中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080404

揭開「孔明神算」的神秘面紗

學校名稱：國立屏東教育大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小六 田喬恩	曾淑芳
小六 陳炤良	林素秋
小六 陳皇蓉	
小六 王晶晶	

關鍵詞：數列、M的次方、孔明神算

摘要

本研究主要是探究「孔明神算牌」的數列規律性及設計原理，然後加以應用。研究的結果發現，「孔明神算牌」是利用「2 的次方」的組合及分類的原理設計而成，發現這個原理之後，我們嘗試以其他次方的組合找出數列的規律性，並歸納出設計公式及製作紙牌的要訣，最後以「4 的次方」的組合，設計出好玩有趣而且獨一無二的「神機妙算牌」與大家同樂。

壹、研究動機

在中年級的時候，有一回同學帶了「孔明神算」牌跟大家一起玩，搞得非常神祕。那時，我便有了好奇心，但因為能力不足，所以並沒有深入的研究它。到了高年級，老師也拿出「孔明神算」牌，告訴大家：「我有魔力唷！能猜出你的祕密哦！」老師果真很厲害，一下子就猜中了。我的好奇心又來了，於是向老師借了孔明神算牌，才發現都是數列。想起在五上的數學課第五單元曾經學過「數列」，再仔細一瞧，這些數列好像隱藏著某些規律性，如果能找出其中的奧祕，或許還能自創與眾不同的紙牌，與大家同樂，於是，決定和同學一起好好研究，揭開「孔明神算」的神祕面紗。

貳、研究目的

一、探討「孔明神算牌」數列的規律性。
二、改變數字不同的組合方式，探討紙牌數列的規律性。
三、利用不同的數字組合方式，設計有趣好玩的「神機妙算」牌。

參、遊戲規則

【孔明神算牌的玩法】：
一、請觀眾從 1~63 中挑選一個數字（放在心中，不要講出來）。
二、魔術師依序呈現 A~F 六張紙牌，請觀眾檢查哪些紙牌有心中所想的那個數字，然後交給魔術師。
三、魔術師便能很快的從交出來的紙牌中，找到觀眾心中所想的數字。

肆、研究過程與結果

【研究一】「孔明神算牌」的數列是否有規律性？

一、探討孔明神算牌上的數列規律

(一) 觀察每張紙牌的數列

A

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

B

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

C

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

D

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

E

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

F

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

(二) 發現

1. 每張紙牌的數列有如下的規律性：

   A 紙牌：從 1 開始，間隔 1 個數出現。

   B 紙牌：從 2 開始，連續 2 個數，間隔 2 個數；再連續 2 個數，間隔 2 個數；……。

   C 紙牌：從 4 開始，連續 4 個數，間隔 4 個數；再連續 4 個數，間隔 4 個數；……。

   D 紙牌：從 8 開始，連續 8 個數，間隔 8 個數；再連續 8 個數，間隔 8 個數；……。

   E 紙牌：從 16 開始，連續 16 個數，間隔 16 個數；再連續 16 個數。

   F 紙牌：從 32 開始，連續 32 個數。

2. 六張紙牌的第一個數字是按照 1、2、4、8、16、32（也就是 2^0、2^1、2^2、2^3、2^4、2^5）的順序出現。
3. 每一張紙牌都有 $32＝2^5$ 個數字，剛好是最後一張紙牌的第一個數字。
4. 每一張紙牌的最後一個數字都是 $63＝2^6－1$。
5. 六張紙牌共出現 $63(2^6－1)$ 個不同的數字，也就是 1~63。
6. 將有出現這個數字的紙牌的第一個數字相加，就是心中所想的數字。例如：49，出現在 A 紙牌、E 紙牌、F 紙牌，把三張紙牌的第一個數字相加：

   $1＋16＋32＝49$　也就是 $49＝2^5＋2^4＋2^0$

二、探討孔明神算牌的設計原理

(一) 討論：紙牌的數列似乎與「2 的次方」有密切的關係，因此我們推測可以將每個數字分解成「2 的次方」的組合。

(二) 將數字 1~63 分解成「2 的次方」的組合（見表一）。

表一　1~63 分解成「2 的次方」的組合

	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1						✓	33	✓					✓
2					✓		34	✓				✓	
3					✓	✓	35	✓				✓	✓
4				✓			36	✓			✓		
5				✓		✓	37	✓			✓		✓
6				✓	✓		38	✓			✓	✓	
7				✓	✓	✓	39	✓			✓	✓	✓
8			✓				40	✓		✓			
9			✓			✓	41	✓		✓			✓
10			✓		✓		42	✓		✓		✓	
11			✓		✓	✓	43	✓		✓		✓	✓
12			✓	✓			44	✓		✓	✓		
13			✓	✓		✓	45	✓		✓	✓		✓
14			✓	✓	✓		46	✓		✓	✓	✓	
15			✓	✓	✓	✓	47	✓		✓	✓	✓	✓
16		✓					48	✓	✓				
17		✓				✓	49	✓	✓				✓
18		✓			✓		50	✓	✓			✓	
19		✓			✓	✓	51	✓	✓			✓	✓
20		✓		✓			52	✓	✓		✓		
21		✓		✓		✓	53	✓	✓		✓		✓
22		✓		✓	✓		54	✓	✓		✓	✓	
23		✓		✓	✓	✓	55	✓	✓		✓	✓	✓
24		✓	✓				56	✓	✓	✓			
25		✓	✓			✓	57	✓	✓	✓			✓
26		✓	✓		✓		58	✓	✓	✓		✓	
27		✓	✓		✓	✓	59	✓	✓	✓		✓	✓
28		✓	✓	✓			60	✓	✓	✓	✓		
29		✓	✓	✓		✓	61	✓	✓	✓	✓		✓
30		✓	✓	✓	✓		62	✓	✓	✓	✓	✓	
31		✓	✓	✓	✓	✓	63	✓	✓	✓	✓	✓	✓
32	✓												
	F	E	D	C	B	A		F	E	D	C	B	A

(三) 發現：

1. 可以分解出 2^0 的數字集合在一起，剛好是 A 紙牌的數列。
2. 可以分解出 2^1 的數字集合在一起，剛好是 B 紙牌的數列。
3. 可以分解出 2^2 的數字集合在一起，剛好是 C 紙牌的數列。
4. 可以分解出 2^3 的數字集合在一起，剛好是 D 紙牌的數列。
5. 可以分解出 2^4 的數字集合在一起，剛好是 E 紙牌的數列。
6. 可以分解出 2^5 的數字集合在一起，剛好是 F 紙牌的數列。

※以上就是猜測 1~63 數字組「孔明神算牌」的設計原理。

三、孔明神算牌設計原理之應用

由表一及上述有關孔明神算牌的數列規律與設計原理，我們認爲也可以設計出用於猜測其他數字組的孔明神算牌（見表二、表三）。

表二　「2 的次方」孔明神算牌設計摘要(一)

