

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080407

切蛋糕的聯想—分數的組合與分解

學校名稱：高雄縣鳳山市鳳山國民小學

作者： 小六 洪嘉隆 小六 潘禹翔 小六 蘇品瑄	指導老師： 戴碧蓁 林雅萍
---	-----------------------------

關鍵詞：擴分、約分

摘 要

歡樂的慶生會裡，我們在切蛋糕的過程中，發現生活情境中也有數學呢！而且發現

一個有趣的問題： $\frac{\square\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 。我們利用在五六年級南一版第十冊與十一冊裡，

以前學過的等值分數、最簡分數、擴分、約分、通分等方法，從最少空格數四格($\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = 1$)

到十格($\frac{\square\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$)逐一討論，剛開始是用擴分的方式，列出所有值 $\frac{1}{2}$ 的三

位數分數($\frac{\square\square\square}{\square\square\square}$)，再組合剩下的數字，剛開始很費時卻很詳細地列出答案，後來，發現用

「分數組合分解」的方式，能很快地找出答案，是令我們意想不到的事，此外，我們也找到被加數是其它分數的解答，甚至也探討空格不同的類型。未來，希望能研究高深的數學理論來證明我們研究的結果，並用電腦程式來解決數學的問題。

切蛋糕的聯想—分數的組合與分解

壹、研究動機：

班上舉辦了每個月一次的慶生會，同學準備了一個超級大蛋糕，會中，老師切了一半，一半給男生，一半給女生，男女生都自己切切看分到的一半，要怎麼切才會一樣大？因男女生人數不一樣，這時，我忽然想到一個趣味問題，「有一塊大蛋糕，切成 $\frac{2}{3}$ 給男生，剩下的給女生，而男生有 12 人，女生有 6 人，要怎麼分才會一樣多，每人分得全部的幾分之幾？」經過大家思考之後，很多人都回答「 $\frac{1}{18}$ 」，但是算法卻都不一樣。正當大家興高采烈之際，老師說：「我想到一個數學謎題來考考大家的數學反應。」同學絞盡腦筋思考著，終於有兩位同學找出答案了！不過奇怪的是他們的答案卻不一樣！大家心想，到底有多少組答案呢？另外，有同學提出若格子變少，是不是也能找到不同的連續數字呢？後來，就在老師的指導下，全班一起完成下面的研究。



貳、題目內容：

題目內容是用 10 個阿拉伯數字 0~9，填入格子內，不可重複。每個分數（甲、乙）的值都是 $\frac{1}{2}$ 。

$$(\text{甲}) \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + (\text{乙}) \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = 1$$

$$\text{即 (男生)} \quad \frac{1}{2} \quad + \quad (\text{女生}) \quad \frac{1}{2} \quad = 1$$

參、研究目的：

一、快速找出答案，並發現數學的規律性。

二、從遊戲中學習數學歸納的方法，並怎樣來解決問題。

肆、 研究問題：簡化算式，從最少的空格來著手，並找尋連續的數字（數字不可重複）。

一、找出 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

二、找出 $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

三、找出 $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

四、找出 $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

五、找出 $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

六、找出 $\frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

七、找出 $\frac{\square\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 的答案，並發現連續的數字。

八、找出原分數「被加數」是 $\frac{1}{2}$ 以外的分數時，當甲、乙的值是不同分數時，會有那些解答呢？

伍、 研究過程與方法：

一、首先找 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ （空格數四格）的解。運用分數擴分的方式，找出不同數字的分數。發現解只有 4 組，其中並沒有找到有連續的數字：

解答	① $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1$	② $\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$	③ $\frac{2}{4} + \frac{3}{6} = 1$	④ $\frac{3}{6} + \frac{4}{8} = 1$
用到的數字	1236	1248	2346	3468

※ **發現**：

（一）統計所用數字次數如下表：

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
次數	2	3	3	3	0	3	0	2	0	0

10 個數字中，2、3、4、6 用的最多次，完全沒用到的有 5、7、9、0。由於我們

要找的 $\frac{\square}{\square}$ 的值為 $\frac{1}{2}$ ，而 5、7、9、0 不可能出現於分母（分母必須為偶數，而 0 不能為分母）；也不能出現於分子（若分子為 5、7、9，則分母會超過 1 位數，分子為 0 的話則值也為 0），所以 5、7、9、0 不會被用到。

（二）4 組解中並沒有連續的數字。但發現幾乎都是 236、248、468 的組合。

二、尋找 $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ (空格數五格) 的解。剛開始，我們用擴分的方式找不同數字的分數，發現它的解有 8 組，其中並沒有找到有連續的數字：

解答	用到的數字	解答	用到的數字
① $\frac{5}{10} + \frac{2}{4} = 1$	01245	⑤ $\frac{7}{14} + \frac{3}{6} = 1$	13467
② $\frac{5}{10} + \frac{3}{6} = 1$	01356	⑥ $\frac{8}{16} + \frac{2}{4} = 1$	12468
③ $\frac{5}{10} + \frac{4}{8} = 1$	01458	⑦ $\frac{9}{18} + \frac{2}{4} = 1$	12489
④ $\frac{6}{12} + \frac{4}{8} = 1$	12468	⑧ $\frac{9}{18} + \frac{3}{6} = 1$	13689

※發現：

(一) 其中最常用的數字是 1(每一組都用到 1)，被用到最少次的是 7(1 組)，再來是 9(2 組)，而 3、5、0 都只有 3 組

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
次數	8	4	3	6	3	5	1	5	2	3

7 和 9 都只能出現在分子，不可能會出現在分母，所以只有 $\frac{7}{14}$ 會用到 ”7”，和 $\frac{9}{18}$

會用到 ”9”。至於 0 只能在分母的個位數，就 $\frac{a}{bc}$ 而言，0 只能在 c 的地方，無法在 a 或 b。

(二) 8 組解裡面雖然沒有連續的數字，但是有「12468」的組合，跟前面一所述的「248」、「468」很相似。

三、尋找 $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ (空格數六格) 的解。我們依然用擴分的方式，但因為 $\frac{10}{20}$ 、 $\frac{11}{22}$ 、 $\frac{12}{24}$ 皆

