中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040414

投投是道

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 曾若淳 高二 洪嘉蔓	葉佐欽

關鍵詞：投影、不變性、圓柱三角形

投投是道

摘要：

我們主要是探討在不同曲面上的三角形的心投影到平面上的對應情形，將內容分成四個部分。第一部分，我們探討平面上的三角形四心：重心 G、垂心 H、外心 O、內心 I 投影到另一平面的對應情形。四心中只有 G 具有不變性，而 H、O、I 在某些情況下才具有不變性。第二部分，我們將之推廣，探討球面三角形的四心投影到平面的對應情形。其中，又分成正平面(平行於三角形的平面)與斜平面(不平行於三角形的平面)來討論，四心在正平面皆具有不變性，但在斜平面中皆須在某些情形下才具有不變性。第三部分，我們再推廣到圓柱三角形的情形，並且建立了一種模式，試著找在圓柱上的三角形四心。第四部分，我們試著研究三角形的某一頂點沿著一條直線變動時，四心的變動與投影的四心的變動的軌跡，是什麼樣的圖形。

壹、研究動機

在高一的地理課，我們學習了麥卡托投影(圓柱投影)、蘭伯特投影(圓錐投影)、彭納投影(圓錐投影之修正)、方位投影(等距投影)、莫爾威投影(等積投影)、古特分瓣(等積投影)……等繪製地圖的方法，由於地球是呈球型的，這些繪製的方法，總是會使地圖上某些部分「變形」，而我們感興趣的是有什麼是「不變」的，進而探討不同圖形、不同曲面的情況下，投影得到的「不變量」。

貳、研究目的

1. 探討平面三角形 ABC 的心投影到另一平面，是否為 ABC 各點的投影點 A’, B’, C’ 的心。
2. 找出球面上最短距離的作法，定義球面三角形 ABC 的心，分別從球心投影到一在球外的正平面上與斜平面，探討其是否為 ABC 各點的投影點 A’, B’, C’的心。
3. 定義出圓柱上兩點的連線，進而定義出圓柱上的中線、中垂線、高、角平分線，探討三線是否在圓柱上交於一點，若成立，則可定義出圓柱三角形 ABC 的心。

參、研究設備及器材

1. 電腦壹台。
2. 數學方程式符號編輯器 MathType、GSP、Cabri 3D 軟體各壹套。
3. 彩色印表機壹台。

肆、研究過程或方法

一、基本性質及應用

1. 平面上的平移變換為一種保距變換，因此直線、角度、三角形的五心具有不變性。

2. 平面E_1上的一點 A 投影到平面E_2的一點 A 的表示法

推導：

令 E_1 為空間中的一平面 ， $\overline{n_1}$為其法向量

則 E_1 可假設為：$\overline{n_1}\cdot(x,y,z)+d_1=0$

E_2 為任意平面 ， $\overline{n_2}$為其法向量

則 E_2 可假設為：$\overline{n_2}\cdot(x,y,z)+d_2=0$

令 $\overline{OA'}=\overline{OA}+t\overline{n_2}$ ，其中，O 為座標軸原點

$$\Rightarrow\ \left(\overline{OA}+t\overline{n_2}\right)\cdot\overline{n_2}+d_2=0\ \Rightarrow\ t=\frac{-\left(d_2+\overline{OA}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}$$

則 A'的座標為$\Rightarrow \overline{OA'}=\overline{OA}+\dfrac{-\left(d_2+\overline{OA}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$

3. 平面E_1上的向量$\overline{AB}$投影到平面E_2的$\overline{A'B'}$的表示法

推導：

令 E_1 為空間中的一平面 ， $\overline{n_1}$為其法向量

則 E_1 可假設為：$\overline{n_1}\cdot(x,y,z)+d_1=0$

E_2 為任意平面 ， $\overline{n_2}$為其法向量

則 E_2 可假設為：$\overline{n_2}\cdot(x,y,z)+d_2=0$

$\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}$ ，由 3. 的結果可寫成：

$$=\left(\overline{OB}-\frac{d_2+\overline{OB}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}\right)-\left(\overline{OA}-\frac{d_2+\overline{OA}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}\right)$$

$$=\overline{AB}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

4. 球面 S 上的一點 A 投影到平面E的點為 A’的表示法

推導：

令球面 S：$x^2+y^2+z^2=r^2$, S 為球心(定義其為原點) ， r 為其半徑

E 空間中的一平面 ，n 為其法向量

A' 為 A 從 S 的球心投影到 E平面上的一點

令 $\overline{SA'}=t\,\overline{SA}$

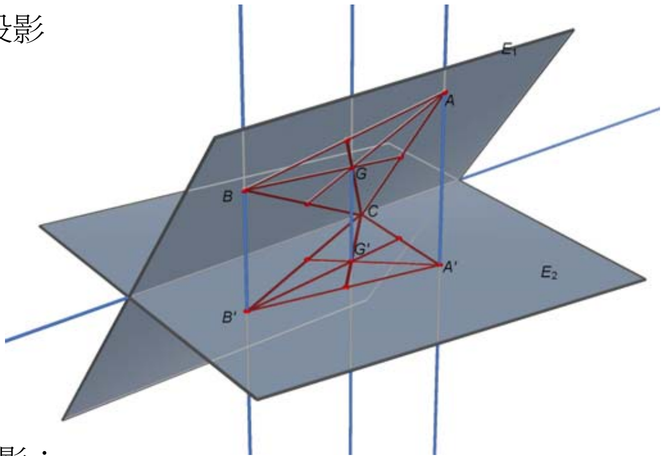
$$\Rightarrow t\,\vec{n}\cdot\overline{SA}+d=0 \quad \Rightarrow t=\frac{-d}{\overline{SA}\cdot\vec{n}}$$

則A'的座標：$\overline{SA'}=\dfrac{-d_2}{\overline{SA}\cdot\vec{n}}\,\overline{SA}$

二、平面到平面

(一)四心的投影

1. 重心 G



(1)投影：

在平面 E_1 上給定三點 A, B, C 投影到平面 E_2 分別為 A’, B’, C’

令平面 E_1 上 ΔABC 的重心 G 投影到平面 E_2 為 G’

令 $\Delta A'B'C'$ 的重心為 G’’

G’與 G’’重合⇒ G’即為 $\Delta A'B'C'$ 的重心

(2)證明：

令 S 為原點 ，G 為 ΔABC 之重心 $\overline{SG}=\dfrac{\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}}{3}$

由研究方法 3. 可推出 G 投影到平面另一平面的投影點為：

$$\overline{SG'}=\overline{SG}+\frac{-\left(d_2+\overline{SG}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

同理 $\overline{SA'}=\overline{SA}+\dfrac{-\left(d_2+\overline{SA}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$， $\overline{SB'}=\overline{SB}+\dfrac{-\left(d_2+\overline{SB}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$，

$$\overline{SC'}=\overline{SC}+\frac{-\left(d_2+\overline{SC}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

令 G" 為 ΔA'B'C' 之重心

$$\overline{SG''}=\frac{\overline{SA'}+\overline{SB'}+\overline{SC'}}{3}=\overline{SG}+\frac{-\left(d_2+\left(\dfrac{\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}}{3}\right)\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

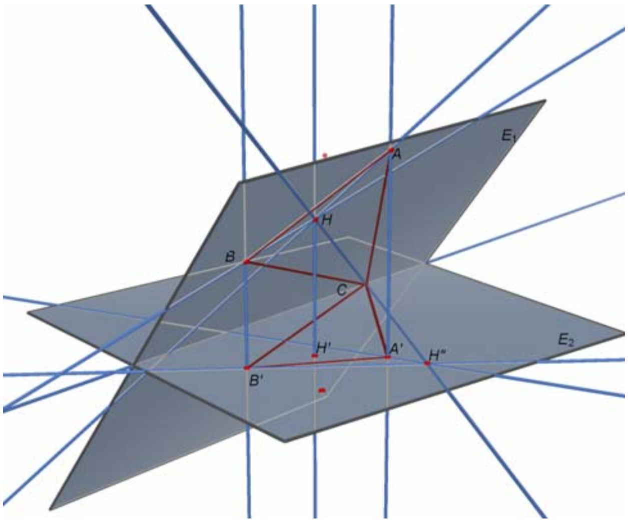
$$= \overline{SG} + \frac{-\left(d_2 + \overline{SG} \cdot \overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2} \overline{n_2} = \overline{SG'}$$

故 G' = G" 兩點重合

(3)結論：

無論 ΔABC 為何種三角形，G 的投影皆具有不變性。

2. 垂心 H



(1)投影：

在平面 E_1 上給定三點 A, B, C 投影到平面 E_2 分別為 A', B', C'

令平面 E_1 上 ΔABC 的垂心 H 投影到平面 E_2 為 H'

令 $\Delta A'B'C'$ 的垂心為 H''

H'與 H''不重合⇒ H'不是 $\Delta A'B'C'$ 的垂心

(2)分析：

令 S 為原點 ，H 為 ΔABC 之垂心 ， H" 為 ΔA'B'C' 之垂心

由垂心的定義，可導出：

$$\overline{SH} = \frac{\alpha\overline{SA} + \beta\overline{SB} + \gamma\overline{SC}}{\alpha + \beta + \gamma}$$ ，其中 $\alpha = (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c})$, $\beta = (\vec{b} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{c})$, $\gamma = (\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{c} \cdot \vec{b})$

而 $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AC}$, $\vec{c} = \overline{BC}$

同理

$$\overline{SH''} = \frac{\alpha'\overline{SA'} + \beta'\overline{SB'} + \gamma'\overline{SC'}}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$$ ，其中 $\alpha' = (\vec{a'} \cdot \vec{b'})(\vec{a'} \cdot \vec{c'})$, $\beta' = (\vec{b'} \cdot \vec{a'})(\vec{b'} \cdot \vec{c'})$, $\gamma' = (\vec{c'} \cdot \vec{a'})(\vec{c'} \cdot \vec{b'})$

而 $\vec{a'} = \overline{A'B'}$, $\vec{b'} = \overline{A'C'}$, $\vec{c'} = \overline{B'C'}$

再由基本性質及應用 2.可推出 H 投影到平面另一平面的投影點為：

$$\overline{SH'} = \overline{SH} + \frac{-\left(d_2 + \overline{SH} \cdot \overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2} \overline{n_2}$$

當 H’和 H”重合時， $\overline{SH'} = \overline{SH''}$

$$\Rightarrow \overline{SH'} = \overline{\mathrm{SH}} + \frac{-\left(\mathrm{d}_2 + \overline{\mathrm{SH}}\cdot\overline{\mathrm{n}_2}\right)}{\left|\overline{\mathrm{n}_2}\right|^2}\overline{\mathrm{n}_2} = \frac{\alpha'\overline{SA'}+\beta'\overline{SB'}+\gamma'\overline{SC'}}{\alpha'+\beta'+\gamma'} = \overline{SH''}$$

$$\Rightarrow \overline{\mathrm{SH}} + \frac{-\left(\mathrm{d}_2 + \overline{\mathrm{SH}}\cdot\overline{\mathrm{n}_2}\right)}{\left|\overline{\mathrm{n}_2}\right|^2}\overline{\mathrm{n}_2} = \frac{\alpha\overline{SA}+\beta\overline{SB}+\gamma\overline{SC}-\left(\mathrm{d}_2(\alpha+\beta+\gamma)+\left(\alpha\overline{SA}+\beta\overline{SB}+\gamma\overline{SC}\right)\cdot\overline{\mathrm{n}_2}\right)\frac{\overline{\mathrm{n}_2}}{\left|\overline{\mathrm{n}_2}\right|^2}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