預測的數字範圍	紙牌張數(張)	每張紙牌的第一個數字	每張紙牌上數字個數
1~3(即 2^2-1)	2	1、2	$2=2^1=2^{2-1}$
1~7(2^3-1)	3	1、2、4	$4=2^2=2^{3-1}$
1~15(2^4-1)	4	1、2、4、8	$8=2^3=2^{4-1}$
1~31(2^5-1)	5	1、2、4、8、16	$16=2^4=2^{5-1}$
1~63(2^6-1)	6	1、2、4、8、16、32	$32=2^5=2^{6-1}$
1~127(2^7-1)	7	1、2、4、8、16、32、64	$64=2^6=2^{7-1}$
1~255(2^8-1)	8	1、2、4、8、16、32、64、128	$128=2^7=2^{8-1}$
1~511(2^9-1)	9	1、2、4、8、16、32、64、128、256	$256=2^8=2^{9-1}$
……………………………………………………			
1~2^n-1	**n**	**1、2、4、8、16、32……2^{n-3}、2^{n-2}、2^{n-1}**	**2^{n-1}**
……………………以此類推……………………			

表三　「2 的次方」孔明神算牌設計摘要(二)

牌序	紙牌上的數列規律			示　例
	第一個數字	連續出現的數列個數	間隔數	
1(A)	1(2^0)	1(2^0)	1(2^0) 即+2(+2^0+1)	1、3、5、7、9、11、13、15……
2(B)	2(2^1)	2(2^1)	2(2^1) 即+3(+2^1+1)	2~3、6~7、10~11、14~15……
3(C)	4(2^2)	4(2^2)	4(2^2) 即+5(+2^2+1)	4~7、12~15、20~23、28~31……
4(D)	8(2^3)	8(2^3)	8(2^3) 即+9(+2^3+1)	8~15、24~31、40~47……
5(E)	16(2^4)	16(2^4)	16(2^4) 即+17(+2^4+1)	16~31、48~63、80~95……
6(F)	32(2^5)	32(2^5)	32(2^5) 即+33(+2^5+1)	32~63、96~127、160~191……
……………………………………………………				
n	**2^{n-1}**	**2^{n-1}**	**2^{n-1}** 即(+2^{n-1}+1)	**2^{n-1}~2^{n-1}×2-1、2^{n-1}×3~2^{n-1}×4-1**……
……………………以此類推……………………				

由表二、表三得知：我們要預測 $1\sim2^n-1$ 中之任一神祕數時，需要設計 n 張紙牌，其中第 K 張(K＝1、2、3…n)上的數列，均可透過「從 2^{K-1} 開始，往後出現 2^{K-1} 個連續數字，間隔 2^{K-1} 個數(即 $+2^{K-1}+1$)，再重複上述步驟，直到每張紙牌上都恰有 2^{n-1} 個數字」的要訣來製作。

以 n＝4 爲例，可預測的數字範圍是 $1\sim2^4-1$(即 1~15)，需要設計 4 張紙牌，每張紙牌上都有 2^{4-1}(即 8)個數字，其數列依序如下：如果 K＝1（第 1 張紙牌），帶入上述要訣，紙牌上的數列是 1、3、5、7、9、11、13、15；如果 K＝2（第 2 張紙牌），紙牌上的數列是 2、3、6、7、10、11、14、15；如果 K＝3（第 3 張紙牌），紙牌上的數列是 4、5、6、7、12、13、14、15；如果 K＝4（第 4 張紙牌），紙牌上的數列是 8、9、10、11、12、13、14、15。

根據上述要訣，可以輕易製作出用於猜測其他數字組的孔明神算牌如下：

表四　猜測 1~3、1~7、1~15、1~31、1~63、1~127、1~255 等數字組之孔明神算牌一覽表

	A	B	C	D	E	F	G	H
①	1	2	4	8	16	32	64	128
②	3	3	5	9	17	33	65	129
	5	6	6	10	18	34	66	130
④	7	7	7	11	19	35	67	131
	9	10	12	12	20	36	68	132
	11	11	13	13	21	37	69	133
	13	14	14	14	22	38	70	134
⑧	15	15	15	15	23	39	71	135
	17	18	20	24	24	40	72	136
	19	19	21	25	25	41	73	137
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⑯	31	31	31	31	31	47	79	143
	33	34	36	40	48	48	80	144
	35	35	37	41	49	49	81	145
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
㉜	63	63	63	63	63	63	95	159
㉝	65	66	68	72	80	96	96	160
㉞	67	67	69	73	81	97	97	161
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
64	127	127	127	127	127	127	127	191
65	129	130	132	136	144	160	192	192
66	131	131	133	137	145	161	193	193
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
128	255	255	255	255	255	255	255	255

第一個黑框代表預測 1~3，需要 A、B 二張紙牌，每張有 2 個數字。

第二個黑框代表預測 1~7，需要 A、B、C 三張紙牌，每張有 4 個數字。

第三個黑框代表預測 1~15，需要 A、B、C、D 四張紙牌，每張有 8 個數字。

第四個黑框代表預測 1~31，需要 A、B、C、D、E 五張紙牌，每張有 16 個數字。

第五個黑框代表預測 1~63，需要 A、B、C、D、E、F 六張紙牌，每張有 32 個數字。

…………………………………………以此類推…………………………………………

【研究二】改變數字不同的組合方式，紙牌數列的規律性將會有什麼變化？

由研究一得知，每一數字可以分解成「2 的次方」的組合，當然也可以分解成其他次方的組合，所以參考「2 的次方」孔明神算牌的製作原理，一一來製作其他次方的「孔明神算牌」，並探究其數列的規律性。

一、數字分解成「3 的次方」的組合

(一) 將數字 1~26 分解成「3 的次方」的組合（見表五）。

表五　1~26 分解成「3 的次方」的組合

	3^2x2	3^2x1	3^1x2	3^1x1	3^0x2	3^0x1
1						✓
2					✓	
3				✓		
4				✓		✓
5				✓	✓	
6			✓			
7			✓			✓
8			✓		✓	
9		✓				
10		✓				✓
11		✓			✓	
12		✓		✓		
13		✓		✓		✓
14		✓		✓	✓	
15		✓	✓			
16		✓	✓			✓
17		✓	✓		✓	
18	✓					
19	✓					✓
20	✓				✓	
21	✓			✓		
22	✓			✓		✓
23	✓			✓	✓	
24	✓		✓			
25	✓		✓			✓
26	✓		✓		✓	
	F	E	D	C	B	A

(二) 將數字加以分類，並製成紙牌：

分解出「3^0x1」的數字集合在 A 紙牌，分解出「3^0x2」的數字集合在 B 紙牌；
分解出「3^1x1」的數字集合在 C 紙牌，分解出「3^1x2」的數字集合在 D 紙牌；
分解出「3^2x1」的數字集合在 E 紙牌，分解出「3^2x2」的數字集合在 F 紙牌。

※ 以上就是依據「3 的次方」的組合，猜測 1~26 數字組「孔明神算牌」的設計原理，而依此原理所設計的六張紙牌如下：

A

1	4	7
10	13	16
19	22	25

B

2	5	8
11	14	17
20	23	26

C

3	4	5
12	13	14
21	22	23

D

6	7	8
15	16	17
24	25	26

E

9	10	11
12	13	14
15	16	17

F

18	19	20
21	22	23
24	25	26

(三)依據「3 的次方」的組合原理，可以設計出用於猜測其他數字組的孔明神算牌（見表六、表七）。

表六 「3 的次方」孔明神算牌設計摘要(一)