有重複的數字，所以從 $\frac{13}{26}$ 開始找，總共找到 24 組解（其中找到了有連續的數字），整理如下：

組別	解答	使用的數字	組別	解答	使用的數字	組別	解答	使用的數字
1	$\frac{13}{26} + \frac{4}{8} = 1$	123468	9	$\frac{29}{58} + \frac{3}{6} = 1$	235689	17	$\frac{38}{76} + \frac{2}{4} = 1$	234678
2	$\frac{14}{28} + \frac{3}{6} = 1$	123468	10	$\frac{31}{62} + \frac{4}{8} = 1$	123468	18	$\frac{39}{78} + \frac{1}{2} = 1$	123789
3	$\frac{15}{30} + \frac{2}{4} = 1$	012345	11	$\frac{34}{68} + \frac{1}{2} = 1$	123468	19	$\frac{39}{78} + \frac{2}{4} = 1$	234789
4	$\frac{15}{30} + \frac{4}{8} = 1$	013458	12	$\frac{35}{70} + \frac{1}{2} = 1$	012357	20	$\frac{41}{82} + \frac{3}{6} = 1$	123468

5	$\frac{16}{32} + \frac{4}{8} = 1$	123468	13	$\frac{35}{70} + \frac{2}{4} = 1$	023457	21	$\frac{43}{86} + \frac{1}{2} = 1$	123468
6	$\frac{18}{36} + \frac{2}{4} = 1$	123468	14	$\frac{35}{70} + \frac{4}{8} = 1$	034878	22	$\frac{45}{90} + \frac{1}{2} = 1$	012459
7	$\frac{19}{38} + \frac{2}{4} = 1$	123489	15	$\frac{36}{72} + \frac{4}{8} = 1$	234678	23	$\frac{45}{90} + \frac{3}{6} = 1$	034569
8	$\frac{27}{54} + \frac{3}{6} = 1$	234567	16	$\frac{38}{76} + \frac{1}{2} = 1$	123678	24	$\frac{48}{96} + \frac{1}{2} = 1$	124689

※ **發現**：

(一) 有兩組連續的數字：012345 ($\frac{15}{30} + \frac{2}{4} = 1$) 和 234567 ($\frac{27}{54} + \frac{3}{6} = 1$)，此外，有一組

沒有連續的數字：123468，其中有 8 組解都是用這一組數字構成的。

(二) 最常被用到的數字是 2、3、4、9 和 0 缺少最多（都只有被用到 7 次）

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
用到次數	16	21	22	21	9	14	9	18	7	7

(三) 發現「**組合分數**」：其中組別 1、2、10、11、20、21 這 6 組解似乎與過程一有所關聯。
過程一中的解為

$\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1$	$\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$	$\frac{2}{4} + \frac{3}{6} = 1$	$\frac{3}{6} + \frac{4}{8} = 1$
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

而 $\frac{13}{26} + \frac{4}{8} = 1$ 中的 $\frac{13}{26}$ 可以由 $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1 \rightarrow \frac{1 \rightarrow 3}{2 \rightarrow 6} \rightarrow \frac{13}{26}$ 組合成。又 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{6}$ 都可和 $\frac{4}{8}$ 相加，而且 $\frac{13}{26}$ 、 $\frac{31}{62}$ 跟 $\frac{4}{8}$ 相加之後也是 1，我們把可以的組合整理如下：

解答	能組合成的分數	延伸
$\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1$	$\frac{13}{26}$ $\frac{31}{62}$	$\frac{13}{26} + \frac{4}{8} = 1$ $\frac{31}{62} + \frac{4}{8} = 1$
$\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$	$\frac{14}{28}$ $\frac{41}{82}$	$\frac{14}{28} + \frac{3}{6} = 1$ $\frac{41}{82} + \frac{3}{6} = 1$
$\frac{3}{6} + \frac{4}{8} = 1$	$\frac{34}{68}$ $\frac{43}{86}$	$\frac{34}{68} + \frac{1}{2} = 1$ $\frac{43}{86} + \frac{1}{2} = 1$

也就是我們在 $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square} = 1$ 所討論的組別 1、2、10、11、20、21。我們將他歸納如

下： $\frac{ac}{bd} + \frac{e}{f} = 1$ 中， $ax2=b$ ， $cx2=d$ ， $ex2=f$ ，且 a、b、c、d、e、f 都為一位數時，則 $\frac{a}{b}$ 、

$\frac{c}{d}$ 、 $\frac{e}{f}$ 可互相交換，即 $\frac{ca}{db} + \frac{e}{f} = 1$ ， $\frac{ec}{fd} + \frac{a}{b} = 1$ ， $\frac{ce}{df} + \frac{a}{b} = 1$ ， $\frac{ae}{bf} + \frac{c}{d} = 1$ ， $\frac{ae}{fb} + \frac{c}{d} = 1$

(組別 1、2、10、11、20、21)。

四、尋找 $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ (空格數七格) 的解。用擴分的方式，發現它的解有 22 組 (其中有找到有連續的數字)，另外，我們也整理沒有用到的數字。

