中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080405

拼拼湊湊 24

學校名稱：桃園縣大園鄉竹圍國民小學

作者：	指導老師：
小六 高郁棻	林徹輝
小六 陳柏豪	林芯蘭
小六 王卉蓁	
小六 楊采婕	
小六 廖吾優	
小五 陳竑瑋	

關鍵詞：運算元、驗證機、反向思考

壹、　研究動機

在數學社團時，老師教我們玩一種撲克牌遊戲：「從一副撲克牌隨機抽出四張，看誰先用四張牌的點數經過加減乘除和括號運算湊出 24 的人贏。J 代表 11 點，Q 代表 12 點，K 代表 13 點」我們玩這個遊戲玩得很高興。上數學課時，老師又在黑板上寫了 4 個數字 1、4、7、9，要我們利用四則及括號運算將這 4 個數字拼湊成 24，這個問題引起我們探討的興趣。我們想：是不是任意 4 個小於等於 10 的正整數，皆能利用四則運算拼湊成 24？能不能找到數字間的規律性？因此，我們將所有可能的數字組合整理出來，並代入四則運算，於是完成下面的研究。

貳、　研究目的

一、爲什麼是 24 這個數字，換成其他數字有什麼影響？

二、(a、b、c、d)將 1~10 代入有幾種排法？

三、(a、b、c、d)的最小值和最大值是多少？

四、是否有無解的情況？有什麼特殊的解法？

五、如何確定(a、b、c、d)是有解或無解？

六、(a、b、c)與 (a、b、c、d)和 (a、b、c、d、e)的結果與過程有何不同？

七、這遊戲可以如何改進？又有什麼秘訣？

參、　研究設備及器材：計算紙、**Excel**、電腦、筆、撲克牌

肆、　研究過程和方法

一、爲什麼是 24 這個數字：我們將 1~48 的因數通通列出來

數字	因數	因數個數	數字	因數	因數個數
1	1	1	25	1、5、25	3
2	1、2	2	26	1、2、13、26	4
3	1、3	2	27	1、3、9、27	4
4	1、2、4	3	28	1、2、4、7、14、28	6
5	1、5	2	29	1、29	2
6	1、2、3、6	4	30	1、2、3、5、6、10、15、30	8
7	1、7	2	31	1、31	2
8	1、2、4、8	4	32	1、2、4、8、16、32	6
9	1、3、9	3	33	1、3、11、33	4
10	1、2、5、10	4	34	1、2、17、34	4
11	1、11	2	35	1、5、7、35	4
12	1、2、3、4、6、12	6	36	1、2、3、4、6、9、12、18、36	9
13	1、13	2	37	1、37	2
14	1、2、7、14	4	38	1、2、19、38	4

15	1、3、5、15	4	39	1、3、13、39	4
16	1、2、4、8、16	5	40	1、2、4、5、8、10、20、40	8
17	1、17	2	41	1、41	2
18	1、2、3、6、9、18	6	42	1、2、3、6、7、14、21、42	8
19	1、19	2	43	1、43	2
20	1、2、4、5、10、20	6	44	1、2、4、11、22、44	6
21	1、3、7、21	4	45	1、3、5、9、15、45	6
22	1、2、11、22	4	46	1、2、23、46	4
23	1、23	2	47	1、47	2
24	1、2、3、4、6、8、12、24	8	48	1、2、3、4、6、8、12、16、24、48	10

我們發現以下幾點

(一)24、30、40、42 這四個數字都有 8 個因數，可是 24 是擁有 8 個因數的最小數字

(二)我們發現 4 個不同數字的最小組別(1、2、3、4)相乘起來剛剛好是 24。40 最小的不同數字的組別是(1、2、4、5)。42 最小的不同數字的組別是(1、2、3、7)

