中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080402

揭開〝數〞的神秘面紗—不同數字組合及其運算關係

學校名稱：國立東華大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小六 鍾沂廷	李瑜霏
小六 蕭亦廷	陳貞泰
小六 石慧醫	
小六 張弘軒	
小六 王元聖	

關鍵詞：數字根、同價數字根、帶分數（整數+假分數）

摘要

本作品是以 1~9 的 9 個數字爲主軸，藉由數、數字和與數字根之間的關係，探討不重覆使用 1~9 的九個數字，把它們分成不同的幾組數，使其中的一組數會等於其它組數相加、相減、相乘、相除的結果等趣題。

壹、研究動機

爲了準備一年一度的數學競賽，在寒假中，我翻遍了家裡的數學參考書及一些趣味數學，甚至到圖書館借了數學推理遊戲叢書回家研讀。書中有一個問題是：「不重複使用 1~9 九個數字，應如何分成八組，才能使其中七組數字各自拼成的數相加的『和』等於第八組數字所拼成的數？答案共有幾組？」我試著一一拼湊，最後發現答案只有一組，是：1+2+4+5+7+8+9=36。在過程中，我想：這個有趣的問題是否可以拓展成更一般性的問題？例如：把問題改成：「不重複使用 1~9 的九個數字，應如何分成七組、六組、五組、四組、三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他組數字各自拼成的數之『和』？」那麼答案應該不只有一種，有沒有什麼方法可以系統性的找到所有的答案呢？於是引起我的興趣，便邀集幾位同學一起來探究。

貳、研究目的與研究問題

我們想要利用數字和與數字根的關係，在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，探討如何將這九個數字分組，才能使得各組數字之間存在某種運算關係，例如：和、差、積、商、整數比值等。因此，我們的研究問題如下：

一、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成七組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他六組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

二、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成六組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他五組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

三、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成五組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他四組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

四、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成四組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他三組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

五、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他二組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

六、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他二組數字所拼成的數之「差」？這樣的情形共有幾種？其最大的差與最小的差各是多少？

七、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一

組數字所拼成的數恰為其他二組數字所拼成的數之「積」？這樣的情形共有幾種？其最大的積與最小的積各是多少？

八、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰為其他二組數字所拼成的數之「商」？這樣的情形共有幾種？其最大的商與最小的商各是多少？

九、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成二組，才能使得這二組數字所拼成的數的比值恰為一位整數？

十、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字表示成值為 100 的帶分數？這樣的情形共有幾種？帶分數中最大的整數與最小的整數各是多少？

參、名詞解釋

一、數字根：任一正整數 A，若 $A \div 9$ 所得的餘數為 r，即稱 r 為 A 的數字根；若餘數為 0 時，我們定義數字根為 9。

二、「同價」數字根：若一正整數 A 之數字根為 q，則對任意數字和為 $9n+q$ 的正整數 B，其中 n 為非負整數，就稱正整數 B 與正整數 A 具有「同價」數字根。

三、P^n_m 表示從 n 個不同的事物中取 m 個排列的方法數，其中

$P^n_m = \underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)}_{\text{共有m項連乘}}$，此外，我們將 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1$ 記成 $n!$，讀做「n 階乘」。

四、C^n_m 表示從 n 個不同的事物中取 m 個組合的方法數，其中

$$C^n_m = \frac{\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)}_{\text{共有m項連乘}}}{\underbrace{m\times(m-1)\times(m-2)\times\cdots\times 1}_{\text{共有m項連乘}}}。$$

肆、設備及器材

本研究所使用的設備及器材為計算器、紙、筆、紙牌、撲克牌。

伍、研究方法

為了找出數字與數字根之間的關係與規律性，我們做了一些加、乘的運算，並在每個數標示 $_{[}$ 數字和 $_{]}$ 與 $_{(}$ 數字根 $_{)}$。

$$\begin{array}{r} 235_{[10](1)} \\ +749_{[20](2)} \\ \hline 984_{[21](3)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 907_{[16](7)} \\ +\ 249_{[15](6)} \\ \hline 1156_{[13](4)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 763_{[16](7)} \\ \times \qquad 458_{[17](8)} \\ \hline 349454_{[29](2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9_{[9](9)} \\ \times \qquad 4589_{[26](8)} \\ \hline 41301_{[9](9)} \end{array}$$

結果我們果然發現了以下的規律與性質：

原理：一正整數 A 的數字和 R 與此正整數 A 的數字根 q 之間的關係為：R=9p+q，其中 p 為非負整數，$1 \le q \le 9$，且 q 為整數。

性質：**1.**兩個正整數和的數字根=兩個正整數數字和的和的數字根=兩個正整數數字根之和的數字根。

2.兩個正整數乘積的數字根=兩個正整數數字和乘積的數字根=兩個正整數數字根乘積的數字根。

[証]:（見附件 1）

例如： $58283_{[26](8)} = 349_{[16](7)} \times 167_{[14](5)} = 58283_{[224](35)} = 58283_{[224](8)}$

陸、研究過程與結果討論

一、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成七組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他六組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

由於要分成前六組數與和的七組數，且包含 1~9 的九個數字，並使前六組數字各自拼成的數加起來的和等於第七組數字所拼成的數。而將 1~9 的九個數字分成七組的前六組數，與和的型態中，可能成立的只有一位數、 一位數、一位數、一位數、一位數、兩位數與兩位數的類型，即：

$$\left(\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{d}_{\text{一位整數}} + \underbrace{e}_{\text{一位整數}} + \underbrace{fg}_{\text{二位整數}} = \underbrace{hi}_{\text{二位整數}} \right)$$

而其總和的二位數必爲數字根爲 9 的 81、72、63、54、45、36、27、18，等 8 個二位數；但由於前六組數的個位數字之和爲 45-9- f=36- f，且 $f \neq 6,7,8,9$；否則

$$\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{d}_{\text{一位整數}} + \underbrace{e}_{\text{一位整數}} + \underbrace{fg}_{\text{二位整數}} > 81 \text{ 而不合。}$$

故 $31 \le 45-9-f = 36-f \le 35$，即 h 比 f 大 3。因此可得：

(1)	(2)	(3)	(4)
2	1	1	2
3	3	3	3
4	8	6	6
6	5	7	7
7	6	8	8
+ 59	+ 49	+ 29	+ 19
81	72	54	45

又因上述 4 種情形中，當個位數字位置固定時，十位數字的排列方法共有 $P_1^6 = 6$ 種，都不會影響其總和。

合計可得 $6 \times 4 = 24$ 種可以成立的情形，而其總和最大爲 81，最小爲 45。

二、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成六組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他五組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

由於要分成前五組數與和的六組數，且包含 1~9 的九個數字，並使前五組數字各自拼成的數加起來的和等於第六組數字所拼成的數。而將 1~9 的九個數字分成六組的前五

組數與和的型態中，可能成立的只有：(i)一位數、一位數、一位數、二位數、二位數與二位數及(ii)一位數、一位數、一位數、一位數、二位數與三位數兩種類型。

(i)一位數、一位數、一位數、二位數、二位數與二位數的類型，即：

$$\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{de}_{\text{二位整數}} + \underbrace{fg}_{\text{二位整數}} = \underbrace{hi}_{\text{二位整數}}$$

由[過程一]所得的結論中，知 $\underbrace{hi}_{\text{二位整數}}$ 的數字根必爲 9：

$\underbrace{hi}_{\text{二位整數}}$ =81、72、63、54、45、36、27、18，等 8 個二位數，扣除不可能成立的 54、45、36、27、18 等五個二位數後，可得：

$$(1)\ \begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 27 \\ +\ 39 \\ \hline 81 \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 18 \\ +\ 39 \\ \hline 72 \end{array} \qquad (3)\ \begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 18 \\ +\ 29 \\ \hline 63 \end{array}$$

又因上述 3 種情形中，當個位數字位置固定時，二個十位數字的排列方法共有 $P_2^5 = 5 \times 4 = 20$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次。因此符合 $\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{de}_{\text{二位整數}} + \underbrace{fg}_{\text{二位整數}} + \underbrace{hi}_{\text{二位整數}}$，且 $h+i$ 的數字和爲 9 者，計有 $20 \times 3 = 60$ 種。

我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前五組數字各自拼成的數加起來符合 $\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{de}_{\text{二位整數}} + \underbrace{fg}_{\text{二位整數}} = \underbrace{hi}_{\text{二位整數}}$ 的計有 60 組。其總和最大爲 81，最小爲 63。

(ii)一位數、一位數、一位數、一位數、二位數與三位數的類型，即：

$$\left(\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{d}_{\text{一位整數}} + \underbrace{ef}_{\text{二位整數}} = \underbrace{ghi}_{\text{三位整數}} \right)$$

由於 $\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{b}_{\text{一位整數}} + \underbrace{c}_{\text{一位整數}} + \underbrace{d}_{\text{一位整數}} + \underbrace{ef}_{\text{二位整數}}$ 的數字和最大爲 4+5+6+7+98=120 皆小於 1~9 的九個數字中所組成的最小三位數 123，故此種類型不可能成立。

綜合以上論述，我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前五組數字各自拼成的數加起來的和等於第六組數字所拼成的數，共計 60 組，其和最大爲 81，最小爲 63。

三、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成五組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他四組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

由於要分成前四組數與和的五組數，且包含 1~9 的九個數字，並使前四組數字各自拼成的數加起來的和等於第五組數字所拼成的數。而將 1~9 的九個數字分成五組的前四組數與和的型態中，可能成立的只有：(i)一位數、一位數、二位數、二位數與三位數及

(ii) 一位數、一位數、一位數、三位數與三位數兩種類型。

(i) 一位數、一位數、二位數、二位數與三位數的類型，即：

$$(\underbrace{a}_{一位整數} + \underbrace{b}_{一位整數} + \underbrace{cd}_{二位整數} + \underbrace{ef}_{二位整數} = \underbrace{ghi}_{三位整數})$$