組別	解答	有用到的數字	沒用到的數字	組別	解	有用到的數字	沒用到的數字
1	$\frac{5}{10} + \frac{23}{46} = 1$	0123456	789	12	$\frac{6}{12} + \frac{45}{90} = 1$	0124569	378
2	$\frac{5}{10} + \frac{32}{64} = 1$	0123456	789	13	$\frac{7}{14} + \frac{28}{56} = 1$	1245678	039
3	$\frac{5}{10} + \frac{34}{68} = 1$	01 34568	279	14	$\frac{7}{14} + \frac{29}{58} = 1$	1245 789	036
4	$\frac{5}{10} + \frac{36}{72} = 1$	0123567	489	15	$\frac{8}{16} + \frac{27}{54} = 1$	1245678	390
5	$\frac{5}{10} + \frac{38}{76} = 1$	01 35678	249	16	$\frac{8}{16} + \frac{35}{70} = 1$	01 35678	249
6	$\frac{5}{10} + \frac{39}{78} = 1$	01 35789	246	17	$\frac{8}{16} + \frac{45}{90} = 1$	01 45689	237
7	$\frac{5}{10} + \frac{43}{86} = 1$	01 34568	279	18	$\frac{9}{18} + \frac{23}{46} = 1$	1234689	057
8	$\frac{5}{10} + \frac{46}{92} = 1$	012 4569	378	19	$\frac{9}{18} + \frac{27}{54} = 1$	0124579	036
9	$\frac{5}{10} + \frac{48}{96} = 1$	01 45689	237	20	$\frac{9}{18} + \frac{32}{64} = 1$	1234689	057
10	$\frac{6}{12} + \frac{35}{70} = 1$	0123567	489	21	$\frac{9}{18} + \frac{35}{70} = 1$	01 35789	246
11	$\frac{6}{12} + \frac{39}{78} = 1$	123 6789	045	22	$\frac{9}{18} + \frac{36}{72} = 1$	123 6789	450

※發現：

(一) 發現有 **1 組連續的數字：0123456** ($\frac{5}{10} + \frac{23}{46} = 1$ 和 $\frac{5}{10} + \frac{32}{64} = 1$)。其他雖然沒有完全連續的數字，但幾乎至少有 3 個數字會是連續的，如：**0145689**。

(二) 其中最常用到的數字是 1 (全部都有用到)，最少的是 7 和 9 (各只有 12 次)

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
用到次數	22	14	14	14	18	18	12	16	12	16

(三) 如果用分數「分解組合」的方式，把 $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 變成原來的題目

$\frac{\square\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 有下列三種情況：

$$1、\frac{\overset{A}{\square}0\square}{\underset{B}{\square}\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1 \quad 2、\frac{0\square}{\square\square} + \frac{\overset{A}{\square}\square}{\underset{B}{\square}\square} = 1 \quad 3、\frac{0\square}{\square\square} + \frac{\square\square\overset{A}{\square}}{\square\square\underset{B}{\square}} = 1$$

但是實際情形裡不可能出現 2 和 3 中的 $\frac{0\square}{\square\square}$ ，所以考慮情況 1 即可。而 $\frac{A}{B}$ 必為

$\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{8}$ ，所以要找缺少 012、024、036、048 的解，符合的只有解 14 和解 19。所以可以變成：

原解	延伸的解
$\frac{7}{14} + \frac{29}{58} = 1$	$\frac{\overset{3}{\square}\overset{0}{\square}7}{\underset{6}{\square}14} + \frac{29}{58} = 1$
$\frac{9}{18} + \frac{27}{54} = 1$	$\frac{\overset{3}{\square}\overset{0}{\square}9}{\underset{6}{\square}18} + \frac{27}{54} = 1$

(四) $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 的 22 組解裡，兩組兩組之間也有相關。設原來為 $\frac{a}{bc} + \frac{de}{fg} = 1$ ，

1、如果 $ax2$ 和 $ex2$ 都會進位，則可將 $\frac{a}{c}$ 和 $\frac{e}{g}$ 交換 $\rightarrow \frac{e}{bg} + \frac{da}{fc} = 1$ 。例如：

解 4 vs. 解 10	解 5 vs. 解 16
$\frac{5}{10} + \frac{36}{72} = 1$ vs. $\frac{6}{12} + \frac{35}{70} = 1$	$\frac{5}{10} + \frac{38}{76} = 1$ vs. $\frac{8}{16} + \frac{35}{70} = 1$

(其餘答案請參考筆記)

2、如果 $ex2$ 不進位，則 $\frac{d}{f}$ 和 $\frac{e}{g}$ 可以交換 $\rightarrow \frac{a}{bc} + \frac{ed}{gf} = 1$ 。例如：

解 1 vs. 解 2	解 3 vs. 解 7
$\frac{5}{10} + \frac{23}{46} = 1$ vs. $\frac{5}{10} + \frac{32}{64} = 1$	$\frac{5}{10} + \frac{34}{68} = 1$ vs. $\frac{5}{10} + \frac{43}{86} = 1$

(其餘答案請參考筆記)

五、尋找 $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ (空格數八格) 的解。利用擴分的方式，找出以下 16 組解，並且找到有連續的數字：

組別	解答	有用到的數字	沒有用到的數字	組別	解答	有用到的數字	沒有用到的數字
1	$\frac{13}{26} + \frac{45}{90} = 1$	01234569	78	9	$\frac{18}{36} + \frac{45}{90} = 1$	13456890	27
2	$\frac{14}{28} + \frac{35}{70} = 1$	01234578	69	10	$\frac{19}{38} + \frac{27}{54} = 1$	12345789	60
3	$\frac{15}{30} + \frac{46}{92} = 1$	01234569	78	11	$\frac{31}{62} + \frac{45}{90} = 1$	01234569	78
4	$\frac{15}{30} + \frac{48}{96} = 1$	01345689	27	12	$\frac{35}{70} + \frac{41}{82} = 1$	01234578	69
5	$\frac{16}{32} + \frac{45}{90} = 1$	01234569	78	13	$\frac{35}{70} + \frac{46}{92} = 1$	02345679	18
6	$\frac{17}{34} + \frac{28}{56} = 1$	12345678	90	14	$\frac{35}{70} + \frac{48}{96} = 1$	34567890	12
7	$\frac{17}{34} + \frac{29}{58} = 1$	12345789	60	15	$\frac{36}{72} + \frac{45}{90} = 1$	23456790	18
8	$\frac{18}{36} + \frac{27}{54} = 1$	12345678	90	16	$\frac{38}{76} + \frac{45}{90} = 1$	34567890	12

