

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

佳作

080406

分分合合-圖形的分割與重組

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者： 小四 歐劭謙	指導老師： 歐志昌 林怡君
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：數量規則、費氏數列、分割重組

摘 要

我討論六種不同圖形的分割與重組方法，發現以下的結果：

一、正三角形與正方形的規則為**等分量的平方**。

二、等腰直角三角形的規則為**公比=2的等比數列**。

三、A類、B類三角形的分割規律為**費氏數列**，正五邊形的分割規律為**盧卡斯數列**。

四、以 p 表示 A 類三角形的腰， q 表示 A 類三角形的底邊，A 類、B 類三角形的腰或底邊之分割

(p, q) 值為費氏數列的相鄰兩項，且其排列規則也會符合費氏數列的產生規則

五、以 b_n 為正五邊形 C_m 的個數，則分割、重組的**關係式為：** $b_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + C_{m+(n-1)}$ ，

$n \geq 2$ 。

六、以 a_n 為正五邊形 C_m 的個數，則分割、重組的**關係式為：** $a_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + \cdots + C_{m+(n-1)}$ ，

$n \geq 2$ 。

七、以任意數 α 為正五邊形 C_m 的個數，可將 α 分解成 a_n 及 b_m 的和，再利用五、六的結論進行分割、重組，**不過重組的方式並不是唯一的。**

八、任給 $\alpha A + \beta B$ ，當 $\frac{\alpha}{\beta}$ 介於 0.5 到 1.618 之間，可以檢查 $\frac{\alpha}{\beta}$ 介於哪兩個連續的 C_n 之 A、B 兩類

三角形的數量比值，並利用解聯立方程式的方法解出 $\alpha A + \beta B = pC_{n-1} + qC_n$ 。

壹、研究動機

我很喜歡玩樂高積木，樂高積木有大有小，有一樣的，也有不一樣的，可以組合成許多我喜歡的機器人、汽車、飛機…。有一次我發現正三角形可以透過切割的方式，分成好幾個縮小版的正三角形，而且每個都一樣，正方形好像也可以，如果將它們很多個拼在一起，也可以變成更大的正三角形和正方形，我覺得很有趣，所以我想研究有關形狀切割與重新組合的一些問題。

貳、研究目的

- 一、 找出正三角形切割成相同較小正三角形的數量規則。
- 二、 找出正方形切割成相同較小正方形的數量規則。
- 三、 找出其他有類似規則的三角形，並討論其切割後的數量規則。
- 四、 找出其他有類似規則的圖形，並討論其切割後的數量規則。
- 五、 利用所找出的數量規則重新組合圖形。

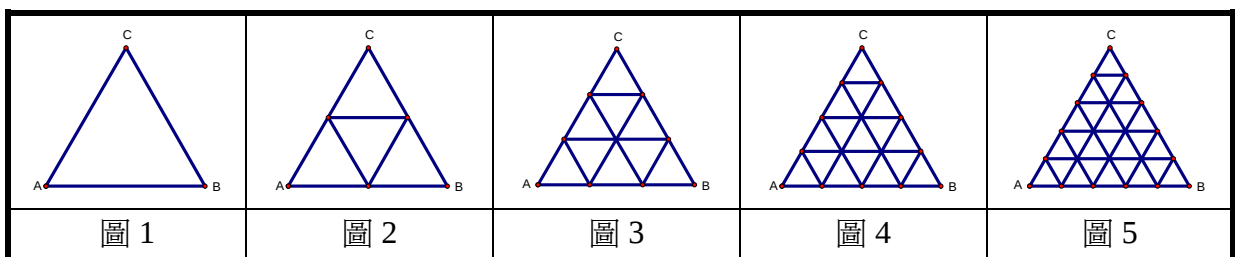
參、研究設備與器材

電腦、紙、筆、GSP、紙片模型

肆、研究過程與方法

一、 討論正三角形的切割

- (一) 取一個正 $\triangle ABC$ （圖 1）三邊的中點並將這三個點彼此連接形成圖 2，我發現這樣可以分割出 4 個大小相同的正三角形。
- (二) 取一個正 $\triangle ABC$ （圖 1）三邊的三等分點並將這些點以平行對邊的方式彼此連接形成圖 3，我發現這樣可以分割出 9 個大小相同的正三角形。
- (三) 仿照前面的作法，我分別取了四等分點與五等分點，我發現分別可得到 16 個（圖 4）及 25 個（圖 5）大小相同的正三角形。



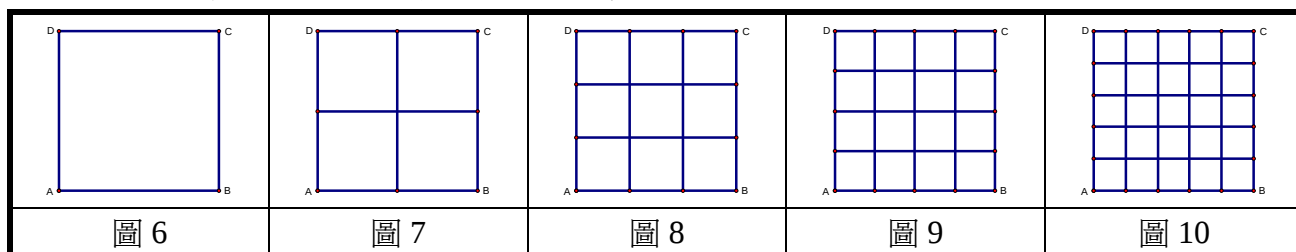
- (四) 我將上面的發現列成表格：

等分量	2	3	4	5
正三角形數量	$4 = 2 \times 2$	$9 = 3 \times 3$	$16 = 4 \times 4$	$25 = 5 \times 5$

- (五) 我發現了**正三角形的數量規律就是：等分量 $\times$ 等分量**，於是我可以用來推測任意等分量時，所分割出的正三角形數量。

二、討論正方形的切割

- (一) 取一個正方形 $ABCD$ (圖 6) 四邊的中點並將這 4 個點連接形成圖 7, 我發現這樣可以分割出 4 個大小相同的正方形。
- (二) 取一個正方形 $ABCD$ (圖 6) 四邊的三等分點並將這些點連接形成圖 8, 我發現這樣可以分割出 9 個大小相同的正方形。
- (三) 仿照前面的作法, 我分別取了四等分點與五等分點, 我發現分別可得到 16 個 (圖 9) 及 25 個 (圖 10) 大小相同的正方形。



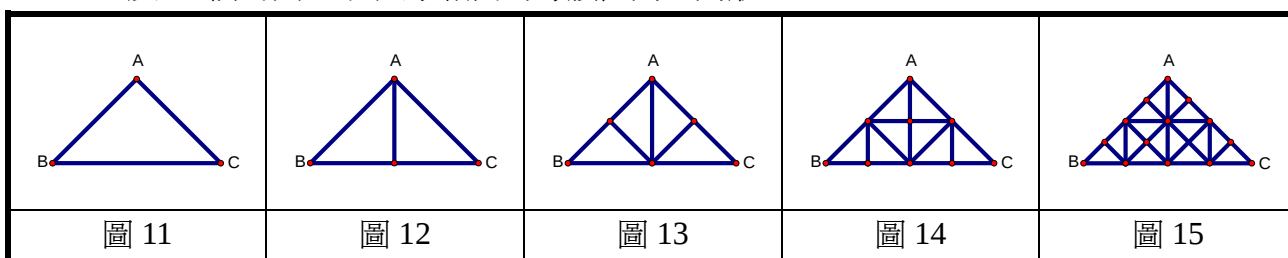
- (四) 我將上面的發現列成表格：

等分量	2	3	4	5
正方形數量	$4 = 2 \times 2$	$9 = 3 \times 3$	$16 = 4 \times 4$	$25 = 5 \times 5$