由[過程一]所得的結論中，知 $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和必爲 9 或 18，且數字根爲 9。

（a） $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和爲 9 時：

$\underbrace{ghi}_{三位整數}$ =126,216,162,261, 612,621,135,153,315,351,513,531,234,243,324,342,423,432 等 18 個三位數，然而，對 126,216,162,261,612,621 等 6 個三位數而言，扣除 1、2、6 三個數字後，剩餘的數字中所能組成的”一位數+一位數+二位數+二位數”的和，最大爲 3+4+85+97=189，而最小爲 9+8+35+47=99，因此 216,261,612,621 等 4 個三位數皆不合。同理，315,351,513,531,234,243,324,342,423,432 亦不合。

因此我們只需討論總和爲 126,162,135,153 等 4 個三位數即可。可得：

(1) $\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ 34 \\ +\ 75 \\ \hline 126 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ 58 \\ +\ 97 \\ \hline 162 \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 6 \\ 4 \\ 27 \\ +\ 98 \\ \hline 135 \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ 48 \\ +\ 79 \\ \hline 135 \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} 2 \\ 4 \\ 68 \\ +\ 79 \\ \hline 153 \end{array}$ (6) $\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ 47 \\ +\ 98 \\ \hline 153 \end{array}$

又因上述 6 種情形中，當個位數字位置固定時，二個十位數字的排列方法共有 $P_2^4 = 4\times 3 = 12$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次。因此符合 $\underbrace{a}_{一位整數} + \underbrace{b}_{一位整數} + \underbrace{cd}_{二位整數} + \underbrace{ef}_{二位整數} = \underbrace{ghi}_{三位整數}$，且 $g+h+i$ 的數字和爲 9 者，計有 $12\times 6 = 72$ 種。

（b） $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和爲 18 時：

$\underbrace{ghi}_{三位整數}$ =981,972,963,954,945,936,927,918,891,873,864,846,837,819,792,783,765,756,738,729,693,684,675,657,648,639,594,576,567,549,495,486,468,459,396,387,378,369,297, 279,198,189 等 42 個三位數，然而在 1~9 九個數字中所能組成的一位數+一位數+二位數+二位數的和最大爲 4+5+86+97=192 皆小於上述所列舉的 42 個三位數中的前 41

個，又 189 經驗證後亦不合，故不存在符合 $\underbrace{a}_{一位整數}+\underbrace{b}_{一位整數}+\underbrace{cd}_{二位整數}+\underbrace{ef}_{二位整數}=\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 且

$g+h+i$ 的數字和爲 18 的三位數。

我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前四組數字各自拼成的數加起來符合

$\underbrace{a}_{一位整數}+\underbrace{b}_{一位整數}+\underbrace{cd}_{二位整數}+\underbrace{ef}_{二位整數}=\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 計有 72 種，其總和最大爲 162，最小爲 126。

(ii) 一位數、一位數、一位數、三位數與三位數的類型，即：

（ $\underbrace{a}_{一位整數}+\underbrace{b}_{一位整數}+\underbrace{c}_{一位整數}+\underbrace{def}_{三位整數}=\underbrace{ghi}_{三位整數}$ ）

由於 $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的 g 必比 $\underbrace{def}_{三位整數}$ 的 d 大 1。所以，

（a） $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和爲 9 時，我們只需討論

$\underbrace{ghi}_{三位整數}$ =612,621,513,531, 315,351, 234,243 等 8 個三位數，可得：

(1)		(2)		(3)	
	4		6		6
	7		4		2
	8		8		7
	+ 5 9 3		+2 9 7		+ 4 9 8
	6 1 2		3 1 5		5 1 3

又因上述 3 種情形中，當個位數字位置固定時，十位數字及百位數字這組數的排列方法共有 $P_1^4=4$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次，因此符合 $\underbrace{a}_{一位整數}+\underbrace{b}_{一位整數}+\underbrace{c}_{一位整數}+\underbrace{def}_{三位整數}=\underbrace{ghi}_{三位整數}$ ，且 $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 數字和爲 9 者，計有 $4\times3=12$ 種。

（b） $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和爲 18 時，我們只需討論：

$\underbrace{ghi}_{三位整數}$ =972,963,954,945,936,927,891,864,846,819,792,783,738,729,693,684,648,639,576,567,495,486,468,459,396,387,978,369,297,279 等 30 個三位數，但由於

$\underbrace{ghi}_{三位整數}$ =100(g-1)+100+ $\underbrace{hi}_{二位整數}$ ，而在上列的 30 個三位數中，扣除 d=(g-1)的數字後，所餘數字組合成 $\underbrace{a}_{一位整數}+\underbrace{b}_{一位整數}+\underbrace{c}_{一位整數}+\underbrace{ef}_{二位整數}$ 最大數爲 5+6+7+98=116 皆會小於上列 30 個三位數的 100+ $\underbrace{hi}_{二位整數}$ ；故不存在符合 $\underbrace{a}_{一位整數}+\underbrace{b}_{一位整數}+\underbrace{c}_{一位整數}+\underbrace{def}_{三位整數}=\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 且

g+h+i 的數字和爲 18 者的三位數。

我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前四組數字各自拼成的數加起來符合

$\underbrace{a}_{一位整數} + \underbrace{b}_{一位整數} + \underbrace{c}_{一位整數} + \underbrace{def}_{三位整數} = \underbrace{ghi}_{三位整數}$ 計有 12 種。其總和最大爲 612，最小爲 315。

綜合以上論述，我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前四組數字各自拼成的數加起來的「和」等於第五組數字所拼成的數，計有 84 種，其總和最大爲 612，最小爲 126。

四、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成四組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他三組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

由於要分成前三組數與和的四組數，且包含 1~9 的九個數字，並使前三組數字各自拼成的數加起來的和等於第四組數字所拼成的數。而將 1~9 的九個數字分成四組的前三組數與和的型態中，可能成立的只有：(*i*)一位數、二位數、三位數與三位數及(*ii*)二位數、二位數、二位數與三位數兩種類型。

(*i*)一位數、二位數、三位數與三位數的類型，即： $\underbrace{a}_{一位整數} + \underbrace{bc}_{二位整數} + \underbrace{def}_{三位整數} = \underbrace{ghi}_{三位整數}$

由[過程一]所得的結論中，知 $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和必爲 9 或 18，且數字根爲 9。

（a） $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和爲 9 時：

$\underbrace{ghi}_{三位整數}$ =126,216,162,261,612,621,135,153,315,351,513,531,234,243,324,342,423,432 等 18 個三位數，然其中對 126,216,162,261,135,153 等 6 個數必小於另三組數之和而不合。又所餘的 12 個數中的 g 必比 d 大 1，剔除 324,342,423,432 等 4 個數，依此原理再搭配 *a*+*c*+*f* 和的個位數字等於 *i* 的數字的觀念。可得：

$$\begin{array}{rr}(1) & 4\\ & 38\\ + & 579\\ \hline & 621\end{array}\quad \begin{array}{rr}(2) & 6\\ & 47\\ + & 298\\ \hline & 351\end{array}\quad \begin{array}{rr}(3) & 6\\ & 27\\ + & 498\\ \hline & 531\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}(4) & 9\\ & 78\\ + & 426\\ \hline & 513\end{array}\quad \begin{array}{rr}(5) & 7\\ & 58\\ + & 169\\ \hline & 234\end{array}\quad \begin{array}{rr}(6) & 6\\ & 58\\ + & 179\\ \hline & 243\end{array}\quad \begin{array}{rr}(7) & 9\\ & 68\\ + & 274\\ \hline & 351\end{array}$$

又因上述 7 種情形中，當個位數字位置固定時，二個十位數字的排列方法共有 $P_2^3 = 3\times 2 = 6$，而當十位數字固定時，百位數字的排列方法共有 $P_1^2 = 2\times 1 = 2$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次。因此符合 $\underbrace{a}_{一位整數} + \underbrace{bc}_{二位整數} + \underbrace{def}_{三位整數} = \underbrace{ghi}_{三位整數}$，且 *g*+*h*+*i* 的數字和爲 9 者，合計共有 $(6\times 2)\times 7 = 12\times 7 = 84$ 種不同的組合方式。

（b） $\underbrace{ghi}_{三位整數}$ 的數字和爲 18 時：

$\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$ =981,972,963,954,945,936,927,918,891,873,864,846,837,819,792,783,765,756,738,729,693,684,675,657,648,639,594,576,567,549,495,486,468,459,396,387,378,369,297,279,198,189 等 42 個三位數，然其中”189”,”198”等兩個數必小於另三組數的和而不合。

又所餘的 40 個數中的 g 必比 d 大 1，剔除 981、918、873、837、765、756、675、657、594、549 等 9 個數，依此原理再搭配 $a+c+f$ 和的個位數字等於 i 的數字的觀念。可得：

(1)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 52 \\ +793 \\ \hline 846 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 2 \\ 53 \\ +764 \\ \hline 819 \end{array}$$
(3)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 42 \\ +695 \\ \hline 738 \end{array}$$
(4)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 83 \\ +645 \\ \hline 729 \end{array}$$
(5)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 82 \\ +493 \\ \hline 576 \end{array}$$
(6)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 92 \\ +375 \\ \hline 468 \end{array}$$
(7)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 72 \\ +386 \\ \hline 459 \end{array}$$

又因上述 7 種情形中，當個位數字位置固定時，二個十位數字的排列方法共有 $P_2^3 = 3\times 2 = 6$，而當十位數字固定時，百位數字的排列方法共有 $P_1^2 = 2\times 1 = 2$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次。因此符合 $\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{bc}_{\text{二位整數}} + \underbrace{def}_{\text{三位整數}} = \underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$，且 $g+h+i$ 的數字和爲 18 者，計有 $(6\times 2)\times 7 = 12\times 7 = 84$ 種。

我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前三組數字各自拼成的數加起來的「和」等於第四組數字所拼成的數，計有 168 組，其和最大爲 846，最小爲 234。