※ **發現**：

(一) 有 2 組連續的數字：**12345678** ($\frac{17}{34} + \frac{28}{56} = 1$ 和 $\frac{18}{36} + \frac{27}{54} = 1$) 以及 **34567890** ($\frac{35}{70} + \frac{48}{96} = 1$ 和 $\frac{38}{76} + \frac{45}{90} = 1$)，可組成 12 組答案。

(二) 數字中被用到最多的是 3、4、5 (全用)，其次是 1、2、6、9、0 (有 12 組)，最後是 7、8 (只有 10 組)。

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
用到次數	12	12	16	16	16	12	10	10	12	12

(三) 如果用分數「**分解組合**」的方式，找到三位數 (值為 $\frac{1}{2}$)，再把 $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 變

成原題目 $\frac{\square\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 有以下 6 種情況：

$$\begin{array}{lll}
 1、\frac{\overset{\text{A}}{\square}\square}{\underset{\text{B}}{\square}\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1 & 2、\frac{\square\square\overset{\text{A}}{\square}}{\square\square\underset{\text{B}}{\square}} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1 & 3、\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\overset{\text{A}}{\square}\square}{\underset{\text{B}}{\square}\square} = 1 \\
 4、\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square\overset{\text{A}}{\square}}{\square\square\underset{\text{B}}{\square}} = 1 & 5、\frac{\square\overset{\text{A}}{\square}\square}{\square\underset{\text{B}}{\square}\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1 & 6、\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\overset{\text{A}}{\square}\square}{\square\underset{\text{B}}{\square}\square} = 1
 \end{array}$$

要符合情況 1~4 的話，前後的 $\frac{A}{B}$ 一定是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{8}$ ；要符合情況 5、6 的話，中間的 $\frac{A}{B}$ 一定要是 $\frac{5}{1}$ 、 $\frac{6}{3}$ 、 $\frac{7}{5}$ 、 $\frac{8}{7}$ （中間 $\frac{A}{B}$ 的關係，假設為 $\frac{a}{b}$ ，b 一定是 a 乘以 2 再加 1 的個位數，也就是 $5 \times 2 + 1 = 11$ ， $6 \times 2 + 1 = 13$ ， $7 \times 2 + 1 = 15$ ， $8 \times 2 + 1 = 17$ ）。

符合情況 1~4 的有組別 14 和組別 16，符合情況 5 和 6 的有組別 1、3、5、11，

我們把它們整理如下：

解答	延伸的解	符合情況	解答	延伸的解	符合情況
$\frac{13}{26} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{13}{26} + \frac{485}{970} = 1$	6	$\frac{35}{70} + \frac{48}{96} = 1$	$\frac{351}{702} + \frac{48}{96} = 1$	2
$\frac{15}{30} + \frac{46}{92} = 1$	$\frac{185}{370} + \frac{46}{92} = 1$	5	$\frac{35}{70} + \frac{48}{96} = 1$	$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$	3
$\frac{15}{30} + \frac{46}{92} = 1$	$\frac{15}{30} + \frac{486}{972} = 1$	6	$\frac{35}{70} + \frac{48}{96} = 1$	$\frac{35}{70} + \frac{481}{962} = 1$	4
$\frac{16}{32} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{186}{372} + \frac{45}{90} = 1$	5	$\frac{38}{76} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{138}{276} + \frac{45}{90} = 1$	1
$\frac{16}{32} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{16}{32} + \frac{485}{970} = 1$	6	$\frac{38}{76} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{381}{762} + \frac{45}{90} = 1$	2
$\frac{31}{62} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{31}{62} + \frac{485}{970} = 1$	6	$\frac{38}{76} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{38}{76} + \frac{145}{290} = 1$	3
$\frac{35}{70} + \frac{48}{96} = 1$	$\frac{135}{270} + \frac{48}{96} = 1$	1	$\frac{38}{76} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{38}{76} + \frac{451}{902} = 1$	4

(四) $\frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ 的 16 組解裡，兩組兩組之間也有相關。設原來為 $\frac{ab}{cd} + \frac{ef}{gh} = 1$ ，

1、如果 bx2 和 fx2 都會進位，則可將 $\frac{b}{d}$ 和 $\frac{f}{h}$ 交換→ $\frac{af}{ch} + \frac{eb}{gd} = 1$ 。例如：

解 3 vs. 解 5	解 4 vs. 解 9
$\frac{15}{30} + \frac{46}{92} = 1$ vs. $\frac{16}{32} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{15}{30} + \frac{48}{96} = 1$ vs. $\frac{18}{36} + \frac{45}{90} = 1$

(其餘答案請參考筆記)

2、如果 bx2 進位，fx2 不進位，則 $\frac{e}{g}$ 和 $\frac{f}{h}$ 可以交換→ $\frac{ab}{cd} + \frac{fe}{hg} = 1$ 。例如：

解 1 vs. 解 8	解 2 vs. 解 12
$\frac{45}{90} + \frac{13}{26} = 1$ vs. $\frac{45}{90} + \frac{31}{62} = 1$	$\frac{35}{70} + \frac{14}{28} = 1$ vs. $\frac{35}{70} + \frac{41}{82} = 1$