- (五) 我發現了**正方形的數量規律就是：等分量 $\times$ 等分量**，於是我可以用來推測任意等分量時，所分割出的正方形數量。

三、討論等腰直角三角形的切割

- (一) 取一個等腰直角三角形 ABC (圖 11) 斜邊的中點，並將這個點連接對面的頂點，形成圖 12, 我發現這樣可以分割出 2 個大小相同的等腰直角三角形。
- (二) 仿照 1 的作法, 取圖 12 中 2 個等腰直角三角形的斜邊的中點，並將這個點連接對面的頂點，形成圖 13, 我發現這樣可以分割出 4 個大小相同的等腰直角三角形。
- (三) 仿照前面的作法, 我又做了第三次及第四次的分割, 我發現分別可得到 8 個 (圖 14) 及 16 個 (圖 15) 大小相同的等腰直角三角形。



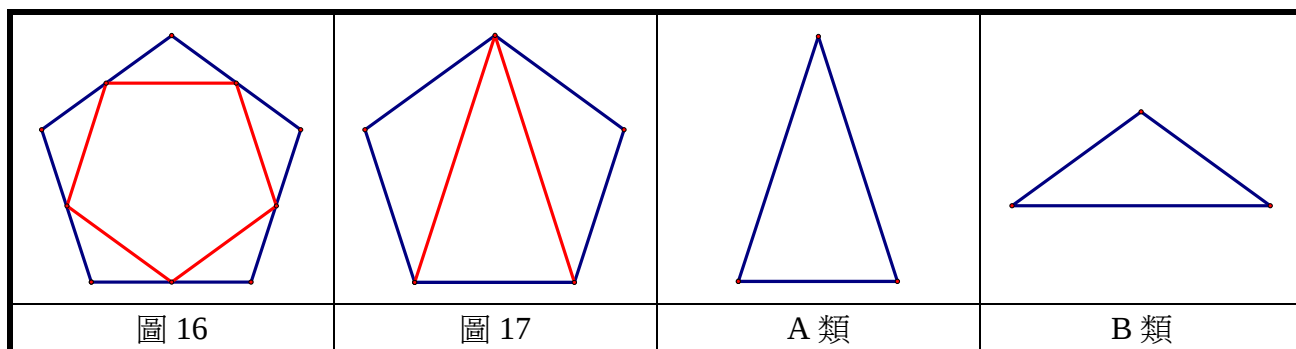
- (四) 我將上面的發現列成表格：

分割次數	1	2	3	4
等腰直角三角形數量	$2 = 1 \times 2$	$4 = 1 \times 2 \times 2$	$8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$	$16 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

- (五) 我發現了**等腰直角三角形的數量規律就是：前一次的分割量 $\times 2$** ，於是我可以用來推測任意分割次數時，所分割出的等腰直角三角形數量。

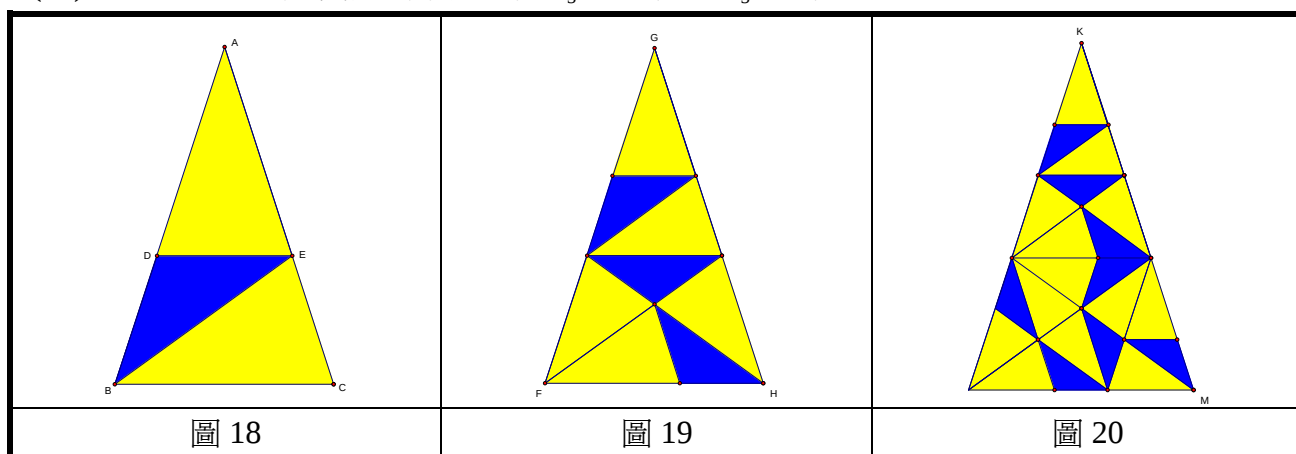
從第一及第二部份的討論我發現，正三角形及正方形可以利用各邊等分點分割出較小的正三角形及正方形，那麼我猜測正五邊形應該也可以吧！可是我畫了正五邊形的各邊中點並依照前面的方式連接（圖 16）後發現，中間會有一個小的正五邊形，但是其他的部份就不是正五邊形了，而是五個相同大小的三角形；由第三部份的討論中，我也發現等腰直角三角形可以用不同於各邊等分的分割方式，在不同的分割次數上呈現出數量規律，於是我從正五邊形的一個頂點畫了兩條對角線（圖 17），得到了兩種等腰三角形，稱之為 A 類三角形：

$72^\circ - 36^\circ - 72^\circ$ 及 B 類三角形： $36^\circ - 108^\circ - 36^\circ$ ，於是我從這兩種等腰三角形的分割進行討論。



四、 討論 A 類（ $72^\circ - 36^\circ - 72^\circ$ ）等腰三角形的切割

- （一） A 類三角形為 $72^\circ - 36^\circ - 72^\circ$ 的等腰三角形，利用作圖的方式，可將 1 個 A 類三角形分割成 2 個與原來 A 類三角形相似的 A_1 三角形，及 1 個 $36^\circ - 108^\circ - 36^\circ$ 的 B 類三角形，稱之為 B_1 （圖 18）。
- （二） 再使用相同的方式分割 A_1 及 B_1 ，可得與 A_1 及 B_1 相似的 A_2 及 B_2 ，其數量為 A_2 ：5 個， B_2 ：3 個（圖 19）。
- （三） 以上述方式不斷分割下去可得 A_3 ：13 個， B_3 ：8 個（圖 20）。



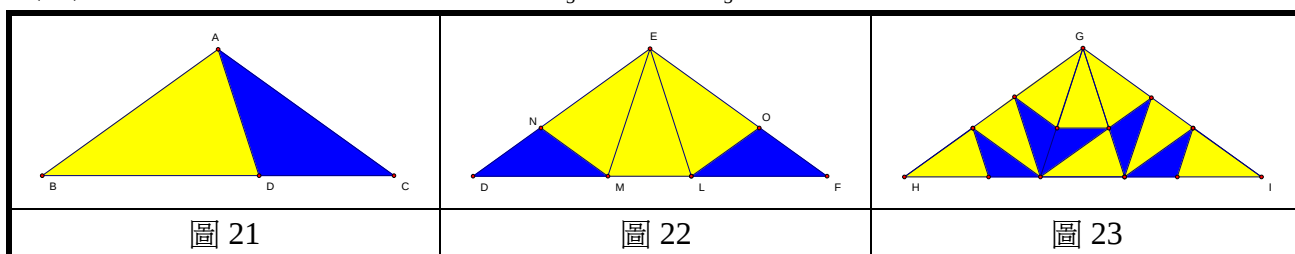
（四） 我將 A 類三角形依照不同分割次數所產生的 A、B 類三角形數量整理成下表：

分割次數	1 次	2 次	3 次	...
A 類三角形	$2A_1$	$5A_2$	$13A_3$	...
B 類三角形	$1B_1$	$3B_2$	$8B_3$	...