(ii) 二位數、二位數、二位數與三位數的類型，即：$\underbrace{ab}_{\text{二位整數}} + \underbrace{cd}_{\text{二位整數}} + \underbrace{ef}_{\text{二位整數}} = \underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$

由於二位數+二位數+二位數中，最大爲 96+85+74=255，因此在：

（a） $\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$ 的數字和爲 9 時，我們只需討論：

$\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$ =126,216,162,135,153,234,243 等 7 個三位數，可得：

(1)
$$\begin{array}{r} 61 \\ 85 \\ +\ 97 \\ \hline 243 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 61 \\ 75 \\ +\ 98 \\ \hline 234 \end{array}$$
(3)
$$\begin{array}{r} 51 \\ 86 \\ +\ 97 \\ \hline 234 \end{array}$$
(4)
$$\begin{array}{r} 53 \\ 84 \\ +\ 79 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$
(5)\ \begin{array}{r} 34 \\ 85 \\ +\ 97 \\ \hline 216 \end{array}
\qquad
(6)\ \begin{array}{r} 35 \\ 48 \\ +\ 79 \\ \hline 162 \end{array}
\qquad
(7)\ \begin{array}{r} 28 \\ 49 \\ +\ 76 \\ \hline 153 \end{array}
\qquad
(8)\ \begin{array}{r} 43 \\ 75 \\ +\ 98 \\ \hline 216 \end{array}
$$

又因上述 8 種情形中，當個位數字位置固定時，三個十位數字排列方法共有 $P_3^3 = 3\times 2\times 1 = 6$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次。因此符合 $\underbrace{ab}_{\text{二位整數}} + \underbrace{cd}_{\text{二位整數}} + \underbrace{ef}_{\text{二位整數}} = \underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$，且 $g+h+i$ 的數字和為 9 者，計有 6×8=48 種。

（b） $\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$ 的數字和為 18 時，我們只需討論：

$\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$ =198,189，等 2 個三位數，可得：

$$
\begin{array}{r} 52 \\ 63 \\ +\ 74 \\ \hline 189 \end{array}
$$

又因上述每一種情形中，當個位數字位置固定時，三個十位數字排列方法共有 $P_3^3 = 3\times 2\times 1 = 6$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次。因此符合 $\underbrace{ab}_{\text{二位整數}} + \underbrace{cd}_{\text{二位整數}} + \underbrace{ef}_{\text{二位整數}} = \underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$，且 $g+h+i$ 的數字和為 18 者，計有 6×1=6 種。

我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前三組數字各自拼成的數加起來的和等於第四組數字所拼成的數，共計有 54 組，其和最大為 243，最小為 153。

綜合以上論述，我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前三組數字各自拼成的數加起來的「和」等於第四組數字所拼成的數，共計 222 種，其和最大為 846，最小為 153。

五、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰為其他二組數字所拼成的數之「和」？這樣的情形共有幾種？其最大的和與最小的和各是多少？

由於要分成被加數、加數與和的三組數，且包含 1~9 的九個數字，並使前兩組數字各自拼成的數加起來的和等於第三組數字所拼成的數。而將 1~9 的九個數字分成三組的被加數、加數與和的型態中，可能成立的只有：(*i*) 一位數、四位數、四位數、(*ii*) 二位數、三位數、四位數及 (*iii*) 三位數、三位數、三位數三種類型。

(*i*) 一位數、四位數、四位數的類型，即：（ $\underbrace{a}_{\text{一位整數}} + \underbrace{bcde}_{\text{四位整數}} = \underbrace{fghi}_{\text{四位整數}}$ ）

由於（被加數）一位數的數字為 1~9 的九個數字中的任一個數，且「和」與加數皆為四位數，所以顯然地「$1\le$和(四位數)－加數(四位數)≤ 9」，所以在 1~9 的九個數字中必有其中八個作為「和」與加數的數字，又「和」的千位數比加數的千位數大 1，且加數的後三位數在剩餘數字中拼成最大數，而「和」的後三位數在剩餘數字中拼成最小數，如此，才可找到「和」與加數的差為最小，例如：2345-1987=358＞一位數，因此在一位數、四位數、四位數的類型必然無法成立。

(*ii*) 二位數、三位數、四位數的類型，即：（ $\underbrace{ab}_{\text{二位整數}} + \underbrace{cde}_{\text{三位整數}} = \underbrace{fghi}_{\text{四位整數}}$ ）

由於為 1~9 的九個數字中能組成最大的三位數為 987（即 $\underbrace{cde}_{\text{三位整數}}$ ），而剩餘數字中此時能組成最大的二位數為 65（即 $\underbrace{ab}_{\text{二位整數}}$ ），65+987=1052，最後所剩餘的四個數字中能組成最小的四位數為 1234，但 1234＞1052。亦即二位數、三位數、四位數中，二位數＋三位數必不可能等於四位數，故二位數、三位數、四位數的類型也無法成立。

(*iii*) 三位數、三位數、三位數的類型，即：($\underbrace{abc}_{\text{三位整數}} + \underbrace{def}_{\text{三位整數}} = \underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$)

如果，我們以三位數+三位數=三位數而一一計算，那總計產生 $C_3^9 \times C_3^6 \times C_3^3$=1680 種三位數，再由 1680 種三位數中，任取兩種做加法運算，所以總計需做 $C_2^{1680}=\dfrac{1680\times1679}{2}$=1410360 次的加法運算後，再逐一審查，方可找出有幾組可適合三位數+三位數=三位數。天啊！這是何其浩大繁複無趣的工作！有無較簡化的方法呢？

依據性質 1，我們得知：兩整數和的數字根=兩整數數字根之和，由於 1~9 的九個數字中能組成最大的三位數為 987，而 987 的數字和為 24，數字根為 6；能組成最小的數為 123，而 123 的數字和為 6，其數字根亦為 6，又 1~9 的九個數字和為 45，而 45-24=21，而數字和 21 的數字根為 3，故三位被加數+三位加數=987 不成立。同理：我們列出表格(附件二)，來尋找可能成立的總和。

依照表格（附件二），可能成立的有[*A*] （表 *A* 數的數字和）=9 或 18，而[*A*]=9 時的三位數，有 126、216、162、261、612、621、135、153、315、351、513、531、234、243、324、342、423、432 等 18 個三位數，但此 18 個三位數皆不等於另三組三位數之和，(∵所剩數字中，取最小的兩個作為被加數與加數的百位數，其和就大於總和的百位數），因此我們只需討論[*A*]=18 的狀況（見附件三）。

總計符合[*A*]＝18 者，計有 8+6+6+6+4+4+4+2+2=42 種情形，但在總和為 396,387,378,369,297,279,198,189 等八種情形都會小於剩餘的數字作為被加數與加數的總和，因此剩下的只有 34 種型態。

以下我們就以有可能成立的 34 種型態，逐一運算驗證，剔除無法組合出適宜的被加數與加數者（例如：和為 765 與 756），可得 42 種只允許每個數字出現一次三位數的「被加數」(即 $\underbrace{abc}_{\text{三位整數}}$) ＋三位數的「加數」(即 $\underbrace{def}_{\text{三位整數}}$) ＝三位數的「和」（即 $\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$ ）可以成立的情形：

(1) $\begin{array}{r} 627 \\ +354 \\ \hline 981 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 236 \\ +745 \\ \hline 981 \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 658 \\ +314 \\ \hline 972 \end{array}$ (4) $\begin{array}{r} 748 \\ +215 \\ \hline 963 \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} 683 \\ +271 \\ \hline 954 \end{array}$ (6) $\begin{array}{r} 738 \\ +216 \\ \hline 954 \end{array}$

(7) $\begin{array}{r} 782 \\ +163 \\ \hline 945 \end{array}$ (8) $\begin{array}{r} 628 \\ +317 \\ \hline 945 \end{array}$ (9) $\begin{array}{r} 784 \\ +152 \\ \hline 936 \end{array}$ (10) $\begin{array}{r} 386 \\ +541 \\ \hline 927 \end{array}$ (11) $\begin{array}{r} 346 \\ +572 \\ \hline 918 \end{array}$ (12) $\begin{array}{r} 673 \\ +245 \\ \hline 918 \end{array}$

(13) $\begin{array}{r}564\\+327\\\hline 891\end{array}$	(14) $\begin{array}{r}659\\+214\\\hline 873\end{array}$	(15) $\begin{array}{r}271\\+593\\\hline 864\end{array}$	(16) $\begin{array}{r}129\\+735\\\hline 864\end{array}$	(17) $\begin{array}{r}519\\+327\\\hline 846\end{array}$	(18) $\begin{array}{r}695\\+142\\\hline 837\end{array}$
(19) $\begin{array}{r}596\\+241\\\hline 837\end{array}$	(20) $\begin{array}{r}543\\+276\\\hline 819\end{array}$	(21) $\begin{array}{r}352\\+467\\\hline 819\end{array}$	(22) $\begin{array}{r}138\\+654\\\hline 792\end{array}$	(23) $\begin{array}{r}519\\+264\\\hline 783\end{array}$	(24) $\begin{array}{r}659\\+124\\\hline 783\end{array}$
(25) $\begin{array}{r}192\\+546\\\hline 738\end{array}$	(26) $\begin{array}{r}586\\+143\\\hline 729\end{array}$	(27) $\begin{array}{r}218\\+475\\\hline 693\end{array}$	(28) $\begin{array}{r}284\\+391\\\hline 675\end{array}$	(29) $\begin{array}{r}438\\+219\\\hline 657\end{array}$	(30) $\begin{array}{r}397\\+251\\\hline 648\end{array}$
(31) $\begin{array}{r}487\\+152\\\hline 639\end{array}$	(32) $\begin{array}{r}218\\+376\\\hline 594\end{array}$	(33) $\begin{array}{r}184\\+392\\\hline 576\end{array}$	(34) $\begin{array}{r}248\\+319\\\hline 567\end{array}$	(35) $\begin{array}{r}428\\+139\\\hline 567\end{array}$	(36) $\begin{array}{r}167\\+382\\\hline 549\end{array}$
(37) $\begin{array}{r}168\\+327\\\hline 495\end{array}$	(38) $\begin{array}{r}359\\+127\\\hline 486\end{array}$	(39) $\begin{array}{r}175\\+293\\\hline 468\end{array}$	(40) $\begin{array}{r}186\\+273\\\hline 459\end{array}$	(41) $\begin{array}{r}257\\+634\\\hline 891\end{array}$	(42) $\begin{array}{r}193\\+482\\\hline 675\end{array}$