六、尋找 $\frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ (空格數九格) 的解。有以下 16 組解，並且找到有連續的數字：

組別	解答	有用到的數字	沒用到的數字	組別	解答	有用到的數字	沒用到的數字
1	$\frac{52}{104} + \frac{38}{76} = 1$	012345678	9	9	$\frac{79}{158} + \frac{32}{64} = 1$	123456789	0
2	$\frac{52}{104} + \frac{39}{78} = 1$	012345789	6	10	$\frac{82}{164} + \frac{35}{70} = 1$	012345678	9
3	$\frac{54}{108} + \frac{36}{72} = 1$	012345678	9	11	$\frac{85}{170} + \frac{23}{46} = 1$	012345678	9
4	$\frac{64}{128} + \frac{35}{70} = 1$	012345678	9	12	$\frac{85}{170} + \frac{32}{64} = 1$	012345678	9
5	$\frac{67}{134} + \frac{29}{58} = 1$	123456789	0	13	$\frac{85}{170} + \frac{46}{92} = 1$	012456789	3
6	$\frac{69}{138} + \frac{27}{54} = 1$	123456789	0	14	$\frac{86}{172} + \frac{45}{90} = 1$	012456789	3
7	$\frac{73}{146} + \frac{29}{58} = 1$	123456789	0	15	$\frac{92}{184} + \frac{35}{70} = 1$	012345789	6
8	$\frac{79}{158} + \frac{23}{46} = 1$	123456789	0	16	$\frac{93}{186} + \frac{27}{54} = 1$	123456789	0

※ 發現：

(一) 有 2 組連續的數字：**123456789** 以及 **012345678**。

(二) 數字中被用到最多的是 1、2、4、5、7、8 (全用)，其次是 4、6 (有 14 組)，最後是 9、0 (只有 10 組)。

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
用到次數	16	16	14	16	16	14	16	16	10	10

七、最後目標： $\frac{\square\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ (空格數十格) 的解。運用擴分和等值分數，先找到其中一

組數字 (值為 $\frac{1}{2}$)，再用剩下的數字去組成值為 $\frac{1}{2}$ 的分數。我們發現共有 16 組解，並且整理如下：

$\frac{307}{614} + \frac{29}{58} = 1$	$\frac{309}{618} + \frac{27}{54} = 1$	$\frac{13}{26} + \frac{485}{970} = 1$	$\frac{185}{370} + \frac{46}{92} = 1$
$\frac{15}{30} + \frac{486}{972} = 1$	$\frac{186}{372} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{16}{32} + \frac{485}{970} = 1$	$\frac{31}{62} + \frac{485}{970} = 1$
$\frac{135}{270} + \frac{48}{96} = 1$	$\frac{351}{702} + \frac{48}{96} = 1$	$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$	$\frac{35}{70} + \frac{481}{962} = 1$
$\frac{138}{276} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{381}{762} + \frac{45}{90} = 1$	$\frac{38}{76} + \frac{145}{290} = 1$	$\frac{38}{76} + \frac{451}{902} = 1$

八、找出原分數「被加數」是 $\frac{1}{2}$ 以外，當甲、乙的值是不同的分數時，會有哪些解答呢？

〈一〉當甲、乙的值〈原分數〉是 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 時，會有哪些解答呢？

即 $(\text{甲})\frac{1}{3} + (\text{乙})\frac{2}{3} = 1$ 或 $(\text{甲})\frac{2}{3} + (\text{乙})\frac{1}{3} = 1$ ，也可以用組合分解的方法求得解答。

原分數 $\frac{1}{3}$	原分數 $\frac{2}{3}$	沒用到的 數字	擴分後的分數可 組合完成的答案	問題的型式
$\frac{07}{21}$	$\frac{56}{84}$	39	$\frac{307}{921} + \frac{56}{84} = 1$	$(\text{甲})\frac{1}{3} + (\text{乙})\frac{2}{3} = 1$
$\frac{09}{27}$	$\frac{56}{84}$	13	$\frac{109}{327} + \frac{56}{84} = 1$	$(\text{甲})\frac{1}{3} + (\text{乙})\frac{2}{3} = 1$
$\frac{19}{57}$	$\frac{32}{48}$	06	$\frac{169}{507} + \frac{32}{48} = 1$	$(\text{甲})\frac{1}{3} + (\text{乙})\frac{2}{3} = 1$
$\frac{29}{87}$	$\frac{34}{51}$	06	$\frac{269}{807} + \frac{34}{51} = 1$	$(\text{甲})\frac{1}{3} + (\text{乙})\frac{2}{3} = 1$
$\frac{27}{81}$	$\frac{30}{45}$	69	$\frac{630}{945} + \frac{27}{81} = 1$ $\frac{306}{459} + \frac{27}{81} = 1$	$(\text{甲})\frac{2}{3} + (\text{乙})\frac{1}{3} = 1$
$\frac{29}{87}$	$\frac{30}{45}$	16	$\frac{310}{465} + \frac{29}{87} = 1$	$(\text{甲})\frac{2}{3} + (\text{乙})\frac{1}{3} = 1$

〈二〉當甲、乙的值〈原分數〉是其它分數時，會有哪些解答呢？〈如下表和筆記〉

原分數	研究結果	被加數 擴分倍數	加數 擴分倍數	解答 個數	擴分說明與組合分解
$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	① $\frac{13}{52} + \frac{678}{904} = 1$ ② $\frac{24}{96} + \frac{531}{708} = 1$	13 24	226 倍 177 倍	2	①加數的擴分倍數多，有九組，所以能找到符合的分數。 ②有五組都差一個數字。
$\frac{1}{5} + \frac{4}{5}$	① $\frac{12}{60} + \frac{748}{935} = 1$ ② $\frac{18}{90} + \frac{372}{465} = 1$ ③ $\frac{18}{90} + \frac{276}{345} = 1$	12 18 18	187 倍 93 倍 69 倍	3	①擴分後不重複組數有 26 組，所以能找到三組解答。 ②在擴分的加數中，分子分母有很多重複的數字。