化簡上式得(1)：

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}_2}{\left|\overline{\mathrm{n}_2}\right|^2}\left(\left(\alpha\overline{SA}+\beta\overline{SB}+\gamma\overline{SC}\right)-\left(\vec{a}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{b}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{c}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\frac{2}{\left|\overline{n_2}\right|^2}+1\right)^2\right)+\overline{SA}\left(\alpha-\left(\vec{a}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{b}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{c}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\frac{2}{\left|\overline{n_2}\right|^2}+1\right)^2\right)$$

$$+\overline{SB}\left(\beta-\left(\vec{a}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{b}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{c}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\frac{2}{\left|\overline{n_2}\right|^2}+1\right)^2\right)+\overline{SC}\left(\gamma-\left(\vec{a}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{b}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\vec{c}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\frac{2}{\left|\overline{n_2}\right|^2}+1\right)^2\right)=0 \text{ ------ (1)}$$

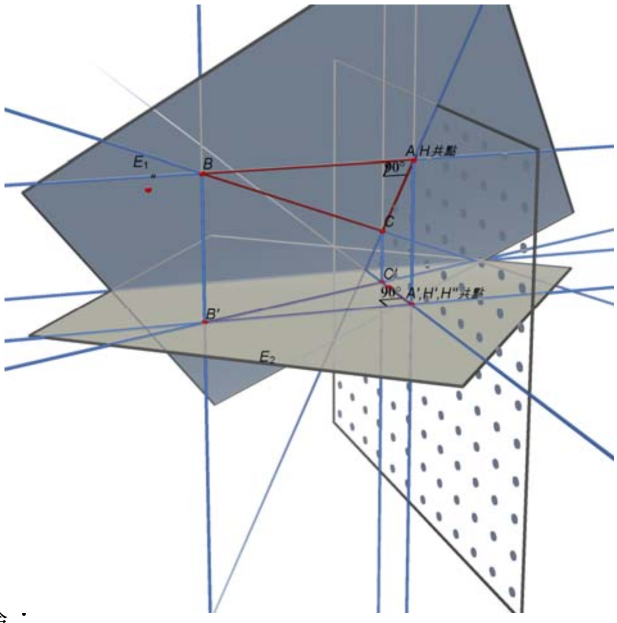
(3)討論：

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 之中有一個 $\perp$ $\overline{n_2}$ ，有一個 // $\overline{n_2}$ 時，(1)式成立。

此時ΔABC和ΔA'B'C' 皆為直角三角形 ，

故投影垂心H'和投影三角形的垂心H"必重合。

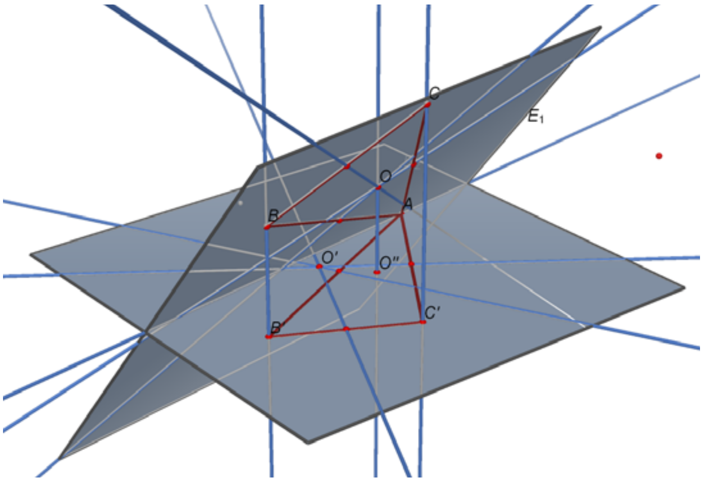
或由簡單的幾何性質亦可找出此解。



(4)結論：

可確定當 ΔABC和ΔA'B'C' 皆為直角三角形時，H 的投影即具有不變性。

3. 外心 O



(1)投影：

在平面 E_1 上給定三點 A, B, C 投影到平面 E_2 分別為 A’, B’, C’

令平面 E_1 上 ΔABC 的外心 O 投影到平面 E_2 為 O’

令 $\Delta A'B'C'$ 的外心為 O”

O’與 O”不重合$\Rightarrow$ O’不是 $\Delta A'B'C'$ 的外心

(2)分析：

令 S 為原點 ，O 為 ΔABC 之外心 ，O" 為 ΔA'B'C' 之外心

由基本性質及應用 2. 可推出 O 投影到平面另一平面的投影點為：

$$\overline{SO'} = \overline{SO} + \frac{-\left(d_2 + \overline{SO}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

再用尤拉線的性質：$\overline{GH} = 2\overline{OG}$

$$\Rightarrow \overline{SG} - \overline{SO} = \frac{1}{2}\left(\overline{SH} - \overline{SG}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{SO} = \frac{1}{2}\left(\overline{SG} - \overline{SH}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}}{3} - \frac{\alpha\overline{SA}+\beta\overline{SB}+\gamma\overline{SC}}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

$$= \frac{\overline{SA}(1-3\alpha)+\overline{SB}(1-3\beta)+\overline{SC}(1-3\gamma)}{6(\alpha+\beta+\gamma)}$$

同理 $\overline{SO'} = \dfrac{\overline{SA'}(1-3\alpha')+\overline{SB'}(1-3\beta')+\overline{SC'}(1-3\gamma')}{6(\alpha'+\beta'+\gamma')}$

當 O’=O’’時，$\overline{SO'} = \overline{SO''}$

$$\Rightarrow \overline{SO'} = \overline{SO} + \frac{-\left(d_2 + \overline{SO}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2} = \frac{\overline{SA'}(1-3\alpha')+\overline{SB'}(1-3\beta')+\overline{SC'}(1-3\gamma')}{6(\alpha'+\beta'+\gamma')} = \overline{SO''}$$

化簡上式得(2)：

$$\overline{SA}(1-3\alpha)+\overline{SB}(1-3\beta)+\overline{SC}(1-3\gamma)$$
$$-\left(3d_2(\alpha+\beta+\gamma)+\left(\overline{SA}(1-3\alpha)+\overline{SB}(1-3\beta)+\overline{SC}(1-3\gamma)\right)\cdot\overline{n_2}\right)\frac{\overline{n_2}}{\left|\overline{n_2}\right|^2}$$
$$=\overline{SA}(1-3\alpha)+\overline{SB}(1-3\beta)+\overline{SC}(1-3\gamma)$$
$$+3\left(\frac{-d_2\overline{n_2}}{\left|\overline{n_2}\right|^2}(1-(\alpha'+\beta'+\gamma'))-(\vec{a}\cdot\overline{n_2})(\vec{b}\cdot\overline{n_2})(\vec{c}\cdot\overline{n_2})\left(\frac{2}{\left|\overline{n_2}\right|^2}+1\right)^2\left(\overline{SA}(\vec{a}\cdot\overline{n_2})+\overline{SB}(\vec{b}\cdot\overline{n_2})+\overline{SC}(\vec{c}\cdot\overline{n_2})\right)\right)$$
$$-----(2)$$

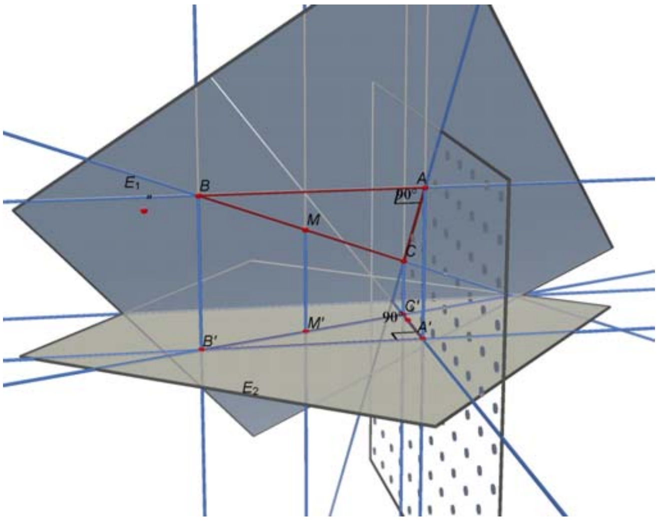
(3)討論：

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 之中有一個 $\perp$ $\overline{n_2}$ ，有一個 // $\overline{n_2}$ 時，(2)式成立。

此時ΔABC和ΔA'B'C' 皆為直角三角形，

故投影外心O'和投影三角形的外心O"必重合。

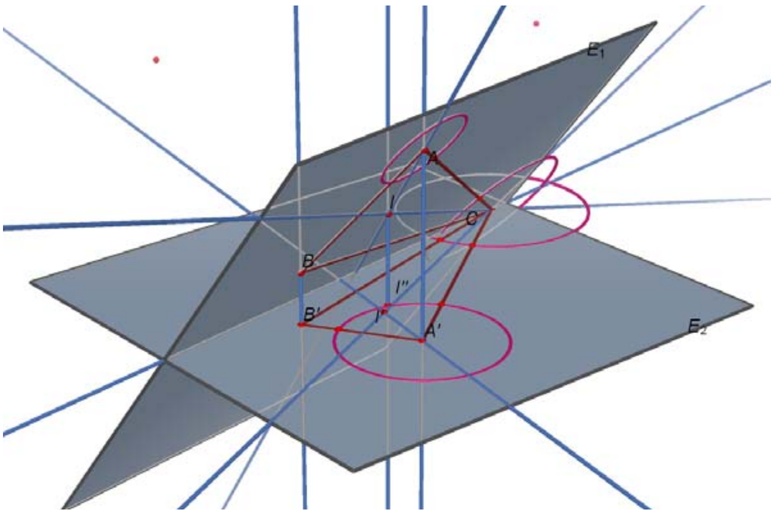
或由簡單的幾何性質亦可找出此解。



(4)結論：

可確定當ΔABC和ΔA'B'C' 皆為直角三角形時，O 的投影即具有不變性。

4. 內心 I



(1)投影：

在平面 E_1 上給定三點 A, B, C 投影到平面 E_2 分別為 A’, B’, C’

令平面 E_1 上 ΔABC 的內心 I 投影到平面 E_2 為 I’

令 $\Delta A'B'C'$ 的內心為 I’’

I’與 I’’不重合$\Rightarrow$ I’不是 $\Delta A'B'C'$ 的內心

(2)分析：

令 S 為原點 ，I 為 ΔABC 之外心 ，I" 為 ΔA'B'C' 之外心

$$\overline{SI}=\frac{a\overline{SA}+b\overline{SB}+c\overline{SC}}{a+b+c} \quad \overline{SI''}=\frac{a'\overline{SA'}+b'\overline{SB'}+c'\overline{SC'}}{a'+b'+c'}$$

由基本性質及應用 2. 可推出 I 投影到平面另一平面的投影點為：

$$\overline{SI'}=\overline{SI}+\frac{-\left(d_2+\overline{SI}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

