中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　生活與應用科學科

佳作

040815

站在 Escher 的肩膀上——平面及空間中的密鋪圖形設計

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 史謹誌	曾俊雄

關鍵詞：M.C.Escher、密鋪、正多面體（Daniorerio）

摘要

本研究以荷蘭籍的藝術家 M.C. Escher 繪製的密鋪圖樣作為出發點，接著研究以正三角形、正方形和正六邊形為基本單位的磁磚設計方法。首先利用 4 種等量變換(Isometry)推論出三種基本形狀分別有 4、5、7 種邊作用方式，再利用「群」(Group)表示邊作用，進一步窮舉出可密鋪的設計方法分別為 3、10、4 種。配合上述理論，找出一套演算法判定磁磚之密鋪性以及密鋪類型。再者，探討將邊封閉而形成有限平面的「窗框」系列磁磚密鋪的特性；接著延伸到有限曲面上，如：環面、圓柱曲面及著名的莫比紙圈，並找出製圖方法；再拓展到空間中，對正多面體，以及利用正立方體為單位，進行立體的密鋪；再透過程式構築一個更為簡易的分析平台。利用上述的結論，學習者可以輕鬆製作新圖樣。

壹、研究動機：

此份研究緣起於之前我與另外一位同學共同合作的作品「繪身繪影──正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究」。但在去年的研究中，我只針對正三角形磁磚為主要研究對象，且未找出適當的代數運算符號表示每一種邊變化作用的形式。希望可以將所有的平面磁磚的結構找出，並推導出一套檢驗磁磚是否可以密鋪的方法。而後推廣到空間中上，與實際上的程式運用，探究磁磚世界的奧妙！

貳、研究目的：

一、探討無限平面上的密鋪：(一) 基本形為正方形磁磚結構。
(二) 基本形為正六邊形磁磚結構。

二、探討有限平面上的密鋪：(一) 研究圓柱曲面、環面(Torus)和莫比紙圈。(Möbius strip)密鋪磁磚之特性。
(二) 研究窗框結構磁磚之特性。

三、歸納可密鋪磁磚的規則性並用「群」的運算符號表示

四、找出一套有效的方法判定一任意磁磚可否密鋪。

五、探討在立體空間中的密鋪：(一) 研究在正多面體上密鋪之特性與結構。
(二) 研究實體空間中的密鋪與作用。

六、在程式設計中應用上述研究成果：(一) 從已知的密鋪圖形中，擷取出單位圖形。
(二) 製造出快速而又單純的介面提供製作者預覽製圖成果。(尚未完成)
(三) 對改變已知的圖形，使之密鋪達到客製化的效果做出一些基本的討論。

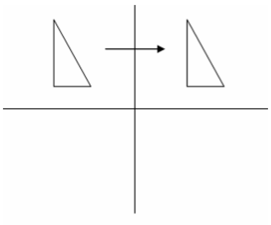
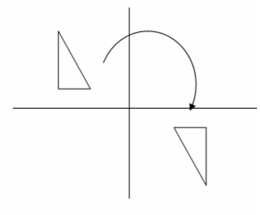
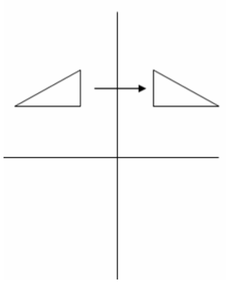
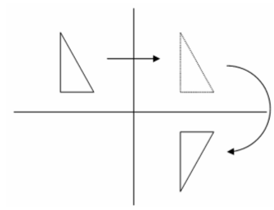
參、研究器材：

紙、筆、電腦、Math PS、dev-c++(4.9.9.2.)、visual basic

肆、文獻探討：

一、等量變換：

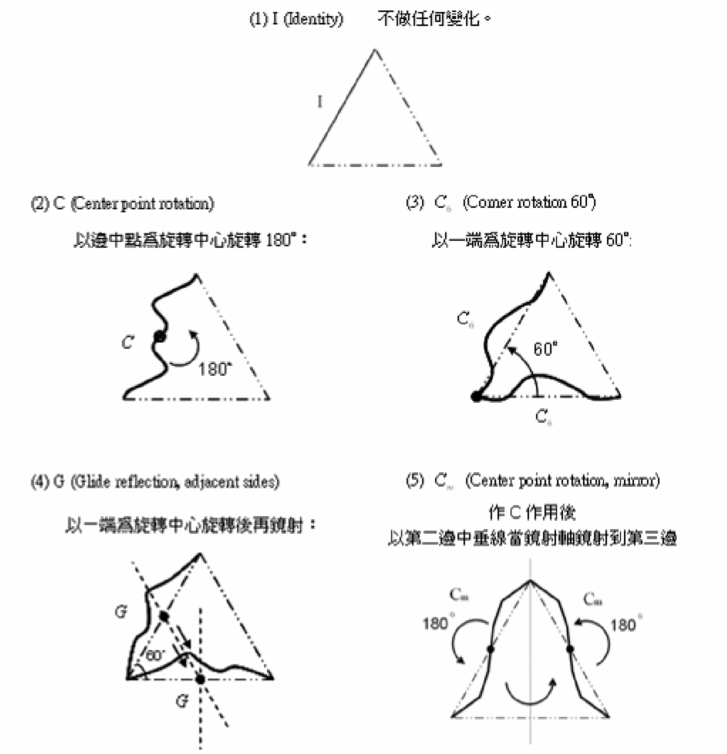
在二維重複連續圖樣中，所有等量變換(Isometry)皆出自以下四種類型：平移(Transformation)、旋轉(Rotation)、鏡射(Reflection)、滑動鏡射(Glide-reflection)：

平移 (Transformation)	旋轉(Rotation)	鏡射(Reflection)	滑動鏡射 (Glide-reflection)
			

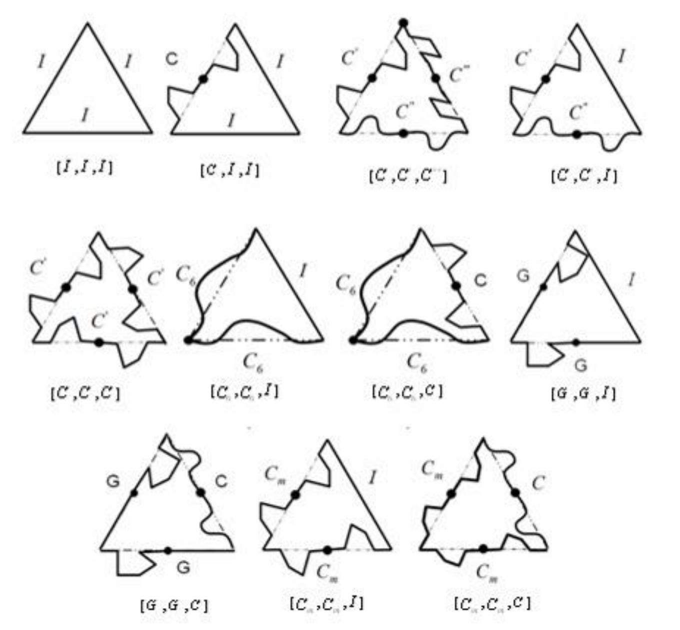
二、依國際結晶學，在二維重複連續圖樣背後的網狀格線系統有五種，見附錄一。

三、三角形磁磚結構：

1. 正三角形邊的作用有 5 種，分別是 I、C、G、C_6、C_m。



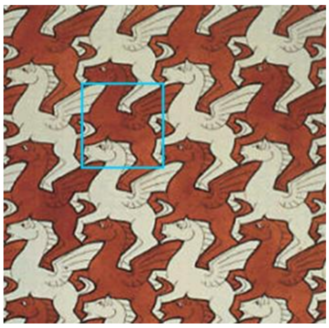
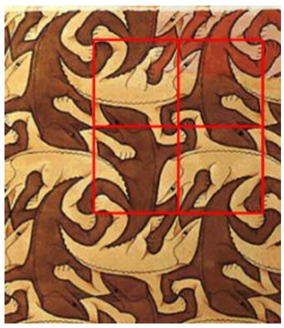
2. 正三角形磁磚結構有 11 種。

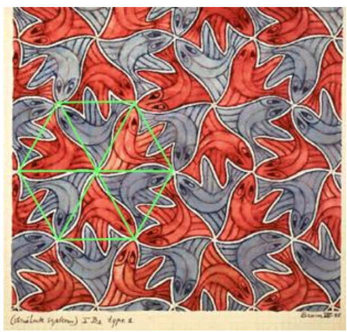
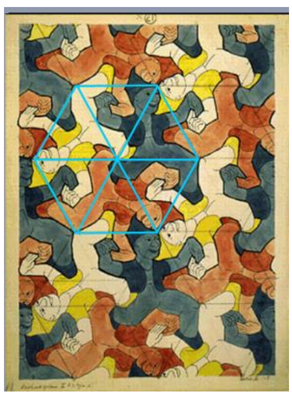


在本研究中，我將不探討含有 I 作用(Identity)的結構，我將其歸類於 C 作用(Center point rotation)內。

四、M. C. Escher 磁磚作品：

Escher 是一位藝術家，他以手繪的方式，完成了上百件作品，有磁磚圖樣(Tiling)、碎形磁磚(Fractal Tiling)和一些空間錯覺的圖案，我列舉其中幾種如下：

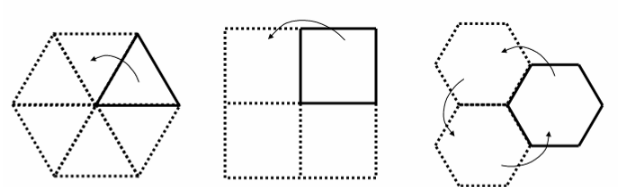




伍、研究過程：

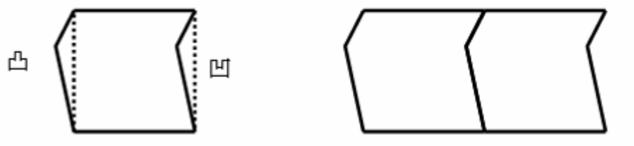
前言：

一、在基本形為正 n 邊形單一磁磚密鋪中，只有正三角形、正方形與正六邊形可以在平面上無限密鋪。因為這三種形狀內角的度數屬於 360 的因數，使它們可以藉由旋轉而密鋪，如下圖：