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$	① $\frac{32}{80} + \frac{417}{695} = 1$	16	139 倍	1	①加數與被加數的分母都要搶「0」、「5」，造成符合數字的組數變少了。
$\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$	① $\frac{39}{65} + \frac{284}{710} = 1$	13	142 倍	1	①祇有一組解答。 ②加數 $\frac{284}{710} = \frac{2}{5}$ (分解組合)
$\frac{1}{8} + \frac{7}{8}$	① $\frac{12}{96} + \frac{357}{408} = 1$ ② $\frac{12}{96} + \frac{735}{840} = 1$	12 12	51 倍 105 倍	2	①加數能分解成 $\frac{357}{408}$ ②加數能分解成 $\frac{735}{840}$
$\frac{2}{9} + \frac{7}{9}$	① $\frac{10}{45} + \frac{287}{369} = 1$ ② $\frac{10}{45} + \frac{728}{936} = 1$ ③ $\frac{12}{54} + \frac{609}{783} = 1$	5 5 6	41 倍 104 倍 87 倍	3	①加數能分解成 $\frac{287}{369}$ ②加數能分解成 $\frac{728}{936}$ ③9 的倍數，擴分後重複數字較少，解答組數較多。
$\frac{4}{9} + \frac{5}{9}$	① $\frac{36}{81} + \frac{405}{729} = 1$ ② $\frac{36}{81} + \frac{540}{972} = 1$	9 9	81 倍 108 倍	2	①加數能分解成 $\frac{405}{729}$ ②加數能分解成 $\frac{540}{972}$
$\frac{5}{14} + \frac{9}{14}$	① $\frac{10}{28} + \frac{369}{574} = 1$	2	41 倍	1	①加數能分解成 $\frac{369}{574}$ ($574 - 10 = 564, 56 \div 4 = 14$)
$\frac{8}{21} + \frac{13}{21}$	① $\frac{24}{63} + \frac{507}{819} = 1$	3	39 倍	1	這是一個很特殊的唯一解。
$\frac{14}{29} + \frac{15}{29}$	① $\frac{42}{87} + \frac{315}{609} = 1$	3	21 倍	1	①加數能分解成 $\frac{315}{609}$ ($609 - 20 = 589$)

〔說明〕(一)解答多組的是分母為 5 與 9 (有五組)，其次是分母 4 和 8 (有二組)，而分母 14, 21, 29 都有一組。分母愈大，解答組數就愈少。

(二)運用分數組合分解的分母有 8(二組), 9(四組), 14, 29(一組)等。

(三)在加數的擴分倍數成功的有分母為 $\frac{7}{8}$ (51, 105 倍), $\frac{7}{9}$ (41, 104 倍), $\frac{5}{9}$ (81, 108 倍),

$\frac{9}{14}$ (41 倍), $\frac{15}{29}$ (21 倍)，擴分倍數的個位是「1」有五組，個位是「9」的有三組，因此，我們預測這個方法能很快找到解答。

陸、討論：

一、我們把每一組所用到的數字次數統計如下：

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
4 格	2	3	3	3	0	3	0	2	0	0
5 格	8	4	3	6	3	5	1	5	2	3
6 格	15	20	21	20	8	13	8	17	6	6
7 格	22	14	14	14	18	18	12	16	12	16
8 格	12	12	16	16	16	12	10	10	12	12
9 格	16	16	14	16	16	14	16	16	10	10
和	75	69	71	75	61	65	47	66	42	47

隨著格子數的不同，每一組所用到的數字也會不一樣，但整體而言，1、2、3、4、6、8 比較常用，而 5、7、9、0 較少，其中 7、9、0 用的次數總和平均只有 45。我們認為分數中的分子與分母，以偶數最多，分母都是 2 的倍數，因此，上面解答中以 $\frac{1}{2}$ 來組合成的分數就有 8 組。

二、(1、2、3、6) 與 (1、2、4、8) 兩組的組合分數，因為沒有進位，所以最多組。如：

$$\frac{13}{26} = \frac{31}{62}, \frac{14}{28} = \frac{41}{82}。$$

三、其中發現數字交換規則：

$$(1) \frac{b}{d} + \frac{ef}{gh} = 1 : \text{如果 } f \times 2 \text{ 不會進位的話，則 } \frac{e}{g} \text{ 和 } \frac{f}{h} \text{ 可交換，即 } \frac{b}{d} + \frac{fe}{hg} = 1$$

$$(2) \frac{b}{cd} + \frac{ef}{gh} = 1 : \text{如果 } f \times 2 \text{ 不會進位的話，則 } \frac{e}{g} \text{ 和 } \frac{f}{h} \text{ 可交換，即 } \frac{b}{cd} + \frac{fe}{hg} = 1 ;$$

$$\text{如果 } f \times 2 \text{ 會進位的話，則 } \frac{b}{d} \text{ 和 } \frac{f}{h} \text{ 可交換，即 } \frac{f}{ch} + \frac{eb}{gd} = 1$$

$$(3) \frac{ab}{cd} + \frac{ef}{gh} = 1 : \text{如果 } b \times 2 \text{ 不會進位，而 } f \times 2 \text{ 會進位的話，則 } \frac{a}{c} \text{ 和 } \frac{b}{d} \text{ 可交換，}$$

$$\text{即 } \frac{ba}{dc} + \frac{ef}{gh} = 1 ; \text{如果 } b \times 2 \text{ 和 } f \times 2 \text{ 都會進位的話，}$$

$$\text{則 } \frac{b}{d} \text{ 和 } \frac{f}{h} \text{ 可交換，即 } \frac{af}{ch} + \frac{eb}{gd} = 1$$