預測的數字範圍	紙牌張數(張)	每張紙牌的第一個數字	每張紙牌上數字個數
1~8(即 3^2-1)	2x2＝4	1、2、3、6	3＝3^1＝3^{2-1}
1~26(3^3-1)	2x3＝6	1、2、3、6、9、18	9＝3^2＝3^{3-1}
1~80(3^4-1)	2x4＝8	1、2、3、6、9、18、27、54	27＝3^3＝3^{4-1}
1~242(3^5-1)	2x5＝10	1、2、3、6、9、18、27、54、81、162	81＝3^4＝3^{5-1}
……………………			
1~3^n-1	**2xn＝2n**	**1、2、3、6、9、18……3^{n-1}x1、3^{n-1}x2**	**3^{n-1}**
……………以此類推……………			

表七 「3 的次方」孔明神算牌設計摘要(二)

組別	牌序	紙牌上的數列規律：第一個數字	紙牌上的數列規律：連續出現的數列個數	紙牌上的數列規律：間隔數	示例
1	1(A)	3^0x1	1 (3^0)	2 (3^0x2)個數 即+3(+3^0x2+1)	1、4、7、10、13、16……
	2(B)	3^0x2			2、5、8、11、14、17……
2	3(C)	3^1x1	3 (3^1)	6 (3^1x2)個數 即+7(+3^1x2+1)	3~5、12~14、21~23……
	4(D)	3^1x2			6~8、15~17、24~26……
3	5(E)	3^2x1	9 (3^2)	18 (3^2x2)個數 即+19(+3^2x2+1)	9~17、36~44、63~71……
	6(F)	3^2x2			18~26、45~53、72~80……
4	7(G)	3^3x1	27 (3^3)	54 (3^3x2)個數 即+55(+3^3x2+1)	27~53、108~134、189~215……
	8(H)	3^3x2			54~80、135~161、216~242……
……………………					
n	2n-1	3^{n-1}x1	3^{n-1}	3^{n-1}x2 個數 即(+3^{n-1}x2+1)	3^{n-1}x1~3^{n-1}x2-1、3^{n-1}x4~3^{n-1}x5-1…
	2n	3^{n-1}x2			3^{n-1}x2~3^{n-1}x3-1、3^{n-1}x5~3^{n-1}x6-1…
……………以此類推……………					

由表六、表七得知：我們要預測 $1\sim3^{n}-1$ 中之任一神祕數時，需要設計 2n 張紙牌，在第 K 組時（含第 2K-1 及第 2K 兩張紙牌，K＝1、2、3…n），其中第 2K-1 張上的數列，均可透過「從 $3^{K-1}\times1$ 開始，往後出現 3^{K-1} 個連續數字，間隔 $3^{K-1}\times2$ 個數(即 $+3^{K-1}\times2+1$)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 3^{n-1} 個數字」的要訣來製作；而第 2K 張上的數列，均可透過「從 $3^{K-1}\times2$ 開始，往後出現 3^{K-1} 個連續數字，間隔 $3^{K-1}\times2$ 個數(即 $+3^{K-1}\times2+1$)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 3^{n-1} 個數字」的要訣來製作。

以 n＝3 爲例，可預測的數字範圍是 $1\sim3^{3}-1$(即 1~26)，需要設計 2×3＝6 張紙牌，每張紙牌上都有 3^{3-1}(即 9)個數字，其數列依序如下：如果 K＝1，帶入上述要訣，第 2K-1 張紙牌（即第 1 張紙牌），紙牌上的數列是 1、4、7、10、13、16、19、22、25，第 2K 張紙牌（第 2 張紙牌），紙牌上的數列是 2、5、8、11、14、17、20、23、26；如果 K＝2，第 2K-1 張紙牌（第 3 張紙牌），紙牌上的數列是 3、4、5、12、13、14、21、22、23，第 2K 張紙牌（第 4 張紙牌），紙牌上的數列是 6、7、8、15、16、17、24、25、26；如果 K＝3，第 2K-1 張紙牌（第 5 張紙牌），紙牌上的數列是 9、10、11、12、13、14、15、16、17，第 2K 張紙牌（第 6 張紙牌），紙牌上的數列是 18、19、20、21、22、23、24、25、26。

根據上述要訣，可以輕易製作出用於猜測其他數字組的孔明神算牌如下：

表八　利用「3 的次方」原理猜測 1~8、1~26、1~80 及 1~242 等數字組之孔明神算牌一覽表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
①	1	2	3	6	9	18	27	54	81	162
	4	5	4	7	10	19	28	55	82	163
③	7	8	5	8	11	20	29	56	83	164
	10	11	12	15	12	21	30	57	84	165
	13	14	13	16	13	22	31	58	85	166
	16	17	14	17	14	23	32	59	86	167
	19	20	21	24	15	24	33	60	87	168
	22	23	22	25	16	25	34	61	88	169
⑨	25	26	23	26	17	26	35	62	89	170
	28	29	30	33	36	45	36	63	90	171
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	73	74	75	78	69	78	51	78	105	186
	76	77	76	79	70	79	52	79	106	187
㉗	79	80	77	80	71	80	53	80	107	188
	82	83	84	87	90	99	108	135	108	189
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(79)	235	236	237	240	231	240	213	240	159	240
(80)	238	239	238	241	232	241	214	241	160	241
(81)	241	242	239	242	233	242	215	242	161	242

第一個黑框代表預測 1~8，需要 A、B、C、D 四張紙牌，每張有 3 個數字。

第二個黑框代表預測 1~26，需要 A、B、C、D、E、F 六張紙牌，每張有 9 個數字。

第三個黑框代表預測 1~80，需要 A~H 等八張紙牌，每張有 27 個數字。

第四個黑框代表預測 1~242，需要 A~J 等十張紙牌，每張有 81 個數字。

……………………………………………以此類推……………………………………………

二、數字分解成「4 的次方」的組合

(一) 將數字 1~63 分解成「4 的次方」的組合（見表九）。

表九　1~63 分解成「4 的次方」的組合

	4^2x3	4^2x2	4^2x1	4^1x3	4^1x2	4^1x1	4^0x3	4^0x2	4^0x1		4^2x3	4^2x2	4^2x1	4^1x3	4^1x2	4^1x1	4^0x3	4^0x2	4^0x1
1									✓	33		✓							✓
2								✓		34		✓						✓	
3							✓			35		✓					✓		
4						✓				36		✓				✓			
5						✓			✓	37		✓				✓			✓
6						✓		✓		38		✓				✓		✓	
7						✓	✓			39		✓				✓	✓		
8					✓					40		✓			✓				
9					✓				✓	41		✓			✓				✓
10					✓			✓		42		✓			✓			✓	
11					✓		✓			43		✓			✓		✓		
12				✓						44		✓		✓					
13				✓					✓	45		✓		✓					✓
14				✓				✓		46		✓		✓				✓	
15				✓			✓			47		✓		✓			✓		
16			✓							48	✓								
17			✓						✓	49	✓								✓
18			✓					✓		50	✓							✓	
19			✓				✓			51	✓						✓		
20			✓			✓				52	✓					✓			
21			✓			✓			✓	53	✓					✓			✓
22			✓			✓		✓		54	✓					✓		✓	
23			✓			✓	✓			55	✓					✓	✓		
24			✓		✓					56	✓				✓				
25			✓		✓				✓	57	✓				✓				✓
26			✓		✓			✓		58	✓				✓			✓	
27			✓		✓		✓			59	✓				✓		✓		
28			✓	✓						60	✓			✓					
29			✓	✓					✓	61	✓			✓					✓
30			✓	✓				✓		62	✓			✓				✓	
31			✓	✓			✓			63	✓			✓			✓		
32		✓																	
	I	H	G	F	E	D	C	B	A		I	H	G	F	E	D	C	B	A