(三)12 是擁有 6 個因數的最小數字，24 是擁有 8 個因數的最小數字，48 是擁有 10 個因數的最小數字。

所以我們推估玩遊戲時 4 張牌用 24 剛剛好，3 張牌用 12，5 張牌用 48 會比較好

二、(a、b、c、d)有幾種排法：這個遊戲的玩法是將 1~13，4 種花色，52 張牌隨機抽出來 4 個數字拼成 24。所以我們發現抽出的數字有以下 5 種情形

(一) 4 同：例如(6、6、6、6)這種情形有 13 種

(二) 3 同 1 異：例如(2、2、2、4)這種情形有 13x12 種=156 種

(三) 2 同 2 異：例如(1、1、3、8)這種情形有 13x12x11÷2 種=858 種

(四) 2 同 2 同：例如(6、6、7、7)這種情形有 13x12÷2 種=78 種

(五) 4 異：例如(1、2、3、4)這種情形有 13x12x11x10÷24 種=715 種

所以我們知道，不論花色只看數字將會有 13+156+858+78+715=1820 種組合

根據以上五點，我們可以整理出一個公式：當我們將 1~n，4 種花色，4n 張牌隨機抽出來 4 個數字會有 $n+n\times(n-1)+n\times(n-1)\times(n-2)\div2+n\times(n-1)\div2+n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\div24=\frac{n\times n\times n\times n}{24}+\frac{n\times n\times n}{4}+\frac{11\times n\times n}{24}-\frac{n}{4}$ 種不同的組合方法。

三、簡化遊戲：因為 1~13，4 種花色，52 張牌隨機抽出來 4 個數字的組合有 1820 種。而 1~10，4 種花色，40 張牌隨機抽出來 4 個數字的組合有 715 種。如此多種實在是讓人無從下手。所以我們先用 1~10，10 張牌隨機抽出 4 個數字的組合有 210 種，希望能從裡面找出規律。我們發現以下 15 組可能是無法湊成 24 的。

1	2	9	10
1	3	4	6
1	4	7	9

1	4	7	10
1	4	8	10
1	6	7	8
1	8	9	10
2	7	8	10
3	4	6	7
3	4	9	10
3	5	8	10
3	7	8	10
5	6	7	10
5	8	9	10
6	7	9	10

四、驗證機的產生：在 1~10，10 張牌隨機抽出來 4 個數字的 210 種組合裡面，我們發現有 15 組是我們不管怎麼想都無法發現湊成 24 的方法。可是因爲我們沒有列出所有的算式，所以無法確定是否真的無解。但如果真的列出所有算式又非常多，所以我們想用 Excel 幫助我們，並做了以下的討論：

(一) 一組數字有哪些算式：舉(1、3、4、6)爲例，我們發現有三種狀況需要討論

1、(1、3、4、6)有 24 種組合：4 種不同的數字我們發現有 24 種不同位置的組合我們把它按照規律列出：

(1、3、4、6)	(1、3、6、4)	(1、4、3、6)	(1、4、6、3)	(1、6、3、4)	(1、6、4、3)
(3、1、4、6)	(3、1、6、4)	(3、4、1、6)	(3、4、6、1)	(3、6、1、4)	(3、6、4、1)
(4、1、3、6)	(4、1、6、3)	(4、3、1、6)	(4、3、6、1)	(4、6、1、3)	(4、6、3、1)
(6、1、3、4)	(6、1、4、3)	(6、3、1、4)	(6、3、4、1)	(6、4、1、3)	(6、4、3、1)

2、+ - × ÷的配置：每 4 個數字之間需要 3 個運算元，我們按照規律列出所有可能，發現有 64 種。

a+b+c+d	a-b+c＋d	axb＋c＋d	a÷b＋c＋d
a+b+c－d	a-b+c－d	axb＋c－d	a÷b＋c－d
a+b+cxd	a-b+cxd	axb＋cxd	a÷b＋cxd
a+b+c÷d	a-b+c÷d	axb＋c÷d	a÷b＋c÷d
a+b-c＋d	a-b－c＋d	axb－c＋d	a÷b－c＋d
a+b-c－d	a-b－c－d	axb－c－d	a÷b－c－d
a+b-cxd	a-b－cxd	axb－cxd	a÷b－cxd
a+b-c÷d	a-b－c÷d	axb－c÷d	a÷b－c÷d
a+bxc＋d	a-bxc＋d	axbxc＋d	a÷bxc＋d
a+bxc－d	a-bxc－d	axbxc－d	a÷bxc－d
a+bxcxd	a-bxcxd	axbxcxd	a÷bxcxd

a+b×c÷d a+b÷c＋d a+b÷c－d a+b÷c×d a+b÷c÷d	a-b×c÷d a-b÷c＋d a-b÷c－d a-b÷c×d a-b÷c÷d	a×b×c－d a×b÷c×d a×b÷－c×d a×b÷c÷d a×b÷c÷d	a÷b×c÷d a÷b÷c＋d a÷b÷c－d a÷b÷c×d a÷b÷c÷d