故以下只討論基本形為正三角形、正方形與正六邊形的密鋪磁磚

二、在設計符號部份，為了使磁磚可以密鋪，當我在其中一邊作作用時，另一條邊必須有凹凸關係才可以達到密鋪，如下圖所示：

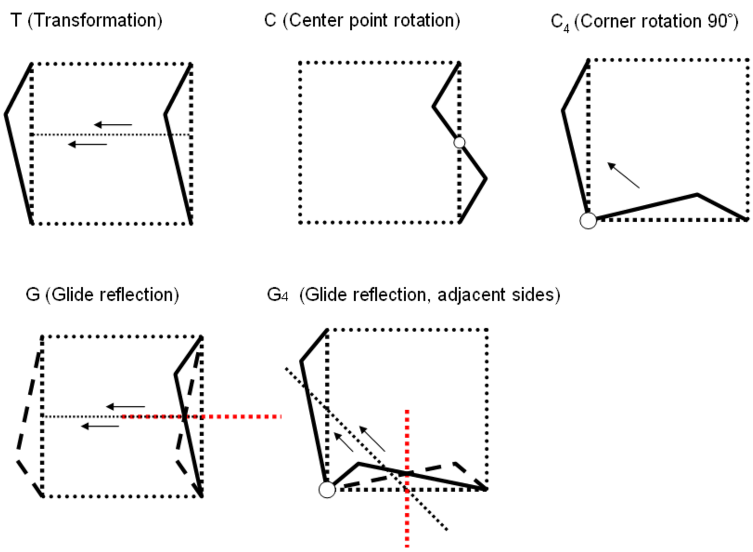


研究一、探討基本形為正方形和正六邊形磁磚結構：

1. 基本形為正方形
   (1) 正方形密鋪特性：因為正方形內角為 90°，所以在作旋轉時，只能做 4 重旋轉 (按國際結晶學定義，旋轉(n 分之 360)° 稱作「n 重旋轉」)
   (2) 以符號表示邊的變化：

   根據四種等量變換，搭配正方形的特性與凹凸的性質，我以五種符號來標示邊的作用為何：

   a. 根據平移，我以符號 T，表示正方形的對邊互為平行作用
   b. 根據旋轉，依旋轉中心位置，可分為
      (a) 以邊中點的符號 C
      (b) 以邊頂點的符號 C_4，其中數字表示其為 4 重旋轉
   c. 根據滑動鏡射，我以符號 G 表示
   d. 根據旋轉與鏡射，我以符號 G_4 表示



其中只有 C 為單邊作用，其餘均為雙邊作用

因為是由已知的四種等量變換推得這五種符號，因此可確定僅有這五種邊的作用。

(3) 討論磁磚結構：

根據所以五種符號，經由排列組合與窮舉法，可將這五種符號套用至正方形的四條邊。

有些符號為雙邊作用，需同時存在。

像 T 作用與 G 作用，就必須經由一組對邊才可以組合而成；而 C_4 作用與 G_4 作用則是經由一組鄰邊組成。所以在窮舉討論時，若一基本形已有一 T 作用(對邊作用)，則必定只能再使用同是對邊作用的 T 或 G 或單邊作用的 C，就不討論無法放入的 C_4 作用與 G_4 作用(鄰邊作用)；同樣的反過來亦同。

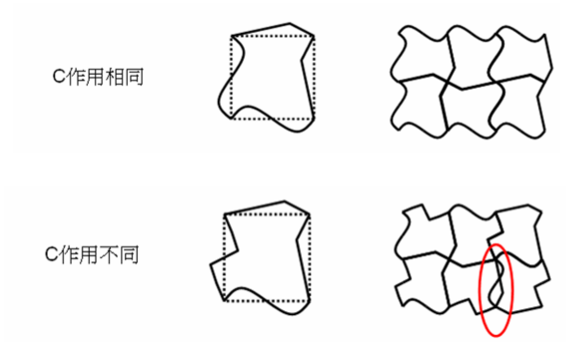
經由排列組合得到共 10 種正方形磁磚結構：

(T,T,T,T) (T,G,T,G) (G,G,G,G) (T,C,T,C) (G,C,G,C)

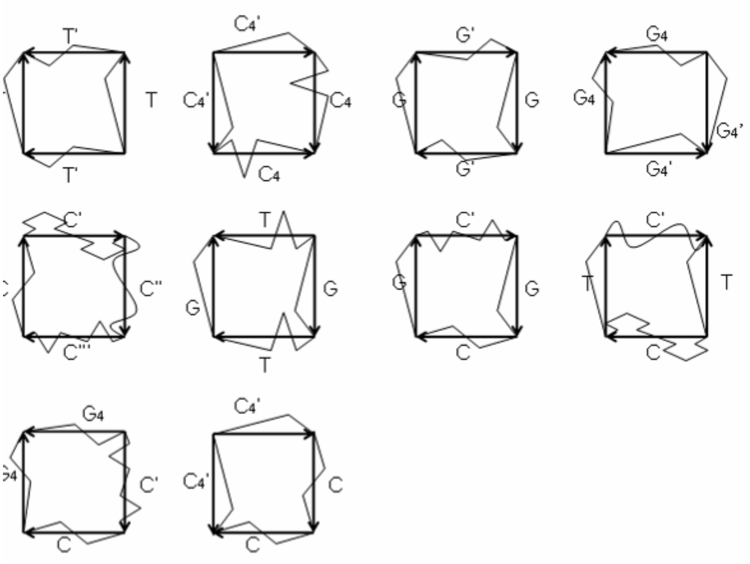
(C_4,C_4,C_4,C_4) (C_4,C_4,G_4,G_4) (G_4,G_4,G_4,G_4) (G_4,G_4,C,C)

(C_4,C_4,C,C)

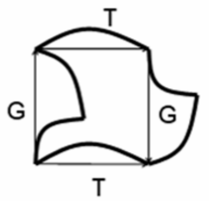
其中要注意的是，(C_4,C_4,C,C)只有在兩個 C 作用相同時可密鋪，若不同，則無法達成密鋪，密鋪結果如下圖：

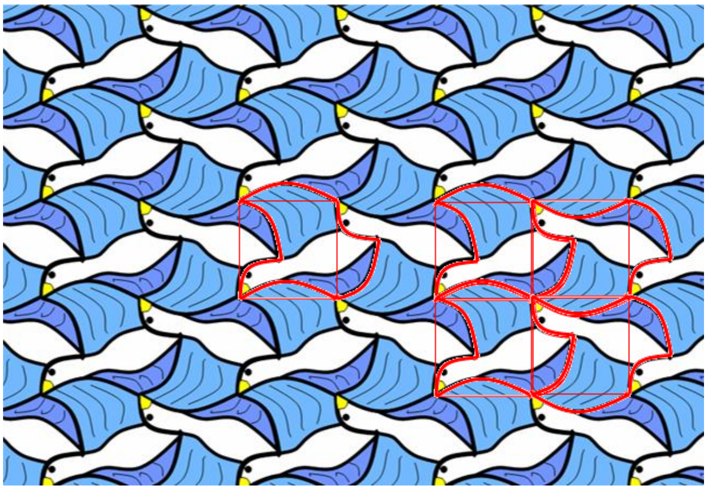


整理結果如下：正方形磁磚共有 10 種結構



(4) 自製磁磚 (此舉其中一例，其餘請參見附錄)：





製作過程：

a. 先找一個基本結構

b. 在相對作用上做適當邊變化的線條

c. 套入網格中將其無限密鋪

2. 基本形為正六邊形

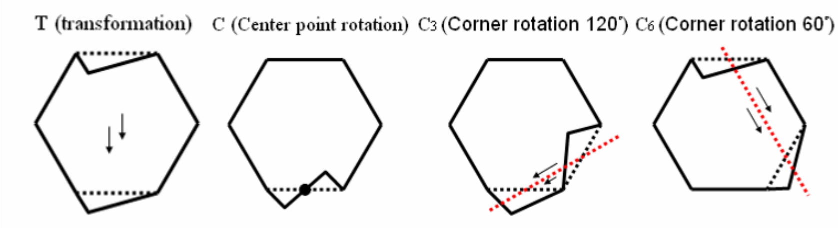
(1) 正六邊形密鋪特性：六邊形可做三重旋轉與六重旋轉

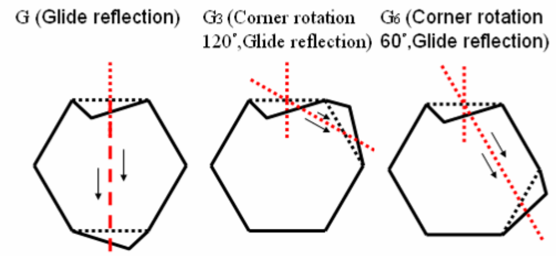
(2) 以符號表示邊的變化：

a. 根據平移，我以符號 T 表示

b. 根據旋轉，我以符號 C、C_3 和 C_6 表示

c. 根據滑動鏡射，我以符號 G、G_3 和 G_6 表示

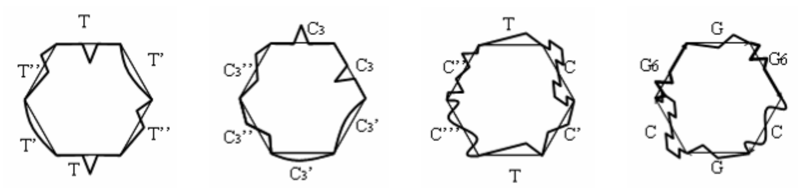




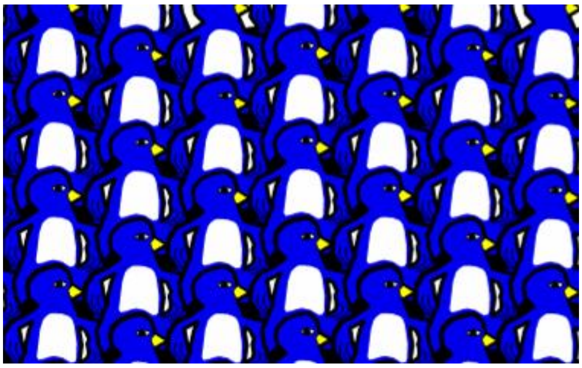
(3) 討論磁磚結構：

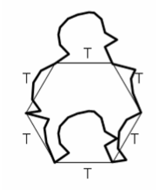
正六邊形相較於正方形為複雜，除了單邊雙邊的考量外，正六邊形在雙邊的搭配中可選擇鄰邊、斜對邊或對邊，例如上圖的 G、G_3 和 G_6