又因上述 42 種情形中，二個個位數字排列的方法有 $P_2^2 = 2\times1 = 2$ 種，當個位數字固定時，二個十位數字排列的方法有 $P_2^2 = 2\times1 = 2$，而當個位數字及十位數字固定時，二個百位數字排列的方法也有 $P_2^2 = 2\times1 = 2$ 種，都不會影響其總和，且 1~9 的九個數字都只用了一次，每種情形共有 2×2×2=8 種不同的排列。因此符合三位數的「被加數」(即 $\underbrace{abc}_{\text{三位整數}}$)＋三位數的「加數」(即 $\underbrace{def}_{\text{三位整數}}$)＝三位數的「和」(即 $\underbrace{ghi}_{\text{三位整數}}$)的情形總計有 8×42=336 種。

綜合以上論述，我們得知：包含 1~9 的九個數字，使前兩組數字各自拼成的數加起來的「和」等於第三組數字所拼成的數，計有 336 組，其和最大者爲 981，最小爲 459。

六、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他二組數字所拼成的數之「差」？這樣的情形共有幾種？其最大的差與最小的差各是多少？

由於減法是加法的逆運算，所以加法中有幾組成立，減法也就有幾組成立，因此減法仍有 336 組的包含 1~9 的九個數字，並使前兩組數字各自拼成的數字減起來的「差」等於第三組數字所拼成的數字，在觀察加法運算中所列出的直式運算，我們得知：最小差爲 124，最大差爲 784。

七、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他二組數字所拼成的數之「積」？這樣的情形共

大的積與最小的積各是多少？

由於要分成被乘數、乘數、與積的三組數，且包含 1~9 的九個數字，並使前兩組數字各自拼成的數乘起來的「積」等於第三組數字所拼成的數。而將 1~9 的九個數字分成三組的被乘數、乘數、積的型態中，根據 $\underbrace{被乘數}_{u位數}\times\underbrace{乘數}_{v位數}=\underbrace{積}_{(u+v)或(u+v-1)位數}$ 的理論，在

$\underbrace{被乘數}_{u位數}\times\underbrace{乘數}_{v位數}=\underbrace{積}_{(u+v)或(u+v-1)位數}$ 可能成立的類型有：

（一）一位數×四位數＝四位數（簡稱一、四、四類）、（二）二位數×三位數＝四位數（簡稱二、三、四類）等二類型。

由於「被乘數數字」與「乘數數字」及「乘積數字」的和是 45，其數字根是 9。如果我們把這九個數字任意地分成三組，那麼這三組數字根之和將也是 9。

又根據性質 2：被乘數數字根×乘數數字根＝積的數字根。我們可將其數字根組合的情形分成：

(1) 1– 4 – 4 型
(2) 3–6–18 型（即 3–6–9 型）
(3) 4–1–4 型
(4) 6–3–18 型（即 6–3–9 型）
(5) 9–9–81 型（即 9–9–9 型）

等五種，但在 3-6-18 型與 6-3-18 型中的乘積數字根 18，及 9-9-81 型中的乘積數字根 81，其本身數字根還是 9。

（一）一位數×四位數＝四位數（簡稱一、四、四類）即 $\underbrace{r}_{一位整數}\times\underbrace{stuv}_{四位整數}=\underbrace{wxyz}_{四位整數}$，其數字根型為：

(1)1-4-4 型：（$1\times\underbrace{stuv}_{四位整數}=\underbrace{wxyz}_{四位整數}$）

由於一位數的數字即為一位數的數字根，此一位數即為 1，故 $1\times\underbrace{stuv}_{四位整數}=\underbrace{wxyz}_{四位整數}$，但 $\underbrace{stuv}_{四位整數}\neq\underbrace{wxyz}_{四位整數}$，所以不成立。

(2)3-6-18 型（即 3-6-9 型）：（$3\times\underbrace{stuv}_{四位整數}=\underbrace{wxyz}_{四位整數}$）

由於一位數的數字即為一位數的數字根，此一位數即為 3。又乘數的數字根為 6，而數字和可為 6、15、24、33（6 與 33 不合），因在 1~9 數字中扣除 3 的數字後有 1、2、4、5、6、7、8、9 等數字，其數字和最小為 $1+2+4+5=12$，最大為 $6+7+8+9=30$，故數字根為 6，而數字和應為 15 與 24。

(i) 數字和為 15 的 $\underbrace{stuv}_{四位整數}$ 之數字可為：

（a）1、2、4、8：但 $v\neq1,4,8$；則有 $\underbrace{stuv}_{四位數}=1482,1842,4182,4812,8142,8412$，經驗證後皆不合。

（b）1、2、5、7：但 $v\neq1,7$，且 v 也 $\neq5$，$\because$ 若 $v=5$，則乘積的個位數（即 z）必

爲 5 或 0，與題意不合，因而有 $\underbrace{stuv}_{四位數} = 1572, 1752, 5172, 5712, 7152, 7512$ ，經驗證後皆不合。

(ii) 數字和爲 24 的 $\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}$ 之數字可爲：

（a）1、6、8、9 時：但 $v \neq 1, 6$ ，而有

$\underbrace{stuv}_{四位數} = 1689,1698,1869,1968,6189,6198,6819,6918,8169,8619,9168,9618$ ，經驗證後皆不合。

（b）2、5、8、9 時：但 $v \neq 5$ ，而有

$\underbrace{stuv}_{四位數} = 2589,2598,2859,2958,5289,5298,5829,9852,5892,5928,5982,8259,8529,8592,8952,9258,9528,9582$ ，經驗證後皆不合。

（c）2、6、7、9 時：但 $v \neq 2,9$ ，而有

$\underbrace{stuv}_{四位數} = 2796,2976,9726,9276,7296,7926,2697,2967,9627,9267,6297,6927$ ，經驗證後皆不合。

（d）4、5、6、9 時：但 $v \neq 5$ ，而有

$\underbrace{stuv}_{四位數} = 4569,4596,4659,4956,5469,5496,5649,5694,5946,5964,6459,6549,6594,6954,9456,9546,9564,9654$ ，經驗證後皆不合。

（e）4、5、7、8 時：但 $v \neq 5,8$ ，而有

$\underbrace{stuv}_{四位數} = 4587,4857,5487,5784,5847,5874,7584,7854,8457,8547,8574,8754$ ，經驗證後皆不合。

故 3-6-18 型（即 3-6-9 型）不存在。

(3)4-1-4 型：（ $4 \times \underbrace{\text{stuv}}_{四位整數} = \underbrace{\text{wxyz}}_{四位整數}$ ）

由於一位數的數字即爲一位數的<u>數字根</u>，此一位數即爲 4。又乘數的<u>數字根</u>爲 1，而<u>數字和</u>可爲 1、10、19、28、37（1、10 與 37 不合），因在 1~9 數字中，扣除 4 的數字後有 1、2、3、5、6、7、8、9 等數字，而其數字和最小爲 $1+2+3+5=11$，最大爲 $6+7+8+9=30$ ，故數字根爲 1，而數字和應爲 19、28。

(i) 數字和爲 19 的 $\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}$ 之數字可爲：

（a）1、2、7、9 時：但 $v \neq 1$ ，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3 \times 2 \times 1 \times 3 = 18$ 種組合，經驗證後皆不合。

（b）1、3、6、9 時：但 $v \neq 1,6,9$ ，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ 種組合，經驗證後，除了 4×1963=7852 外，皆不合所求。

（c）1、3、7、8 時：但 $v \neq 1,7$，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times2=12$ 種組合，經驗證後，除了 4×1738=6952 外，皆不合所求。

（d）1、5、6、7 時：但 $v \neq 1,5,6$，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times1=6$ 種組合，經驗證後，皆不合。

（e）2、3、5、9 時：但 $v \neq 3,5$，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times2=12$ 種組合，經驗證後，皆不合。

（f）2、3、6、8 時：但 $v \neq 2,3,6,8$，故 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 不成立。

(ii) 數字和爲 28 的 $\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}$ 之數字可爲：

◎ 5、6、8、9：但 $v \neq 5,6,9$，則有 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times1=6$ 組合，經驗證後皆不合。

故 4-1-4 型中有 4×1963=7852 與 4×1738=6952 合於所求。

(4)6-3-18 型（即 6-3-9 型）:（ $6\times\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}=\underbrace{\text{wxyz}}_{四位整數}$ ）

由於一位數的數字即爲一位數的數字根，此一位數即爲 6。又乘數的數字根爲 3 的數字和可爲 3、12、21、30（3 與 30 不合），因在 1~9 數字中，扣除 6 的數字後有 1、2、3、4、5、7、8、9 等數字，而其數字和最小爲 $1+2+3+4=10$，最大爲 $5+7+8+9=29$，故乘數的數字根爲 3，而數字和應爲 12、21。

(i) 乘數數字和爲 12 的 $\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}$ 之數字可爲：

◎ 1、2、4、5：但 $v \neq 1,2,4,5$，故 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 不存在。

(ii) 乘數數字和爲 21 的 $\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}$ 之數字可爲：

（a）1、3、8、9 時：但 $v \neq 1,3,8$，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times1=6$ 種組合，經驗證後，皆不合。

（b）1、4、7、9 時：但 $v \neq 1,4,9$，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times1=6$ 種組合，經驗證後，皆不合。

（c）2、3、7、9 時：但 $v \neq 2,7$，則 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 有 $3\times2\times1\times2=12$ 種組合，經驗證後，皆不合。