(二) 將數字加以分類，並製成紙牌：

分解出「4^0x1」的數字集合在 A 紙牌，分解出「4^0x2」的數字集合在 B 紙牌，分解出「4^0x3」的數字集合在 C 紙牌；分解出「4^1x1」的數字集合在 D 紙牌，分解出「4^1x2」的數字集合在 E 紙牌，分解出「4^1x3」的數字集合在 F 紙牌；分解出「4^2x1」的數字集合在 G 紙牌，分解出「4^2x2」的數字集合在 H 紙牌，分解出「4^2x3」的數字集合在 I 紙牌。

※ 以上就是依據「4 的次方」的組合，猜測 1~63 數字組「孔明神算牌」的設計原理，而依此原理所設計的九張紙牌如下：

A

1	5	9	13
17	21	25	29
33	37	41	45
49	53	57	61

B

2	6	10	14
18	22	26	30
34	38	42	46
50	54	58	62

C

3	7	11	15
19	23	27	31
35	39	43	47
51	55	59	63

D

4	5	6	7
20	21	22	23
36	37	38	39
52	53	54	55

E

8	9	10	11
24	25	26	27
40	41	42	43
56	57	58	59

F

12	13	14	15
28	29	30	31
44	45	46	47
60	61	62	63

G

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

H

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47

I

48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

(三)依據「4 的次方」的組合原理，可以設計出用於猜測其他數字組的孔明神算牌（見表十、表十一）。

表十　「4 的次方」孔明神算牌設計摘要(一)

預測的數字範圍	紙牌張數(張)	每張紙牌的第一個數字	每張紙牌上數字個數
1~15(即 4^2-1)	3x2＝6	1、2、3、4、8、12	4＝4^1＝4^{2-1}
1~63(4^3-1)	3x3＝9	1、2、3、4、8、12、16、32、48	16＝4^2＝4^{3-1}
1~255(4^4-1)	3x4＝12	1、2、3、4、8、12、16、32、48、64、128、192	64＝4^3＝4^{4-1}
1~1023(4^5-1)	3x5＝15	1、2、3、4、8、12、……256、512、768	256＝4^4＝4^{5-1}
…………………………………………			
1~4^n-1	**3xn＝3n**	**1、2、3、4、8、12……4^{n-1}x1、4^{n-1}x2、4^{n-1}x3**	**4^{n-1}**
………………………以此類推………………………			

表十一　「4 的次方」孔明神算牌設計摘要(二)

組別	牌序	紙牌上的數列規律			示　　例
		第一個數字	連續出現的數列個數	間隔數	
1	1(A)	$4^0\times1$	1 (4^0)	3 ($4^0\times3$)個數 即+4(+$4^0\times3$+1)	1、5、9、13、17、21……
	2(B)	$4^0\times2$			2、6、10、14、18、22……
	3(C)	$4^0\times3$			3、7、11、15、19、23……
2	4(D)	$4^1\times1$	4 (4^1)	12 ($4^1\times3$)個數 即+13(+$4^1\times3$+1)	4~7、20~23、36~39……
	5(E)	$4^1\times2$			8~11、24~27、40~43……
	6(F)	$4^1\times3$			12~15、28~31、44~47……
3	7(G)	$4^2\times1$	16 (4^2)	48 ($4^2\times3$)個數 即+49(+$4^2\times3$+1)	16~31、80~95、144~159……
	8(H)	$4^2\times2$			32~47、96~111、160~175……
	9(I)	$4^2\times3$			48~63、112~127、176~191……
……………………………………					
n	3n-2	$4^{n-1}\times1$	4^{n-1}	$4^{n-1}\times3$ 個數 即(+$4^{n-1}\times3$+1)	$4^{n-1}\times1$~$4^{n-1}\times2$-1、$4^{n-1}\times5$~$4^{n-1}\times6$-1…
	3n-1	$4^{n-1}\times2$			$4^{n-1}\times2$~$4^{n-1}\times3$-1、$4^{n-1}\times6$~$4^{n-1}\times7$-1…
	3n	$4^{n-1}\times3$			$4^{n-1}\times3$~$4^{n-1}\times4$-1、$4^{n-1}\times7$~$4^{n-1}\times8$-1…
…………………以此類推…………………					

由表十、表十一得知：我們要預測 1~4^n-1 中之任一神祕數時，需要設計 3n 張紙牌，在第 K 組時（含第 3K-2、3K-1 及第 3K 三張紙牌，K＝1、2、3…n），其中第 3K-2 張上的數列，均可透過「從 $4^{K-1}\times1$ 開始，往後出現 4^{K-1} 個連續數字，間隔 $4^{K-1}\times3$ 個數(即+$4^{K-1}\times3$+1)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 4^{n-1} 個數字」的要訣來製作；第 3K-1 張上的數列，均可透過「從 $4^{K-1}\times2$ 開始，往後出現 4^{K-1} 個連續數字，間隔 $4^{K-1}\times3$ 個數(即+$4^{K-1}\times3$+1)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 4^{n-1} 個數字」的要訣來製作；而第 3K 張上的數列，均可透過「從 $4^{K-1}\times3$ 開始，往後出現 4^{K-1} 個連續數字，間隔 $4^{K-1}\times3$ 個數(即+$4^{K-1}\times3$+1)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 4^{n-1} 個數字」的要訣來製作。

以 n＝2 爲例，可預測的數字範圍是 1~4^2-1(即 1~15)，需要設計 3×2＝6 張紙牌，每張紙牌上都有 4^{2-1}(即 4)個數字，其數列依序如下：如果 K＝1，帶入上述要訣，第 3K-2 張紙牌（即第 1 張紙牌），紙牌上的數列是 1、5、9、13，第 3K-1 張紙牌（第 2 張紙牌），紙牌上的數列是 2、6、10、14，第 3K 張紙牌（第 3 張紙牌），紙牌上的數列是 3、7、11、15；如果 K＝2，第 3K-2 張紙牌（即第 4 張紙牌），紙牌上的數列是 4、5、6、7，第 3K-1 張紙牌（第 5 張紙牌），紙牌上的數列是 8、9、10、11，第 3K 張紙牌（第 6 張紙牌），紙牌上的數列是 12、13、14、15。