由於正六邊形磁磚邊作用比較多，所以經由排列組合出來的結果共 52 種(參見附錄三)，其中我把無法密鋪的刪去後，剩以下四種：



(4) 自製磁磚：





研究二、歸納可密鋪磁磚的規則性並用「群」的運算概念表示：

(一) 在此群中，所需要之基本元素及其性質：

1.基本符號：

已知在二維重複連續圖樣中，所能運作之等量變化只有平移(T)、旋轉(R)、鏡射(M)、滑動鏡射(G)(括弧中為我所用之簡寫符號)，而其中滑動鏡射(G)可被平移(T)和鏡射(M)取代。因此，於我之群(Group)中，**有 T、R、M 三種基本元素。**

2.基本符號之延伸及變化型：

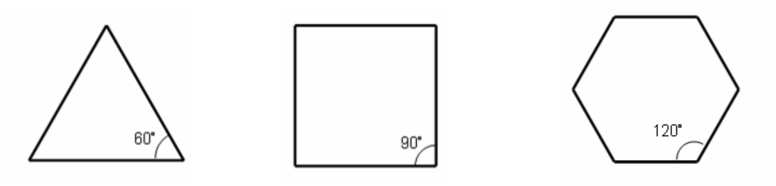
(1) $R^k(\theta)$：旋轉 θ，共旋轉 k 次

(2) M^h：水平方向鏡射

(3) M^v：垂直方向鏡射(以中垂線做鏡射軸)

(4) I：原作用(無任何作用之意)

$R^k(\theta)$中的 θ，因為正三角形、正方形和正六邊形旋轉限制，所以 θ 只能為 60°, 90°, 120°。



以下令 $R(60°) = R_1$,

$R(90°) = R_2$,

$R(120°) = R_3$.

3.基本符號之性質：

(1) 關於 T 定義衍生的公式：

a. **TT = I**.

(2) 關於 $R^k(\theta)$定義衍生的公式：

a. $\mathbf{R(\theta) = R(\theta \text{ mod } 360°)}$

b. $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$

$\rightarrow R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I$

$\rightarrow \mathbf{R(\theta)R(-\theta) = I}$

c. $\mathbf{R^k(\theta) = R(k\theta)}$：

$\because R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$

$\therefore R^k(\theta) = R(\theta + \theta \ldots\ldots + \theta) = R(k\theta)$

∴`$R^k(\theta) = R(k\theta)$

(3) 關於 M 定義衍生的公式：

a. $\mathbf{M^hM^h = I}$, $\mathbf{M^vM^v = I}$

b. $\mathbf{M^hM^v = M^vM^h}$

c. $\mathbf{M^hM^v = I}$ (只對於點對稱作用(C)有效)

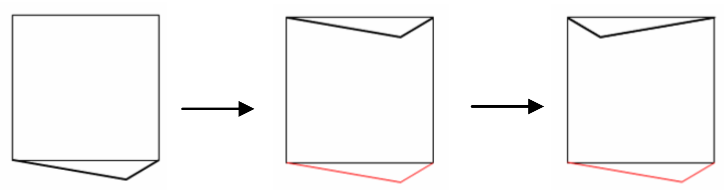
(4) 不同類符號之間的交換律：

目標：證明　TM = MT , TR = RT , RM = MR.

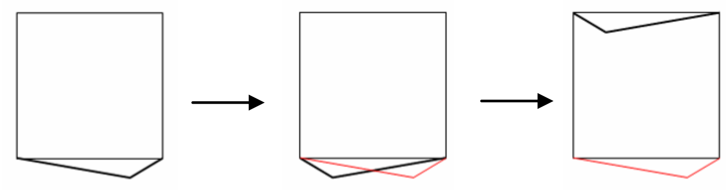
以下有三組組圖，第一張皆表示原作用，第二張與第三張的黑線為第一個或第二個符號之運算結果，而紅線表示第一張圖的原作用，用於比較。

a. TM = MT：

TM



MT

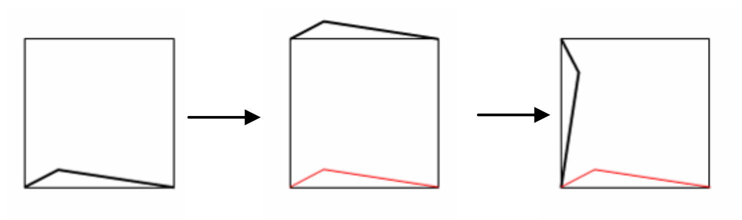


就以上組圖，我發現無論是先做 T 運算或先做 M 運算，最後的結果會是相同的，就像 TM、MT 列的第三張圖中的黑線一樣。

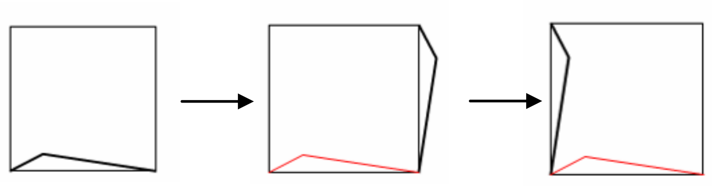
同理，以下 b. 和 c. 組圖亦同

b. TR = RT：

TR

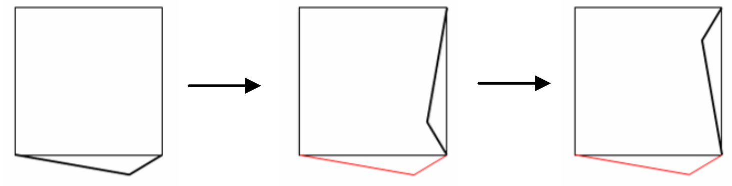


RT

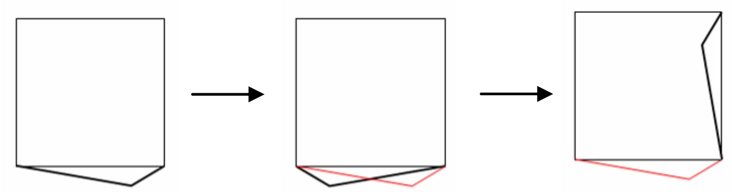


c. RM = MR：

RM



MR



就以上組圖，我發現無論是先做哪一個運算，其結果(每列第三張圖的黑線)都是一樣的，於是得證其具有交換律之性質。

(二) 將上述之群(Group)之作用，套用到已知的三角形、正方形、正六邊為基本作用的邊作用及圖形結構中：

1. 基本圖形為正三角形：

正三角形中，因為沒有 T 及下列三個公式與交換律：

(1) $(M^h)^2 = I$　　(2) $(M^v)^2 = I$　　(3) $R_1^3 = M^hM^v$

運算符號所有排列個數為｛I, M^h｝｛I, M^v｝｛I, R_1, R_1^2｝

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

此處亦證明運算符號之有限性，若我得一串運算符號由 M^h, M^v, R_1 任意排列而成，配合上交換律及基本符號之性質可將其變成

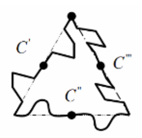
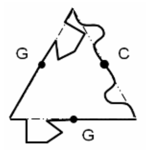
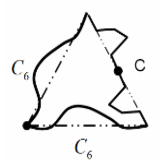
$$M^hM^h \ldots M^hM^vM^v \ldots M^vR_1R_1 \ldots R_1$$

利用上面三個公式，最後都將被簡化為上面算出的 12 種。

搭配上原作用之敘述 n(任意作用)以及 c(點對稱作用)符號，更可以完整敘述出此正三角形邊上的作用。

而此處的十二個運算子中，**(n_1 , n_1R_1)**、**(n_1 ,R_1M^v)**、**(c_1 , c_1M^h)**、**(c_1)**為可使用於正三角形磁磚密鋪的運算符號，而其他的皆不適用於正三角形磁磚密鋪，但其仍有存在之必要，用以比對其他作用之可密鋪性，並保證任意作用不會超脫這 12 個運算子 (此處，如使用 n 作用，則 c 形式不另外標出，因為 n 已包含 c 作用；而當使用 c 作用時，則此作用只適用於 c 形式)。

以下為經窮舉後尚可密鋪之圖形結構：

	(c_1, c_2, c_3)		$(n_1, n_1R_1M^v, c_1)$
	(n_1, n_1R_1, c_1)		

2. 基本圖形為正方形：

正方形中，因為下列四個公式與交換律：

(1) $T^2 = I$　　(2) $(M^h)^2 = I$

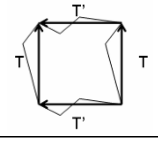
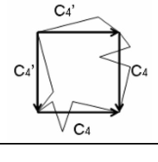
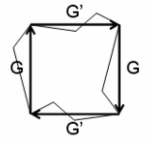
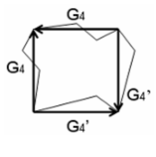
(3) $(M^v)^2 = I$　　(4) $R_2^2 = TM^hM^v$