3、括號的配置：括號的位置有七種列表如下

沒有括號	括號內有三個數字	括號內有二個數字
Abcd	(abc)d a(bcd)	(ab)(cd) (ab)cd a(bc)d ab(cd)

4、相同意義的算式：每組數字最多有 24 種、運算元的配置有 64 種，括號的配置有 7 種，所以全部有 24×64×7＝10752 種，雖然我們可以靠電腦運算來減少驗算的時間。但這麼多的算式裡面有許多算式的意義是相同的例如(2、6、8、9)這組數字有下面的幾種方法：

(1) 2×8×9÷6
(2) 2×8÷6×9
(3) 2÷6×8×9
(4) 2×9×8÷6
(5) 2×9÷6×8
(6) 2÷6×9×8

以 3 開頭可以湊成 24 的有 6 種方法，所以我們可以知道(2、6、8、9)有 6×3＝18 種方法可以湊成 24。但這 18 種方法其實都是同一種方法，只是改變了數字和運算元的位置。而在我們的驗算機裡面卻是佔了 18 個算式的位置。如果我們能將這些看似不同實際上卻相同的算式通通找出來合併，那就大大增加了我們運算的效率了。

(二) 驗算機的成果：花費很多的時間將我們之前找到的無解組別輸入驗算機我們發現下面這 2 組數字是可以組成 24 的。

1	3	4	6
1	4	7	9

五、反向探討：我們用了驗證機之後發現驗證機還是有其缺點。因爲現行的驗證機最少要輸入 24 組不同的排列，利用電腦檢驗超過一萬組的算式，花費的時間不少。所以我們思考是否有更加簡便的驗證方法。

(一) 24 的組成：我們把 24 可能的行程方法列出來

1、A＋B：1+23、2+22、3+21…

2、A－B：25－1、26－2、27－3…

3、A×B：1×24、2×12、3×8…

4、A÷B：48÷2、72÷3、96÷4…或 12÷1/2、8÷1/3、4÷1/6…

(二) 乘法的探討：我們可以把 24 分成兩個因數，有 2 種情形

1、三個數字合併成一個數字：例如(3、7、7、9)這一組有 3 這個數字，所以我們可以想辦法把(7、7、9)這三個數字湊成 8，9－7÷7=8，8×3＝24

2、兩兩合併成一個數字：例如(2、7、10、10)這一組有 2，但(7、10、10)沒辦法湊成 12，這時候就可以用兩兩合併成一個數字，10－7＝3，10－2＝8，3×8＝24

(三) 除法的探討：

1、三個數字合併成一個數字：例如(3、8、8、10)這一組數字有 3，所以可能合乎 72÷3＝24，那要想辦法把(8、8、10)變成 72，8×10－8＝72，72÷3＝24

2、兩兩合併成一個數字：例如(2、6、8、9)，8×9＝72，6÷2＝3，72÷3＝24

3、整數除分數：(3、3、8、8)

(四) 加、減法的探討：例如(1、3、10、10)只能用 1＋3＋10＋10＝24 這個方法，不能利用其他方法。

伍、　研究結果

一、我們發現 24 這個數字是擁有 8 個因數的最小數字，另外它剛剛是(1、2、3、4)連乘的積，所以用 24 玩這個遊戲剛剛好。42 也有 8 個因數，但是 42 略大，如果 4 張牌都是小數字，則不易成功。

二、玩三張牌可以用 12 這個數字，玩四張牌可以用 24 這個數字，玩五張牌可以用 48 這個數字。

三、我們將 1~n，4 種花色，4n 張牌隨意抽出來 4 個數字會有 n＋n×(n-1)+n×(n-1)×(n-2)÷2+n×(n-1)÷2+ n×(n-1) ×(n-2) ×(n-3)÷24 種不同的組合方法。

四、1~10，4 種花色，40 張牌隨意抽出來 4 個數字，最小可以完成 24 的組別是(1、1、1、8)，最大可以完成 24 的組別是(8、8、8、10)和(6、10、10、10)。