當 $\overline{SI'}=\overline{SI''}$ 時，$I'=I''$

$$\Rightarrow \overline{SI}+\frac{-\left(d_2+\overline{SI}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

$$=\frac{a\overline{SA}+b\overline{SB}+c\overline{SC}}{a+b+c}+\frac{-\left(d_2+\frac{a\overline{SA}+b\overline{SB}+c\overline{SC}}{a+b+c}\cdot\overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_2}\right|^2}\overline{n_2}$$

$$=\frac{a'\overline{SA'}+b'\overline{SB'}+c'\overline{SC'}}{a'+b'+c'}$$

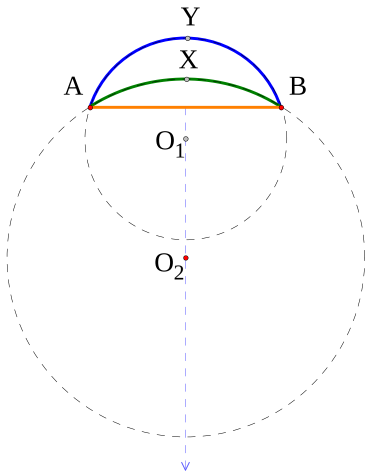
(3)討論：

三條角平分線中，其中一條⊥兩平面的交線,此時I' 和I"在這條角平分線的投影上, 而角平分面垂直於三角形所在的平面，所以I' 和I"必重合。

(4)結論：

無論ΔABC為何種三角形，只要一條角平分線⊥兩平面的交線，I 的投影即具有不變性。

三、球面到平面



(一) 球面上的定義

1. 球面上兩點以平面截之最短距離

(1)說明：球面上兩點的最短距離就是連接這兩點圓弧上的劣弧長，且這圓弧以球心為圓心，就是球面上的大圓。

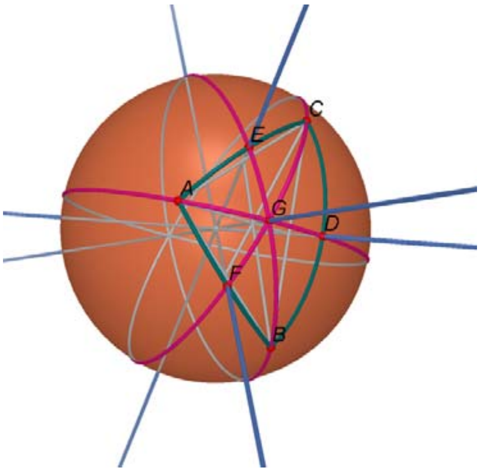
(2)證明：以 O_1, O_2 為圓心，分別作通過 A, B 兩點的劣弧，可得知半徑逐漸增大，其對應的弧長反而愈來愈短，並逐漸趨近於 $\overline{AB}$。也就是說，兩點的弧長中，半徑較大者其弧長會較短。

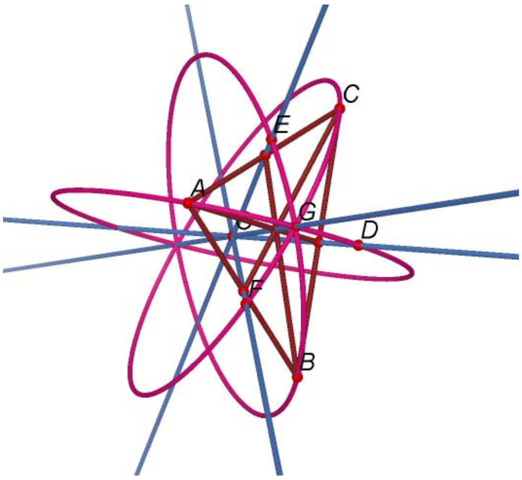
2. 球面三角形

(1)定義：已知球面上的三點，此三點之中任選兩點和球心構成三個平面，在球心可以構成一個小於半球面的三面角。

(二) 球面上四心

1. 重心 G





定義： 球面三角形 ABC 中任兩條中線的交點

性質： 球面三角形三條中線共點

證明： 令 BC 的中點為 D, CA 的中點為 E, AB 的中點為 F

$\because$ 平面 AOD、平面 BOE、平面 COF

三平面都通過球心 O 和平面平面三角形 ABC 的重心

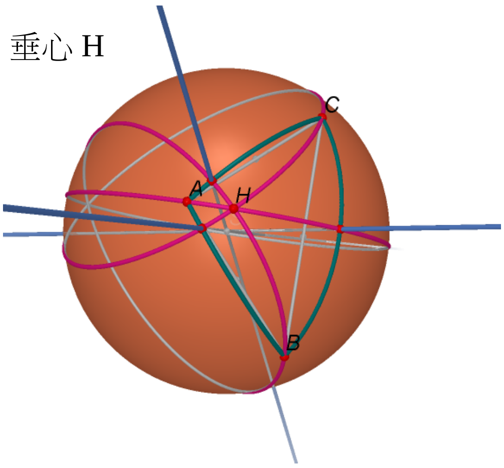
$\therefore$ 三平面共線

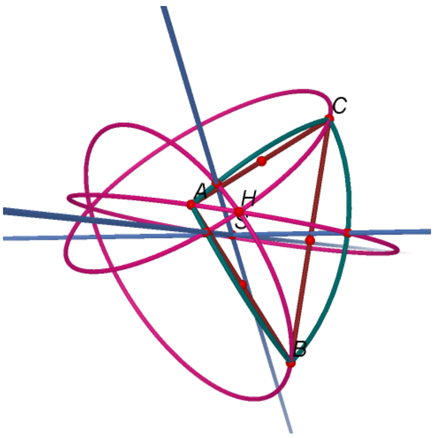
$\therefore$ 三條中弧共點於 G(球面三角形 ABC 的重心)

結論： 平面三角形 ABC 的重心，由球心 O 投影到球面上，即為球面三角形 ABC 的重心 G。

註： 球面三角形的中線為頂點與其所對應的弧的中點在球面上最短距離的軌跡

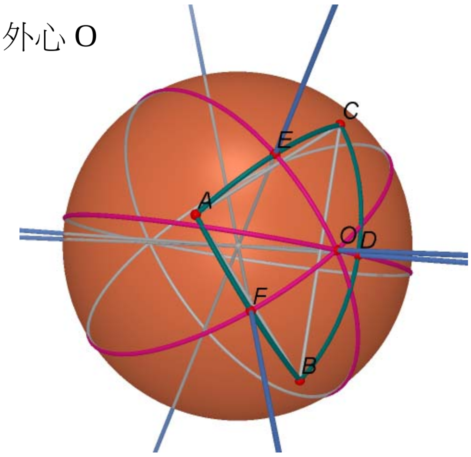
2. 垂心 H

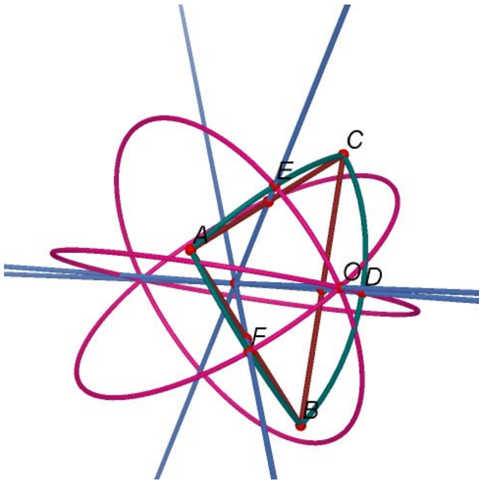




結論： 平面三角形 ABC 的垂心，由球心 O 投影到球面上，即為球面三角形 ABC 的垂心 H。(證明與重心的證明方法相同)

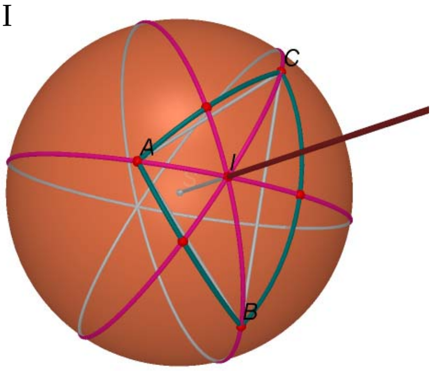
3. 外心 O

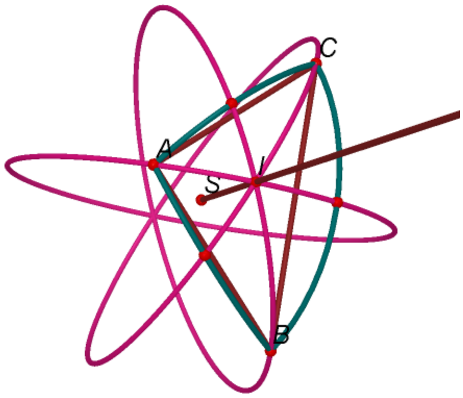




結論： 平面三角形 ABC 的垂心，由球心 O 投影到球面上，即為球面三角形 ABC 的垂心 H。(證明與重心的證明方法相同)

4. 內心 I

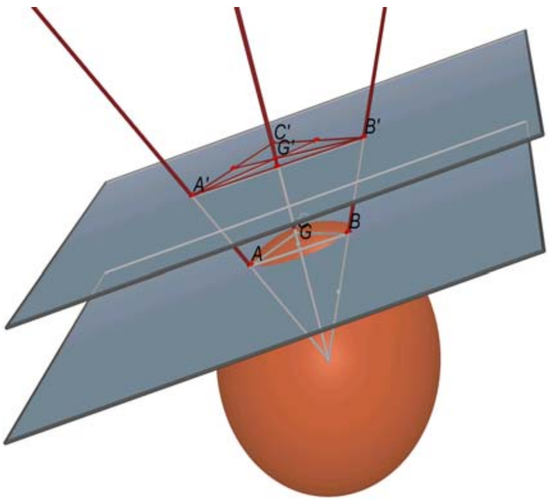




結論： 平面三角形 ABC 的內心，由球心 O 投影到球面上，即為球面三角形 ABC 的內心 I。(證明與重心的證明方法相同)

(二)球面到正平面的投影

1. 重心 G



(1)說明：兩平面平行→ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta ABC$ 的 G

從球心 S 投影為 $\Delta A'B'C'$ 的 G’

(2)證明：∵ E_1 平行 E_2 又 A, B, A’, B’共平面

$\therefore \overline{AB}$ 平行 $\overline{A'B'}$

$\therefore \Delta SAB \sim \Delta SA'B'$ (AA)

$\therefore \overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{SA}:\overline{SA'}$

同理 $\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{SB}:\overline{SB'}$， $\overline{CA}:\overline{C'A'}=\overline{SC}:\overline{SC'}$

又∵ $\Delta SAB \sim \Delta SA'B'$

$\therefore \overline{SA}:\overline{SA'}=\overline{SB}:\overline{SB'}$

同理 $\overline{SB}:\overline{SB'}=\overline{SC}:\overline{SC'}$， $\overline{SC}:\overline{SC'}=\overline{SA}:\overline{SA'}$

$\therefore \overline{SA}:\overline{SA'}=\overline{SB}:\overline{SB'}=\overline{SC}:\overline{SC'}$

$\therefore \overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=\overline{CA}:\overline{C'A'}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (SSS)

令 $\overline{SG}:\overline{SG'}=1:k$ $(=\overline{SA}:\overline{SA'}=\overline{SB}:\overline{SB'}=\overline{SC}:\overline{SC'})$

