘的偶數皆可逆求出三元數組。

四、F 數和變數互質與否。

(一)下列三種情形的數組有無限多組。

1. F_3 恰和其中一個變數不互質。

2. F_3 恰和兩個變數不互質。

3. F_3 分別和變數互質。

(二)不確定「F_3 分別和變數不互質」是否有例子。

五、重證了 Schur 定理的結論之一。

柒、展望未來

一、F_3 是否能涵蓋所有偶數？

二、是否有 F_3 分別和變數都不互質的情形？

三、繼續探討四變數，或 n 變數的 F 數。

捌、參考資料

1. 全國中小學科學展覽會-歷屆優秀作品。上網日期：民國九十八年八月一日。取自：

   http://www.ntsec.gov.tw/m1.aspx?sNo=0000263。

2. 杜信達。小俩口的不能。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 40 屆國小組數學科。

3. 康軒文教事業教科書編撰委員會(民 98)。最大公因數與最小公倍數。國民小學數學課本第十一冊。台北縣。康軒文教事業股份有限公司。

4. 考試之神。上網日期：民國九十八年八月十日。取自：

   http://tw.myblog.yahoo.com/jw!y5.o5HSQFRmJsjexxfB1tkM-/article?mid=7828。

5. 硬幣問題。上網日期：民國九十八年八月二十日。取自維基百科網頁：

   http://en.wikipedia.org/wiki/Coin_problem

6. 硬幣問題。上網日期：民國九十八年八月二十日。取自 Wolffram Mathworld 網頁 ：

   http://mathworld.wolfram.com/CoinProblem.html

7. Schur 定理。上網日期：民國九十八年八月二十日。取自維基百科網頁：
   http://en.wikipedia.org/wiki/Schur%27s_theorem

8. Issai Schur。上網日期：民國九十八年八月二十四日。取自維基百科網頁：
   http://en.wikipedia.org/wiki/Issai_Schur。

9. 劉京友(民 96)。小學數學奧林匹亞訓練題庫。九章出版社。台北市：九章。

【評語】080408

1.討論的問題相當有趣，探討也相當深入，雖未能得到一般情況的公式，但推導出一些法則，成果不錯。

2.問題有一定的深度，然而在分析推理各個面向，仍有加強的空間。

3.本作品可看出學生在數學推理上具有不錯的能力。