- (五) 我發現 **A、B 類三角形數量的規律** 為： $1+2=3$ ， $2+3=5$ ， $3+5=8$ ，…若將上表的數字排成一列：1,2,3,5,8,13，則規律為**相鄰兩項和即為下一項之數字，也就是費氏數列的規則**。

五、 討論 B 類 ($36^\circ-108^\circ-36^\circ$) 等腰三角形的切割

- (一) B 類三角形為 $36^\circ-108^\circ-36^\circ$ 的等腰三角形，利用作圖的方式，可將 1 個 B 類三角形分割成 1 個與原來 B 類三角形相似的 B_1 三角形，及另一個 $72^\circ-36^\circ-72^\circ$ 的 B 類三角形，稱之為 A_1 (圖 21)。
- (二) 再使用相同的方式分割 A_1 及 B_1 ，可得與 A_1 及 B_1 相似的 A_2 及 B_2 ，其數量為 A_2 ：3 個， B_2 ：2 個 (圖 22)。
- (三) 以上述方式不斷分割下去可得 A_3 ：8 個， B_3 ：5 個 (如圖 23)。



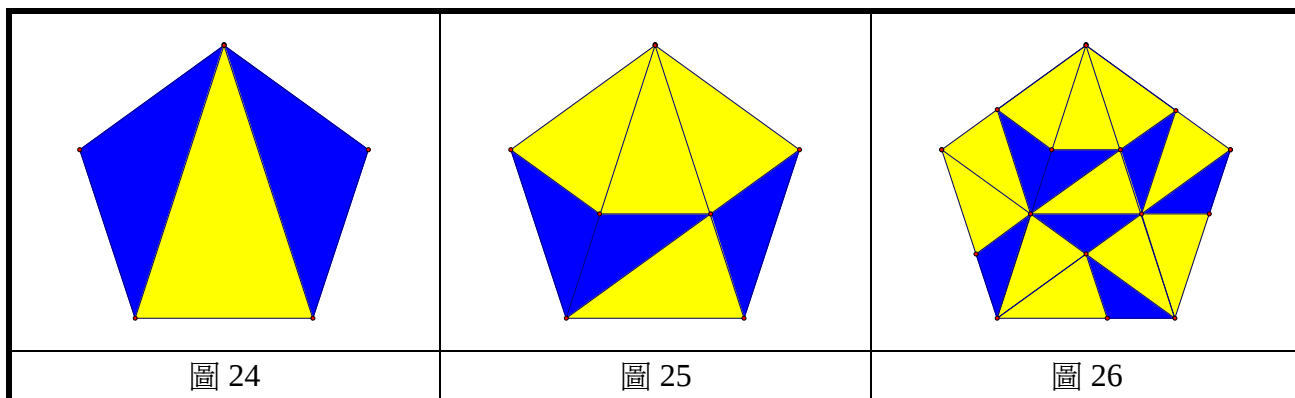
- (四) 我將 A 類三角形依照不同分割次數所產生的 A、B 類三角形數量整理成下表：

分割次數	1 次	2 次	3 次	...
A 類三角形	$1 A_1$	$3 A_2$	$8 A_3$	...
B 類三角形	$1 B_1$	$2 B_2$	$5 B_3$	...

- (五) 我發現 **A、B 類三角形數量的規律** 為： $1+1=2$ ， $1+2=3$ ， $2+3=5$ ， $3+5=8$ ，…若將上表的數字排成一列：1,1,2,3,5,8，則規律為**相鄰兩項和即為下一項之數字，也就是費氏數列的規則**。

六、 討論正五邊形的分割

- (一) 由圖 16 中我發現正五邊形可以切割成 A、B 類三角形，而這兩類三角形在分割成相似的 A、B 類三角形時，又會有符合費氏數列的規則，於是我想進一步探討當正五邊形分割成 A、B 類三角形時，是否也會有規律。
- (二) 分割第一次可以得到 A_1 ：1 個， B_1 ：2 個 (如圖 24)。
- (三) 分割第二次可以得到 A_1 ：4 個， B_1 ：3 個 (如圖 25)。
- (四) 分割第三次可以得到 A_1 ：11 個， B_1 ：7 個 (如圖 26)。



(五) 依照上述方式不斷分割下去，我將正五邊形的分割次數與 A、B 兩類三角形數量的變化作成下面的表格：

分割次數	1 次	2 次	3 次	...
A 類三角形	$1 B_1$	$4 B_2$	$11 B_3$	...
B 類三角形	$2 A_1$	$3 A_2$	$7 A_3$	...

(六) 我發現 A、B 類三角形數量的規律為：2+1=3，1+3=4，3+4=7，4+7=11，…
若將上表的數字排成一列：2,1,3,4,7,11，則規律為相鄰兩項和即為下一項之數字，
也就是與費氏數列類似的規則，稱為盧卡斯數列。

(七) 在分割過程中，我發現 A 類三角形的數量除了第一次分割外，數量上都比 B 類三角形的數量還要多，好像 A 類三角形的數量增加的比較快，不過我計算了 A、B 兩類三角形數量的比值，發現在比值上會出現越來越接近 1.61803...（黃金比例）的現象（如下表）。

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	$1 A_1$	$4 A_2$	$11 A_3$	$29 A_4$	$76 A_5$	$199 A_6$	$521 A_7$	$1364 A_8$	$3571 A_9$	$9349 A_{10}$
B_n	$2 B_1$	$3 B_2$	$7 B_3$	$18 B_4$	$47 B_5$	$123 B_6$	$322 B_7$	$843 B_8$	$2207 B_9$	$5778 B_{10}$
$\frac{A}{B}$	0.5	1.333	1.5714	1.6111	1.6170	1.6178	1.61801	1.6180308	1.6180335	1.6180339

伍、研究結果

- 一、正三角形可使用在每邊找等分點的方式分割出較小且都相同的正三角形，其數量規則為等分量 $\times$ 等分量，也就是每邊等分量的平方。
- 二、正方形也可使用在每邊找等分點的方式分割出較小且都相同的正方形，其數量規則也是等分量 $\times$ 等分量，也就是每邊等分量的平方。
- 三、等腰直角三角形可利用斜邊中點與對面頂點連線的分割方式，分割出較小且都相同的等腰直角三角形，其數量規則為前一次的分割量 $\times 2$ ，此時會形成公比為 2 的等比數列。
- 四、正五邊形無法使用等分點的方式將正五邊形分割成較小且都相同的正五邊形，但可利用連接對角線的方式分割出 A 類及 B 類三角形，且此兩類三角形可不斷分割出較小且都相同的 A 類及 B 類三角形。
- 五、A 類三角形（ $72^\circ - 36^\circ - 72^\circ$ ）的分割過程中所產生 A 類及 B 類三角形數量為 1,2,3,5,8,13.....，符合前兩項數字和即為下一項的規則，與費氏數列相同。
- 六、B 類三角形（ $36^\circ - 108^\circ - 36^\circ$ ）的分割過程中所產生 A 類及 B 類三角形數量為 1,1,2,3,5,8....，符合前兩項數字和即為下一項的規則，與費氏數列相同。
- 七、將正五邊形分割成 A 類及 B 類三角形時，過程中所產生 A 類及 B 類三角形數量為 2,1,3,4,7,11.....，符合前兩項數字和即為下一項的規則，與費氏數列有相同的規則，為盧卡斯數列。
- 八、正五邊形的分割過程中，A 類三角形的數量除了第一次分割外，數量上都比 B 類三角形的數量還要多，而且好像 A 類三角形的數量增加的比較快，不過在計算 A、B 兩類三角形數量的比值後發現會出現越來越接近 1.61803....（黃金比例）的現象。

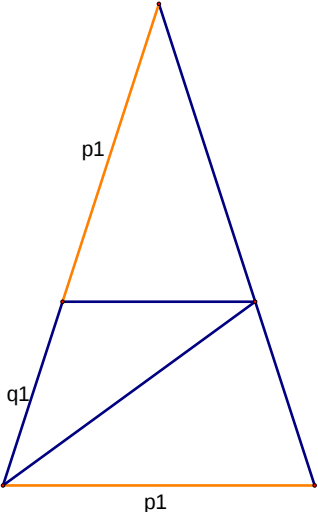
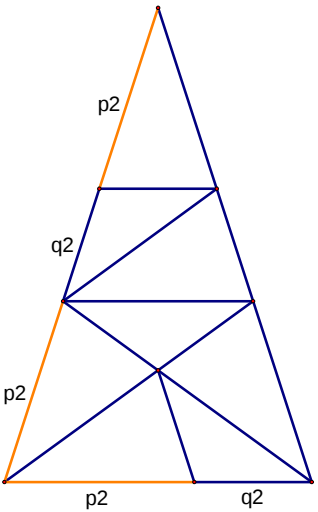
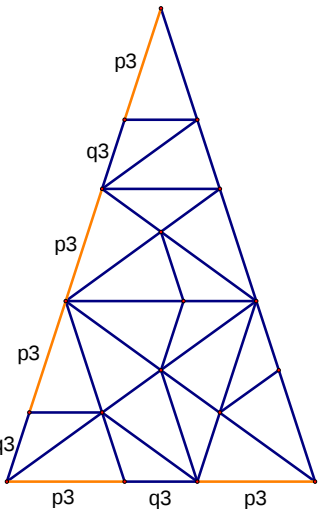
陸、討論