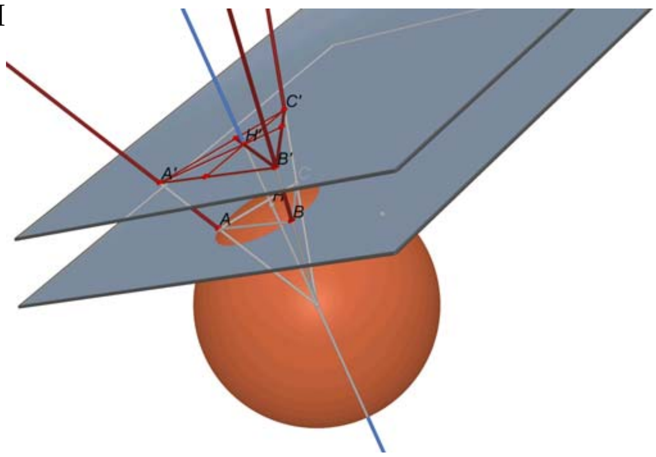
又∵ $\overline{SG}=\frac{1}{3}\overline{SA}+\frac{1}{3}\overline{SB}+\frac{1}{3}\overline{SC}$

$\therefore \overline{SG'}=k\overline{SG}=k(\frac{1}{3}\overline{SA}+\frac{1}{3}\overline{SB}+\frac{1}{3}\overline{SC})$

$=\frac{1}{3}k\overline{SA}+\frac{1}{3}k\overline{SB}+\frac{1}{3}k\overline{SC}=\frac{1}{3}\overline{SA'}+\frac{1}{3}\overline{SB'}+\frac{1}{3}\overline{SC'}$

∴G’ 為 $\Delta A'B'C'$ 的重心

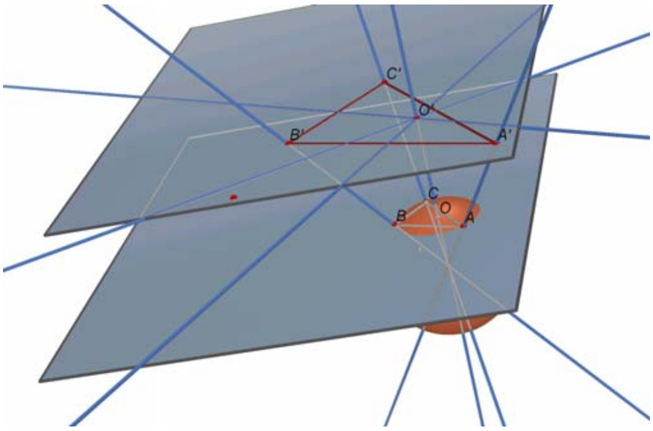
2. 垂心 H



(1)說明：兩平面平行→ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta ABC$ 的 H

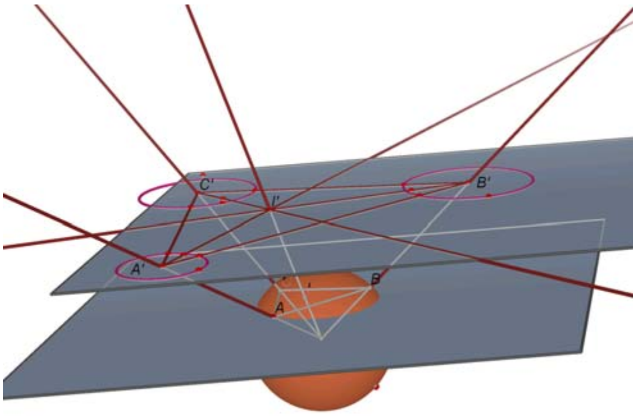
從球心 S 投影為 $\Delta A'B'C'$ 的 H’ (證明同重心 G)

3. 外心 O



(1)說明：兩平面平行→ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ → ΔABC 的 O 從球心 S 投影為 $\Delta A'B'C'$ 的 O’ (證明同重心 G)

4. 內心 I



(1)說明：兩平面平行→ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ → ΔABC 的 I 從球心 S 投影為 $\Delta A'B'C'$ 的 I’ (證明同重心 G)

(三)球面到斜平面的投影

令球面 S：$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, S 為球心

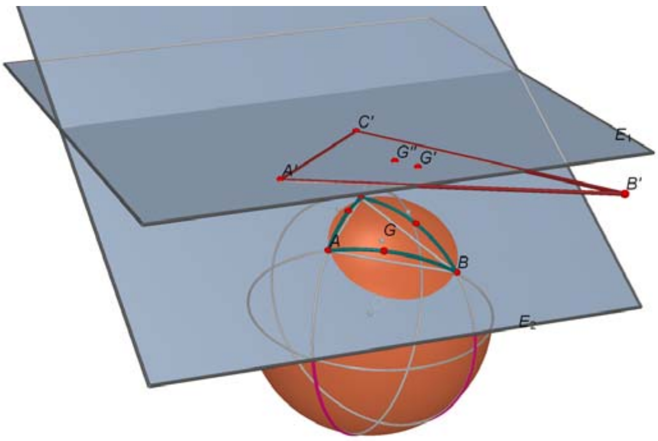
E_1 過球面 S 上三點 A、B、C ，n_1 為其法向量

E_2: $a_2x+ b_2y+ c_2z+ d_2 = 0$ ，n_2 為其法向量

則 $\overline{n_1} = \left(\begin{vmatrix} y_A - y_B & z_A - z_B \\ y_C - y_B & z_C - z_B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_A - z_B & x_A - x_B \\ z_C - z_B & x_C - x_B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix} \right)$

$\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$

1. 重心 G



(1)證明：

由G的性質知 ： $\overline{SG}=\dfrac{\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}}{3}$ ， S為球心

令 G' 為G在 E_2 上的投影點

由基本性質及應用 4.可推得：

$$\overline{SG'}=\frac{-d_2}{\overline{SG}\cdot\overline{n_2}}\overline{SG}=-d_2\frac{\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}}{\left(\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}\right)\cdot\overline{n_2}}$$

同理：

$$\overline{SA'}=\frac{-d_2}{\overline{SA}\cdot\overline{n_2}}\overline{SA},\ \overline{SB'}=\frac{-d_2}{\overline{SB}\cdot\overline{n_2}}\overline{SB},\ \overline{SC'}=\frac{-d_2}{\overline{SC}\cdot\overline{n_2}}\overline{SC}$$

則 $\Delta A'B'C'$ 之重心 G" 和 原點 所形成的 向量$\overline{SG''}$

$$=\frac{-d_2}{3}\left(\frac{\overline{SA}}{\overline{SA}\cdot\overline{n_2}}+\frac{\overline{SB}}{\overline{SB}\cdot\overline{n_2}}+\frac{\overline{SC}}{\overline{SC}\cdot\overline{n_2}}\right)$$

當 $\overline{SG'}=-d_2\dfrac{\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}}{\left(\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}\right)\cdot\overline{n_2}}$

$$=\frac{-d_2}{3}\left(\frac{\overline{SA}}{\overline{SA}\cdot\overline{n_2}}+\frac{\overline{SB}}{\overline{SB}\cdot\overline{n_2}}+\frac{\overline{SC}}{\overline{SC}\cdot\overline{n_2}}\right)=\overline{SG''}$$ 時，

由球心投影 G 點 到平面之 G" 點

和投影三角形之 重心 G' 點 重合

化簡上等式得：

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &\overline{SA}\left(\overline{SB}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\overline{SC}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\left(2\overline{SA}-\overline{SB}-\overline{SC}\right)\cdot\overline{n_2}\right)\\&+\overline{SB}\left(\overline{SA}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\overline{SC}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\left(2\overline{SB}-\overline{SA}-\overline{SC}\right)\cdot\overline{n_2}\right)\\&+\overline{SC}\left(\overline{SA}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\overline{SB}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\left(2\overline{SC}-\overline{SA}-\overline{SB}\right)\cdot\overline{n_2}\right)=0\end{aligned}$$

(2) 討論：

(i) $\left(2\overline{SA}-\overline{SB}-\overline{SC}\right)\cdot\overline{n_2}=\left(2\overline{SB}-\overline{SA}-\overline{SC}\right)\cdot\overline{n_2}$

$=\left(2\overline{SC}-\overline{SA}-\overline{SB}\right)\cdot\overline{n_2}=0$ 時， "=" 成立

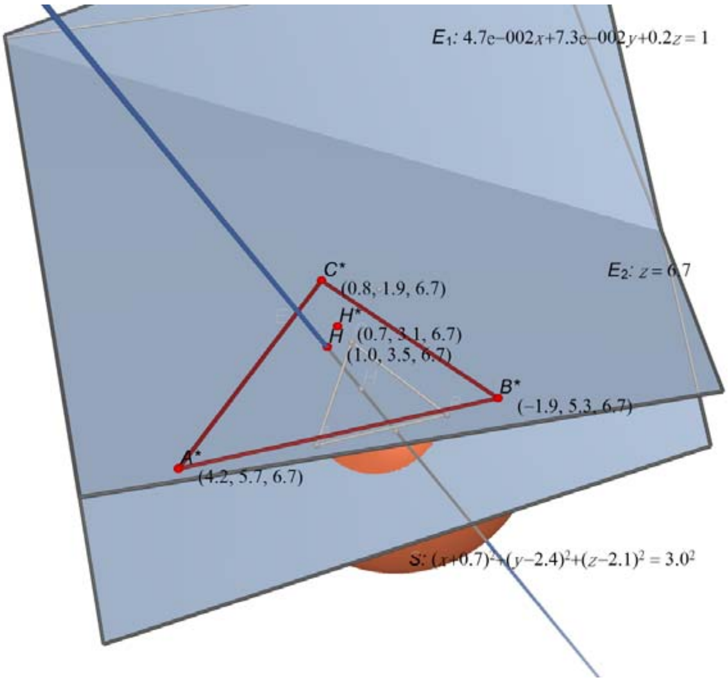
但此時 $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}$ ，無法構成三角形

(ii) $\overline{n_1}=\left(\begin{vmatrix}y_A-y_B & z_A-z_B\\ y_C-y_B & z_C-z_B\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_A-z_B & x_A-x_B\\ z_C-z_B & x_C-x_B\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_A-x_B & y_A-y_B\\ x_C-x_B & y_C-y_B\end{vmatrix}\right)$

$=\overline{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ 時， "=" 成立

此時 $E_1 // E_2$ ，即為正平面之情況

2. 垂心 H



(1)分析：

令 H 為 ΔABC 之垂心

符合 $\overline{AH}\cdot\overline{AB}=\overline{AH}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$

令 H' 為 H 在 E_2 上的投影點

由基本性質及應用 4.可推得：

$$\overline{SH'}=\frac{-d_2}{\overline{SH}\cdot\overline{n_2}}\overline{SH}$$

令 H" 為 $\Delta A'B'C'$ 之垂心

$$\overline{A'H''}\cdot\overline{A'B'}=\overline{A'H''}\cdot\overline{A'C'}=\overline{A'B'}\cdot\overline{A'C'}=\frac{1}{2}\left(b'^2+c'^2-a'^2\right)$$

當 $\overline{A'H'}\cdot\overline{A'B'}=\overline{A'H''}\cdot\overline{A'B'}$ 時 ，$H'=H''$

$$\Rightarrow\left(\overline{A'S}+\overline{SH'}\right)\cdot\overline{A'B'}=\left(\overline{A'S}+\overline{SH''}\right)\cdot\overline{A'B'}=\frac{1}{2}\left(b'^2+c'^2-a'^2\right)$$

(2) 討論：

(i) 當$\overline{A'H'}\cdot\overline{A'B'}=\overline{A'H''}\cdot\overline{A'B'}=\frac{1}{2}\left(b'^2+c'^2-a'^2\right)=0$ 時，