（d）2、4、7、8 時：但 $v \neq 2,4,7,8$，故 $\underbrace{stuv}_{四位數}$ 不存在。

（e）3、4、5、9 時：但$v \neq 4,5,9$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times1=6$種組合，經驗證後，皆不合。

故 6-3-18 型（即 6-3-9 型）不存在。

(5)9-9-81 型（即 9-9-9 型）：（$9\times\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}=\underbrace{\text{wxyz}}_{四位整數}$）

由於一位數的數字即為一位數的數字根，此一位數即為 9。又乘數的數字根為 9 的數字和可為 9、18、27、36、45（9、27、36 與 45 皆不合），因在 1~9 數字中扣除 9 的數字後有 1、2、3、4、5、6、7、8 等數字，而其數字和最小為$1+2+3+4=10$，最大為$5+6+7+8=26$，故乘數數字根為 9，而數字和應為 18。

◎數字和為 18 的$\underbrace{\text{stuv}}_{四位整數}$之數字可為：

（a）1、2、7、8 時：但$v \neq 1,2,8$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times1=6$種組合，經驗證後，皆不合。

（b）1、3、6、8 時：但$v \neq 1$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times3=18$種組合，經驗證後，皆不合。

（c）1、4、5、8 時：但$v \neq 1,5$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times2=12$種組合，經驗證後，皆不合。

（d）2、3、5、8 時：但$v \neq 2,5,8$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times1=6$種組合，經驗證後，皆不合。

（e）2、3、6、7 時：但$v \neq 3,7$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times2=12$種組合，經驗證後，皆不合。

（f）2、4、5、7 時：但$v \neq 5$，則$\underbrace{stuv}_{四位數}$有$3\times2\times1\times3=18$種組合，經驗證後，皆不合。

故在 9-9-81 型（即 9-9-9 型）皆不存在。

綜合以上論述，我們得知：在一位數×四位數＝四位數（簡稱一、四、四類）中，只有 4×1963=7852 與 4×1738=6952 兩種合於所求。

（二）二位數×三位數＝四位數（簡稱二、三、四類）即$\underbrace{\text{rs}}_{二位整數}\times\underbrace{\text{tuv}}_{三位整數}=\underbrace{\text{wxyz}}_{四位整數}$，其數字根型為：

(1)1-4-4 型：

由於兩位整數的數字根為 1，其數字和為 1、10、19、28、37，但因被乘數是二位數，其數字和最小為 1+2=3，最大為 8+9=17，故被乘數（即$\underbrace{\text{rs}}_{二位整數}$）數字和應為 10，數字和

是 10 的二位數有：19、28、37、46、55、64、73、82、91 等組合。又乘數是三位數的數字根爲 4，而數字和是 4、13、22、31，但因乘數是三位數的數字和最小爲 1+2+3=6，最大爲 7+8+9=24，故乘數是三位數的數字和應爲 13、22。

(i)數字和爲 13 的 $\underbrace{tuv}_{三位整數}$ 之數字可爲：

（a）1,3,9（b）1,4,8（c）1,5,7（d）2,3,8（e）2,4,7（f）2,5,6（g）3,4,6

而 $\underbrace{rs}_{二位整數} \times \underbrace{tuv}_{三位整數} = \underbrace{wxyz}_{四位整數}$ 的運算中，例如 19× $\underbrace{tuv}_{三位整數}$ 之數字，剔除有數字重複的（a）1,3,9（b）1,4,8（c）1,5,7 及（d）2,3,8 所拼成三位數中的個位放置 2、8，（f）2,5,6 所拼成三位數中的個位放置 5，（g）3,4,6 所拼成三位數中的個位放置 4、6 的情形，那麼剩下的三位乘數 $\underbrace{tuv}_{三位整數}$ 有 283,823,526,562,256,652,463,643, 247,274,427, 472,724,742 等 14 組，經驗證後皆不合於 $\underbrace{rs}_{二位整數} \times \underbrace{tuv}_{三位整數} = \underbrace{wxyz}_{四位整數}$ 的要求。如：19×283=5377（數字重複）。

(ii)數字和爲 22 時，仿照(i)的討論過程，結果皆不合於 $\underbrace{rs}_{二位整數} \times \underbrace{tuv}_{三位整數} = \underbrace{wxyz}_{四位整數}$ 的要求。

又被乘數爲二位數的爲 28、37、46、64、73、82、91 也比照上述處理，結果只有 28×157=4396 合於所求。（見附件四）

(2)3-6-18 型（3-6-9 型）：

亦仿照 1-4-4 型處理，成立的有：

12×483=5796、39×186=7254 與 48×159=7632 等三組。（見附件五）

(3)4-1-4 型：

亦仿照 1-4-4 型處理，但都不成立。（見附件六）

(4)6-3-18 型（即 6-3-9 型）：

亦仿照 1-4-4 型處理，結果只有一組 42×138=5796 可以成立。（見附件七）

(5)9-9-81 型（即 9-9-9 型）：

亦仿照 1-4-4 型處理後，發現有 27×198=5346 與 18×297=5346 等兩組可以成立。（見附件八）

我們得知：在二位數×三位數＝四位數（簡稱二、三、四類）中，計有：

（a）28×157=4396（b）12×483=5796（c）39×186=7254
（d）48×159=7632（e）42×138=5796（f）27×198=5346
（g）18×297=5346　　等七種合於所求。

綜合以上論述：包含 1~9 的九個數字中分爲三組，且使前兩組數字各自拼成的數乘起來的「積」等於第三組數字所拼成的數，又因乘法運算具有交換律，所以被乘數與乘數互換就有兩種組合，計有 9×2=18 組，其中乘積最大的爲 7852，最小的爲 4396。

八、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成三組，才能使得其中一組數字所拼成的數恰爲其他二組數字所拼成的數之「商」？這樣的情形共有幾種？其最大的商與最小的商各是多少？

由於除法是乘法的逆運算，所以乘法中，有幾組成立，除法也就有幾組成立，因此

除法中仍只有 9×2=18 組包含 1~9 的九個數字，並使前兩組數字各自拼成的數除起來的商等於第三組數字所拼成的數；在觀察乘法運算中所列出的算式裡，我們得知：最小商爲 6952÷1738＝4 與 7852÷1963=4 的「4」，而最大商則爲 7852÷4=1963 的「1963」。

九、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字分成二組，才能使得這二組數字所拼成的數的比值恰爲一位整數？

由於 1~9 的九個數字各只一次出現於分子、分母，所以分子數字與分母數字總和必然是 45，其數字根是 9。如果我們把這九個數字任意地分成兩組，那麼兩組數字根的和也是 9。事實上，這兩組數字根必定是 9-9 型、8-1 型、7-2 型、6-3 型、或 5-4 型，而在 9-9 型的情況中，實際上的和是 18，但這個數本身的數字根還是 9。

我們設 $\frac{A_{[A](A)}}{B_{[B](B)}}=\frac{n}{1}\quad(n=1,2,\cdots,9)$，因爲分子 A 與分母 B 的數字根之和將總是 9，又根據性質 2：被乘數（B）的數字根×乘數（n）的數字根＝乘積（A）的數字根的性質，我們得知：$\frac{3}{1}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{6}{1}$、$\frac{7}{1}$和$\frac{9}{1}$情況中的解答必定是 9-9 型的，也就是分子數字根與分母數字根都是 9；而$\frac{2}{1}$和$\frac{5}{1}$情況中的解答是 3-6 型的，而較大的數字根可以出現在分子上也可以出現在分母上（即 6-3 型），例如：$\frac{13845}{2769}=\frac{5}{1}$、$\frac{13485}{2697}=\frac{5}{1}$、$\frac{14865}{2973}=\frac{5}{1}$、和$\frac{18645}{3729}=\frac{5}{1}$，其中前兩種分數中，分子數字根與分母數字根分別是 3 與 6，而後兩種分別是 6 與 3。而$\frac{8}{1}$，它的兩組數字根可以是 9-9 型、8-1 型、7-2 型、6-3 型、5-4 型、4-5 型、3-6 型、2-7 型或 1-8 型這九種類型中的任何一種。

我們把這些分數的分子看成是把分母分別乘以 2、3、4、5、6、7、8 和 9 而得到的。爲了使乘積是一個五位數，當然要在乘了位於四位數最左邊數字後產生「進位」；若不進位個位、十位可通過互換數字位置的方法來產生不同的解答，例如：$\frac{17496}{5832}=\frac{3}{1}$與$\frac{17469}{5823}=\frac{3}{1}$中的$\frac{6}{2}$與$\frac{9}{3}$就互換了位置（$\because 3\times3=9$與$3\times2=6$ 都不進位）。而在乘以 5、6、7、8、9 都必須「進位」，在$\frac{5}{1}$到$\frac{9}{1}$的情況中，就要逐一運算，才可找出完整的解答。

現在，我們就開始逐一找出 $\dfrac{\underbrace{vwxyz}_{\text{五位數}}}{\underbrace{rstu}_{\text{四位數}}}=\frac{2}{1}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{5}{1}$、$\frac{6}{1}$、$\frac{7}{1}$、$\frac{8}{1}$ 與 $\frac{9}{1}$ ：

（一）「$\frac{2}{1}$」：

由上述討論中，我們得知$\frac{2}{1}$爲 3-6 型，分母數字根爲 6，所以 $r+s+t+u=6$、15、24、33（其中 6 與 33 不合），$\because$數字和最小爲 1+2+3+4=10，最大爲 6+7+8+9=30。

(i) 若 $r+s+t+u=15$ 時，則 r,s,t,u 四數字爲：

(1) 1、2、3、9，(2) 1、2、4、8(3) 1、2、5、7，(4) 1、3、4、7

(5) 1、3、5、6 時，因 r 必大於 4 才能進位，則 v 必爲 1，皆因導致數字 1 的重複而不成立。

而至於(6) r,s,t,u 四數字爲 2、3、4、6；v,w,x,y,z 五數字爲 1、5、7、8、9，此時$u \neq 2,3,6$，然因 r 必等於 6，才會進位，但 6234×2=12468（不合），6324×2=12648（不合），故$r+s+t+u=15$時，皆不成立。