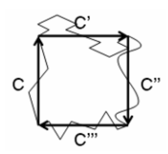
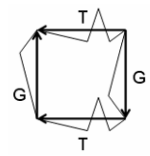
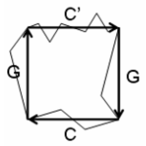
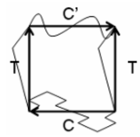
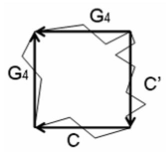
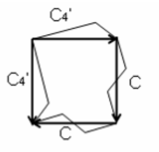
運算符號所有排列個數為｛I,T｝｛I,M^h｝｛I, M^v｝｛I,R_2｝

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

此處亦證明運算符號之有限性，若我得一串運算符號由 T,M^h,M^v,R_2 任意排列而成，配合上交換律及基本符號之性質可將其變成 $TT\ldots TM^hM^h\ldots M^hM^vM^v\ldots M^vR_2R_2\ldots R_2$ 再利用上面四個公式，最後都將被簡化為上面算出的 16 種。再搭配上原作用之敘述 n(任意作用)以及 c(點對稱作用)符號，更可以完整敘述出此正方形邊上的作用。

和正三角形同理，正方形的運算符號的情形也是有限的。以下為經窮舉後尚可密鋪之圖形結構：

	(n_1, n_2, n_1T, n_2T)		$(n_1, n_1R_2, n_2, n_2R_2)$
	$(n_1, n_2, n_1TM^v, n_2TM^v)$		$(n_1, n_1R_2M^v, n_2, n_2R_2M^v)$

<table>
<tr><td>
</td><td>(c_1 , c_2 , c_3, c_4)</td><td>
</td><td>$(n_1 , n_2 , n_1T, n_2TM^v)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(c_1 , n_1 , c_2 , n_1TM^v)$</td><td>
</td><td>(c_1 , n_1 , c_2 , n_1T)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(c_1 , c_2 , n_1 , n_1R_2M^v)$</td><td>
</td><td>$(n_1 , n_1R_2 , c_1 , c_1R_2)$</td></tr>
</table>

3. 基本圖形為正六邊形：

正六邊形中，因為下列四個公式與交換律：

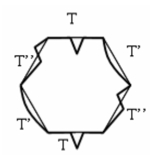
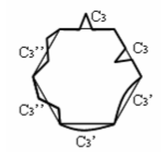
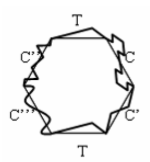
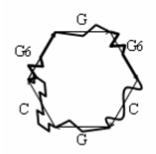
(1) $T^2 = I$ (2) $(M^h)^2 = I$

(3) $(M^v)^2 = I$ (4) $R_3^{\,3} = T$

運算符號所有排列個數為｛I,T｝｛I,｝｛I, M^v｝｛I,R_3,｝

2 x 2 x 2 x 3 = 24

和正三角形和正方形同理，正六邊形的運算符號的情形也是有限的。以下為經窮舉後尚可密鋪之圖形結構：

<table>
<tr><td>
</td><td>$(n_1 , n_2 , n_3 ,n_1T, n_2T, n_3T)$</td><td>
</td><td>$(n_1 , n_1R_3 , n_2 , n_2R_3 , n_3 , n_3R_3)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(n_1 , c_1 , c_2 , n_1T , c_3 , c_4)$</td><td>
</td><td>$(n_1 , c_1 , n_2 , n_1TM^v , n_2R_3^{\,2}M^h, c_2)$</td></tr>
</table>

研究三、找出一套方法判定磁磚可否密鋪：

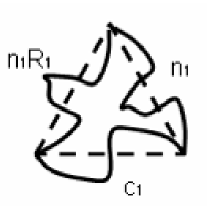
根據研究一、二，我將其統整與討論後，整理出一套方法可以判斷磁磚是否可以密鋪。

也就是說，若現有一圖形，藉由我的流程可以了解其是否可以密鋪 (詳見於「陸、研究結果」)。

若上述之磁磚無法密鋪，我也可以在盡量維持圖樣形狀的情況下將其變成可以密鋪之磁磚。

而相反的，給定一已經密鋪完成的磁磚，我可以指出其為哪一種結構。

以下舉一例子：



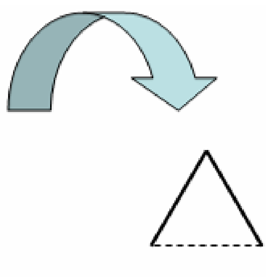
(n_1, n_1R_1, c_1)

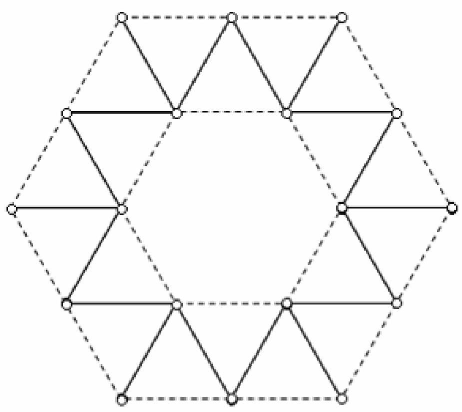
研究四、研究窗框結構磁磚之特性：

前言：

在研究三之前，我的磁磚都是朝四面八方無限延伸密鋪，在研究四，我將其中的幾邊封閉，做成獨特的窗框磁磚。窗框磁磚為使用基本單元磁磚圍成一個區塊，形成一中空的圖樣，如下圖：

(一) 正三角形：





1.目標：我將正三角形經由排列之後希望可以組成一個以密鋪為基準的窗框，創造出更多功用的密鋪磁磚。此處希望找出符合此條件之最少磁磚種類。

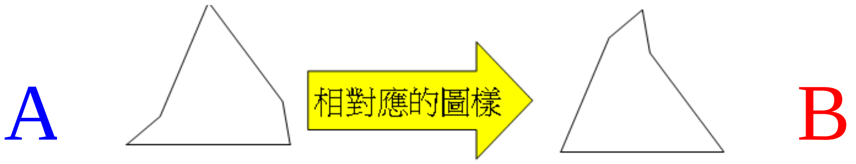
2.說明：我將正三角形排列成一較大的正六邊形後，將其中央挖空。再把邊緣的邊(上圖虛線)定義為任意作用(I) (注意，此時的 I 與前述之 I 不一樣，此時為任意作用，而非無作用)。

3.分析：將其中的單位三角形提出觀察。可發現，都是由兩條銜接邊，與一條 I 所組成。(見右上小圖)

4.分類：正三角形可使用的作用結構有五種，分別為：(n_1, I, n_1R_1)、$(n_1, I, n_1R_1M_v)$、、$(c_1, I, c_1R_1M_v)$、(c_1, I, n_1)；在其中(c_1, I, c_1R_1)可以以單一瓦片進行密鋪。

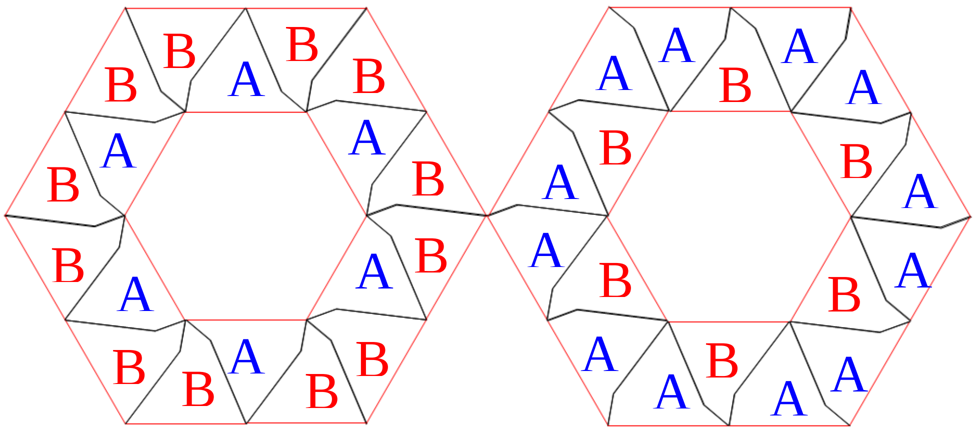
我可以用其他更加寬鬆的條件完成密鋪；但是，其瓦片就必須成對出現，其相對瓦片的作用必須為原本兩條邊作用經 M_vM_h 運算，如下圖所示：

(n_1, I, n_1R_1)