根據上述要訣，可以輕易製作出用於猜測其他數字組的孔明神算牌如下：

表十二　利用「4 的次方」原理猜測 1~15、1~63 及 1~255 等數字組之孔明神算牌一覽表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
①	1	2	3	4	8	12	16	32	48	64	128	192
	5	6	7	5	9	13	17	33	49	65	129	193
	9	10	11	6	10	14	18	34	50	66	130	194
④	13	14	15	7	11	15	19	35	51	67	131	195
	17	18	19	20	24	28	20	36	52	68	132	196
	21	22	23	21	25	29	21	37	53	69	133	197
	25	26	27	22	26	30	22	38	54	70	134	198
	29	30	31	23	27	31	23	39	55	71	135	199
	33	34	35	36	40	44	24	40	56	72	136	200
	37	38	39	37	41	45	25	41	57	73	137	201
	41	42	43	38	42	56	26	42	58	74	138	202
	45	46	47	39	43	47	27	43	59	75	139	203
	49	50	51	52	56	60	28	44	60	76	140	204
	53	54	55	53	57	61	29	45	61	77	141	205
	57	58	59	54	58	62	30	46	62	78	142	206
⑯	61	62	63	55	59	63	31	47	63	79	143	207
	65	66	67	68	72	76	80	96	112	80	144	208
	69	70	71	69	73	77	81	97	113	81	145	209
	73	74	75	70	74	78	82	98	114	82	146	210
	77	78	79	71	75	79	83	99	115	83	147	211
	81	82	83	84	88	92	84	100	116	84	148	212
	85	86	87	85	89	93	85	101	117	85	149	213
	89	90	91	86	90	94	86	102	118	86	150	214
	93	94	95	87	91	95	87	103	119	87	151	215
	97	98	99	100	104	108	88	104	120	88	152	216
	101	102	103	101	105	109	89	105	121	89	153	217
	105	106	107	102	106	110	90	106	122	90	154	218
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
㊶	241	242	243	244	248	252	220	236	252	124	188	252
㊷	245	246	247	245	249	253	221	237	253	125	189	253
㊸	249	250	251	246	250	254	222	238	254	126	190	254
㊹	253	254	255	247	251	255	223	239	255	127	191	255

第一個黑框代表預測 1~15，需要 A~F 等六張紙牌，每張有 4 個數字。

第二個黑框代表預測 1~63，需要 A~I 等九張紙牌，每張有 16 個數字。

第三個黑框代表預測 1~255，需要 A~L 等十二張紙牌，每張有 64 個數字。

……………………………………以此類推……………………………………

三、數字分解成「5 的次方」的組合

(一) 將數字 1~24 分解成「5 的次方」的組合（見表十三）

表十三　1~24 分解成「5 的次方」的組合

	$5^1\times4$	$5^1\times3$	$5^1\times2$	$5^1\times1$	$5^0\times4$	$5^0\times3$	$5^0\times2$	$5^0\times1$
1								✓
2							✓	
3						✓		
4					✓			
5				✓				
6				✓				✓
7				✓			✓	
8				✓		✓		
9				✓	✓			
10			✓					
11			✓					✓
12			✓				✓	
13			✓			✓		
14			✓		✓			
15		✓						
16		✓						✓
17		✓					✓	
18		✓				✓		
19		✓			✓			
20	✓							
21	✓							✓
22	✓						✓	
23	✓					✓		
24	✓				✓			
	H	G	F	E	D	C	B	A

(二) 將數字加以分類，並製成紙牌：

分解出「5^0x1」的數字集合在 A 紙牌，分解出「5^0x2」的數字集合在 B 紙牌，
分解出「5^0x3」的數字集合在 C 紙牌，分解出「5^0x4」的數字集合在 D 紙牌；
分解出「5^1x1」的數字集合在 E 紙牌，分解出「5^1x2」的數字集合在 F 紙牌，
分解出「5^1x3」的數字集合在 G 紙牌，分解出「5^1x4」的數字集合在 H 紙牌。

※ 以上就是依據「5 的次方」的組合，猜測 1~24 數字組「孔明神算牌」的設計原理，而依此原理所設計的八張紙牌如下：

A

1	6	11
16	21	

B

2	7	12
17	22	

C

3	8	13
18	23	

D

4	9	14
19	24	

E

5	6	7
8	9	

F

10	11	12
13	14	

G

15	16	17
18	19	

H

20	21	22
23	24	

(三)依據「5 的次方」的組合原理，可以設計出用於猜測其他數字組的孔明神算牌（見表十四、表十五）。

表十四　「5 的次方」孔明神算牌設計摘要(一)

預測的數字範圍	紙牌張數(張)	每張紙牌的第一個數字	每張紙牌上數字個數
1~24(即 5^2-1)	4×2＝8	1、2、3、4、5、10、15、20	$5=5^1=5^{2-1}$
1~124(5^3-1)	4×3＝12	1、2、3、4、5、10、15、20、25、50、75、100	$25=5^2=5^{3-1}$
1~624(5^4-1)	4×4＝16	1、2、3、4、5、10、15、20……125、250、375、500	$125=5^3=5^{4-1}$
……………………………………………………			
1~5^n-1	**4×n＝4n**	**1、2、3、4、5、10、15、20……5^{n-1}×1、5^{n-1}×2、5^{n-1}×3、5^{n-1}×4**	**5^{n-1}**
……………………以此類推……………………			

表十五　「5 的次方」孔明神算牌設計摘要(二)

組別	牌序	紙牌上的數列規律			示　例
		第一個數字	連續出現的數列個數	間隔數	
1	1(A)	5^0×1	1 (5^0)	4 (5^0×4)個數 即+5(+5^0×4+1)	1、6、11、16、21、26……
	2(B)	5^0×2			2、7、12、17、22、27……
	3(C)	5^0×3			3、8、13、18、23、28……
	4(D)	5^0×4			4、9、14、19、24、29……
2	5(E)	5^1×1	5 (5^1)	20 (5^1×4)個數 即+21(+5^1×4+1)	5~9、30~34、55~59……
	6(F)	5^1×2			10~14、35~39、60~64……
	7(G)	5^1×3			15~19、40~44、65~69……
	8(H)	5^1×4			20~24、45~49、70~74……
……………………………………………………					
n	4n-3	5^{n-1}×1	5^{n-1}	5^{n-1}×4 個數 即(+5^{n-1}×4+1)	5^{n-1}×1~5^{n-1}×2-1、5^{n-1}×6~5^{n-1}×7-1…
	4n-2	5^{n-1}×2			5^{n-1}×2~5^{n-1}×3-1、5^{n-1}×7~5^{n-1}×8-1…
	4n-1	5^{n-1}×3			5^{n-1}×3~5^{n-1}×4-1、5^{n-1}×8~5^{n-1}×9-1…
	4n	5^{n-1}×4			5^{n-1}×4~5^{n-1}×5-1、5^{n-1}×9~5^{n-1}×10-1…
……………………以此類推……………………					

由表十四、表十五得知：我們要預測 $1\sim5^{n}-1$ 中之任一神祕數時，需要設計 4n 張紙牌，在第 K 組時（含第 4K-3、4K-2、4K-1 及第 4K 四張紙牌，K＝1、2、3…n），其中第 4K-3 張上的數列，均可透過「從 $5^{K-1}\times1$ 開始，往後出現 5^{K-1} 個連續數字，間隔 $5^{K-1}\times4$ 個數(即 $+5^{K-1}\times4+1$)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 5^{n-1} 個數字」的要訣來製作；第 4K-2 張上的數列，均可透過「從 $5^{K-1}\times2$ 開始，往後出現 5^{K-1} 個連續數字，間隔 $5^{K-1}\times4$ 個數(即 $+5^{K-1}\times4+1$)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 5^{n-1} 個數字」的要訣來製作；第 4K-1 張上的數列，均可透過「從 $5^{K-1}\times3$ 開始，往後出現 5^{K-1} 個連續數字，間隔 $5^{K-1}\times4$ 個數(即 $+5^{K-1}\times4+1$)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 5^{n-1} 個數字」的要訣來製作；而第 4K 張上的數列，均可透過「從 $5^{K-1}\times4$ 開始，往後出現 5^{K-1} 個連續數字，間隔 $5^{K-1}\times4$ 個數(即 $+5^{K-1}\times4+1$)，再重複上述步驟，直到紙牌上有 5^{n-1} 個數字」的要訣來製作。