在討論 A 類及 B 類三角形分割的過程中，我發現在邊長的分割上似乎還暗藏玄機，所以我又進行了以下的討論。

一、 A 類、B 類三角形及正五邊形之邊長分割的分割規律

首先觀察 A 類及 B 類三角形的邊長，我發現 A 類三角形的底邊就是 B 類三角形的腰，B 類三角形的底邊就是 A 類三角形的腰，爲了討論方便，我將 A 類三角形的腰稱爲 p ，底邊稱爲 q 。

(一) 首先觀察 A 類三角形在不同分割次數下，圖形的邊長分割規律。

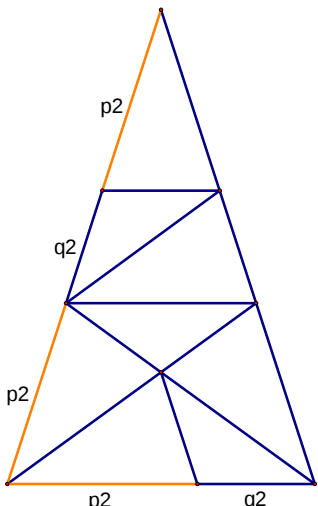
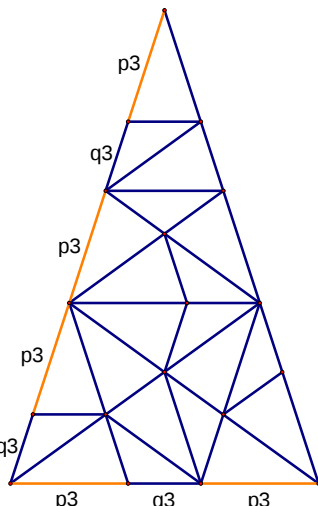
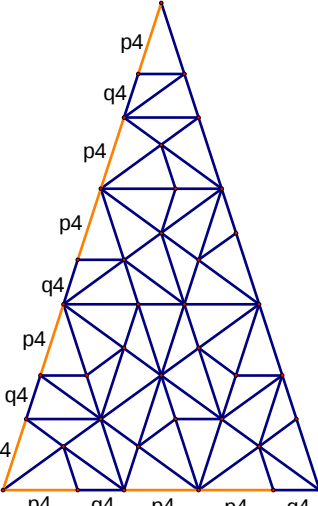
分割圖形			
(p, q)	腰：(1,1) 底：(1,0)	腰：(2,1) 底：(1,1)	腰：(3,2) 底：(2,1)
順序	腰： $p \rightarrow q$ 底： p	腰： $p \rightarrow q \rightarrow p$ 底： $p \rightarrow q$	腰： $p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$ 底： $p \rightarrow q \rightarrow p$

(二) 由上面 3 個圖形所呈現的規律，我發現以下的結果：

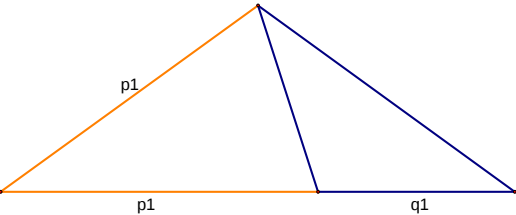
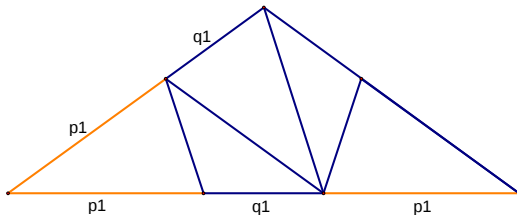
1. 腰與底的分割規則都是取費氏數列的相鄰兩項做爲 (p, q) 的值，而且底所呈現的 (p, q) 值會是腰所呈現的 (p, q) 值的前一組。
2. 分割 3 次的圖形其 (p, q) 值，不管是腰或是底，都是用分割 2 次及分割 1 次的圖形之 (p, q) 值加總在一起，也就是符合費氏數列「下一項等於前兩項之和」的規則。
3. 如果從 p 、 q 的排列規則來看，我發現分割 3 次的圖形，腰的 p 、 q 排列規則爲

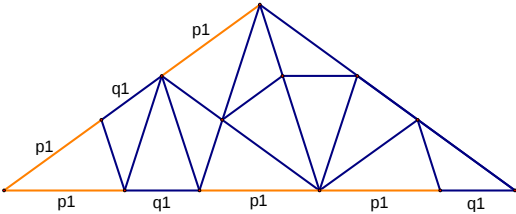
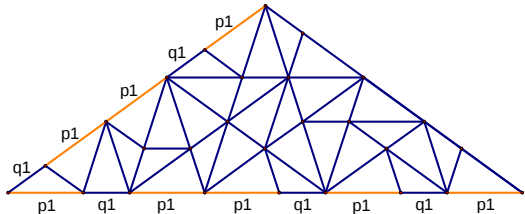
$p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$ ，可以分解為： $p \rightarrow q \rightarrow p + p \rightarrow q$ ，也符合數字上的費氏數列規則，也就是說分割 3 次的圖形排列規則可以用分割 2 次及分割 1 次的圖形排列規則來組成。

4. 有了這樣的猜測，所以我做了分割 4 次的圖形來驗證（如下表），發現同樣的規則也會出現在底邊上。

分割圖形			
(p,q)	腰：(2,1) 底：(1,1)	腰：(3,2) 底：(2,1)	腰：(5,3) 底：(3,2)
順序	腰： $p \rightarrow q \rightarrow p$ 底： $p \rightarrow q$	腰： $p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$ 底： $p \rightarrow q \rightarrow p$	腰： $p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$ $\rightarrow p \rightarrow q \rightarrow p$ 底： $p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$

(三) 實際將 B 類三角形做不同次數的分割，觀察腰與底的分割規則，也可以得到與 A 類三角形相同的結果（如下表）。

分割圖形		
(p,q)	腰：(1,0) 底：(1,1)	腰：(1,1) 底：(2,1)
順序	腰： p 底： $p \rightarrow q$	腰： $p \rightarrow q$ 底： $p \rightarrow q \rightarrow p$

分割圖形		
(p,q)	腰：(2,1) 底：(3,2)	腰：(3,2) 底：(5,3)
順序	腰：p → q → p 底：p → q → p → p → q	腰：p → q → p → p → q 底：p → q → p → p → q → p → q → p

(四) 因為正五邊形可以分割成 A 類及 B 類三角形，從分割一次的圖形來看，正五邊形的邊長恰為 B 類三角形的腰，所以在分割過程中，其分割規律應該與 B 類三角形相同，也就是說正五邊形的邊長分割規律可以整理成下表。

分割次數	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
(p,q)	(1,0)	(1,0)	(1,1)	(2,1)	(3,2)
順序	p	p	p → q	p → q → p	p → q → p → p → q