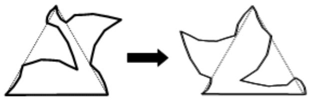
原圖

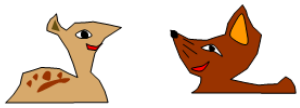
再把它放入原本的架構中，可以組合出兩種圖樣。如下圖：

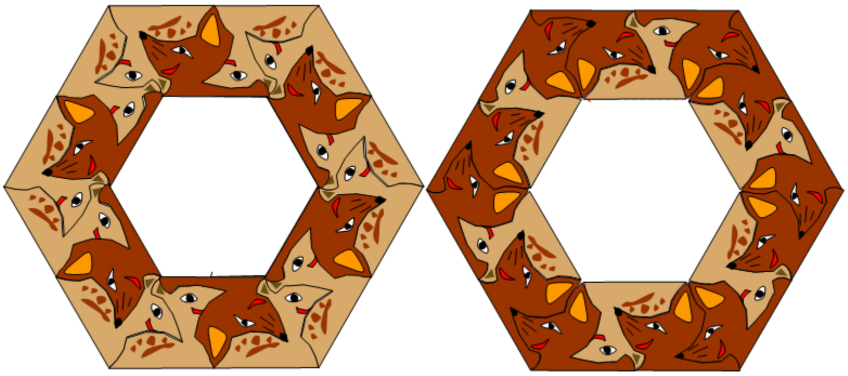


實際做圖：

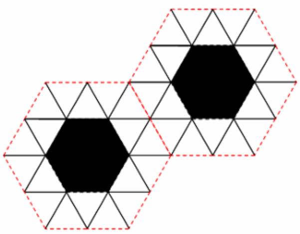
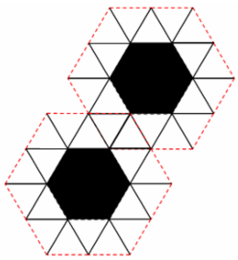
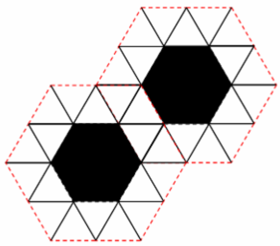
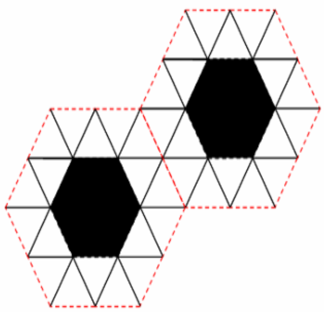
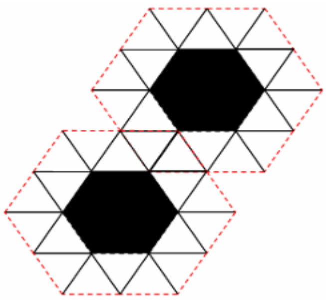
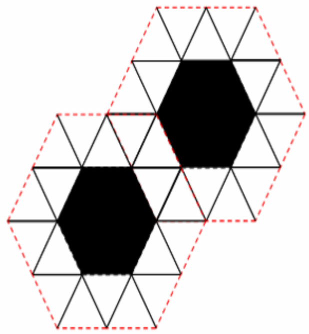
(n_1, I, n_1R_1)



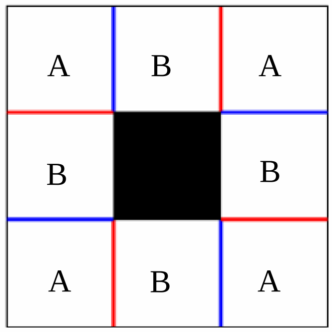




窗框磁磚除了可以單獨存在之外，亦可與其他同樣圖樣的窗框磁磚重合。我可窮舉出以下幾種。

無區塊重疊	一塊菱形區塊重疊	兩塊菱形區域重疊
		
		
任意窗框都可以符合此種密鋪	這種三角形必須以 c 型態的邊作用來密鋪，因為我觀察到在重疊邊的部分必須密合。	

(二) 正方形：



1. 因為我所探討的是「最少種類瓦片」，所以圖片上只有兩種瓦片，一種在角落 (A)，一種在邊上 (B)
2. 在左圖中，因為只有兩種磁磚，所以在左圖中相同顏色四條邊必須做相同的作用
3. 如此一來，只要決定角落磁磚的邊變化就可以間接決定邊磁磚的邊變化

(一) 角落磁磚的類型：

1. 兩種邊作用樣式不同：

   (n_1, n_2, I, I) (n_1, c_1, I, I) (c_1, c_2, I, I)

2. 兩種邊作用樣式相同：

   (1) n 類型 (任意作用磁磚)

   (n_1, n_1R_2, I, I) $(n_1, n_1R_2M^v, I, I)$

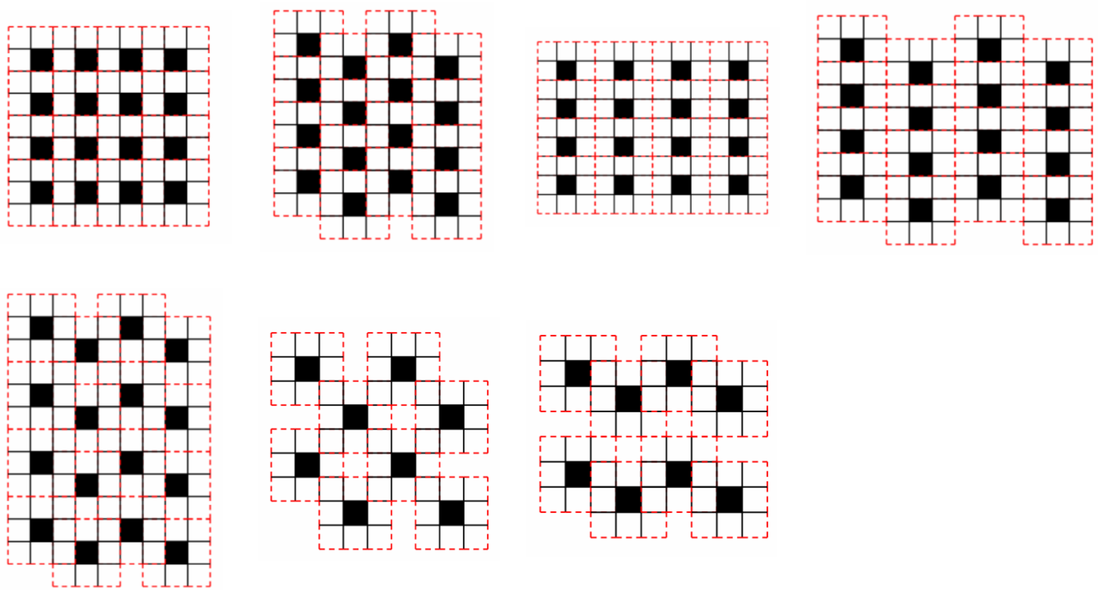
   $(n_1, n_1R_2M^h, I, I)$ $(n_1, n_1R_2M^hM^v, I, I)$

   (2) c 類型 (c 作用磁磚)

   (c_1, c_1R_2, I, I) $(c_1, c_1R_2M^v, I, I)$

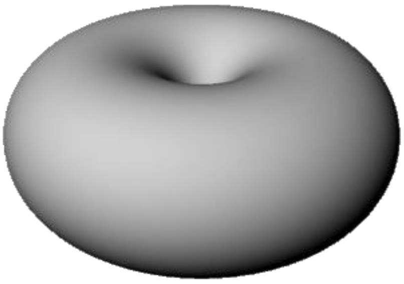
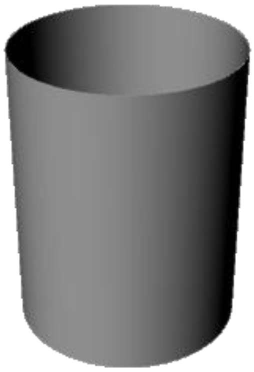
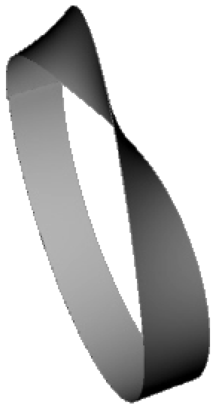
(二) 變化型：

經由窮舉，共有以下七種：



研究五、研究磁磚圖形於有限平面中的密鋪性質以及其條件之探討：

(一) 探討可用之有限平面：

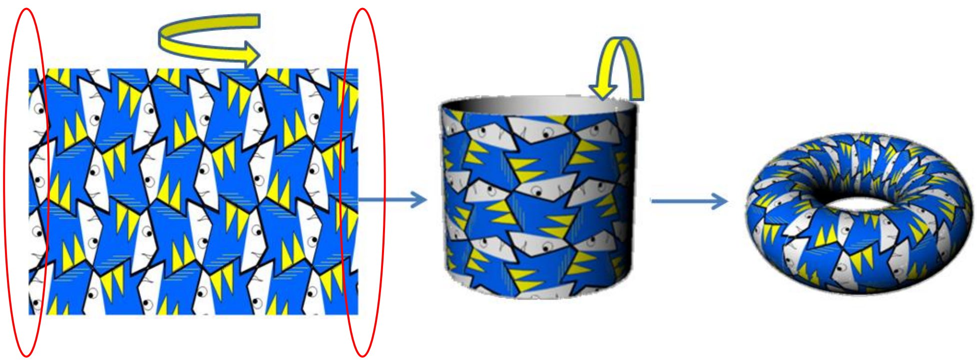
環面 (Torus)	圓柱曲面(Cylinders)	莫比紙圈(Möbius strip)
		

(二) 研究上述之曲面之結構：

1. 環面 (Torus)：探究其結構，為一長方形面，經由上下銜接，形成一 Cylinder，然後再將其頭尾連接形成此處說的「環面」(Torus)，此時只有一個面是暴露在外的。
2. 圓柱曲面狀 (Cylinders)：探究其結構，為一長方形面，經由上下銜接形成，此時，其兩個面皆是暴露在外的。
3. 莫比紙圈 (Möbius strip)：探究其結構，為一長方形面，經由上下反轉銜接形成，此時可以將其視為只有一個面的特殊結構。

(三) 如何將可密鋪的平面結果轉移至此平面上：

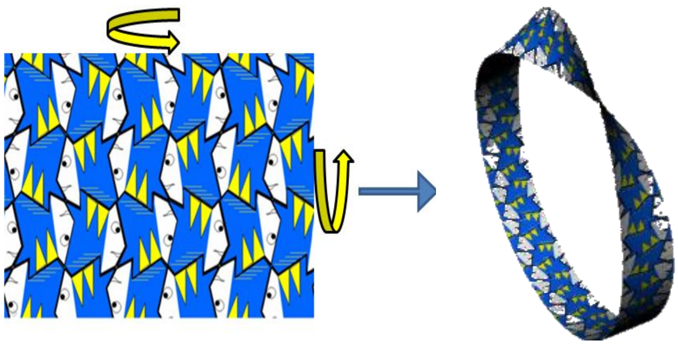
1. 環面(Torus)：將一可密鋪的平面圖形，依照下圖方式操作，但在取用原圖時需裁切至可密鋪至原邊緣之結構。(因為一開始的基本圖形就是設定在平面上無限密鋪，無論是水平方向，亦或是鉛直方向) 如下圖示：