以 n＝2 爲例，可預測的數字範圍是 $1\sim5^{2}-1$(即 1~24)，需要設計 4×2＝8 張紙牌，每張紙牌上都有 5^{2-1}(即 5)個數字，其數列依序如下：如果 K＝1，帶入上述要訣，第 4K-3 張紙牌（即第 1 張紙牌），紙牌上的數列是 1、6、11、16、21，第 4K-2 張紙牌（第 2 張紙牌），紙牌上的數列是 2、7、12、17、22，第 4K-1 張紙牌（第 3 張紙牌），紙牌上的數列是 3、8、13、18、23，第 4K 張紙牌（第 4 張紙牌），紙牌上的數列是 4、9、14、19、24；如果 K＝2，第 4K-3 張紙牌（即第 5 張紙牌），紙牌上的數列是 5、6、7、8、9，第 4K-2 張紙牌（第 6 張紙牌），紙牌上的數列是 10、11、12、13、14，第 4K-1 張紙牌（第 7 張紙牌），紙牌上的數列是 15、16、17、18、19，第 4K 張紙牌（第 8 張紙牌），紙牌上的數列是 20、21、22、23、24。

根據上述要訣，可以輕易製作出用於猜測其他數字組的孔明神算牌如下：

表十六　利用「5 的次方」原理猜測 1~24、1~124 等數字組之孔明神算牌一覽表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
①	1	2	3	4	5	10	15	20	25	50	75	100
	6	7	8	9	6	11	16	21	26	51	76	101
	11	12	13	14	7	12	17	22	27	52	77	102
	16	17	18	19	8	13	18	23	28	53	78	103
⑤	21	22	23	24	9	14	19	24	29	54	79	104
	26	27	28	29	30	35	40	45	30	55	80	105
	31	32	33	34	31	36	41	46	31	56	81	106
	36	37	38	39	32	37	42	47	32	57	82	107
	41	42	43	44	33	38	43	48	33	58	83	108
⑩	46	47	48	49	34	39	44	49	34	59	84	109
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	101	102	103	104	105	110	115	120	45	70	95	120
	106	107	108	109	106	111	116	121	46	71	96	121
	111	112	113	114	107	112	117	122	47	72	97	122
	116	117	118	119	108	113	118	123	48	73	98	123
㉕	121	122	123	124	109	114	119	124	49	74	99	124

第一個黑框代表預測 1~24，需要 A~H 等八張紙牌，每張有 5 個數字。

第二個黑框代表預測 1~124，需要 A~L 等十二張紙牌，每張有 25 個數字。

……………………………………以此類推……………………………………

【研究三】如何利用不同的數字組合方式，設計有趣好玩的「神機妙算」牌？

傳統的「孔明神算牌」變化較少，數列規律容易被掌握。另外紙牌上印有數字，只要將有目標物的紙牌的第一個數字相加，就會等於對方心裡所想的數字，很容易就被對方破解奧祕，而失去再玩的興趣。再者，玩法只有固定一種，久而久之就會玩膩，失去新鮮感。於是我們打算突破傳統，採用數字的不同組合方式設計全新風貌的「神機妙算牌」，其數列的規律性變化較大，不易被識破；更打破傳統，將數字隱藏，紙牌上並沒有數字，魔術師也用不著看神機妙算牌，就能猜測目標物，讓對方怎麼玩都百思不得其解，增添幾分神祕感；並且新增不同的玩法，讓觀眾玩到欲罷不能。

一、神機妙算牌的製作方法：

(一) 將 63 種不同的水果依先由上而下，再由左而右的順序排列，製成一張總表（見附件一），並在心中依序替水果編號碼，如西瓜 1~甘蔗 16，釋迦 17~香瓜 32，木瓜 33~人心果 48，無花果 49~奇異果 63（只有魔術師自己知道）。

(二) 將 P.10 中之 A~I 等九張孔明神算牌（依據 4 的次方原理設計），分別對照附件一之水果總表所編的數字密碼，轉換成水果名稱（見附件二）。

(三) 打破水果名稱的排列順序，隨意將這些水果名稱填入蘋果造型紙牌的任何空位中。

(四) 最後完成的九張蘋果造型紙牌（見附件三），我們稱它為一副「神機妙算」牌。

※以 A 紙牌為例，其製作過程如下：

A

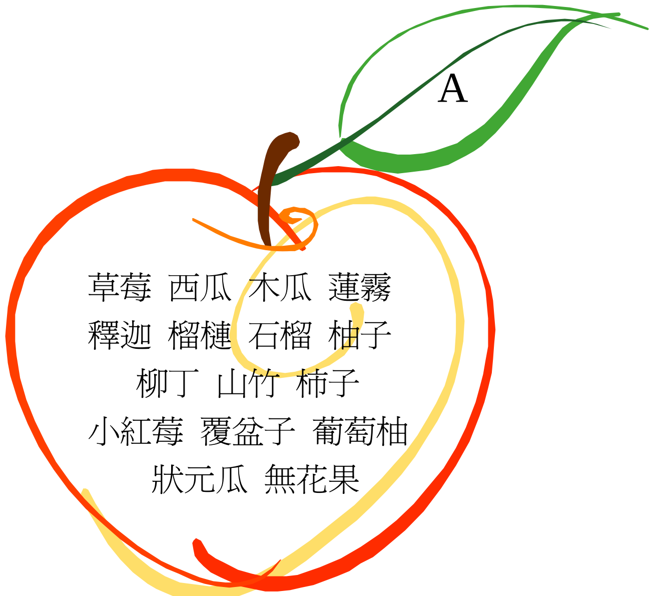
1	5	9	13
17	21	25	29
33	37	41	45
49	53	57	61

➡

A

西瓜	草莓	柳丁	榴槤
釋迦	蓮霧	石榴	柚子
木瓜	山竹	柿子	小紅莓
無花果	葡萄柚	狀元瓜	覆盆子

➡



二、玩法：

(一) 看穿你的心－猜水果

1. 請觀眾從水果總表中，選出最喜歡的一種（放在心中，不要講出來）。
2. 請觀眾仔細檢查九張神機妙算牌，然後告訴魔術師哪幾張紙牌有目標物（紙牌不用交給魔術師）。
3. 魔術師便能很快的從水果總表中找到觀眾心中最喜歡的水果。

(二) 透視眼－找神機妙算牌

1. 請觀眾從水果總表中，指出最喜歡的一種。
2. 魔術師便能很快的告訴觀眾哪幾張神機妙算牌中有該種水果。

三、試玩的心得：

「看穿你的心－猜水果」遊戲，神機妙算牌上沒有數字，觀眾很好奇，水果多達 63 種，魔術師竟然不用看神機妙算牌就猜得出來，是不是有超能力？而「透視眼－找神機妙算牌」，更是神奇，魔術師記憶力超強，竟然能快速背出紙牌上的水果，令人嘖嘖稱奇。以下是幾位觀眾的反應：