五、我們用驗證機使每組數字跑了一萬多個算式後發現，在 1~10 數字不重複的情形下共有 210 組數字其中有 13 種無解的組別。在 1~10 數字可重複的情形下共有 210 組數字其中有 148 種無解的組別。

六、通過反向思考我們發現 24 的拼湊過程可以分成加減乘除四種，每種過程又可以細分成很多種。其中乘除法較爲簡單，加減法比較複雜，所以我們可以先考慮乘除法，再考慮加減法。

陸、　討論

一、簡化驗證機：我們把幾種相同的算式種類列出，在改善驗算機時可以用到

(一) 連加或連乘：例如(a＋b＋c)＋d＝a＋b＋c＋d＝a＋(b＋c＋d)或(a×b×c) ×d＝a×b×c×d＝a×(b×c×d)

(二) 數字前後變換：例如 a×b＋c×d＝c×d+a×b＝b×a＋c×d

(三) 以上的算式在驗算機裡面因爲排列的不同或是括號的不同所以被當成不同的算

式，實際上是同一種，如果能將這些相同的算式消掉，將會大大減少驗證機的記憶空間及計算時間。

二、遊戲是否有改善的空間：我們發現比較大的數字較不容易湊成 24，例如 9、10、11、12、13。但是如果這五個數字都拿掉的話，遊戲又顯得過於單調和簡單，所以我們建議在玩這個遊戲的時候可以把 11、12、13 拿掉，但留下 9、10，這樣難度會剛剛好。關於遊戲我們還有另外兩項建議：

(一) 玩湊 24 這個遊戲的初學者可以只使用 1~10，且數字不重複的玩法。雖然總共只有 210 種組合，但是無解的機會比較少，較容易入手。

(二) 玩膩了普通的遊戲規則可以加入其他的限制，比如說可以規定 4 個數字裡面一定要有 9 或 10，其他 3 個數字任意抽出，這樣會變得較有趣。

三、類似的遊戲：我們還接觸到了幾個類似的遊戲

(一) 四個四：我們在書本上發現可以用四個 4 組成 1~10 或者更多的數字，在湊出那些數字時，有時要用到這個遊戲的技巧。

(二) 我們想既然用 4 個四可以湊出那麼多數字，那如果用 1~9 ，每個數字都必須出現且只能出現一次，配上加減乘除以及括號，應該可以湊出非常多的連續數字。

四、無解的規律：無解有哪些類型

(一) 我們發現有重複的大數字的組別較容易出現無解：例如

8	9	9	9
8	9	9	10
8	9	10	10
8	10	10	10
9	9	9	9
9	9	9	10
9	9	10	10
9	10	10	10
10	10	10	10

(二) 還有較小數字的組別，例如：

1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	1	3
1	1	1	4
1	1	1	5
1	1	1	6
1	1	1	7
1	1	1	9
1	1	1	10

(三) 4 個相同的數字：4 個相同數字的組別內 1、2、7、8、9、10 皆是無解

(四) 我們發現在 1~10，4 種花色，40 張牌的無解組合裡面 3、4 出現的次數最少，剛剛好都是 24 次，而 9 這個數字出現的次數最多共有 95 次。所以我們可以知道出現 9 的組別容易無解

柒、　結論

經過這次的研究我們了解到 4 種不同的數字有 24 種排列方法，再加上運算元和括號的部分，將可以組合成一萬多種算式。當我們遇到很多算式的時候，可以想辦法先挑選出意義相同的算式，如此可以簡化計算過程。經過簡化的算式如果還是很多，可以利用電腦的程式幫我們運算。我們還知道看似沒有規律的現象，如果經過大量的資料互相比對、分析之後還是可以找出固定的規律。

另外我們發現經由反向思考可以增加我們看事情的角度，有些從一定方向無法解決的難題，如果能從反方向去著手，難題馬上可以迎刃而解。

最後，我們知道了數學是很有趣的學問。

捌、　參考資料：

一、理查・菲立普(民 93)。數字邏輯 100。台北：究竟。

二、馬爾巴塔罕(民 93)。數學天方夜譚。貓頭鷹出版社

三、李毓佩(民 94)。改變世界的數學故事。豐閣

【評語】080405

從撲克牌遊戲引起動機，接著將數字及運算元拼湊成 24。本研究是以計算機輔助進行大量計算，找出答案，惟數學性的研究略嫌不足。