"="成立，

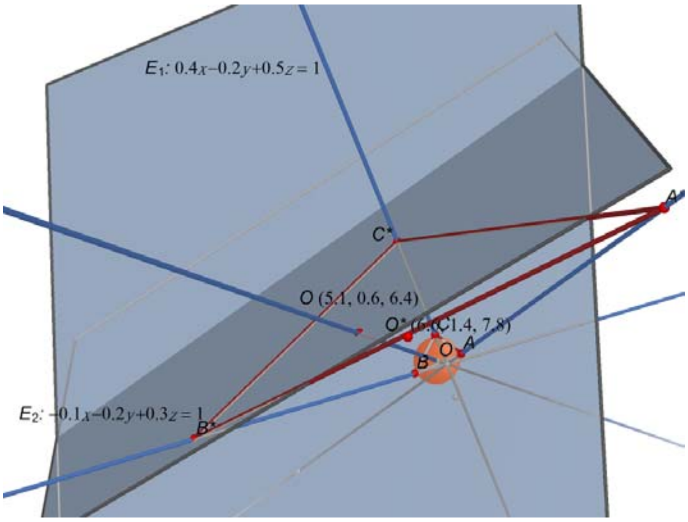
此時 $H'=H''=A'$, B' ,C', 中的一點，$\Delta A'B'C'$ 為直角三角形

(ii) 當 $\overline{n_1}=\left(\begin{vmatrix}y_A-y_B & z_A-z_B\\ y_C-y_B & z_C-z_B\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_A-z_B & x_A-x_B\\ z_C-z_B & x_C-x_B\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_A-x_B & y_A-y_B\\ x_C-x_B & y_C-y_B\end{vmatrix}\right)$

$=\overline{n_2}=(a_2, b_2, c_2)$ 時， "=" 成立

此時 $E_1 // E_2$ ，即為正平面之情況

3. 外心 O



(1)分析：

令 O 為 ΔABC 之外心，符合

$$\overline{AO}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|^2,\ \overline{BO}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|^2,\ \overline{CO}\cdot\overline{CA}=\frac{1}{2}\left|\overline{CA}\right|^2$$

且 O 為 S 到 E_1 的投影點

令 $d(S,E)=\dfrac{|d_2|}{|\overline{n_1}|}$ ，則 $\overline{SO}=\dfrac{|d_2|}{|\overline{n_1}|^2}\overline{n_1}$

令 O’ 為 O 在平面 E_2 的投影點

由基本性質及應用 4. 可推得：

$$\overline{SO'}=\frac{-d_2|\overline{n_1}|^2}{|d_1|\left(\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right)}\frac{|d_1|}{|\overline{n_1}|^2}\overline{n_1}=\frac{-d_2}{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}\overline{n_1}$$

令 O" 為 ΔA'B'C' 之外心

$\overline{SO''}=\overline{SA'}+\overline{A'O''}$

$$\left(\overline{SA'}+\overline{A'O''}\right)\cdot\overline{A'O''}=\overline{SA'}\cdot\overline{A'O''}+\left|\overline{A'O''}\right|^2=\overline{SA'}\cdot\overline{A'O''}+r''^2$$

$$\Rightarrow\left(\overline{SB'}+\overline{B'O''}\right)\cdot\overline{B'O''}=\overline{SB'}\cdot\overline{B'O''}+\left|\overline{B'O''}\right|^2=\overline{SB'}\cdot\overline{B'O''}+r''^2$$

$$\left(\overline{SC'}+\overline{C'O''}\right)\cdot\overline{C'O''}=\overline{SC'}\cdot\overline{C'O''}+\left|\overline{C'O''}\right|^2=\overline{SC'}\cdot\overline{C'O''}+r''^2$$

(2) 討論：

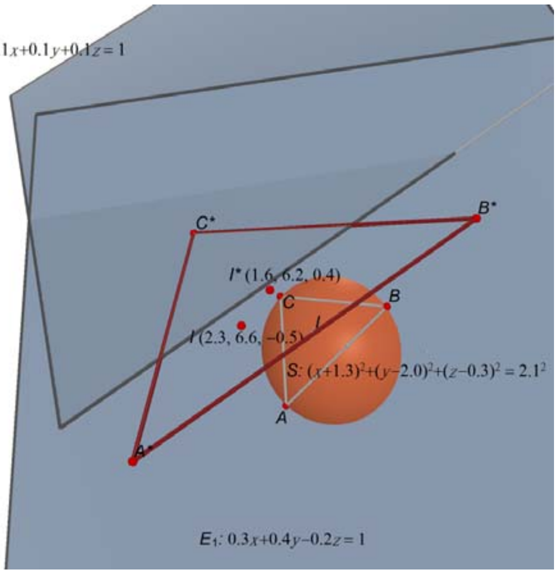
$\overline{SO'}=\overline{SO''}$ 時，O' = O' 之 "=" 成立

(i) $\overline{n_1}=\left(\begin{vmatrix} y_A-y_B & z_A-z_B \\ y_C-y_B & z_C-z_B \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_A-z_B & x_A-x_B \\ z_C-z_B & x_C-x_B \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_A-x_B & y_A-y_B \\ x_C-x_B & y_C-y_B \end{vmatrix}\right)$

$=(a_2,b_2,c_2)=\overline{n_2}$ 時，"=" 成立

但此時 E_1 // E_2 ，即為正平面之情況

4. 內心 I



(1)分析：

令 I 為 ΔABC 之內心 ，　則 $\overline{SI} = \dfrac{a\overline{SA}+b\overline{SB}+c\overline{SC}}{a+b+c}$

令 I' 為 I 在 E_2 上的投影點

由基本性質及應用 4.可推得：

$$\Rightarrow \overline{SI'} = \frac{-d_2}{\overline{SI}\cdot\overline{n_2}}\overline{SI}$$

同理：

$$\overline{SA'} = \frac{-d_2}{\overline{SA}\cdot\overline{n_2}}\overline{SA},\ \overline{SB'} = \frac{-d_2}{\overline{SB}\cdot\overline{n_2}}\overline{SB},\ \overline{SC'} = \frac{-d_2}{\overline{SC}\cdot\overline{n_2}}\overline{SC}$$

令 I'' 為 ΔA'B'C' 之內心 ，　則 $\overline{SI''} = \dfrac{a'\overline{SA'}+b'\overline{SB'}+c'\overline{SC'}}{a'+b'+c'}$

當 $\overline{SI'} = \overline{SI''}$ 時，I' = I''

$$\Rightarrow \frac{a'+b'+c'}{a+b+c}\left(a\overline{SA}+b\overline{SB}+c\overline{SC}\right)$$

$$=\left(\overline{SI}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\frac{a'}{\overline{SA}\cdot\overline{n_2}}\overline{SA}+\frac{b'}{\overline{SB}\cdot\overline{n_2}}\overline{SB}+\frac{c'}{\overline{SC}\cdot\overline{n_2}}\overline{SC}\right)$$

(2) 討論：

(i) 當 a+b+c = a'+b'+c' ，

$a\overline{SA}+b\overline{SB}+c\overline{SC}$

$=\left(\overline{SI}\cdot\overline{n_2}\right)\left(\dfrac{a'}{\overline{SA}\cdot\overline{n_2}}\overline{SA}+\dfrac{b'}{\overline{SB}\cdot\overline{n_2}}\overline{SB}+\dfrac{c'}{\overline{SC}\cdot\overline{n_2}}\overline{SC}\right)$時

"=" 成立， 但是 A , B , C , 共點 ，無法構成三角形

(ii) 當$\overline{SI}\cdot\overline{n_2} = \overline{SA}\cdot\overline{n_2} = \overline{SB}\cdot\overline{n_2} = \overline{SC}\cdot\overline{n_2}$ 時， "=" 成立

但此時，A , B , C , 共點 ，也無法構成三角形

(iii) 當 $\overline{n_1} = \left(\begin{vmatrix} y_A - y_B & z_A - z_B \\ y_C - y_B & z_C - z_B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_A - z_B & x_A - x_B \\ z_C - z_B & x_C - x_B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix} \right)$

$= \overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ 時， "=" 成立

此時 $E_1 = E_2$ ，即為正平面之情況

四、圓柱

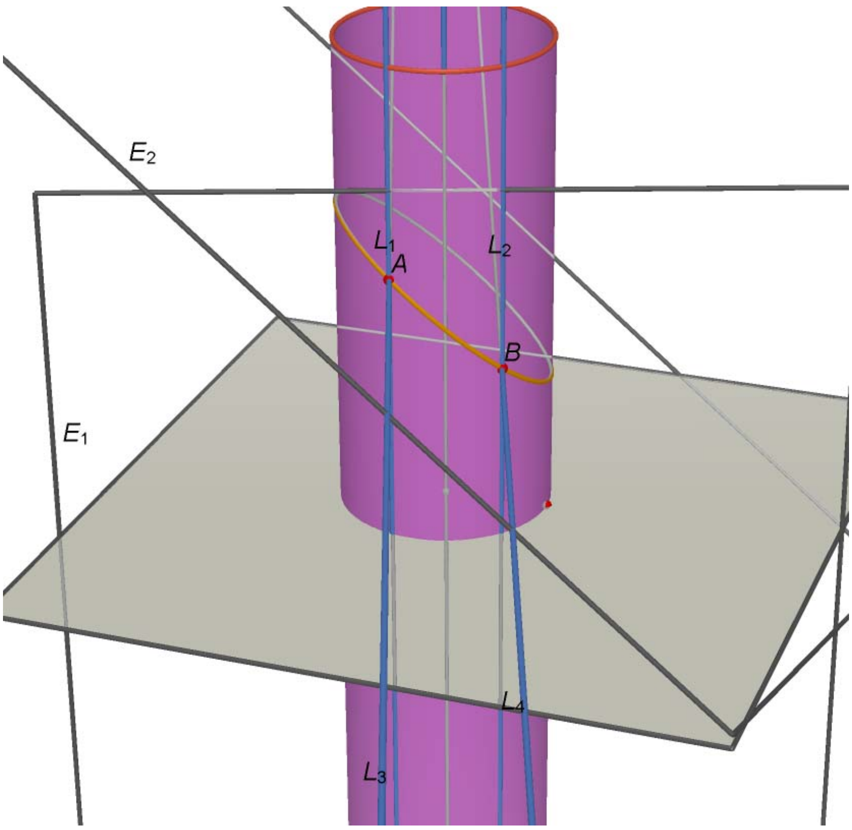
(一) 圓柱上的定義與性質

平面和圓柱的截痕有以下兩種情況。當截平面不平行軸時，其截痕為橢圓；而當截平面平行於軸時，其截痕為平行於軸的直線。我們嘗試了下列通過圓柱面上 A, B 兩點的平面截取方式，得到通過 A, B 兩點的橢圓弧截線，由此定義出 A, B 兩點在圓柱上的連線。透過這種連線定義方式，發現了一些有趣的性質。