【歸納整理】

由以上的討論，可以歸納出以下幾個結論：

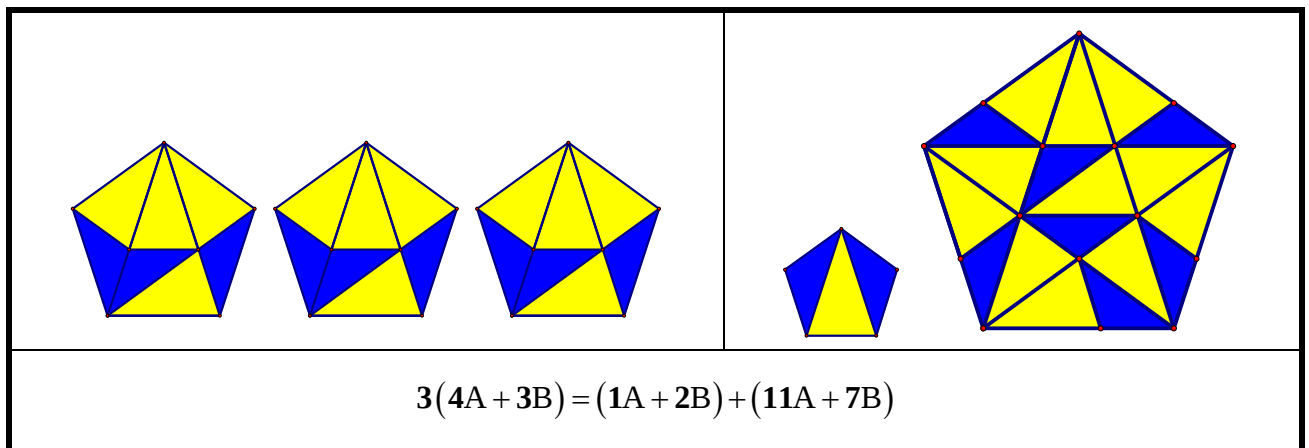
- (一) A 類、B 類三角形邊長分割的數量規律，若以 p 表示 A 類三角形的腰， q 表示 A 類三角形的底邊，則無論是腰或底邊分割的 (p, q) 值必為費氏數列的相鄰兩項。
- (二) 連續三種不同分割次數的腰或底邊之 (p, q) 值會符合費氏數列的產生規則，也就是前兩項之數字和即為下一項之數字： $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ ， $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$ 。
- (三) 連續三種不同分割次數的腰或底邊之 p 、 q 的排列規則也會符合費氏數列的產生規則，也就是某一種分割次數的腰或底邊之 p 、 q 的排列規則，可以用前兩種分割次數的腰或底邊之 p 、 q 的排列規則組合在一起。
- (四) 正五邊形的分割規律與 B 類三角形完全相同。
- (五) 利用以上的數量及排列規則，我可以很快的將分割多次的圖形，用足夠數量的 A 類、B 類三角形排出來。

二、討論不同分割次數正五邊形圖形間的關係

觀察我之前所整理出來的表格，我發現除了 $\frac{A}{B}$ 的值會越來越接近 1.618... 之外，若將正五邊形以不同分割次數分割後，所得到的 A、B 兩類三角形數量總和會存在一定的關係，所以我做了以下的討論。

(一) 分割次數為相鄰三個整數時圖形間的關係

由表格觀察可知，要組成 1 個分割 1 次的正五邊形，需要 1 個 A 及 2 個 B；要組成 1 個分割 3 次的正五邊形，需要 11 個 A 及 7 個 B。若將這 2 個正五邊形混合在一起，則共有 12 個 A 及 9 個 B，此時可組成 3 個分割 2 次的正五邊形。也就是說，如果我將 3 個正五邊形都分割 2 次，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 1 次的正五邊形及 1 個分割 3 次的正五邊形（如下圖）。我又對其他分割次數進行檢驗，得到了相同的結果（如下表）。也就是當我將 3 個正五邊形都分割 n 次時，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 $n-1$ 次的正五邊形及 1 個分割 $n+1$ 次的正五邊形。

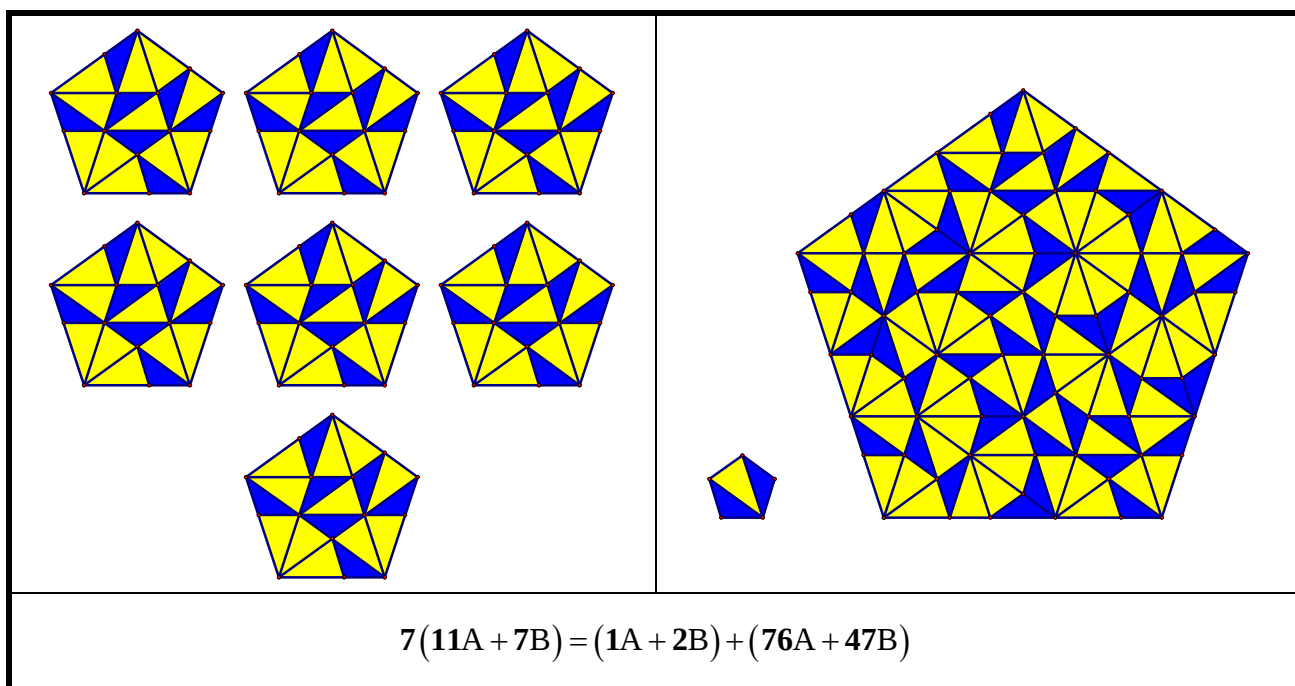


$3(11A + 7B) = (4A + 3B) + (29A + 18B)$		
分割 3 次	分割 2 次	分割 4 次
$3(29A + 18B) = (11A + 7B) + (76A + 47B)$		
分割 4 次	分割 3 次	分割 5 次
$3(76A + 47B) = (29A + 18B) + (199A + 123B)$		
分割 5 次	分割 4 次	分割 6 次

(二) 分割次數為等差數列時圖形間的關係

考慮將分割 1 次及 5 次的正五邊形各 1 個混合在一起，則共有 77 個 A 及 49 個 B，此時可組成 7 個分割 3 次的正五邊形。也就是說，如果我將 7 個正五邊形都分割 3 次，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 1 次的正五邊形及 1 個分割 5 次

的正五邊形(如下圖)。我又對其他分割次數進行檢驗,得到了相同的結果(如下表)。也就是當我將 7 個正五邊形都分割 n 次時,所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 $n-2$ 次的正五邊形及 1 個分割 $n+2$ 次的正五邊形。



$7(29A + 18B) = (4A + 3B) + (199A + 123B)$		
分割 4 次	分割 2 次	分割 6 次
$7(76A + 47B) = (11A + 7B) + (521A + 322B)$		
分割 5 次	分割 3 次	分割 7 次
$7(199A + 123B) = (29A + 18B) + (1364A + 843B)$		
分割 6 次	分割 4 次	分割 8 次