(ii) 若$r+s+t+u=24$時，則 r,s,t,u 四數字爲：

(1) 1、6、8、9，因 r=6,8,9，則 v 必爲 1，故不成立。

(2) 2、6、7、9；v,w,x,y,z 五數字爲 1、3、4、5、8，此時$r=2$，（∵不進位）或$u=6$ 必不成立，故$\underbrace{rstu}_{四位數}=6279,6297,6729$

6792,6927,6972,7269,7629,7692,7962,9267,9627,9672,9762，但驗證後有 $6729\times 2=13458$、$6792\times 2=13584$、$6927\times 2=13854$、$7269\times 2=14538$、$7692\times 2=15384$、$9267\times 2=18534$ 等六組可以成立。

$\frac{2}{1}$也可以爲 6-3 型，分母<u>數字根</u>爲 3，而其數字和爲$r+s+t+u=3$、12、21、30（其中 3 與 12 不合），$\because v=1$，$\therefore r+s+t+u$ 最小爲 2+3+4+5=14，最大爲 30。

(i) 若$r+s+t+u=21$時，則 r,s,t,u 四數字爲：

(1) 2、4、6、9，(2) 2、4、7、8(3) 3、4、5、9，(4) 3、4、6、8

(5) 3、5、6、7 經討論驗算後皆不成立。

但在(6) 2、3、7、9 時，$r\neq 2,3$，故

$\underbrace{rstu}_{四位數}=7239,7293,7329,7392,7923,7932,9237,9273,9327,9372,9723,9732$，經驗證後有：$7293\times 2=14568$、$7329\times 2=14658$、$7923\times 2=15846$、$7932\times 2=15864$、$9273\times 2=18546$、$9327\times 2=18654$ 等六組可以成立。

(iii) 若$r+s+t+u=30$時，則 r,s,t,u 四數字爲：

◎6、7、8、9，但$u,r\neq 8,9$，而有$\underbrace{rstu}_{四位數}$=6897、6987、7896、7986，經驗證後皆不成立。

所以在「$\frac{2}{1}$」時，計有：$\frac{13458}{6729}=\frac{2}{1}$、$\frac{13584}{6792}=\frac{2}{1}$、$\frac{13854}{6927}=\frac{2}{1}$、$\frac{14538}{7269}=\frac{2}{1}$、$\frac{15384}{7692}=\frac{2}{1}$、$\frac{18534}{9267}=\frac{2}{1}$、$\frac{14586}{7293}=\frac{2}{1}$、$\frac{14658}{7329}=\frac{2}{1}$、$\frac{15846}{7923}=\frac{2}{1}$、$\frac{15864}{7932}=\frac{2}{1}$、$\frac{18546}{9273}=\frac{2}{1}$、$\frac{18654}{9327}=\frac{2}{1}$等 12 種，其中最小的一對數爲 6729 與 13458，最大的一對數爲 9327 與 18654。

（二）「$\frac{3}{1}$」：

由上述討論中，我們得知$\frac{3}{1}$爲 9-9 型的，$\because 10\leq r+s+t+u\leq 30$，$\therefore r+s+t+u=9$、18、27、36（其中 9 與 36 不合），$\because u\neq 5$，而$v$必等於 1 或 2。

(i) 若$r+s+t+u=18$時，則：

(1) r,s,t,u 四數字爲 2、3、4、9；v,w,x,y,z 五數字爲 1、5、6、7、8，

但$u \neq 3$、4，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×2=12 種，經驗證後皆不成立。

(2) r,s,t,u 四數字爲 2、3、6、7；v,w,x,y,z 五數字爲 1、4、5、8、9，

但$u \neq 2$，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×3=18 種，經驗證後皆不成立。

(3) r,s,t,u 四數字爲 2、4、5、7；v,w,x,y,z 五數字爲 1、3、6、8、9，

但$u \neq 4$、5，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×2=12 種，經驗證後皆不成立。

(4) r,s,t,u 四數字爲 3、4、5、6；v,w,x,y,z 五數字爲 1、2、7、8、9，

但$u \neq 5$，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×3=18 種，經驗證後皆不成立。

(5) r,s,t,u 四數字爲 2、3、5、8；v,w,x,y,z 五數字爲 1、4、6、7、9，

但$u \neq 5$，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×3=18 種，經驗證後，只有$5832 \times 3 = 17946$與

$5823 \times 3 = 17496$兩組可以成立。

(ii) 若$r+s+t+u=27$時，則：

(1) r,s,t,u 四數字爲 3、7、8、9；v,w,x,y,z 五數字爲 1、2、4、5、6，

但$u \neq 3$、9，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×2=12 種，經驗證後皆不成立。

(2) r,s,t,u 四數字爲 4、6、8、9；v,w,x,y,z 五數字爲 1、2、3、5、7，

但$u \neq 6$、8，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×2=12 種，經驗證後皆不成立。

(3)r,s,t,u 四數爲 5、6、7、9；v,w,x,y,z 五數字爲 1、2、3、4、8，

但$u \neq 5$、9，故$\underbrace{rstu}_{四位數}$有 3×2×1×2=12 種，經驗證後皆不成立。

故$r+s+t+u=27$皆不成立。

所以在「$\frac{3}{1}$」時計有$\frac{17496}{5832}=\frac{3}{1}$、$\frac{17469}{5823}=\frac{3}{1}$等兩種，而最小的一對數爲 5823 與 17469，最大的一對數爲 5832 與 17496。

（三）「$\frac{4}{1}$」：

仿照$\frac{3}{1}$的討論方式（見附件九），得到可以成立的 9-9 型有$3942 \times 4 = 15768$、$4392 \times 4 = 17568$、$7956 \times 4 = 31824$、$5796 \times 4 = 23184$，即$\frac{15768}{3942}=\frac{4}{1}$、$\frac{17568}{4392}=\frac{4}{1}$、$\frac{31824}{7956}=\frac{4}{1}$、$\frac{23184}{5796}=\frac{4}{1}$等四種，而最小的一對數爲 3942 與 15768 最大的一對數爲 7956 與 31824。

（四）「$\frac{5}{1}$」：

仿照$\frac{2}{1}$的討論方式（見附件十），得到可以成立的 3-6 型，有$2697 \times 5 = 13485$、$2769 \times 5 = 13845$、$2967 \times 5 = 14835$、$6297 \times 5 = 31485$、$7629 \times 5 = 38145$、$9627 \times 5 = 48135$ 等六組。

也得到可以成立的 6-3 型有 $2937 \times 5 = 14685$、$2973 \times 5 = 14865$、$3297 \times 5 = 16485$、$3729 \times 5 = 18645$、$9237 \times 5 = 46185$、$9723 \times 5 = 48615$等六組。

所以在「$\frac{5}{1}$」時，計有$\frac{13485}{2697} = \frac{5}{1}$、$\frac{13845}{2769} = \frac{5}{1}$、$\frac{14835}{2967} = \frac{5}{1}$、$\frac{31485}{6297} = \frac{5}{1}$、$\frac{38145}{7629} = \frac{5}{1}$、$\frac{48135}{9627} = \frac{5}{1}$、$\frac{14685}{2937} = \frac{5}{1}$、$\frac{14865}{2973} = \frac{5}{1}$、$\frac{16485}{3297} = \frac{5}{1}$、$\frac{18645}{3729} = \frac{5}{1}$、$\frac{46185}{9237} = \frac{5}{1}$與$\frac{48615}{9723} = \frac{5}{1}$等 12 種，而最小的一對數為 2697 與 13485，最大的一對數為 9723 與 48615。

（五）「$\frac{6}{1}$」：

仿照$\frac{3}{1}$的討論方式（見附件十一），得到可以成立的 9-9 型有$2943 \times 6 = 17658$、$4653 \times 6 = 27918$、$5697 \times 6 = 34182$，即$\frac{17658}{2943} = \frac{6}{1}$、$\frac{27918}{4653} = \frac{6}{1}$、$\frac{34182}{5697} = \frac{6}{1}$等三種，而最小的一對數為 2943 與 17658，最大的一對數為 5697 與 34182。

（六）「$\frac{7}{1}$」：

仿照$\frac{3}{1}$的討論方式（見附件十二），得到可以成立的 9-9 型有$2394 \times 7 = 16758$、$4527 \times 7 = 31689$、$5274 \times 7 = 36918$、$2637 \times 7 = 18459$、$7614 \times 7 = 53298$、$5976 \times 7 = 41832$、$5418 \times 7 = 37926$，即$\frac{16758}{2394} = \frac{7}{1}$、$\frac{31689}{4527} = \frac{7}{1}$、$\frac{36918}{5274} = \frac{7}{1}$、$\frac{18459}{2637} = \frac{7}{1}$、$\frac{53298}{7614} = \frac{7}{1}$、$\frac{41832}{5976} = \frac{7}{1}$、$\frac{37926}{5418} = \frac{7}{1}$等七種，而最小的一對數為 2394 與 16758，最大的一對數為 7614 與 53298。

（七）「$\frac{8}{1}$」：

由上述討論中，我們得知$\frac{8}{1}$可為 9-9 型、1-8 型、2-7 型、3-6 型、4-5 型、5-4 型、6-3 型、7-2 型、8-1 型，仿照各型上述方法操作（見附件十三），而得：

「9-9 型」：

有$9531 \times 8 = 76248$、$7416 \times 8 = 59328$、$6741 \times 8 = 53928$、$4689 \times 8 = 37512$，即$\frac{76248}{9531} = \frac{8}{1}$、$\frac{59328}{7416} = \frac{8}{1}$、$\frac{53928}{6741} = \frac{8}{1}$、$\frac{37512}{4689} = \frac{8}{1}$等四種。