1. 圓柱上兩點的連線

(1)說明：已知圓柱上的兩點，必能找到一包含軸的平面，使此兩點在平面的同一側(不討論一點在另一點與軸所構成的平面上且兩點構成的直線不平行於軸的情況)。

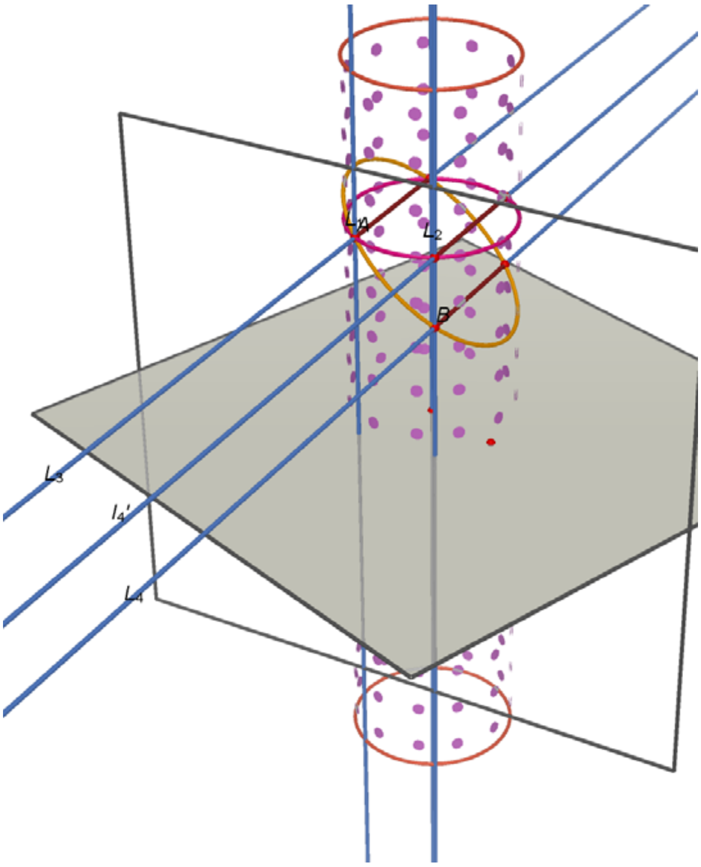
(2)作法：已知圓柱上兩點，分別通過圓柱上兩點平行軸做兩條直線 L_1, L_2，過直線 L_1, L_2 做一平面 E_1，分別通過圓柱上兩點並垂直平面 E_1 做兩條直線 L_3, L_4，過直線 L_3, L_4 做一平面 E_2，此平面與圓柱所截的軌跡為橢圓，此軌跡即為圓柱上兩點的連線。



(3)對稱性：

圓柱上給定兩點，會對稱於此兩點在圓柱的連線所在的橢圓的短軸。

證明：



延續前面的假設，作平行直線 L_4 的直線 L_4'，使 L_4'在包含 L_3 且與圓柱的截痕為圓的平面上，而且 L_4'與 L_2 相交。令直線 L_3, L_4, L_4'分別與圓柱交於 A, A', B, B', C, C'。顯而易見，$\overline{AA'}=\overline{CC'}$ 且 $\overline{BB'}=\overline{CC'}$, $\therefore \overline{AA'}=\overline{BB'}$-------(1)

$\overline{AB}$ 在平面 E_2 上, $\overline{AA'}$ 在直線 L_3 上, $\overline{BB'}$ 在直線 L_4 上，

又 $L_3 \perp E_2 \wedge L_4 \perp E_2$, $\therefore \overline{AA'} \perp \overline{AB} \wedge \overline{BB'} \perp \overline{AB}$------(2)

綜合以上(1)(2)，得 AA'B'B 為平面 E_2 截圓柱的橢圓上的一內接矩形，故 A, B 會對稱於橢圓的短軸。

(4)對稱性的應用：

利用對稱性找出橢圓所在的平面

不失一般性，可假設

圓柱： $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$, R>0

圓柱上兩點 $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$ 且 $z_1 \neq z_2$

AB 的中點 M 為 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$

令橢圓的中心 O 為(0,0,k)

$\because \overline{OM} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{OM} \cdot \overline{AB} = 0$

$\Rightarrow (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}) \cdot (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = 0$

$\Rightarrow \frac{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}}{2} + \frac{y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2}}{2} + \frac{z_2^{\ 2}-z_1^{\ 2}}{2} - (z_2-z_1)k = 0$

又$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2} = \mathrm{R}^2, x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2} = \mathrm{R}^2$

$\Rightarrow \frac{z_2^{\ 2}-z_1^{\ 2}}{2} - (z_2-z_1)k = 0$

$\Rightarrow (z_2-z_1)(\frac{z_1+z_2}{2} - k) = 0$

$\Rightarrow k = \frac{z_1+z_2}{2}$

橢圓所在的平面為

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), O(0, 0, \frac{z_1+z_2}{2})$ 所構成的平面

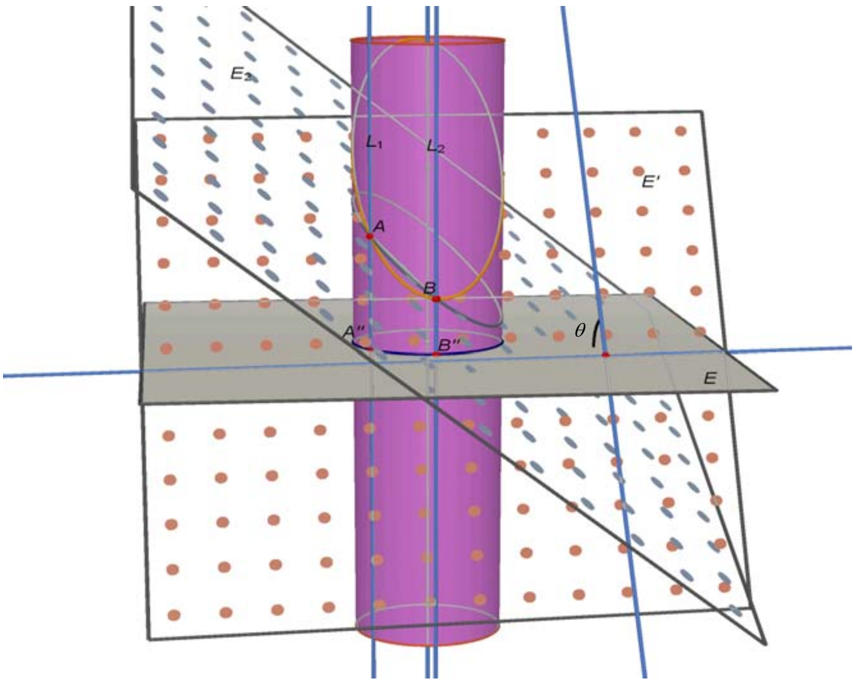
(5)性質：

平面E' (即圓柱上的連線)，會是所有通過 A, B 兩點的平面中，與平面 E 的夾角最小的。(平面E'和平面 E 的定義，見後面的證明)

延續前面的假設。已知圓柱： $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$, R>0

圓柱上兩點$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$且$z_1 \neq z_2$。作一平面$E \perp$圓柱的軸。

假設圓柱的軸上有一動點$P(0,0,t)$且平面E'通過 A, B, P 三點，令平面E'與平面E所夾的銳角為θ。欲找出θ的最小值，相當於找出$\cos\theta$的最大值。



平面E的法向量=(0,0,1)

平面E'的法向量$=\overline{PA}\times\overline{PB}=(x_1,y_1,\ z_1-t)\times(x_2,y_2,\ z_2-t)$

$=(\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t),\ x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t),\ x_1y_2-x_2y_1\ )$

$$\cos\theta=\frac{(0,0,1)\cdot(\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t),\ x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t),\ x_1y_2-x_2y_1\ )}{\sqrt{((\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t))^2+(x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t))^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}$$

$$=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{((\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t))^2+(x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t))^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}$$

欲求得$\cos\theta$的最大值，只需求得

$((\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t))^2+(x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t))^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$之最小值

$$\begin{aligned}
&((\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t))^2+(x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t))^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\
&=((x_1\text{-}x_2)^2+(y_1\text{-}y_2)^2)t^2\text{-}2((y_1^{\ 2}z_2+y_2^{\ 2}z_1+x_1^{\ 2}z_2+y_2^{\ 2}z_1)\text{-}(x_1x_2+y_1y_2)(z_1+z_2))t\\
&\quad+(y_1z_2\text{-}y_2z_1)^2+(x_1z_2\text{-}x_2z_1)^2+(x_1y_2\text{-}x_2y_1)^2\\
&=((x_1\text{-}x_2)^2+(y_1\text{-}y_2)^2)(t\text{-}\frac{(z_1+z_2)(R^2\text{-}x_1x_2\text{-}y_1y_2)}{2(R^2\text{-}x_1x_2\text{-}y_1y_2)})^2\\
&\quad\text{-}(\frac{(z_1+z_2)(R^2\text{-}x_1x_2\text{-}y_1y_2)}{2(R^2\text{-}x_1x_2\text{-}y_1y_2)})^2((x_1\text{-}x_2)^2+(y_1\text{-}y_2)^2)\\
&\quad+(y_1z_2\text{-}y_2z_1)^2+(x_1z_2\text{-}x_2z_1)^2+(x_1y_2\text{-}x_2y_1)^2\\
&=((x_1\text{-}x_2)^2+(y_1\text{-}y_2)^2)\ (t\ \text{-}\ \frac{z_1+z_2}{2})^2\ \text{-}\ (\frac{z_1+z_2}{2})^2((x_1\text{-}x_2)^2+(y_1\text{-}y_2)^2)\\
&\quad+(y_1z_2\text{-}y_2z_1)^2+(x_1z_2\text{-}x_2z_1)^2+(x_1y_2\text{-}x_2y_1)^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow((\ y_1(z_2-t)-y_2(z_1-t))^2+(x_2(z_1-t)-x_1(z_2-t))^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$

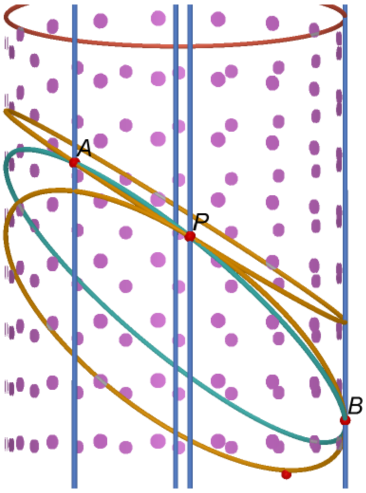
之最小值成立於　$t=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

$\Rightarrow$此時 $P(0,0,\dfrac{z_1+z_2}{2})$即為(4)中推導出之$O(0,0,\dfrac{z_1+z_2}{2})$

2. 圓柱上兩點的最短距離無法由一平面截出

(1)證明：

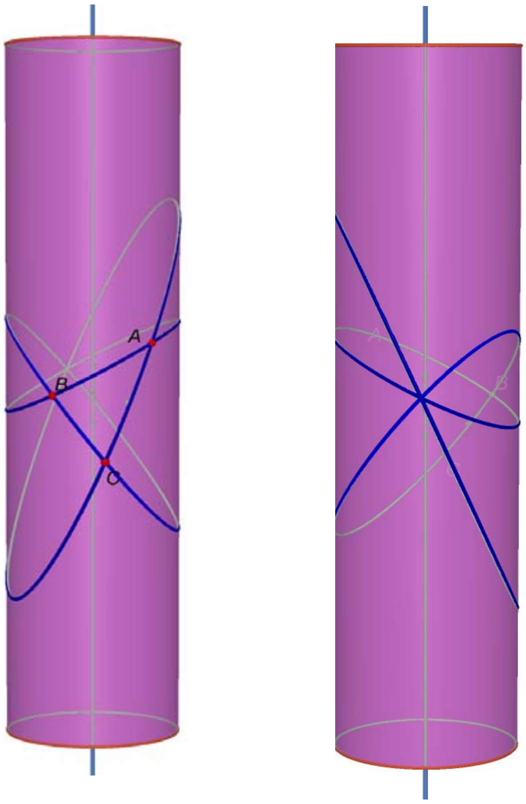
若上述方法可截出兩點在圓柱上的最短距離，任取圓柱上兩點 A、B 及由此方法截出的AB上一點 P，則有$AB=AP+PB$的關係。但實際上，AB 、 AP及PB分別在三個不同的橢圓上，且$AB>AP+PB$故無法由同一平面截出最短距離。