環面(Torus)　　　　圓柱曲面(Cylinders)

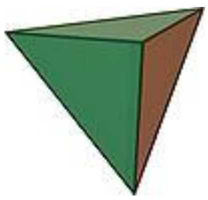
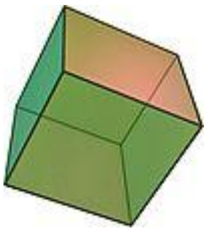
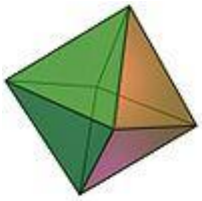
2. 圓柱曲面(Cylinders) ：將一可密鋪的平面圖形，依照下圖方式操作，(原圖之限制如上)如上圖示：

3. 莫比紙圈(Möbius strip)：將原本可以密鋪的平面圖形，依照下圖方式操作，但取用原圖時需選取具有鏡射結構之原圖即用群表示時，需要有 M 出現，才可以符合紙帶翻轉的結構。



研究六、研究磁磚圖形於正多面體中的密鋪性質以及其條件之探討：

(一) 探討可用之有限平面：

正四面體	正六面體	正八面體	正二十面體
			

上述圖片來源自維基百科

由於，我是利用上述的研究成果，套用到正多面體的密鋪中，因此，我只選用了，以正三角形、正方形、與正六邊行所構成的正多面體。

(二) 研究上述之曲面之結構：

首先，上述的正多面體，都可以透過展開圖的方式，來分析密鋪的方法。因此在研究的過程中，可以直接以上述的研究成果套入，以驗證其密鋪效果

(三) 將可密鋪的平面結果轉移至此展開圖中：

(1) 正四面體：由四個三角形組成，有三種設計方法符合：
$(c_1 , c_1R_1 , c_1 R_1^2)$ 、$(n_1 , n_1R_1M^v, c_1)$ 、$(c_1 , c_1R_1M^v, c_2)$。

(2) 正六面體：由六個正方形組成，只有一種設計方法符合：
$(c_1 , c_1R_1 , c_1 R_1^2, c_1 R_1^3)$。

(3) 正八面體：由八個三角形組成，只有一種設計方法符合：
$(c_1 , c_1R_1 , c_1 R_1^2)$。

(4) 正二十面體：由二十個三角形組成，只有一種設計方法符合：$(c_1, c_1R_1, c_1 R_1^2)$。

研究六中，皆是以實體操作，屆時將以實體方式呈現

研究七、研究實體的密鋪性質以及其條件之探討：

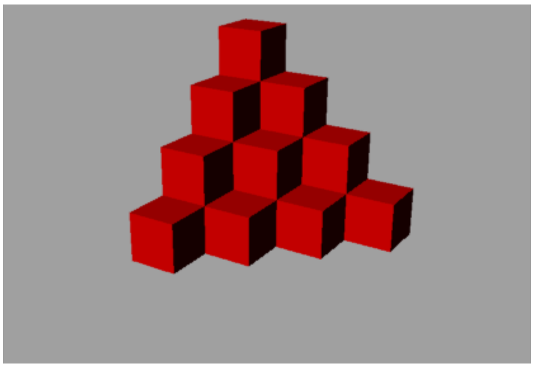
前言：前述的實驗都是以一個圖形做為一個基本圖形，去密鋪一整個空間，因此，我便想到說不定可以把一個圖形變換為一塊實體，原本邊的變化進階為面的變化，那再利用這一塊實體去密鋪一整個立體空間。

(一) 探討可以使用的正多面體：對象有研究六其中的四個正多面體，將其一一分析及討論，我發現，若是要將一個正多面體在立體空間中密鋪的話，必須要符合以下兩點條件：

1. 面與面的兩面角的某一整數倍要是 360°。
2. 頂點上的立體角的某一整數倍要為 $4\pi^2$

因此，只有正六面體符合此標準

如下圖：



(二) 探討面的作用：同邊的作用，邊的作用分為作用在單一面上，和作用在兩個面上。

1. 作用在單一面上：(1) C：以面的中心點為鏡射中心做點鏡射。
2. 作用在兩個面上：(1) 先平移作用到對面上：
   a. T_0 作用不再旋轉。
   b. T_1 以對面的中點逆時針轉 90 度。
   c. T_2 以對面的中點逆時針轉 180 度。
   d. T_3 以對面的中點逆時針轉 270 度。

(2) 旋轉 90 度作用到鄰面上：

a. N_0 作用不再旋轉。

b. N_1 以鄰面的中點逆時針轉 90 度。

c. N_2 以鄰面的中點逆時針轉 180 度。

d. N_3 以鄰面的中點逆時針轉 270 度。

當然上述八種作用方法可以用其他的等量變換組合而成，如：N_2 也可以由原本的作用以鏡射的方式產生。但是，透過群的討論之後，因為，另一面可以在除了本身以外的 5 個面出現，但是有四個(鄰面)可以視為等價，在加上作用在面上只可能有八種表現方法，但是，有一半是不符合凹凸限制的，所以 2 * 4 = 8，因此，我們可以相信確實只有這八種方法。

(三) 設計方法的種類：同平面的歸納法，共可以歸納出 265 種的設計圖形的方法，當然不是數量如此龐大的設計方法都可以完成密鋪這樣嚴密的任務，因此，需要我們一一的分析判斷，去把設計方法歸類。

1. 六個都為 C：1 種
2. 四個 C：剩兩面有八種作用可以選：8 種
3. 兩個 C：有四面，可以先選八種，再選八種：64 種
4. 沒有 C：(1) 三對鄰面作用：4^3=64 種

   (2) 兩對對面，一對鄰面：經過對六面體的觀察，就可以發現，不可能出現兩對對面，一對鄰面，因此此圖形不存在。

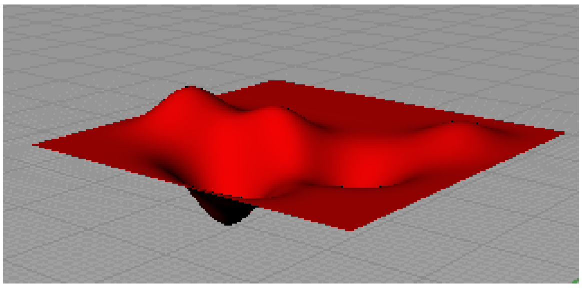
(3) 一對對面，兩對鄰面：4^3=64 種

(4) 三對鄰面：4^3=64 種

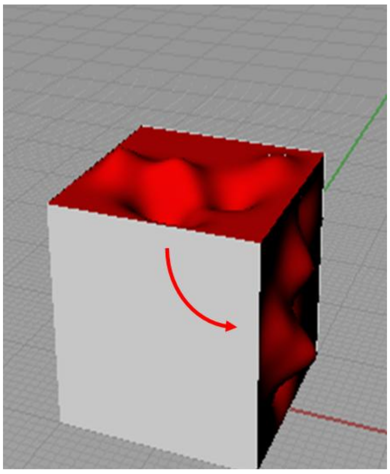
所以，是 256 種設計方法，再經由實際密鋪的驗證，可以刪掉大部分，只剩下 53 種。在此就不贅述了。

(四) 製圖步驟範例：此以 T_0 作為範例

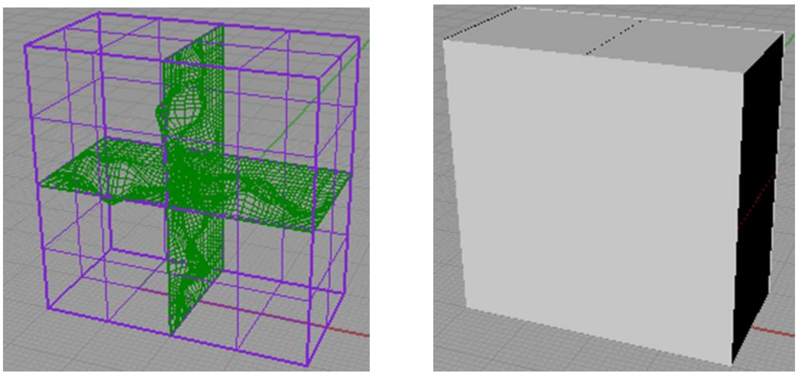
1. 先產生一個面的作用：



2. 作用到另一個面上：



3. 進行密鋪：



研究八、在程式設計中應用上述研究成果：

首先，簡述一下我程式設計的過程，首先要做的是讀入圖檔，在這邊我讀入的是 BMP 的存檔格式，所以，就得先去了解 BMP 的存檔方式，及資料區的意義，再來，我在這一邊處理的只有黑白的圖片，因為彩色的需要人為的前置加工以辨認出哪一些是結構，哪一些是雜訊，那我還不如加一步將之變成黑白，降低程式的需求。

(一) 從已知的密鋪圖形中，擷取出單位圖形：

概念：首先我將資料點以矩陣的方式讀入，白色為 0、非白色(如其他灰階色彩)為 1，接著，在圖形中央取出一個白色點，以染色的方式，將 0 轉換為 3，再把它四面八方的白色點轉換為 3(若為黑色則不變)，如此一來，接下來，只要把所有黑色點旁邊(九宮格)有的標示出來，這一些標示的點就可以組成一個單位圖形了。

(二) 製造出快速而又單純的介面提供製作者預覽製圖成果：

在這一個研究目標中，我所要做的是，做出一套程序，讓使用者可以透過一些步驟，去完成屬於他自己的密鋪圖形，但是，在這一邊我需要引用到一些其他軟體的支援，在這ー個部份，由於一些版權的疑問我可能需要去連絡原作者。在此部分，我將之跳過。