(一) 陳媽媽：這副牌是怎麼做出來的？你怎麼那麼厲害，竟然知道我心裡的祕密，趕快告訴我祕訣。

(二) 李同學：這副牌的祕訣是什麼？可以告訴我嗎？

(三) 田小妹：怎麼玩？怎麼玩？教教我，我也要去變魔術。

(四) 陳爸爸：真的假的！你是不是亂猜的？你怎麼有可能這麼厲害？

(五) 張姐姐：這副牌是怎麼設計的？怎麼那麼酷？我也好想拿去跟同學玩唷！

伍、結論

一、「孔明神算牌」的數列是有規律性的，且和「2 的次方」有關

「孔明神算牌」數列的規律性和「2 的次方」有密切的關係，也就是將數字分解成「2 的次方」的組合，然後再加以分類設計成紙牌，所以只要將有目標物的紙牌之第一個數字加總，就是心中所想的數字了。但是當數目大時要分解，不但很不方便而且費時，那麼就可以利用下面我們所推理出來的公式來設計孔明神算牌。

當要預測 $1\sim2^n-1$ 中之任一神祕數時，需要設計 n 張紙牌，其中第 K 張(K＝1、2、3…n)上的數列，均可透過「從 2^{K-1} 開始，往後出現 2^{K-1} 個連續數字，間隔 2^{K-1} 個數(即+2^{K-1}+1)，再重複上述步驟，直到每張紙牌上都恰有 2^{n-1} 個數字」的要訣來製作。

二、改變數字不同的組合方式，紙牌數列仍具有規律性，而且可依表十九的製作要訣，快速的設計出各種次方的孔明神算牌。

依據研究二得知，數字的組合方式不同，各種次方的孔明神算牌之設計摘要如下：

表十七　數字的組合方式不同，各種次方的孔明神算牌之設計摘要

組合方式	預測的數字範圍	紙牌張數	每張紙牌上數字個數
2 的次方	$1\sim2^n-1$	1×n	2^{n-1}
3 的次方	$1\sim3^n-1$	2×n	3^{n-1}
4 的次方	$1\sim4^n-1$	3×n	4^{n-1}
5 的次方	$1\sim5^n-1$	4×n	5^{n-1}
……………………………………			
M 的次方	$1\sim M^n-1$	(M-1)×n	M^{n-1}
……………………以此類推……………………			

由表十七得知，當預測的數字範圍是 $1\sim M^n-1$ 時，就需要製作(M-1)×n 張紙牌（共有 n 組，每組有 M-1 張），每一張都恰有 M^{n-1} 個數字，來搭配這個猜測遊戲，而各組（M-1）張紙牌上的數列規律，依序可整理如下表：

表十八　M(M＝2、3…)的次方之第 K 組 M-1 張紙牌上的各數列規律

預測的數字範圍	第 K 組 M-1 張紙牌上的各數列規律			
	牌序（第×張）	第一個數字	連續出現的數列個數	間隔數
$1\sim2^n-1$	K	$2^{K-1}\times1$	2^{K-1}	$2^{K-1}\times1$ 個數(即+$2^{K-1}\times1+1$)
$1\sim3^n-1$	2K-1	$3^{K-1}\times1$	3^{K-1}	$3^{K-1}\times2$ 個數(即+$3^{K-1}\times2+1$)
	2K	$3^{K-1}\times2$		
$1\sim4^n-1$	3K-2	$4^{K-1}\times1$	4^{K-1}	$4^{K-1}\times3$ 個數(即+$4^{K-1}\times3+1$)
	3K-1	$4^{K-1}\times2$		
	3K	$4^{K-1}\times3$		
$1\sim5^n-1$	4K-3	$5^{K-1}\times1$	5^{K-1}	$5^{K-1}\times4$ 個數(即+$5^{K-1}\times4+1$)
	4K-2	$5^{K-1}\times2$		
	4K-1	$5^{K-1}\times3$		
	4K	$5^{K-1}\times4$		
……………………以此類推……………………				

※表十八中的 K 用 1、2、3…n 分別帶入，就可看出各組 M-1 張紙牌上的各數列規律。

綜合表十七、表十八得知，無論 M、n 各是多少，只要猜測範圍在 $1\sim M^n-1$，與 M 次方有關的 n 組孔明神算牌，其第 K 組（K＝1、2、3…n）之（M-1）張的製作，都可根據表十九的要訣來設計。

表十九　預測 $1\sim M^n-1$ 時，第 K 組的孔明神算牌製作要訣

製作原則	牌序（第×張）	第一個數字	往後共用的製作祕訣
預測 $1\sim M^n-1$，需要(M-1)×n 張紙牌（共有 n 組，每組有 M-1 張），每一張都恰有 M^{n-1} 個數字	(M-1)×K-(M-2)	$M^{K-1}\times 1$	連續 M^{K-1} 個數，間隔 $M^{K-1}\times(M-1)$ 個數〔即+ $M^{K-1}\times(M-1)+1$〕，再重複上述步驟，直到紙牌上有 M^{n-1} 個數字為止。
	(M-1)×K-(M-3)	$M^{K-1}\times 2$	
	(M-1)×K-(M-4)	$M^{K-1}\times 3$	
	⋮	⋮	
	(M-1)×K-2	$M^{K-1}\times(M-3)$	
	(M-1)×K-1	$M^{K-1}\times(M-2)$	
	(M-1)×K	$M^{K-1}\times(M-1)$	

以預測的數字範圍是 $1\sim 6^2-1$(即 1~35)為例，此時 M＝6、n＝2，需要設計(M-1)×n 張紙牌也就是每組(M-1)張(即 5 張)，有 n 組(即 2 組)，共 10〔即（6－1）×2〕張紙牌，每一張都恰有 M^{n-1}(即 6^{2-1}＝6)個數字。依上述製作要訣，可製成下表。

表二十　預測 $1\sim 6^2-1$，第 K 組的孔明神算牌製作要訣

	牌序（第×張）	第一個數字	往後共用的製作祕訣
當 K＝1	(M-1)×K-(M-2)＝(6-1)×1－(6-2)＝1 ⋮ (M-1)×K＝(6-1)×1＝5 即第 1~5 張牌	$M^{K-1}=6^0=1$ 依序為 1、2、3、4、5	連續 M^{K-1}＝1 個數， 間隔 $M^{K-1}\times(M-1)$＝5 個數(+6) 再重複上述步驟，直到紙牌上有 6 個數字為止
當 K＝2	(M-1)×K-(M-2)＝(6-1)×2－(6-2)＝6 ⋮ (M-1)×K＝(6-1)×2＝10 即第 6~10 張牌	$M^{K-1}=6^1=6$ 依序為 6、12、18、24、30	連續 M^{K-1}＝6 個數， 間隔 $M^{K-1}\times(M-1)$＝30 個數(+31) 再重複上述步驟，直到紙牌上有 6 個數字為止

根據表二十，所製作出預測 $1\sim 6^2-1$ 的孔明神算牌如下：

表二十一　預測 $1\sim 6^2-1$（1~35）之孔明神算牌組一覽表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
①	1	2	3	4	5	6	12	18	24	30
	7	8	9	10	11	7	13	19	25	31
	13	14	15	16	17	8	14	20	26	32
	19	20	21	22	23	9	15	21	27	33
	25	26	27	28	29	10	16	22	28	34
⑥	31	32	33	34	35	11	17	23	29	35