3. 圓柱三角形

(1)定義：已知圓柱上的三個點，能找到一包含軸的平面，使此三點分在平面的同一側。

(2)性質：圓柱上三點 A, B, C 兩兩在圓柱上的連線，在背面交於一點。



證明：

假設 $A(r,0,0),\quad B(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1, z_1),\quad C(r\cos\theta_2, r\sin\theta_2, z_2)$

其中 $r>0,\quad 0<\theta_1<\theta_2<\pi$

利用圓柱對稱性的應用，可得

E_{AB} 通過 $A(r,0,0),\quad B(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1, z_1),\quad O_{AB}(0,0,\frac{z_1}{2})$

E_{AC} 通過 $A(r,0,0),\quad C(r\cos\theta_2, r\sin\theta_2, z_2),\quad O_{AC}(0,0,\frac{z_2}{2})$

E_{BC} 通過 $B(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1, z_1)$, $C(r\cos\theta_2, r\sin\theta_2, z_2)$, $O_{BC}(0,0,\frac{z_1+z_2}{2})$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{AB}: (\frac{z_1}{2}\sin\theta_1)x - \frac{z_1}{2}(1+\cos\theta_1)y + (r\sin\theta_1)z = \frac{(r\sin\theta_1)z_1}{2} \\ E_{AC}: (\frac{z_2}{2}\sin\theta_2)x - \frac{z_2}{2}(1+\cos\theta_2)y + (r\sin\theta_2)z = \frac{(r\sin\theta_2)z_2}{2} \\ E_{BC}: (\frac{z_2-z_1}{2})(\sin\theta_1+\sin\theta_2)x - (\frac{z_2-z_1}{2})(\cos\theta_1+\cos\theta_2)y + r\sin(\theta_2-\theta_1)z = (\frac{z_1+z_2}{2})r\sin(\theta_2-\theta_1) \end{cases}$$

利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$,

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})\cos(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}),$$

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})\cos(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}),$$

$$\sin(\theta_2-\theta_1) = 2\sin(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})\cos(\frac{\theta_1-\theta_2}{2})$$

令 $t_1 = \frac{\theta_1}{2}$, $t_2 = \frac{\theta_2}{2}$, $\Delta z = z_2 - z_1$ 其中 $0 < t_1 < t_2 < \frac{\pi}{2}$

化簡得

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{AB}: (z_1\sin t_1)x - (z_1\cos t_1)y + (2r\sin t_1)z = rz_1\sin t_1 \\ E_{AC}: (z_2\sin t_2)x - (z_2\cos t_2)y + (2r\sin t_2)z = rz_2\sin t_2 \\ E_{BC}: \Delta z\sin(t_1+t_2)x - \Delta z\cos(t_1+t_2)y + 2r\sin(t_2-t_1)z = r(z_1+z_2)\sin(t_2-t_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = -2r\begin{vmatrix} z_1\sin t_1 & z_1\cos t_1 & \sin t_1 \\ z_2\sin t_2 & z_2\cos t_2 & \sin t_2 \\ (z_2-z_1)\sin(t_1+t_2) & (z_2-z_1)\cos(t_1+t_2) & \sin(t_2-t_1) \end{vmatrix}$$

(用第三行降階)

$$= -2r\left\{\sin t_1\cdot z_2(z_2-z_1)\sin(-t_1) - \sin t_2\cdot z_1(z_2-z_1)\sin(-t_2) + \sin(t_2-t_1)z_1z_2\sin(t_1-t_2)\right\}$$

$$= -2r\left\{z_1z_2(\sin^2 t_1 + \sin^2 t_2 - \sin^2(t_1-t_2)) - (z_2{}^2\sin^2 t_1 + z_1{}^2\sin^2 t_2)\right\}$$

$$= -2r\left\{z_1z_2(s_1{}^2 + s_2{}^2 - (s_1c_2 - c_1s_2)^2) - (z_2{}^2 s_1{}^2 + z_1{}^2 s_2{}^2)\right\}$$

$$= -2r\left\{z_1z_2(s_1{}^2 + s_2{}^2 - s_1{}^2c_2{}^2 - c_1{}^2s_2{}^2 + 2s_1s_2c_1c_2) - (z_2{}^2 s_1{}^2 + z_1{}^2 s_2{}^2)\right\}$$

$$= -2r\left\{z_1z_2(s_1{}^2 s_2{}^2 + s_2{}^2 s_1{}^2 + 2 s_1 s_2 c_1c_2) - (z_2{}^2 s_1{}^2 + z_1{}^2 s_2{}^2)\right\}$$

$$= 2r\left\{z_2{}^2 s_1{}^2 + z_1{}^2 s_2{}^2 - 2z_1z_2 s_1{}^2 s_2{}^2 - 2z_1z_2 s_1 s_2 c_1c_2\right\}$$

$$= 2r\left\{z_2{}^2 s_1{}^2 + z_1{}^2 s_2{}^2 - 2z_1z_2 s_1 s_2 + 2z_1z_2 s_1 s_2 - 2z_1z_2 s_1 s_2 (c_1c_2 + s_1 s_2)\right\}$$

$$= 2r\left\{(z_2 s_1 - z_1 s_2)^2 + 2z_1z_2 s_1 s_2 (1-\cos(t_2 - t_1))\right\}$$

$$> 0 \quad (\because 0 < t_1 < t_2 < \frac{\pi}{2})$$

$\Delta > 0$代表三平面交於一點

小結：$\dfrac{\Delta}{2r} = z_1{}^2 s_2{}^2 + z_2{}^2 s_1{}^2 - 2z_1z_2 s_1 s_2 (s_1 s_2 + c_1c_2)$ ……………………………………(1)

利用 Cramer's Law

欲證：此三平面的交點在圓柱上，即$(\dfrac{\Delta_x}{\Delta})^2 + (\dfrac{\Delta_y}{\Delta})^2 = r^2$

$$\frac{\Delta_x}{2r^2} = \begin{vmatrix} z_1 \sin t_1 & -z_1 \cos t_1 & \sin t_1 \\ z_2 \sin t_2 & -z_2 \cos t_2 & \sin t_2 \\ (z_1 + z_2)\sin(t_2 - t_1) & -\Delta z \cos(t_1 + t_2) & \sin(t_2 - t_1) \end{vmatrix} \qquad (\text{ 用第二行降階 })$$

$$= z_1 \cos t_1 (-z_1) \sin t_2 \sin(t_2 - t_1) - z_2 \cos t_2 (-z_2) \sin t_1 \sin(t_2 - t_1) + \Delta z \cos(t_1 + t_2)(-\Delta z) \sin t_1 \sin t_2$$

利用和角公式，即

$\sin(t_2 - t_1) = \sin t_2 \cos t_1 - \cos t_2 \sin t_1, \quad \cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_x}{2r^2} = (-z_1{}^2)(s_2{}^2 c_1{}^2 - c_1c_2s_1s_2) + z_2{}^2(c_1c_2s_1s_2 - s_1{}^2 c_2{}^2) - (z_2 - z_1)^2(c_1c_2s_1s_2 - s_1{}^2 s_2{}^2)$$

$$= z_1{}^2 s_1{}^2 s_2{}^2 - z_1{}^2 s_2{}^2 c_1{}^2 + z_2{}^2 s_1{}^2 s_2{}^2 - z_2{}^2 s_1{}^2 c_2{}^2 + 2z_1z_2(c_1c_2s_1s_2 - s_1{}^2 s_2{}^2)$$

$$= (\Delta z)^2 s_1{}^2 s_2{}^2 - (z_2 s_1 c_2 - z_1 s_2 c_1)^2$$

小結：$\dfrac{\Delta_x}{2r^2} = (\Delta z)^2 s_1{}^2 s_2{}^2 - (z_2 s_1 c_2 - z_1 s_2 c_1)^2$ ………………………………………(2)

$$\frac{\Delta_y}{2r^2}=\begin{vmatrix} z_1\sin t_1 & z_1\sin t_1 & \sin t_1 \\ z_2\sin t_2 & z_2\sin t_2 & \sin t_2 \\ \Delta z\sin(t_1+t_2) & (z_1+z_2)\sin(t_2-t_1) & \sin(t_2-t_1)\end{vmatrix}\qquad \text{（用第一行降階）}$$

$$=z_1\sin t_1(-z_1)\sin t_2\sin(t_2-t_1)-z_2\sin t_2(-z_2)\sin t_1\sin(t_2-t_1)+\Delta z\sin(t_1+t_2)(-\Delta z)\sin t_1\sin t_2$$

$$=\sin t_1\sin t_2\left\{(z_2{}^2-z_1{}^2)\sin(t_2-t_1)-(z_2{}^2-z_1{}^2)\sin(t_1+t_2)\right\}$$

利用和角公式，即

$\sin(t_2-t_1)=\sin t_2\cos t_1-\cos t_2\sin t_1$, $\sin(t_1+t_2)=\sin t_1\cos t_2+\cos t_1\sin t_2$

$$\Rightarrow\frac{\Delta_y}{2r^2}=\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\left\{-2\mathrm{s}_1\,c_2z_2{}^2-2\mathrm{s}_2\,c_1z_1{}^2+2z_1z_2(\mathrm{s}_1\,c_2+\mathrm{s}_2\,c_1)\right\}$$

$$=\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\left\{2\mathrm{s}_1\,c_2z_2(z_1-z_2)+2\mathrm{s}_2\,c_1z_1(z_2-z_1)\right\}$$

$$=2\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\,\Delta z\left\{\mathrm{s}_2\,c_1z_1-\mathrm{s}_1\,c_2z_2\right\}$$