(三) 改變已知的圖形，使之密鋪達到客製化的效果：

遭遇問題：改變原本圖形的方式，我有想到兩種，一為切割，一為伸縮，兩者各有好處，切割可以保持原有的形狀，但是可能會切除具有特色的辨識點，使圖形失去原意，而伸縮，雖然可以保持所有的區塊，但形狀一定會產生改變，也一樣會有太過使圖形無法辨識的問題。在此就需要人為的辨識。

修正原先理論：我回去反思正多邊形的密鋪圖形的變化，我如果把已密鋪的圖形做水平的伸縮，可以產生以等腰三角形的密鋪，再以類似把正方形變成平行四邊形的方式作用，可以成功的讓任意三角形都完成密鋪，這對客製化的彈性有很大的幫助•

概念：同樣的，先輸入其資料點，但是，在此我以彩色的方式輸入矩陣，再來我必須要抓出端點作為密鋪正多邊形的頂點，然而，在此，我可以取三點，四點，六點，而且也有數十種的模組可以進行，可以有太多種的輸出結果，因此我要對作用方式做出更多的分析及討論，到交件為止，我仍無法透過純電腦有完美的結果出現。只限於自己用繪圖軟體去做細微調整，達到密鋪。

陸、研究結果：

一、基本圖形為正三角形：

(一) 若有一基本形為正三角形的磁磚，則可經由以下運算法，判斷其是否為密鋪磁磚。若符合以下條件即可密鋪，反之，則此磁磚必不可密鋪：

1. 有兩個邊符合以下關係：

   (1) (n_1 , n_1R_1)

   (2) $(n_1 , n_1R_1M_v)$

   (3) $(n_1 , n_1R_1^2)$

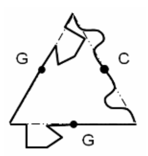
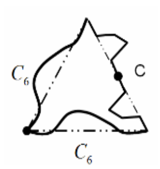
   (4) $(n_1 , n_1R_1^2M_v)$。

2. 且第三邊必為點對稱之作用(即上述之 C 作用)。

3. 若不符合以上兩點，則三邊皆為 C 作用(此處之 C 作用，可相異)。

(二) 若有一基本形為正三角形的的磁磚，擁有以下條件，則其必可以密鋪：

1. 其圖形結構為我所設定的以下 3 種結構：

	(c_1 , c_2 , c_3)		$(n_1 , n_1R_1M_v, c_1)$
	(n_1 , n_1R_1 , c_1)		

二、基本圖形為正方形：

(一) 若有一基本形為正方形的磁磚，則可經由以下運算法，判斷其是否為密鋪磁磚。若符合以下條件即可密鋪，反之，則此磁磚必不可密鋪：

1. 首先觀察此正方形之四邊擁有幾條點對稱(c 作用)之邊；

   (1) 若擁有奇數條點對稱邊(c 作用)，則此圖形必無法密鋪。

   (2) 若擁有偶數條點對稱邊(c 作用)，則進入 2.之步驟

2. 擁有 0 或 2 或 4 條點對稱邊所面對的情況

   (1) 擁有兩條點對稱邊時，則另兩邊須為(n_1 , n_1TM_v)或$(n_1 , n_1R_2M_v)$或(n_1 , n_1T) ，才可密鋪。

   (2) 擁有四條點對稱邊時，必可密鋪。

(3) 擁有零條點對稱邊時，須觀察其中是否有兩邊具有(n_1, n_1T)、(n_1, n_1TM_v)、(n_1, n_1R_2) 、(n_1, $n_1R_2M_v$) 、(n_1, $n_1R_2^3$) 或 (n_1, $n_1R_2^3M_v$)其中之一，若符合 a~d 其中之一即可密鋪：

a. 兩邊符合(n_1, n_1T)，其他兩邊須符合(n_2 , n_2T)或 (n_2 , n_2TM_v)

b. 兩邊符合(n_1 , n_1TM_v)，其他兩邊須符合(n_2 , n_2T)或 (n_2 , n_2TM_v)。

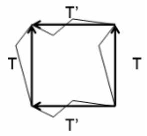
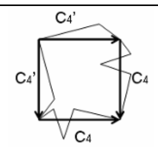
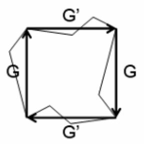
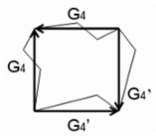
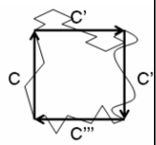
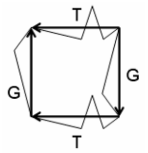
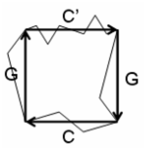
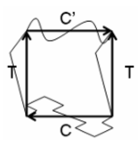
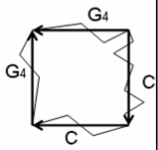
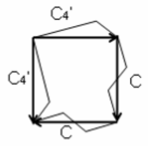
c. 兩邊符合(n_1 , n_1R_2)，其他兩邊須符合(n_2 , n_2R_2)，。

d. 兩邊符合(n_1 , $n_1R_2M_v$)，其他兩邊須符合(n_2 , $n_2R_2M_v$)，。

e. 若無法找到上述四種作用，則此磁磚定無法密鋪。

(二) 若有一基本形為正方形的的磁磚，擁有以下條件，則其必可以密鋪：

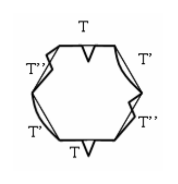
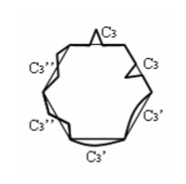
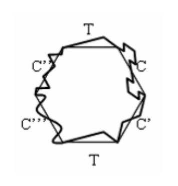
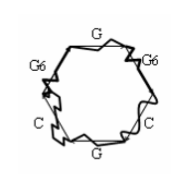
1.其圖形結構為我所設定的以下十種結構：

	(n_1 , n_2 , n_1T, n_2T)		(n_1 , n_1R_2 , n_2 , n_2R_2)
	(n_1 , n_2 , n_1TM_v, n_2TM_v)		(n_1 , $n_1R_2M_v$, n_2 , $n_2R_2M_v$)
	(c_1 , c_2 , c_3, c_4)		(n_1 , n_2 , n_1T, n_2TM_v)
	(c_1 , n_1 , c_2 , n_1TM_v)		(c_1 , n_1 , c_2 , n_1T)
	(c_1 , c_2 , n_1 , $n_1R_2M_v$)		(n_1 , n_1R_2 , c_1 , c_1R_2)

三、基本圖形為六邊形：

(一)我尚未找出一套適切的演算法來描述其密鋪之可能性，但是經由窮舉法，所得之 52 種結構，且經過密鋪規則之篩選，我可以確知下述四種結構可密鋪，而且也只有以下四種可密鋪

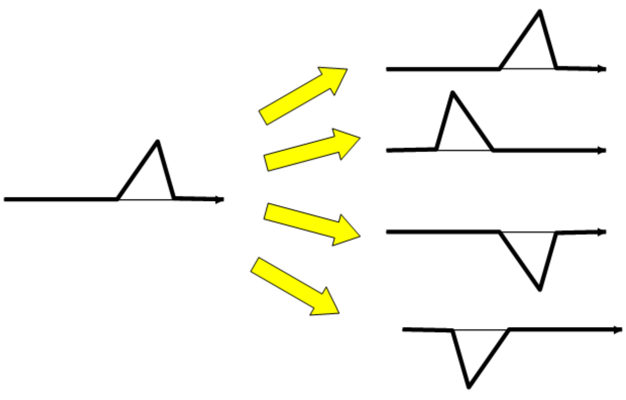
(二)若有一基本形為六邊形的的磁磚，擁有以下條件，則其必可以密鋪：

	$(n_1, n_2, n_3, n_1T, n_2T, n_3T)$		$(n_1, n_1R_3, n_2, n_2R_3, n_3, n_3R_3)$
	$(n_1, c_1, c_2, n_1T, c_3, c_4)$		$(n_1, c_1, n_2, n_1TM^v, n_2R_3^2M_h, c_2)$

四、正三角形、正方形和正六邊形所擁有之結構為 3 種、10 種和 4 種。而造成此數字之原因，依我判斷，正三角形因為邊的數量較少而無法造出較多結構，而正六邊形雖然可以窮舉出多達 52 種的基本結構，但是一個正六邊形須與周圍六個正六邊形做銜接，所以相對的圖形結構也無法有更多的變化。而正方形正好是居於中間。

五、「群」的邊作用個數分析：

三角形、正方形和六邊形所擁有之「群」的邊作用為 12 種、16 種、24 種。我可觀察出作用數都是邊數的四倍。我推論是因為一條基本邊在經由等量變換之後，在同一條邊上有四個位置可以放。所以是邊數的四倍。如下圖：



六、有限曲面選取基本圖時所需的條件：

(一) 環面(Torus)、圓柱曲面(Cylinders)：只要是可在平面上密鋪的基本圖形即可。

(二) 莫比紙圈(Möbius strip)：除了要在平面上密鋪之外，還要有鏡射的結構在其中，也就是在群的敘述中，要有「M」的作用出現。

七、在正多面體上進行密鋪時可用的設計方法：正四面體有 3 種設計方法，正六面體有 2 種設計方法，正八面體及正二十面體則有待討論。

八、實體密鋪：以正立方體進行密鋪，可以有 9 種面作用方式，53 種整體的設計成果，透過此法，可以將原本的邊作用進階為面作用，由面密鋪平面，變成由實體去密鋪立體空間。

九、程式設計：透過程式，我可以從已知圖形截取出單位圖形，再透過電腦去改並圖形使之密鋪化，但結果仍不甚滿意，還是須有人工調校，介面部分仍需要有軟體的支援去完成程式。

柒、參考資料：

[1]陳明璋(民 92),MathPS 使用手冊,交通大學。

[2]塞伊德•蔣•阿巴斯(Syed Jan Abas), 阿默•夏克爾•薩爾曼(Amer Shaker Salman)著, 伊斯蘭的幾何藝術, 廖純中譯, 左岸文化, 台北, 2004。