三、利用不同的數字組合方式，可以設計出有趣好玩、獨一無二的「神機妙算」牌，而且可以改變玩法，不但不易破解，更讓人百玩不厭。

陸、心得

這次的自由研究讓我們學到不少數學知識，例如數列的規律性、同一個數可用不同次方的組合方式來表示…等，讓我們發現數學竟然如此有趣，也加強了數學邏輯及序列觀念。當我們破解孔明神算牌的奧祕時，一股莫名的成就感油然而生；當我們改變數字組合方式，找到其規律性時，那種喜悅，更是筆墨難以形容；當我們利用自創的「神機妙算牌」和同學、家人娛樂時，看到他們羨慕與崇拜的眼神，所有的辛苦都拋到九霄雲外。同時從製作過程當中，發現科學探究其實是蠻好玩的，只要用心觀察、小心求證，就能體會科學探究的樂趣。

回想研究過程，曾經碰到許多難題，被那些數字搞得團團轉，雖然絞盡腦汁，還是百思不得其解，有時甚至有股想哭的衝動。晚上睡覺時，還夢到那些數字在跟我們搗蛋，但我告訴自己，不能輕易向那些數字投降，一定要想辦法破解它。我們除了不斷嘗試外，還上網找資料，到圖書館尋找靈感，請教親朋好友，而老師則是我們最大的支柱，在我們徬徨無助時，適時的引導我們，讓我們能秉持著堅定不移的信念，繼續撐下去，最後終於度過難關。

此外，這次自由研究讓我們深深體會到「團結力量大」、「一分耕耘，一分收穫」的道理。尤其是和朋友「一起努力做一件事」以及「一起完成一個不可能的任務」時，那種快樂的感覺讓人永生難忘，更是日後美好的回憶。有朋友鼓勵、支持真好，我們會好好珍惜。

柒、參考資料

李毓佩（2001）。**數學的傳奇與遊戲**。台北：益智工房。

漢聲雜誌譯（1989）（克萊德 華特生著）。**二進位數**。台北：漢聲出版社。

捌、附件

【附件一】水果總表

西瓜	釋迦	木瓜	無花果
葡萄	芭樂	櫻桃	水蜜桃
香蕉	椰子	蟠桃	菠蘿蜜
蘋果	枇杷	青龍	愛玉
草莓	蓮霧	山竹	葡萄柚
芒果	紅棗	藍莓	火龍果
蕃茄	栗子	酪梨	西洋梨
椪柑	金桔	楊梅	哈密瓜
柳丁	石榴	柿子	狀元瓜
橘子	荔枝	橄欖	白鳳桃
楊桃	龍眼	油柑	紅毛丹
桑椹	水梨	李子	蛇皮果
榴槤	柚子	小紅莓	覆盆子
檸檬	甜瓜	蔓越莓	百香果
鳳梨	萊姆	恐龍蛋	奇異果
甘蔗	香瓜	人心果	

【附件二】將數字轉換成水果名稱

A

西瓜	草莓	柳丁	榴槤
釋迦	蓮霧	石榴	柚子
木瓜	山竹	柿子	小紅莓
無花果	葡萄柚	狀元瓜	覆盆子

B

葡萄	芒果	橘子	檸檬
芭樂	紅棗	荔枝	甜瓜
櫻桃	藍莓	橄欖	蔓越莓
水蜜桃	火龍果	白鳳桃	百香果

C

香蕉	蕃茄	楊桃	鳳梨
椰子	栗子	龍眼	萊姆
蟠桃	酪梨	油柑	恐龍蛋
菠蘿蜜	西洋梨	紅毛丹	奇異果

D

蘋果	草莓	芒果	蕃茄
枇杷	蓮霧	紅棗	栗子
青龍	山竹	藍莓	酪梨
愛玉	葡萄柚	火龍果	西洋梨

E

椪柑	柳丁	橘子	楊桃
金桔	石榴	荔枝	龍眼
楊梅	柿子	橄欖	油柑
哈密瓜	狀元瓜	白鳳桃	紅毛丹

F

桑椹	榴槤	檸檬	鳳梨
水梨	柚子	甜瓜	萊姆
李子	小紅莓	蔓越莓	恐龍蛋
蛇皮果	覆盆子	百香果	奇異果

G

甘蔗	釋迦	芭樂	椰子
枇杷	蓮霧	紅棗	栗子
金桔	石榴	荔枝	龍眼
水梨	柚子	甜瓜	萊姆

H

香瓜	木瓜	櫻桃	蟠桃
青龍	山竹	藍莓	酪梨
楊梅	柿子	橄欖	油柑
李子	小紅莓	蔓越莓	恐龍蛋

I

人心果	無花果	水蜜桃	菠蘿蜜
愛玉	葡萄柚	火龍果	西洋梨
哈密瓜	狀元瓜	白鳳桃	紅毛丹
蛇皮果	覆盆子	百香果	奇異果

【附件三】神機妙算牌

A

草莓 西瓜 木瓜 蓮霧
釋迦 榴槤 石榴柚子 小
紅莓 覆盆子 葡萄柚
柳丁 山竹 柿子
狀元瓜 無花果

B

芒果 甜瓜 橘子 荔枝
紅棗 檸檬 葡萄 芭樂
櫻桃 藍莓 橄欖
水蜜桃 蔓越莓 白鳳桃
火龍果 百香果

C

龍眼 蕃茄 鳳梨 萊姆
楊桃 椰子 栗子 香蕉
蟠桃 酪梨 油柑
菠蘿蜜 西洋梨 紅毛丹
恐龍蛋 奇異果

D

蘋果 藍莓 蕃茄 山竹
枇杷 栗子 蓮霧 紅棗
火龍果 葡萄柚 西洋梨
青龍 草莓 酪梨 芒果
愛玉

E

柳丁 楊桃 油柑 金桔
橘子 石榴 荔枝 龍眼
柿子 楊梅 橄欖 椪柑
哈密瓜 狀元瓜
白鳳桃 紅毛丹

F

萊姆 甜瓜 檸檬 水梨
鳳梨 柚子 榴槤 桑椹
覆盆子 恐龍蛋 蛇皮果
小紅莓 李子 蔓越莓
百香果 奇異果

G

甘蔗 釋迦 芭樂 甜瓜
枇杷 蓮霧 栗子 水梨
金桔 石榴 荔枝 龍眼
紅棗 柚子 萊姆 椰子

H

香瓜 藍莓 木瓜 蟠桃
青龍 柿子 山竹 櫻桃
楊梅 橄欖 油柑 酪梨
李子 蔓越莓
小紅莓 恐龍蛋

I

人心果 水蜜桃 狀元瓜
菠蘿蜜 葡萄柚 奇異果
火龍果 哈密瓜 白鳳桃
愛玉 紅毛丹 無花果
蛇皮果 覆盆子
百香果 西洋梨

【評語】080404

1.作者先利用「2 的次方」的組合，分析「孔明神算牌」的設計原理，再以其他次方的組合找出規律性，建議在題材上能朝較創新的方向研究。

2.作者對於紙牌張數 (M-1) x N 和每張紙牌上數字個數 Mn-1 之間的關聯性並無清楚的了解。