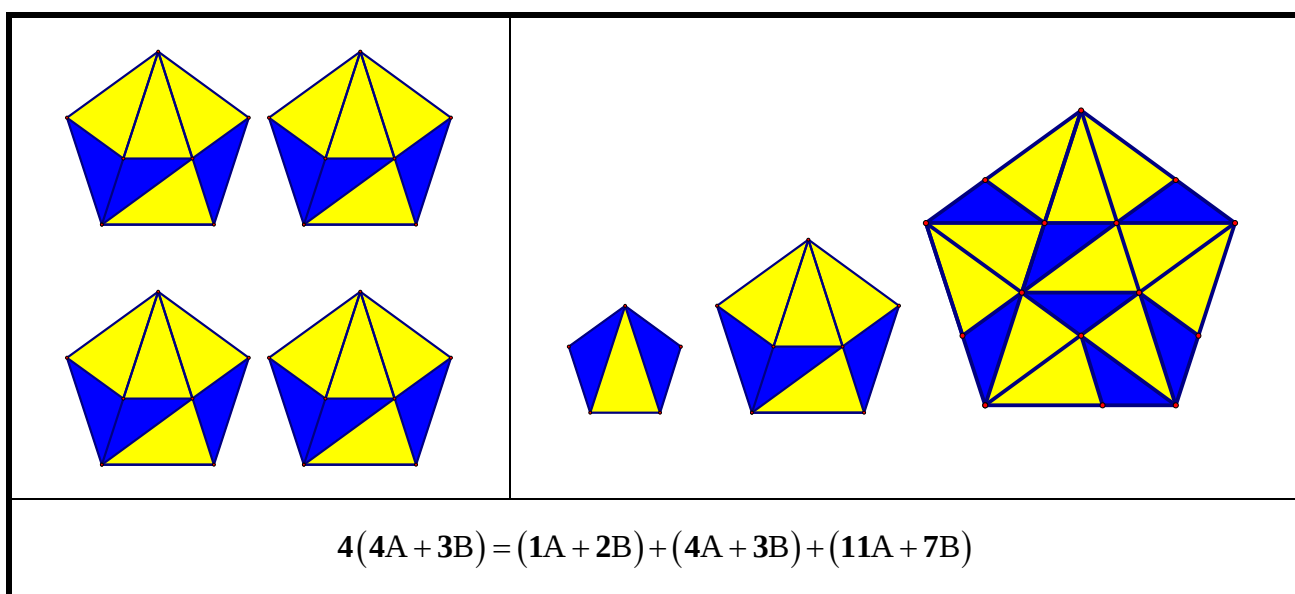
- (三) 從上面的兩個例子,我觀察到正五邊形的個數是以 B_n 的係數依序出現,所以如果再用 3 與 7 的下一項數字 18 來當作正五邊形的個數,則以 18 個正五邊形都分割 4 次為例, $18(29A + 18B) = (1A + 2B) + (521A + 322B)$, 表示將 18 個正五邊形都分割 4 次,所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 1 次的正五邊形及 1 個分割 7 次的正五邊形,同樣的方式也可以得到 18 個正五邊形都分割 5 次,所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 2 次的正五邊形及 1 個分割 8 次的正五邊形,也就是可以進一步推論得到當我將 18 個正五邊形都分割 n 次時,所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 $n-3$ 次的正五邊形及 1 個分割 $n+3$ 次的正五邊形。

- (四) 如果我將分割 n 次的正五邊形叫做 C_n ，所分割出來的 A、B 兩類三角形的數量分別叫做 a_n 及 b_n ，則歸納上面的規律可以得到關係式：

$$b_n \cdot C_m = C_{m-(n-1)} + C_{m+(n-1)}, \quad m \geq n \geq 2。$$

- (五) 連續三個不同分割次數圖形總和的關係

如果我將分割 1 次、2 次及 3 次的正五邊形各 1 個混合在一起，則共有 16 個 A 及 12 個 B，此時可組成 4 個分割 2 次的正五邊形。也就是說，如果我將 4 個正五邊形都分割 2 次，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成分割 1 次、2 次及 3 次的正五邊形各 1 個（如下圖）。我又對其他分割次數進行檢驗，也得到了相同的結果（如下表）。也就是當我將 4 個正五邊形都分割 n 次時，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成 1 個分割 $n-1$ 次的正五邊形、1 個分割 n 次的正五邊形及 1 個分割 $n+1$ 次的正五邊形。



$4(11A + 7B) = (4A + 3B) + (11A + 7B) + (29A + 18B)$			
分割 3 次	分割 2 次	分割 3 次	分割 4 次
$4(29A + 18B) = (11A + 7B) + (29A + 18B) + (76A + 47B)$			
分割 4 次	分割 3 次	分割 4 次	分割 5 次
$4(76A + 47B) = (29A + 18B) + (76A + 47B) + (199A + 123B)$			
分割 5 次	分割 4 次	分割 5 次	分割 6 次

- (六) 連續五個不同分割次數圖形總和的關係

如果我將分割 1 次至 5 次的正五邊形各 1 個混合在一起，則共有 121 個 A 及 77 個 B，此時可組成 11 個分割 3 次的正五邊形，以算式表示如下：

$$(1A + 2B) + (4A + 3B) + (11A + 7B) + (29A + 18B) + (76A + 47B) = 11(11A + 7B)。也就是$$

說，如果我將11個正五邊形都分割3次，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成分割1次至5次的正五邊形各1個。我又對其他分割次數進行檢驗，得到了相同的結果（如下表）。也就是當我將11個正五邊形都分割 n 次時，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成1個分割 $n-2$ 次的正五邊形、1個分割 $n-1$ 次的正五邊形、1個分割 n 次的正五邊形、1個分割 $n+1$ 次的正五邊形及1個分割 $n+2$ 次的正五邊形。

$11(29A+18B) = (4A+3B) + (11A+7B) + (29A+18B) + (76A+47B) + (199A+123B)$					
分割 4 次	分割 2 次	分割 3 次	分割 4 次	分割 5 次	分割 6 次
$11(76A+47B) = (11A+7B) + (29A+18B) + (76A+47B) + (199A+123B) + (521A+322B)$					
分割 5 次	分割 3 次	分割 4 次	分割 5 次	分割 6 次	分割 7 次
$11(199A+123B) = (29A+18B) + (76A+47B) + (199A+123B) + (521A+322B) + (1364A+843B)$					
分割 6 次	分割 4 次	分割 5 次	分割 6 次	分割 7 次	分割 8 次

- (七) 從上面的兩個例子，我觀察到正五邊形的個數是以 A_n 的係數依序出現，所以如果用 4 與 11 的下一項數字 29 來當作正五邊形的個數，則以 29 個正五邊形都分割 4 次為例，

$$29(29A+18B) = (1A+2B) + (4A+3B) + (11A+7B)$$

$$+ (29A+18B) + (76A+47B) + (199A+123B) + (521A+322B), \text{表示將 29}$$

個正五邊形都分割 4 次，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成分割 1 次至 7 次的正五邊形各 1 個，同樣的方式也可以得到 29 個正五邊形都分割 5 次，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成分割 2 次至 8 次的正五邊形各 1 個，也就是可以進一步推論得到當我將 29 個正五邊形都分割 n 次時，所得到的 A、B 兩類三角形可以重組成分割 $n-3$ 次至 $n+3$ 次的正五邊形各 1 個。

- (八) 如果我將分割 n 次的正五邊形叫做 C_n ，所分割出來的 A、B 兩類三角形的數量分別叫做 a_n 及 b_n ，則歸納上面的規律可以得到關係式：

$$a_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + \cdots + C_{m+(n-1)}, \quad m \geq n \geq 2.$$

【歸納整理】

由（四）及（八）的關係式可以知道利用 a_n 及 b_n 來作為分割 m 次的正五邊形 C_m 的個數，都可以利用分割、重組的方式，得到不同分割次數的正五邊形若干個。那我接著想要知道如果分割 m 次的正五邊形個數不是 a_n 及 b_n ，那是否還可以利用分割、重組的方式，得到不同分割次數的正五邊形若干個呢？

(九) 討論任意個分割 n 次的正五邊形

我發現任意一個不是 a_n 及 b_n 的數，都可以寫成若干個 a_n 及 b_m 的和。例如： $5 = 4 + 1$ 或 $2 + 3$ ， $6 = 2 + 4$ ， $8 = 1 + 7$ ， $9 = 2 + 7$ 或 $2 + 3 + 4$ ， $\dots$ 。因此任意個分割 n 次的正五邊形可先將個數分解成若干個 a_n 及 b_m 的和，再利用之前的結果進行分割重組。舉例來