「1-8 型」：

有$9316 \times 8 = 74528$、$3187 \times 8 = 25496$、$4591 \times 8 = 36728$、$7894 \times 8 = 63152$、$9352 \times 8 = 74816$、$9523 \times 8 = 76184$、$9541 \times 8 = 76328$，即

$\frac{74528}{9316} = \frac{8}{1}$, $\frac{25496}{3187} = \frac{8}{1}$, $\frac{36728}{4591} = \frac{8}{1}$, $\frac{76328}{9541} = \frac{8}{1}$, $\frac{74816}{9352} = \frac{8}{1}$, $\frac{76184}{9523} = \frac{8}{1}$, $\frac{63152}{7894} = \frac{8}{1}$等七種。

「2-7 型」：

有 $9182\times8=73456$ 、 $4691\times8=37528$ 、 $8174\times8=65392$ 、 $9416\times8=75328$ 、 $5789\times8=46312$ 、 $7364\times8=58912$ ，即

$\frac{73456}{9182}=\frac{8}{1},\ \frac{37528}{4691}=\frac{8}{1},\ \frac{65392}{8174}=\frac{8}{1},\ \frac{75328}{9416}=\frac{8}{1},\ \frac{46312}{5789}=\frac{8}{1},\ \frac{58912}{7364}=\frac{8}{1}$ 等六種。

「3-6 型」：

有 $7941\times8=63528$ 、 $6789\times8=54312$ 、 $5916\times8=47328$ 、 $9156\times8=73248$ ，即

$\frac{63528}{7941}=\frac{8}{1},\ \frac{54312}{6789}=\frac{8}{1},\ \frac{47328}{5916}=\frac{8}{1},\ \frac{73248}{9156}=\frac{8}{1}$ 等四種。

「4-5 型」：

有 $8932\times8=71456$ 、 $7123\times8=56984$ 、 $7312\times8=58496$ 、 $8419\times8=67352$ 、 $5791\times8=46328$ ，即 $\frac{71456}{8932}=\frac{8}{1},\ \frac{56984}{7123}=\frac{8}{1},\ \frac{58496}{7312}=\frac{8}{1},\ \frac{67352}{8419}=\frac{8}{1},\ \frac{46328}{5791}=\frac{8}{1}$ 等五種。

「5-4 型」：

有 $7421\times8=59368$ 、 $9158\times8=73264$ 、 $6791\times8=54328$ 、 $8942\times8=71536$ ，即

$\frac{59368}{7421}=\frac{8}{1},\ \frac{73264}{9158}=\frac{8}{1},\ \frac{54328}{6791}=\frac{8}{1},\ \frac{71536}{8942}=\frac{8}{1}$ 等四種。

「6-3 型」：

有 $9321\times8=74568$ 、 $5892\times8=47136$ 、 $8439\times8=67512$ 、 $8394\times8=67152$ ，即

$\frac{74568}{9321}=\frac{8}{1},\ \frac{47136}{5892}=\frac{8}{1},\ \frac{67512}{8439}=\frac{8}{1},\ \frac{67152}{8394}=\frac{8}{1}$ 等四種。

「7-2 型」：

有 $9421\times8=75368$ 、 $5371\times8=42968$ 、 $8179\times8=65432$ 、 $5839\times8=46712$ 、 $8953\times8=71624$ ，即 $\frac{75368}{9421}=\frac{8}{1},\ \frac{42968}{5371}=\frac{8}{1},\ \frac{65432}{8179}=\frac{8}{1},\ \frac{46712}{5839}=\frac{8}{1},\ \frac{71624}{8953}=\frac{8}{1}$ 等五種。

「8-1 型」：

有 $5921\times8=47368$ 、 $5237\times8=41896$ 、 $6839\times8=54712$ 、 $4589\times8=36712$ 、 $8954\times8=71632$ 、 $4769\times8=38152$ 、 $6479\times8=51832$ ，即

$\frac{47368}{5921}=\frac{8}{1},\ \frac{41896}{5237}=\frac{8}{1},\ \frac{54712}{6839}=\frac{8}{1},\ \frac{36712}{4589}=\frac{8}{1},\ \frac{71632}{8954}=\frac{8}{1},\ \frac{38152}{4769}=\frac{8}{1},\ \frac{51832}{4679}=\frac{8}{1}$ 等七種。

合計共 46 種，最小的一對數爲 3187 與 25496，最大的一對數爲 9541 與 76328。

（八）「$\frac{9}{1}$」：

亦仿照 $\frac{3}{1}$ 的討論方式（見附件十四），得到可以成立的 9-9 型只有 $6381\times9=57429$ 、 $8361\times9=75249$ 、 $6471\times9=58239$ ，即 $\frac{57429}{6381}=\frac{9}{1}$ 、 $\frac{75249}{8361}=\frac{9}{1}$ 與 $\frac{58239}{6471}=\frac{9}{1}$ 等三種。而最小的一對數爲 6381 與 57429，最大的一對數爲 8361 與 75249。

綜合以上論述，我們得知：在包含 1~9 的九個數字中，使其兩組數字各自拼成的數之比值恰爲一位整數，共計有下列 89 種情形：

$$(1).\frac{13458}{6729}=2,\ (2).\frac{13584}{6792}=2,\ (3).\frac{13854}{6927}=2,\ (4).\frac{14538}{7269}=2,\ (5).\frac{15384}{7692}=2,$$

$$(6).\frac{18534}{9267}=2,\ (7).\frac{14586}{7293}=2,\ (8).\frac{14658}{7329}=2,\ (9).\frac{15846}{7923}=2,(10).\frac{15864}{7932}=2,$$

$$(11).\frac{18546}{9273}=2,(12).\frac{18654}{9327}=2,(13).\frac{17496}{5832}=3,(14).\frac{17469}{5823}=3,(15).\frac{15768}{3942}=4,$$

$$(16).\frac{17568}{4392}=4,(17).\frac{23184}{5716}=4,(18).\frac{31824}{7956}=4,(19).\frac{14835}{2967}=5,(20).\frac{31485}{6297}=5,$$

$$(21).\frac{38145}{7629}=5,(22).\frac{48135}{9627}=5,(23).\frac{14685}{2937}=5,(24).\frac{14865}{2973}=5,(25).\frac{16485}{3297}=5,$$

$$(26).\frac{18645}{3729}=5,(27).\frac{46185}{9237}=5,(28).\frac{48615}{9723}=5,(29).\frac{13845}{2769}=5,(30).\frac{13485}{2697}=5,$$

$$(31).\frac{34182}{5697}=6,(32).\frac{17658}{2943}=6,\ (33).\frac{27918}{4653}=6,(34).\frac{18459}{2637}=7,(35).\frac{53298}{7614}=7,$$

$$(36).\frac{16758}{2394}=7,(37).\frac{31689}{4527}=7,(38).\frac{36918}{5274}=7,(39).\frac{37926}{5418}=7,(40).\frac{41832}{5976}=7,$$

$$(41).\frac{25496}{3187}=8,\ (42).\frac{36728}{4591}=8,(43).\frac{76328}{9541}=8,\ (44).\frac{74816}{9352}=8,(45).\frac{76184}{9523}=8,$$

$$(46).\frac{73456}{9182}=8,(47).\frac{37528}{4691}=8,(48).\frac{65392}{8174}=8,(49).\frac{75328}{9416}=8,(50).\frac{46312}{5789}=8,$$

$$(51).\frac{63528}{7941}=8,(52).\frac{54312}{6789}=8,\ (53).\frac{47328}{5916}=8,(54).\frac{73248}{9156}=8,(55).\frac{71456}{8932}=8,$$

$$(56).\frac{56984}{7123}=8,(57).\frac{58496}{7312}=8,\ (58).\frac{67352}{8419}=8,(59).\frac{46328}{5791}=8,(60).\frac{59368}{7421}=8,$$

$$(61).\frac{73264}{9158}=8,\ (62).\frac{54328}{6791}=8,(63).\frac{71536}{8942}=8,(64).\frac{74568}{9321}=8,(65).\frac{47136}{5892}=8,$$

$$(66).\frac{67512}{8439}=8,(67).\frac{67152}{8394}=8,(68).\frac{75368}{9421}=8,(69).\frac{42968}{5371}=8,(70).\frac{65432}{8179}=8,$$

$$(71).\frac{46712}{5839}=8,(72).\frac{71624}{8953}=8,\ (73).\frac{47368}{5921}=8,(74).\frac{41896}{5237}=8,(75).\frac{54712}{6839}=8,$$

$$(76).\frac{36712}{4589}=8,(77).\frac{71632}{8954}=8,\ (78).\frac{38152}{4769}=8,(79).\frac{51832}{6479}=8,(80).\frac{76248}{9531}=8,$$

$$(81).\frac{59328}{7416}=8,(82).\frac{53928}{6741}=8,\ (83).\frac{37512}{4689}=8,(84).\frac{74528}{9316}=8,(85).\frac{63152}{7894}=8$$

$$(86).\frac{58912}{7364}=8,(87).\frac{58239}{6471}=8,\ (88).\frac{57429}{6381}=9,(89).\frac{75249}{8361}=9$$ 等 89種。

十、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，應如何將這九個數字表示成值為 100 的帶分數？ 這樣的情形共有幾種？帶分數中最大的整數與最小的整數各是多少？

由於 1～9 的九個數字只能用一次且僅一次，而把 100 表示成一個帶分數，所以這裡的分數必定代表著整數，因此將它們寫成「整數+假分數」的形式來進行討論，會比較方便。對於任何整數而言，把這個整數補成 100 的那個假分數的數字根必定呈現某種特定

的模式。例如：「$96\frac{2148}{537}=96+4$」的情形中，依據性質 2，知分子的數字根必為分母的數字根的 4 倍，又因整數部分已出現 9、6 兩數字，因此所剩的數字只有 1、2、3、4、5、7、8，而$\frac{分子}{分母}=4$（一位數），∴分子、分母分別為四位數與三位數。

由於$1+2+3+4+5+7+8=30$，其數字根為 3，與其「同價」數字根有 3、12、21、30、......、(9n+3)，我們設分母的數字根為 x，則分子數字根與分母數字根之和為 5x。