四、「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 」以及「 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 或 $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 」的比較

(一)「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 」的解有 16 組，而「 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 或 $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 」的解只有 7 組。

(二)「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 」中符合「 $\frac{\square A \square}{\square B \square} + \frac{\square \square}{\square \square} = 1$ 」的 $\frac{A}{B}$ 固定為 $\frac{8}{7}$ ，而「 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 或

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 」中符合「 $\frac{\square A \square}{\square B \square} + \frac{\square \square}{\square \square} = 1$ 」的 $\frac{A}{B}$ 則有兩種可能： $\frac{6}{0}$ （值為 $\frac{1}{3}$ ）和 $\frac{1}{6}$ （值為 $\frac{2}{3}$ ）。我們又推想這幾組數字和「九」有關係，因為 $1+8, 2+7, 3+6$ 都等於9。

(三) 兩種都有 $\frac{A \square \square}{B \square \square} + \frac{\square \square}{\square \square} = 1$ 、 $\frac{\square \square A}{\square \square B} + \frac{\square \square}{\square \square} = 1$ 、 $\frac{\square \square}{\square \square} + \frac{A \square \square}{B \square \square} = 1$ 、

$\frac{\square \square}{\square \square} + \frac{A \square \square}{B \square \square} = 1$ 的情形，但是「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 」中的 $\frac{A}{B}$ 都是 $\frac{1}{2}$ ，而「 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 或 $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 」中的 $\frac{A}{B}$ 則有 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{3}{9}$ 以及 $\frac{6}{9}$ 。

(四) 原分數 $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ，也發現了一組特殊解 $\frac{308}{462} + \frac{19}{57} = 1$ ，與我們的解法不同，是很值得再繼續研究的地方。

五、當空格的數目不同時， $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ，會有哪些解答呢？

(一)(2+8)型 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square \square \square \square}{\square \square \square \square} = 1$ ， $\frac{1}{2} + \frac{3485}{6970}$ ， $\frac{1}{2} + \frac{3845}{7690}$ ， $\frac{1}{2} + \frac{4865}{9730}$ ， $\frac{1}{2} + \frac{4835}{9670}$ ， $\frac{1}{2} + \frac{4538}{9076}$ ， $\frac{1}{2} + \frac{4685}{9370}$ ， $\frac{1}{2} + \frac{3548}{7096}$ 有七組解答，其中有四組應用組合分解。

(二)(3+7)型 $\frac{\square}{\square \square} + \frac{\square \square \square}{\square \square \square \square} = 1$ ，被加數 $\frac{\square}{\square \square} = \frac{1}{2}$ ，有 $\frac{5}{10}$ ， $\frac{6}{12}$ ， $\frac{7}{14}$ ， $\frac{8}{16}$ ， $\frac{9}{18}$ 五種情況，而被加數 $\frac{\square \square \square}{\square \square \square \square} = \frac{1}{2}$ 中，分子的百位數最大是9，最小是1，而分母四位數中，千位數最小的是「1」，假如是「2」，則分子會變成四位數，在被加數與加數都搶「1」的情況，因為有數字重複，所以本題無解。

(三)(4+6)型除了本主題研究的類型外，還有下面三種情況：

1. $\frac{\square}{\square \square \square} + \frac{\square \square}{\square \square \square \square} = 1$ ，被加數分子的數值最大時，分母的數值也太大了，所以本題無解。
2. $\frac{\square}{\square \square \square} + \frac{\square \square \square}{\square \square \square} = 1$ ，被加數分母的數值太大（三位數），所以本題無解。
3. $\frac{\square \square}{\square \square} + \frac{\square \square}{\square \square \square \square} = 1$ ，加數分子的數值太小（二位數），而分母的數值太大了（四位數），所以本題無解。

(四)(5+5)型有二種：

1. $\frac{\square \square}{\square \square \square} + \frac{\square \square}{\square \square \square} = 1$ ， $\frac{\square \square}{\square \square \square} = \frac{1}{2}$ ，有15種情況（數字不重複），從最小的 $\frac{52}{104}$ ～最大的 $\frac{93}{186}$ ，分母中的百位數都是「1」，造成被加數與加數都搶「1」的情況，因為數字重複，所以本題無解。若改成 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ ，因擴分後也沒有符合的數字，所以本題無解。

2. $\frac{\square}{\square\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} = 1$ ， $\frac{\square}{\square\square\square\square} = \frac{1}{2}$ 中，被加數分母的數值太大（四位數），所以本題無解。

六、當（甲） $\frac{1}{2} + \text{（乙）}\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ （值大於1）時，我們找到① $\frac{465}{930} + \frac{18}{27} = \frac{7}{6}$ ，② $\frac{453}{906} + \frac{18}{27} = \frac{7}{6}$

兩組解。其中值為 $\frac{1}{2}$ 的分數 $\frac{465}{930}$ 、 $\frac{453}{906}$ 都沒有出現在 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 的解裡，而值為 $\frac{1}{3}$ 的分數 $\frac{18}{27}$

也沒出現於 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 的解中。是否相加的分數不同（ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ）就會出現不同的分數，也很值得我們繼續再研究下去。

柒、推廣與應用：

一、若再增加一個分數時，如 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ，會有哪些解答呢？

因為有10個空格數字，所以會有下面四種類型與解答。

(一)226型 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square\square\square}{\square\square\square} = 1$ ，因空格少，數字被限定，分子與分母擴分時，