說： $9C_4 = 2C_4 + 7C_4 = 2C_4 + (C_2 + C_6) = C_2 + 2C_4 + C_6$ ，表示 9 個分割 4 次的正五邊形可分割、重組成 1 個分割 2 次的正五邊形、2 個分割 4 次的正五邊形及 1 個分割 6 次的正五邊形。但是如果改變分解方式為：

$9C_4 = 2C_4 + 3C_4 + 4C_4 = 2C_4 + (C_3 + C_5) + (C_3 + C_4 + C_5) = 2C_3 + 3C_4 + 2C_5$ ，則得到的分割、重組結果為 2 個分割 3 次的正五邊形、3 個分割 4 次的正五邊形及 2 個分割 5 次的正五邊形。也就是說，分割重組的方式並不是唯一的。

【總結】

- (一) 如果以 b_n 為正五邊形 C_m 的個數，則可利用分割、重組的方式得到兩個不同分割次數的正五邊形，其關係式為： $b_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + C_{m+(n-1)}$ ， $m \geq n \geq 2$ 。
- (二) 如果以 a_n 為正五邊形 C_m 的個數，則可利用分割、重組的方式得到以 C_m 為中心點的連續 $(2n-1)$ 個不同分割次數的正五邊形，其關係式為：

$$a_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + \dots + C_{m+(n-1)}，m \geq n \geq 2。$$

- (三) 若以任意數 α 為正五邊形 C_m 的個數，則可將 α 分解成若干個 a_n 及 b_m 的和，再利用前兩個結論進行分割、重組，不過重組的方式並不是唯一的。

三、 給定任意數量 **A**、**B** 兩類三角形之重組問題

(一) 接下來我想知道如果任意給我一些 **A**、**B** 類三角形，是否可以將這些 **A**、**B** 兩類三角形重組成若干個分割不同次數正五邊形。於是我利用 EXCEL 計算100個以下的 **A** 類三角形及100個以下的 **B** 類三角形可能重組的情形（如附表一），並整理部分的結果如下表。

種類 數量	$\frac{A}{B}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	說明
$4A+8B$	0.5	4	0	0	0	0	$4A+8B=4(1A+2B)=4C_1$
$5A+5B$	1	1	1	0	0	0	可利用連續的 C_1 、 C_2 來重組
$4A+3B$	1.333	0	1	0	0	0	$8A+6B=2(4A+3B)=2C_2$
$8A+6B$	1.333	0	2	0	0	0	
$12A+9B$	1.333	0	3	0	0	0	$12A+9B=3(4A+3B)=3C_2$ ，利用前面的結論還可以將 $3C_2$ 重組成 C_1+C_3 ，所以有兩種重組方法
		1	0	1	0	0	
$13A+11B$	1.182	1	3	0	0	0	可利用連續的 C_1 、 C_2 來重組，也可以用前面的結論得到另一種方法
		2	0	1	0	0	
$15A+10B$	1.5	0	1	1	0	0	可利用連續的 C_2 、 C_3 來重組
$51A+32B$	1.594	0	0	2	1	0	可利用連續的 C_3 、 C_4 來重組
$40A+25B$	1.6	0	0	1	1	0	$40A+25B$ 可利用連續的 C_3 、 C_4 來重組，雖然 $64A+40B$ 的 $\frac{A}{B}$ 與 $40A+25B$ 的 $\frac{A}{B}$ 相同，但 $64A+40B$ 無法進行重組
$64A+40B$	1.6	無法進行重組					
$105A+65B$	1.615	0	0	0	1	1	可利用連續的 C_4 、 C_5 來重組
$71A+47B$	1.511	0	4	5	0	0	$71A+47B$ 有 6 種重組方法，其中有一種是利用連續的 C_2 、 C_3 來重組，其他重組方法則可利用之前的結論推導得到
		0	5	2	1	0	
		1	1	6	0	0	
		1	2	3	1	0	
		1	3	0	2	0	
		2	0	1	2	0	
$13A+10B$	1.3	無法進行重組					雖然 $\frac{A}{B}$ 的值介於 0.5 與 1.618 之間，但無法進行重組
$79A+55B$	1.436	無法進行重組					
$13A+8B$	1.625	無法進行重組					$\frac{A}{B}$ 的值未介於 0.5 與 1.618 之間，無法進行重組

觀察這些表格後，我發現以下幾個結果：

1. 可以進行重組的 A、B 類三角形數量，其 $\frac{A}{B}$ 的值必介於 0.5 與 1.618 之間，但是反過來說， $\frac{A}{B}$ 的值介於 0.5 與 1.618 之間時，卻不一定能進行重組。
2. 不同數量的 A、B 類三角形，其 $\frac{A}{B}$ 的值相同，並不代表其能否重組的可能性也相同。
例如：40A+25B 可進行重組，但是 64A+40B 卻無法進行重組。
3. 當 A、B 類三角形數量可進行重組時，其重組方法並不是唯一的，可能有多種重組方法，也可能只有一種重組方法。當 $\frac{A}{B}$ 的值恰等於 C_n 的 $\frac{A}{B}$ 值時，則可利用 C_n 的倍數進行重組，並搭配前面的結論，可進行其他重組方法的轉換。其他的情形（不是 C_n 的倍數時）從表格中可發現，雖然重組方法可能有很多種，但一定會有只用兩個連續的 C_n 進行重組的方法。

進行了以上的討論，我想要找出一種更方便判斷任給 A、B 類三角形數量時，能否進行重組成若干個分割不同次數正五邊形的方法，於是我又做了以下的討論。

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	$1 A_1$	$4 A_2$	$11 A_3$	$29 A_4$	$76 A_5$	$199 A_6$	$521 A_7$	$1364 A_8$	$3571 A_9$	$9349 A_{10}$
B_n	$2 B_1$	$3 B_2$	$7 B_3$	$18 B_4$	$47 B_5$	$123 B_6$	$322 B_7$	$843 B_8$	$2207 B_9$	$5778 B_{10}$
$\frac{A}{B}$	0.5	1.333	1.5714	1.6111	1.6170	1.6178	1.61801	1.6180308	1.6180335	1.6180339

- (二) 綜合前面的討論，由上表可知，A、B 兩類三角形的數量比值 $\frac{A}{B}$ 會落在 0.5 到 1.618 之間，所以如果給定任意數量 A、B 兩類三角形能夠重組成若干個分割不同次數正五邊形，則因為每一個正五邊形的 $\frac{A}{B}$ 值皆落在 0.5 到 1.618 之間，所以經過四則運算後應該還是會落在 0.5 到 1.618 之間，也就是說當 $\alpha A + \beta B$ 可以重組成若干個分割不同次數正五邊形，則 $0.5 < \frac{\alpha}{\beta} < 1.618 \dots = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

- (三) 如果有 α 個 A 類三角形及 β 個 B 類三角形，且 $0.5 < \frac{\alpha}{\beta} < 1.618 \dots = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，那麼是否就一定可以重組成若干個分割不同次數正五邊形？重組的方法又是什麼？以下我舉一些例子來說明。

1. $\alpha A + \beta B = 33A + 21B$ ，其中 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{11}{7}$ 恰好等於 C_3 的 $\frac{\alpha}{\beta}$ 之值，代表

$33A + 21B = 3(11A + 7B) = 3C_3$ ，可以用前面的結論推得

$33A + 21B = 3(11A + 7B) = 3C_3 = C_2 + C_4$ ，也就是說 $33A + 21B$ 可以重組成 1 個分割 2 次的正五邊形及 1 個分割 4 次的正五邊形。

2. $\alpha A + \beta B = 190A + 120B$ ，其中 $\frac{11}{7} < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{19}{12} < \frac{29}{18}$ ，所以先利用 C_3 及 C_4 來討論。假設

$$190A + 120B = pC_3 + qC_4 = p(11A + 7B) + q(29A + 18B) = (11p + 29q)A + (7p + 18q)B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11p + 29q = 190 \\ 7p + 18q = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 12 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow 190A + 120B = 12C_3 + 2C_4。也就是說 $190A + 120B$ 可$$