設$5x=9n+3$（$1\le x\le 9$，n 為正整數），$\therefore n=\frac{5x-3}{9}$，故 x=6，n=3（即分母數字根為 6），其數字和為 6、15、24，與分子數字和為 24、15、6 相對應（∵分子與分母數字和=30），而分子數字根為 6。

又因在 1、2、3、4、5、7、8 等七個數字中，可形成：

(*i*) 數字和=6 的三位數的分母的數字，僅有 1、2、3 等三個，而此三位數為：231、321、132、312、123、213，且 123×4＝492（不合）、213×4=852（不合）、231×4=924（不合）、321×4=1284（不合）、132×4=528（不合）、312×4=1248（不合），因為其中數字 2 重複，故均不成立。

(*ii*) 數字和=15 的三位數的分母的數字，僅有 3、4、8 與 3、5、7 等兩組，而此三位數為：348、384、438、483、834、843、357、537、573、753、375（不合）、735（不合）【因為 5×4=20 出現 0 這個數字】，經驗證後，只有 $438\times4=1752$ 、 $357\times4=1428$ 、 $537\times4=2148$ 成立。

(*iii*) 數字和=24 的三位數的分母的數字，因為扣除 9、6，所餘的數字 1、2、3、4、5、7、8 中，最大的三個數字和=$5+7+8=20<24$，所以數字和=24 的三位數的分母不存在。故只有$96\frac{1752}{438}$、$96\frac{1428}{357}$與$96\frac{2148}{537}$合於所求。

至於在「整數+假分數」形式中，除了整數=96 外的其餘整數，當然也都可比照上述方法處理，只是如此雖然簡化了不少過程，但仍嫌繁雜，因此，我們使用了以下的方法來刪除不可能成立的整數：

（1）「整數+假分數」形式中，整數的個位數字為 5 者，都可剔除。因為整數的個位數為 5 者，那麼在假分數就會有一個 0 或第二個 5 而不合，因此可剔除整數部分為 5、15、25、35、45、55、65、75、85、95 的整數。

（2）「整數+假分數」形式中，整數的個位數字為 0 者，都可剔除。因為要求的數字中不具有 0；因此可剔除的整數部分為 10、20、30、40、50、60、70、80、90 的整數。

（3）「整數+假分數」形式中，整數的個位數字為 9 者，都可剔除。因為當整數的個位數字為 9 時，假分數值的個位數必為 1，這會導致數字重複。因此可剔除的整數部分為 9、19、29、39、49、59、69、79、89、99 的整數。

（4）「整數+假分數」形式中，數字發生重複的整數，亦可剔除。如：11、22、33、44、55、66、77、88、99。

（5）「整數+假分數」形式中，凡假分數值為 3 的倍數減 1 者（即假分數值

$= \underbrace{\frac{y}{z}}_{\text{一位整數或二位整數}} = 3k-1$，$1 \le k \le 33$），亦即整數值爲 3 的倍數加 2 者（即整數值

$= \underbrace{wt}_{\text{一位整數或二位整數}} = 3r+2$，$0 \le r \le 32$），都可剔除。如整數爲：2、5、8、11、14、17、20、23、26、29、32、35、38、41、44、47、50、53、56、59、62、65、68、71、74、77、80、83、86、89、92、95、98。（見附件十五）

例如：98+2、95+5、92+8、89+11、86+14、83+17、……，等就是這種情況，它們也必須立即拋棄；因此我們又可以剔除在「整數+假分數」形式中，整數部分爲 2、5、8、11、14、17、......、95、98。現在我們製作一張表格，剔除不合於「整數+假分數」的形式者：

整數	~~1~~	~~2~~	3	4	~~5~~	6	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	~~11~~	12	13	~~14~~	~~15~~	16	~~17~~	18	~~19~~
~~20~~	21	~~22~~	~~23~~	24	~~25~~	~~26~~	27	28	~~29~~
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	34	~~35~~	36	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	~~41~~	42	43	~~44~~	~~45~~	46	~~47~~	48	~~49~~
~~50~~	51	52	~~53~~	54	~~55~~	~~56~~	57	58	~~59~~
~~60~~	61	~~62~~	63	64	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	~~71~~	72	73	~~74~~	~~75~~	76	~~77~~	78	~~79~~
~~80~~	81	82	~~83~~	84	~~85~~	~~86~~	87	~~88~~	~~89~~
~~90~~	91	~~92~~	93	94	~~95~~	96	97	~~98~~	~~99~~

再剔除整數爲 1 者，剩餘可能成立的整數，計有：3、4、6、7、12、13、16、18、21、24、27、28、31、34、36、37、42、43、46、48、51、52、54、57、58、61、63、64、67、72、73、76、78、81、82、84、87、91、93、94、96、97 等 42 個數。對此 42 個整數，我們仿照前述討論方式，逐一探討，可得下列 11 種可成立的情形（見附件十六）：

(1).$96_{[15](6)}\frac{2148_{[15](6)}}{537_{[15](6)}}$ (2).$96_{[15](6)}\frac{1752_{[15](6)}}{438_{[15](6)}}$ (3).$96_{[15](6)}\frac{1428_{[15](6)}}{357_{[15](6)}}$ (4).$94_{[13](4)}\frac{1578_{[21](3)}}{263_{[11](2)}}$

(5).$91_{[10](1)}\frac{7524_{[18](9)}}{836_{[17](8)}}$ (6).$91_{[10](1)}\frac{5823_{[18](9)}}{647_{[17](8)}}$ (7).$91_{[10](1)}\frac{5742_{[18](9)}}{638_{[17](8)}}$ (8).$82_{[10](1)}\frac{3546_{[18](9)}}{197_{[17](8)}}$

(9).$81_{[9](9)}\frac{7524_{[18](9)}}{396_{[18](9)}}$ (10).$81_{[9](9)}\frac{5643_{[18](9)}}{297_{[18](9)}}$ (11).$3_{[3](3)}\frac{69258_{[30](3)}}{714_{[12](3)}}$

且分子數字根與分母數字根必呈特定的模式，即「96+4」有三種皆爲 6-6 型，「94+6」爲 3-2 型，「91+9」有三種皆爲 9-8 型，「82+18」爲 9-8 型「81+19」有三種皆爲 9-9 型，「3+97」爲 3-3 型。又最大、最小整數各爲 96 與 3。

柒、結論

一、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，將這九個數字分成各種不同的組數，使得其中一組數所拼成的數字恰爲其他組數所拼成的數字之「和」，其結果如下表。

分成的組數	符合的情形	最大的和	最小的和
三	336 種	981	459
四	222 種	846	153
五	84 種	612	126
六	60 種	81	63
七	24 種	81	45

二、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，將這九個數字分成三組數，使得其中一組數所拼成的數字恰爲其他二組數所拼成的數字之「差」，其結果如下表。

分成的組數	符合的情形	最大的差	最小的差
三	336 種	784	124

三、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，將這九個數字分成三組數，使得其中一組數所拼成的數字恰爲其他二組數所拼成的數字之「積」，其結果如下表。

分成的組數	符合的情形	最大的積	最小的積
三	18 種	7852	4396

四、在不重複用 1~9 九個數字的前提下，將這九個數字分成三組數，使得其中一組數所拼成的數字恰爲其他二組數所拼成的數字之「商」，其結果如下表。

分成的組數	符合的情形	最大的商	最小的商
三	18 種	1963	4

五、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，將這九個數字分成二組數，使得這二組數的比值恰爲一位整數，共有 89 種情形，其結果如下表。

比值	符合的情形	最小的分子	最大的分子
2	12 種	13458	18654
3	2 種	17469	17496
4	4 種	15768	31824
5	12 種	13485	48615
6	3 種	17658	34182
7	7 種	16758	53298
8	46 種	25496	76328
9	3 種	57429	75249

六、在不重複使用 1~9 九個數字的前提下，將這九個數字表示成值爲 100 的帶分數，其結果共有 11 種情形，帶分數中最大的整數爲 96、最小的整數爲 3。

七、利用數字根的性質，可以迅速的驗證運算的結果是否正確，若數字根不相等，其結果一定是錯誤的；但數字根相等時，其運算結果因同價根的關係，未必一定正確。

捌、心得

一、起初，我們利用紙牌、撲克牌，玩起 1~9 的九個數字的加法遊戲。下課時，常有同學加入我們的挑戰行列，看誰先排出符合條件的答案，歡呼、嘆息聲常在教室、走廊迴盪，真是有趣極了。能變成好玩又充滿挑戰性的遊戲，讓我們覺得很有成就感，是我們當初意想不到的事。

二、沒想到 1~9 九個最熟悉、最基本的數字，運用加、減、乘、除等運算符號後，從簡單的加法到反運算的減法，再到乘法、除法甚至沒見過的新奇帶分數，經過巧妙的安排，竟然也能有如此繁複而奇妙的變化，真是有趣。

三、同心協力一起完成這次的探究活動，探討數字的奧妙，我們發現：只要有條理、有系統，按部就班的推理，就是解決問題的最佳方法。

玖、參考資料

凡異出版社(2005)。數學的神秘與奇趣。新竹市：凡異出版社。P95。

程國政 譯(1996)。數學解謎入門。（藤村幸三郎、田村三郎 原著）。台北市：牛頓出版社，p93~101。

龍騰出版社(2007)。高中數學第四冊第二章—排列組合。台北縣：龍騰出版社。

南一出版社(2009)。國中數學第一冊 2~1--因數與倍數。台北市：南一出版社。

康軒出版社(2008)。國小數學第十一冊第二單元—分數的乘法。台北市：康軒出版社。

康軒出版社(2008)。國小數學第十一冊第九單元—分數的除法。台北市：康軒出版社。

【評語】080402

1.利用數字根的概念探討將 9 個數如何分組問題，有系統的逐步找出答案，頗符合數學精神，值得鼓勵。

2.關鍵處可在文中再說明清楚，使人了解為何所以然。