常有數字重複的現象，所以本題無解。

(二)235型 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} = 1$ ，有三組答案。

$$(1) \frac{4}{8} + \frac{7}{21} + \frac{65}{390} = 1$$

$$(2) \frac{4}{8} + \frac{9}{27} + \frac{51}{306} = 1$$

$$(3) \frac{3}{9} + \frac{8}{16} + \frac{45}{270} = 1$$

(三)244型 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ ，有一組答案。

$$(1) \frac{2}{6} + \frac{13}{78} + \frac{45}{90} = 1$$

(四)334型 $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square} = 1$ ，有一組答案。

$$(1) \frac{5}{30} + \frac{7}{21} + \frac{48}{96} = 1$$

二、若再增加一個分數時，如 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1$ ，會有哪些解答呢？

(一)235型 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} = 1$ ，有一組答案。

$$(1) \frac{3}{9} + \frac{6}{24} + \frac{75}{180} = 1$$

三、若結果「和」不是 1，而是其它的分數時，則解答會更多。

例如 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$ 時，則解答為 $\frac{1}{3} + \frac{45}{90} + \frac{26}{78} = \frac{7}{6}$

捌、 結論：

一、有兩種方式可以找到空格的解，第一個方法是擴分。剛開始，我們用擴分的方式，把值為 $\frac{1}{2}$ 的分數全部列出來，再用剩下的數字組合成另一個分數。例如： $\frac{485}{970}$ ，剩下的數是 **1236**，

可組成 $\frac{31}{62}$ 、 $\frac{16}{32}$ 、 $\frac{13}{26}$ ，所以得到 $\frac{485}{970} + \frac{31}{62} = 1$ ， $\frac{485}{970} + \frac{16}{32} = 1$ ， $\frac{485}{970} + \frac{13}{26} = 1$ 三組解。

雖然費時，卻能得到很詳細完整的答案。

二、第二種方式是用擴分方式，找出最簡分數，或分子分母為個位數的分數，再用「分數組合」方式，找到值是 $\frac{1}{2}$ 的三位數分數，再把剩下數字組合成值為 $\frac{1}{2}$ 的分數。這個方法很方便，很快就能找到答案。不過，若遇到「中間插入」的分數時，卻很難找到中間插入的數字。

※分數 $A(\frac{\square}{\square})$ ， $B(\frac{\square}{\square})$ 或 $\frac{\square\square}{\square\square}$ 的組合方式有以下 3 種

(一)A 前 B 後：

A	B
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$

例如： $\frac{1}{2} \frac{3}{6} \rightarrow \frac{13}{26}$

或

A	B
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square\square}{\square\square}$

例如： $\frac{1}{2} \frac{38}{76} \rightarrow \frac{138}{276}$

缺少的數字為 0459，可組成 $\frac{45}{90}$ ，即 $\frac{138}{276} + \frac{45}{90} = 1$

(二)A 後 B 前：

B	A
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$

例如： $\frac{3}{6} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{31}{62}$

或

B	A
$\frac{\square\square}{\square\square}$	$\frac{\square}{\square}$

例如： $\frac{38}{76} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{381}{762}$

(三)在 $B\frac{\square\square}{\square\square}$ 之間插入特殊數字 $A\frac{a}{b}$ ： $\frac{\square a}{\square b}$ ，例如： $B\frac{46}{92}$ ， $A\frac{8}{7}$ ，組合成 $\frac{486}{972}$ 。

三、表格總整理

空格數	4 格	5 格	6 格	7 格	8 格	9 格	10 格
解答數	4	8	24	22	16	16	16
使用最多的數字	2346	14	234	156	345	124578	
連續的數字			①012345 ②234567	0123456	①12345678 ②34567890	①123456789 ②012345678	0123456789
缺少的數字			①6789 ②0189	789	①90 ②12	①0 ②9	

發現(一)空格數 4 和 5 格沒有連續的數字，空格數 6 和 7 的連續數字相近：012345 和 0123456。
(二)空格數 8 和 9 的連續數字相近：12345678 和 123456789、012345678。

四、原分數 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ， $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ ，分母為 2, 3 的解答組數最多，是因為 2, 3 是很多自然數的因數，因此擴分後，「加數」不重複數字的組數就更多了。此外 $\frac{1}{2}$ 是分母分子中數字最小的分數，而 $\frac{8}{7}$ 是中間插入的數字，透過組合分解的方法，就能找到更多的組數了。

五、空格數目不同，當 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 時，以 4+6 型最多，其次是 2+8 型(有 7 組)，而無解的是 5+5 型與 3+7 型。

六、若再增加一組分數時， $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ，以(2, 3, 5)型最多(三組)，(3, 3, 4)型與(2, 4, 4)型有一組，(2, 2, 6)型無解。

玖、心得與展望：

- 一、這次研究，透過大家分工合作，人手一筆一紙詳細地演算，尤其是發現不重複數字的組數時，就好像「樂透」在對獎一樣，希望中獎〈找到解答〉。雖然研究過程遇到很多瓶頸，也很辛苦，但是卻充滿挑戰性與趣味性，讓我們都回味無窮。在此，要感謝老師的出題和夥伴們的互相激勵合作，終於能在數十張演算紙和答案中發現有趣的規則，看似平常的數學題，卻隱藏了數學的趣味性。
- 二、希望長大之後，能學得更高深的數學方法與理論，再繼續研究增加三個分數或結果不是 1 的解答，或是設計電腦程式來證明我們研究的結果。

拾、參考資料：

- 一、萬家睿(民 97)。生活數學 DIY。高雄市：前程。
- 二、戴禮(民 82)。趣味的數學。台北市：國語日報。
- 三、萬家睿(民 82)。數學智慧遊戲。分數的磁磚。高雄市：前程。

【評語】 080407

作者以「分數組合分解」的方式，將連續的數字填入含有分數的算式，惟研究的題材，延伸性及深度略嫌不足。