以重組成 12 個分割 3 次的正五邊形及 2 個分割 4 次的正五邊形。再利用前面的討論結果，可以重組 $12C_3 + 2C_4$ 為：

$$12C_3 + 2C_4 = (7C_3 + 4C_3 + C_3) + 2C_4 = (C_1 + C_5) + (C_2 + C_3 + C_4) + C_3 + 2C_4$$

$$= C_1 + C_2 + 2C_3 + 3C_4 + C_5。這表示雖然我是先利用 C_3 及 C_4 來進行討論，但$$

是其實 $190A + 120B$ 也可能是由 $\frac{\alpha}{\beta}$ 並不是剛好最接近的若干個 C_n 來組成，不過由前面

的 αC_n 轉換規律可知，任何的 C_n 組合都是可以互相轉換的，因此只要將我所使用的方法搭配前面的轉換公式，就可以解決所有 $\alpha A + \beta B$ 的重組問題。

3. $\alpha A + \beta B = 64A + 40B$ ，其中 $\frac{11}{7} < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{8}{5} < \frac{29}{18}$ ，所以我先利用 C_3 及 C_4 來討論。假設

$$64A + 40B = pC_3 + qC_4 = p(11A + 7B) + q(29A + 18B) = (11p + 29q)A + (7p + 18q)B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11p + 29q = 64 \\ 7p + 18q = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{8}{5} \\ q = \frac{8}{5} \end{cases}，代表 $\alpha A + \beta B = 64A + 40B$ 無法利用 C_3 及 C_4 來進行重$$

組，結合（一）的討論可知，任何可以進行重組的 **A**、**B** 兩類三角形的數量，必有一種重組方法是利用兩個連續的 C_n ，由上述的計算可知 $64A + 40B$ 做不到，因此可以確定 $64A + 40B$ 無法重組成若干個不同分割次數的正五邊形。

【歸納整理】

由上面的討論可以知道，任給 $\alpha A + \beta B$ ，只要依照下列的步驟，我可以確定是否可以重組成若干個分割不同次數正五邊形，而且可以知道重組的方法。

1. 檢查 $\frac{\alpha}{\beta}$ 是否介於 0.5 到 1.618 之間，若不是，則不可能重組成功，若是，則進行第 2 個步驟。
2. 檢查 $\frac{\alpha}{\beta}$ 介於哪兩個連續的 C_n 之 A、B 兩類三角形的數量比值，利用解聯立方程式的方法解出 $\alpha A + \beta B = pC_{n-1} + qC_n$ ，當 p 、 q 皆為整數時，代表 $\alpha A + \beta B$ 以重組成若干個分割不同次數正五邊形，我可以進一步利用前面的 αC_n 轉換規律，得到不同的重組方法；當 p 、 q 任一個數不為整數時，代表 $\alpha A + \beta B$ 無法重組成若干個分割不同次數正五邊形。

柒、研究結論

- 一、正三角形與正方形的分割數量規律為等分量的平方，也就是說此兩種圖形的分割數量必為完全平方數。
- 二、等腰直角三角形的分割數量規則為公比 = 2 的等比數列。
- 三、A 類三角形（ $72^\circ - 36^\circ - 72^\circ$ ）、B 類三角形（ $36^\circ - 108^\circ - 36^\circ$ ）及正五邊形的分割過程中會重複出現 A 類及 B 類三角形，其數量規律皆為前兩項之數字和即為下一項之數字，與費氏數列的產生規則相同，其中 A 類及 B 類三角形的數量規律即就是費氏數列，而正五邊形的數量規律則是：2, 1, 3, 4, 7, 11, ...，稱為盧卡斯數列。
- 四、正五邊形的分割過程中，計算 A、B 兩類三角形數量的比值會越來越接近 1.618（黃金比例）。
- 五、A 類、B 類三角形邊長分割的數量規律，若以 p 表示 A 類三角形的腰， q 表示 A 類三角形的底邊，則無論是腰或底邊分割的 (p, q) 值必為費氏數列的相鄰兩項。
- 六、在 A 類、B 類三角形中，連續三種不同分割次數的腰或底邊之 (p, q) 值會符合費氏數列的產生規則，也就是前兩項之數字和即為下一項之數字：
$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = q_{n-1} + q_{n-2}。$$
- 七、在 A 類、B 類三角形中，連續三種不同分割次數的腰或底邊之 p 、 q 的排列規則也會符合費氏數列的產生規則，也就是某一種分割次數的腰或底邊之 p 、 q 的排列規則，可以用前兩種分割次數的腰或底邊之 p 、 q 的排列規則組合在一起。

- 八、正五邊形邊長分割的數量規律及 p 、 q 的排列規則與 B 類三角形完全相同。
- 九、利用結論五至八所得到的數量及排列規則，我可以很快的將分割多次的圖形，用足夠數量的 A 類、B 類三角形重組出來。
- 十、如果以 b_n 為正五邊形 C_m 的個數，則可利用分割、重組的方式得到兩個不同分割次數的正五邊形，其關係式為： $b_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + C_{m+(n-1)}$ ， $m \geq n \geq 2$ 。
- 十一、如果以 a_n 為正五邊形 C_m 的個數，則可利用分割、重組的方式得到以 C_m 為中心點的連續 $(2n-1)$ 個不同分割次數的正五邊形，其關係式為：

$$a_n \bullet C_m = C_{m-(n-1)} + \cdots + C_{m+(n-1)}, \quad m \geq n \geq 2。$$

- 十二、若以任意數 α 為正五邊形 C_m 的個數，則可將 α 分解成若干個 a_n 及 b_m 的和，再利用十、十一的結論進行分割、重組，不過重組的方式並不是唯一的。
- 十三、任給 $\alpha A + \beta B$ ，當 $\frac{\alpha}{\beta}$ 介於 0.5 到 1.618 之間，可以檢查 $\frac{\alpha}{\beta}$ 介於哪兩個連續的 C_n 之 A、B 兩類三角形的數量比值，利用解聯立方程式的方法解出 $\alpha A + \beta B = pC_{n-1} + qC_n$ ，當 p 、 q 皆為整數時，代表 $\alpha A + \beta B$ 以重組成若干個分割不同次數正五邊形，再利用 αC_n 轉換規律，即得到不同的重組方法；反之，當 p 、 q 任一個數不為整數時，代表 $\alpha A + \beta B$ 無法重組成若干個分割不同次數正五邊形。

捌、未來展望

- 一、正五邊形的分割重組過程中，有時會出現某一種正五邊形的量會非常大，而其他分割次數的正五邊形有些又不會出現，或是只出現 1 個或 2 個，能否找到規則來確定不同分割次數的正五邊形量？

例如： $100A + 100B = 20C_1 + 20C_2$

$$\text{又 } 20C_2 = 3(4C_2 + 3C_3) - C_2 = 3[(C_1 + C_2 + C_3) + (C_1 + C_3)] - C_2$$

$$= 6C_1 + 2C_2 + 6C_3 = 6C_1 + 2C_2 + (4C_3 + 2C_3) = 6C_1 + 2C_2 + C_2 + 3C_3 + C_4$$

$$= 6C_1 + 3C_2 + (C_2 + C_4) + C_4 = 6C_1 + 4C_2 + 2C_4 = 7C_1 + C_2 + C_3 + 2C_4$$

$$\therefore 100A + 100B = 20C_1 + 20C_2 = 27C_1 + C_2 + C_3 + 2C_4$$

- 二、是否還存在其他圖形的分割能產生不同數列規則呢？

玖、參考資料

- 一、 伊凡・莫斯科維奇。計程車怎麼走比較快？究竟出版社。
- 二、 伊凡・莫斯科維奇。耍心機，玩數學。究竟出版社。
- 三、 黃敏晃。數學年夜飯。心理出版社。
- 四、 黃子軒、陳政豪。正五邊形的分解與再生。第 46 屆高雄市科展。
- 五、 數學課本四上。三角形。康軒出版社。
- 六、 數學課本四下。四邊形。康軒出版社。
- 七、 數學課本第二冊。二元一次聯立方程式。翰林出版社。

【評語】 080406

- 1.正五邊形分割的問題也有不少人討論過，也已有不錯的結果，本件作品給了一個較完整的數學式子，對國小學生來說，也算相當不錯。
- 2.本作品在深度及廣度的討論上，仍值得再多加探討研究。