[3]Daud Sutton, Miranda Lundy, 典雅的幾何, 台北市, 天下文化。

[4]林壽福(民 95), 數學樂園——從胚騰(Pattern)學好數學, 如何出版, 台灣。

[5]http://www2.spsu.edu/math/tile/grammar/index.htm

[6]http://mathworld.wolfram.com/Tiling.html

[7]http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowe1/

[8]http://en.wikipedia.org/wiki/Tiling

[9]http://acm.pku.edu.cn/JudgeOnline/problem?id=2663

[10]http://www.mcescher.com/

[11]http://www.fractalwisdom.com/FractalWisdom/fractal.html

[12]http://www.vm.ibm.com/devpages/GREER/CVEX.HTML

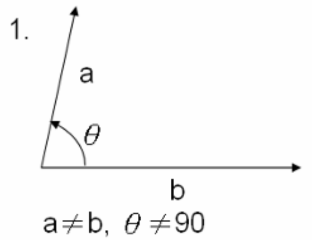
[13]http://www.geocities.com/rerewhakaaitu/Fractals3.html

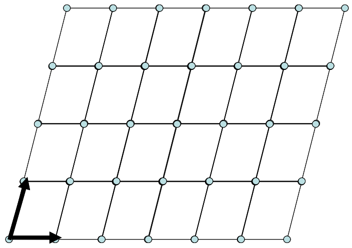
[14]http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tiling.html

捌、附錄：

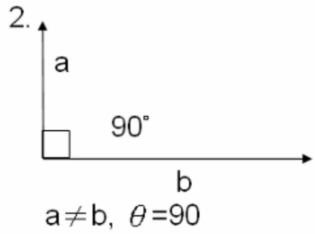
附錄一、五種網狀格線系統：

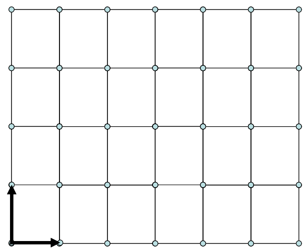
(一) 兩組向量不等長，夾角不等於 90 度(平行四邊形)



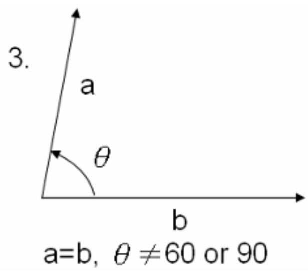


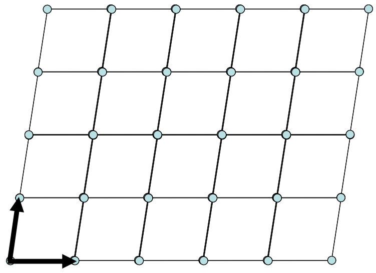
(二) 兩組向量不等長，夾角等於 90 度(矩形)



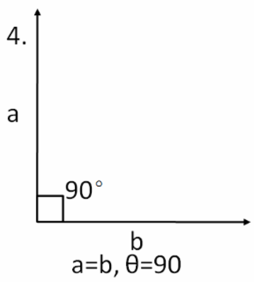


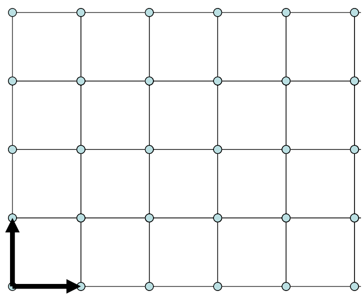
(三) 兩組向量等長，夾角不等於 90 度、60 度(菱形)



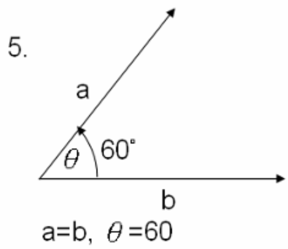


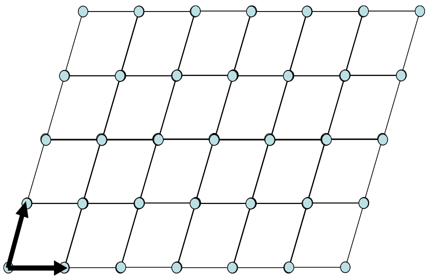
(四) 兩組向量等長，夾角等於 90 度(正方形)



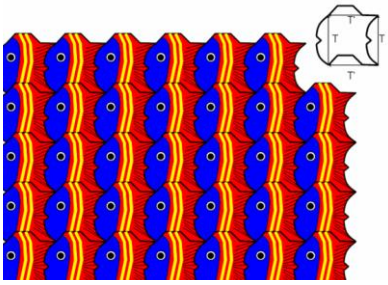


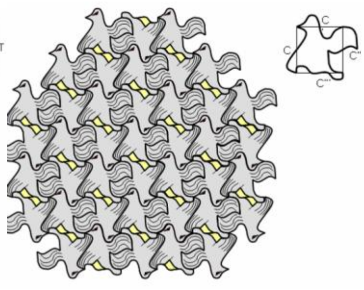
(五) 兩組向量等長，夾角等於 60 度(含 60°之菱形)

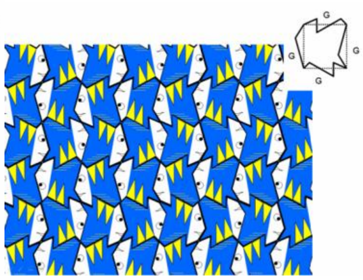


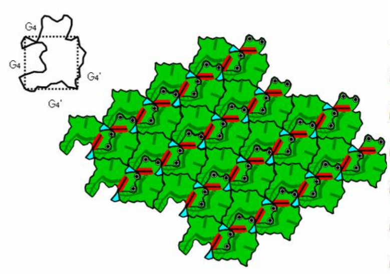


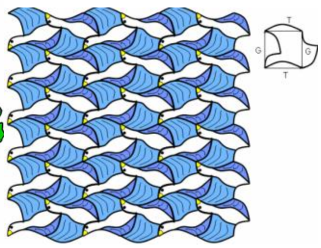
附錄二、自製磁磚作品：



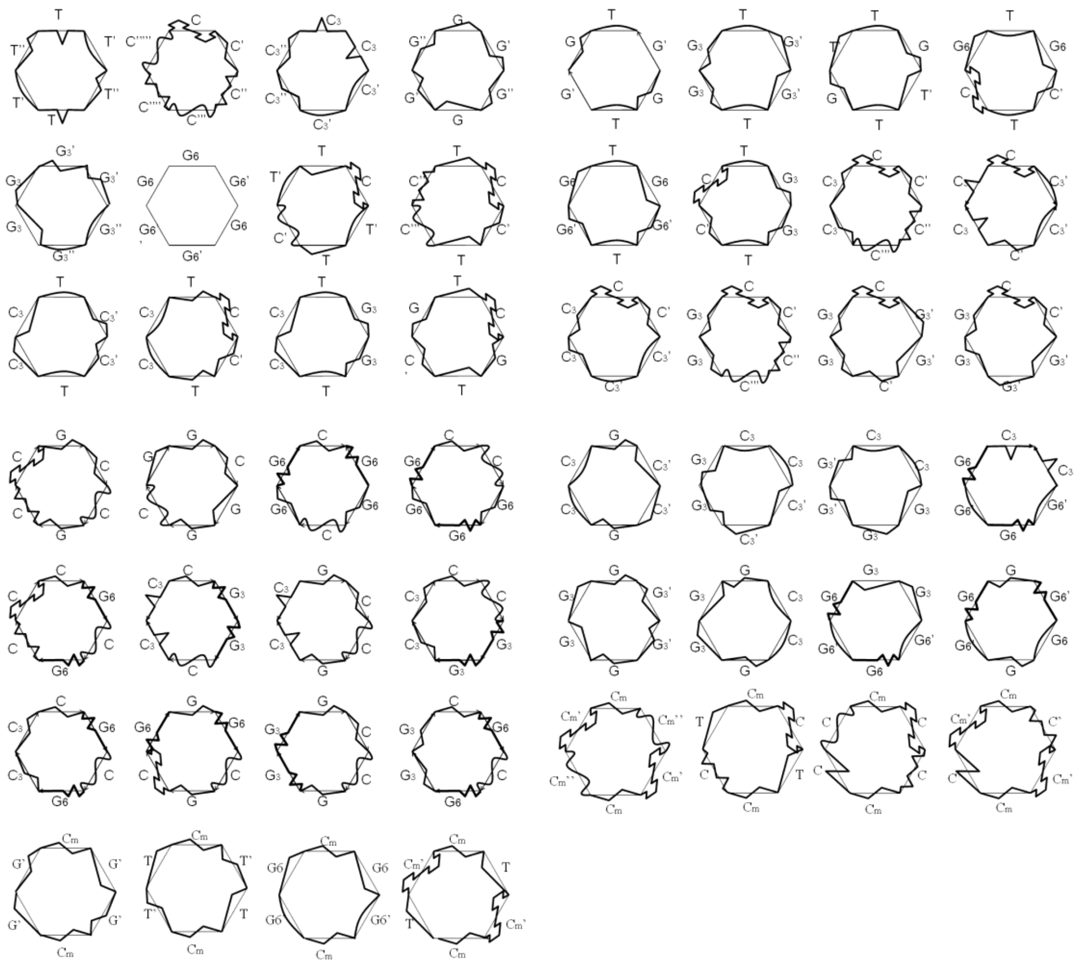








附錄三、正六邊形結構窮舉，總計 52 個



【評語】**040815**

本作品以〝群〞（group）及空間排列為出發點，進而窮舉可密鋪的設計方法，並設計一演算法，以利產生新圖樣，在電腦軟體的掌握與〝空間群〞的了解值得肯定。但需注意科技上的創作有其獨特性，在同一主題下除非有方法上的大幅精進與極為突出的成果，否則較難被肯定，往 3D 空間密鋪之發展，可為未來之挑戰。