小結：$\dfrac{\Delta_y}{2r^2}=2\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\,\Delta z\left\{\mathrm{s}_2\,c_1z_1-\mathrm{s}_1\,c_2z_2\right\}$ ……………………………………………(3)

$$(\frac{\Delta_x}{2r^2})^2+(\frac{\Delta_y}{2r^2})^2=((\Delta z)^2\,\mathrm{s}_1{}^2\,\mathrm{s}_2{}^2-(z_2\,\mathrm{s}_1\,c_2-z_1\,\mathrm{s}_2\,c_1)^2)^2+(2\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\,\Delta z(\mathrm{s}_2\,c_1z_1-\mathrm{s}_1\,c_2z_2))^2$$

$$=((\Delta z\,\mathrm{s}_1\,s_2)^2-(z_2\,\mathrm{s}_1\,c_2-z_1\,\mathrm{s}_2\,c_1)^2)^2+(2(\Delta z\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2)(z_2\,\mathrm{s}_1\,c_2-z_1\,\mathrm{s}_2\,c_1))^2$$

$$=((\Delta z\,\mathrm{s}_1\,s_2)^2+(z_2\,\mathrm{s}_1\,c_2-z_1\,\mathrm{s}_2\,c_1)^2)^2$$

$$=((z_1{}^2+z_2{}^2-2z_1z_2)\mathrm{s}_1{}^2\,s_2{}^2+(z_1{}^2\,\mathrm{s}_2{}^2\,c_1{}^2+z_2{}^2\,\mathrm{s}_1{}^2\,c_2{}^2-2z_1z_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\,c_1c_2))^2$$

$$=(z_1{}^2\,\mathrm{s}_2{}^2+z_2{}^2\,\mathrm{s}_1{}^2-2z_1z_2\,\mathrm{s}_1{}^2\,s_2{}^2-2z_1z_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\,c_1c_2)^2$$

$$=(z_1{}^2\,\mathrm{s}_2{}^2+z_2{}^2\,\mathrm{s}_1{}^2-2z_1z_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2(\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2+c_1c_2))^2=(\frac{\Delta}{2r})^2$$

$$\Rightarrow(\frac{\Delta_x}{2r^2})^2+(\frac{\Delta_y}{2r^2})^2=(\frac{\Delta}{2r})^2\qquad\Rightarrow(\frac{\Delta_x}{\Delta})^2+(\frac{\Delta_y}{\Delta})^2=r^2\quad\text{得證}$$

順便把 Δ_z 也算出來

$$\frac{\Delta_z}{z_1z_2r}=\begin{vmatrix} \sin t_1 & -\cos t_1 & \sin t_1 \\ \sin t_2 & -\cos t_2 & \sin t_2 \\ \Delta z\sin(t_1+t_2) & -\Delta z\cos(t_1+t_2) & (z_1+z_2)\sin(t_2-t_1)\end{vmatrix}$$

(第一行 $\times(-1)$ 加到 第三行)

$$=\begin{vmatrix} s_1 & -c_1 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ \Delta z\sin(t_1+t_2) & -\Delta z\cos(t_1+t_2) & z_1(2s_2c_1)-z_2(2s_1c_2) \end{vmatrix}$$

$$=2(z_1s_2c_1-z_2s_1c_2)(s_2c_1-s_1c_2)$$

$$=z_1s_2^{\,2}(1-s_1^{\,2})+z_2s_1^{\,2}(1-s_2^{\,2})-(z_1+z_2)s_1s_2c_1c_2$$

$$=z_1s_2^{\,2}+z_2s_1^{\,2}-(z_1+z_2)s_1^{\,2}s_2^{\,2}-(z_1+z_2)s_1s_2c_1c_2$$

討論：

當 $z_1=z_2$

(1) $$\frac{\frac{\Delta_z}{z_1z_2r}}{\frac{\Delta}{2r}}=\frac{z_1s_2^{\,2}+z_2s_1^{\,2}-(z_1+z_2)s_1^{\,2}s_2^{\,2}-(z_1+z_2)s_1s_2c_1c_2}{z_1^{\,2}s_2^{\,2}+z_2^{\,2}s_1^{\,2}-2z_1z_2s_1s_2(s_1s_2+c_1c_2)}$$

$$=\frac{z_1(s_2^{\,2}+s_1^{\,2}-2(s_1^{\,2}s_2^{\,2}+s_1s_2c_1c_2))}{z_1^{\,2}(s_2^{\,2}+s_1^{\,2}-2s_1s_2(s_1s_2+c_1c_2))}=\frac{2}{z_1}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{\Delta_z}{z_1z_2r}}{\frac{\Delta}{2r}}=\frac{2}{z_1}\qquad\Rightarrow\frac{\Delta_z}{\Delta}=z_1$$ 符合預期

(2) $$\frac{\Delta}{2r}=z_1^{\,2}s_2^{\,2}+z_2^{\,2}s_1^{\,2}-2z_1z_2s_1s_2(s_1s_2+c_1c_2)$$

$$=z_1^{\,2}(s_2^{\,2}+s_1^{\,2}-2s_1^{\,2}s_2^{\,2}-2s_1s_2c_1c_2)$$

$$=z_1^{\,2}(s_2^{\,2}(1-s_1^{\,2})+s_1^{\,2}(1-s_2^{\,2})-2s_1s_2c_1c_2)$$

$$=z_1^{\,2}(s_2^{\,2}c_1^{\,2}+s_1^{\,2}c_2^{\,2}-2s_1s_2c_1c_2)$$

$$=z_1^{\,2}(s_1c_2-s_2c_1)^2$$

$$=z_1^{\,2}\sin^2(t_1-t_2)$$

備註：$\sin t_1$, $\sin t_2$, $\cos t_1$, $\cos t_2$ 簡記為 s_1, s_2, c_1, c_2

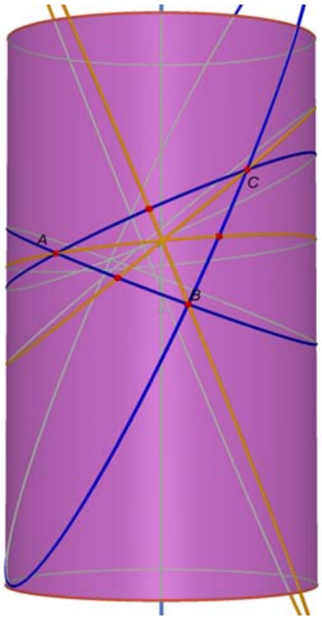
(二)圓柱上的四心

1. 重心 G

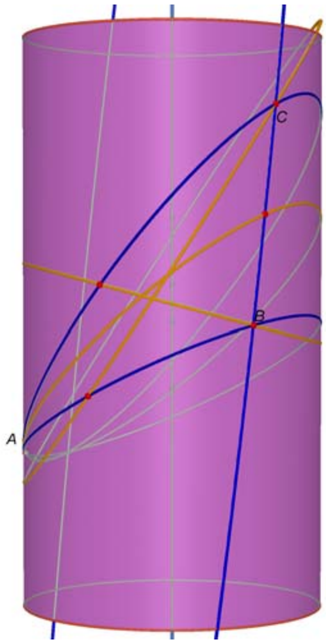
(1)作法：已知圓柱上符合圓柱三角形定義的三點 A, B, C，分別通過任兩點作圓柱上的連線，得到圓柱三角形 ABC。由於 B, C 兩點對 B, C 連線上的橢圓的短軸有對稱性，故可找到 BC 的中點 A’，作 A, A’圓柱上的連線，稱此為圓柱三角形 ABC 通過 A 的中線。

(2)性質：三條中線不一定會在圓柱上交於一點。

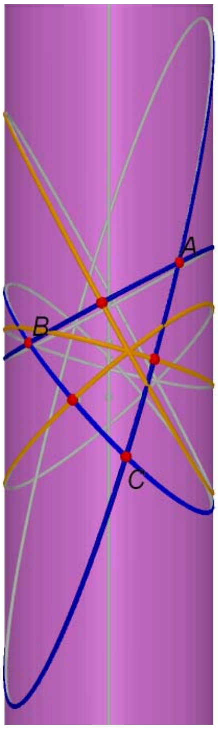
交於一點的情況：



不交於一點的情況：



2. 外心 O



(1)作法：已知圓柱上符合圓柱三角形定義的三點 A, B, C，分別通過任兩點作圓柱上的連線，得到圓柱三角形 ABC。由於 B, C 兩點對 B, C 連線上的橢圓的短軸有對稱性，故可找到包含此短軸且垂直於此橢圓的平面，作出此平面的與圓柱的交線，稱為 B, C 在圓柱上的中垂線。以相同的方法作出另外兩條中垂線，任兩條中垂線的交點即為外心 O。

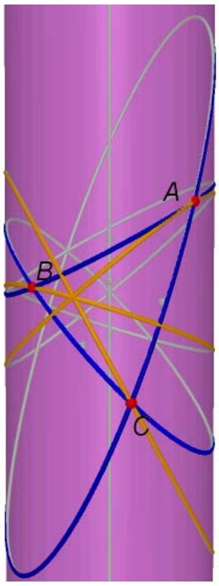
(2)性質：三條中垂線會在圓柱上交於一點。

(3)證明：由於 B, C 兩點對 B, C 連線上的橢圓的短軸有對稱性，所以 B, C 在圓柱上的中垂線所在的平面，即為 B, C 的中垂面；同理，A, B 在圓柱上的中垂線所在的平

面，即為 C, A 的中垂面，B, C 在圓柱上的中垂線所在的平面，即為 C, A 的中垂面。此三張平面均垂直平面三角形 ABC 所在的平面，又同時通過平面三角形 ABC 的外心，所以三張中垂面交於一線，此線與圓柱三角形 ABC 內部的交點即為圓柱三角形 ABC 的外心 O。

3. 垂心 H

(1)作法：已知圓柱上符合圓柱三角形定義的三點 A, B, C，分別通過任兩點作圓柱上的連線，得到圓柱三角形 ABC。平行 B, C 在圓柱上的中垂線所在的平面，並通過 A，作一平面，作出此平面與圓柱的交線，稱為圓柱三角形 ABC 過 A 的高。以相同的方法作出另外兩條高，任兩條高的交點即為垂心 H。

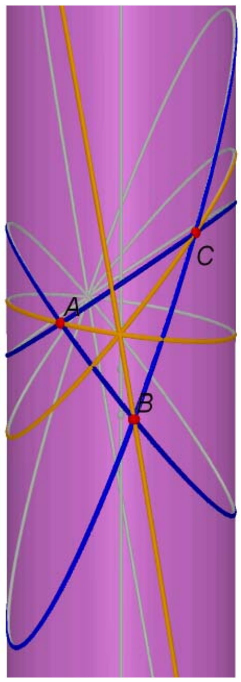


(2)性質：三條中線會在圓柱上交於一點。

(3)證明：通過三條高的三張平面均垂直平面三角形 ABC 所在的平面，又同時通過平面三角形 ABC 的垂心，所以三張平面交於一線，此線與圓柱三角形 ABC 內部的交點即為圓柱三角形 ABC 的垂心 H。

4. 內心 I

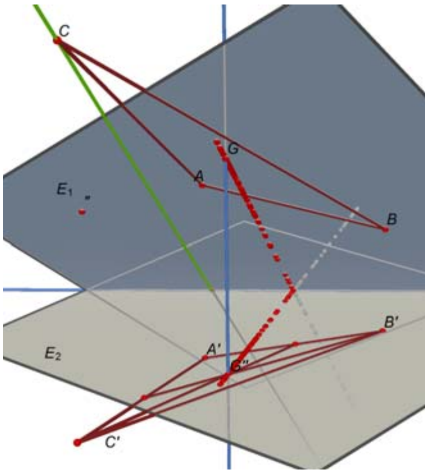
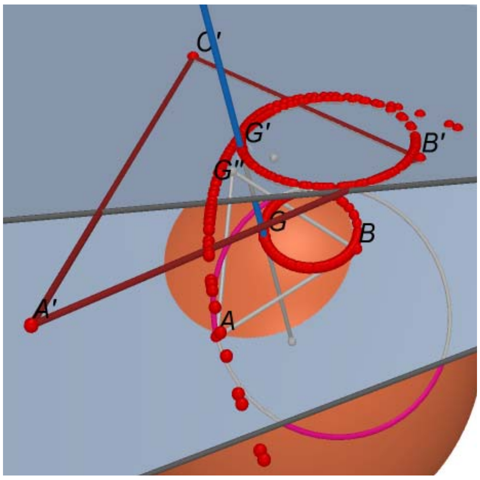
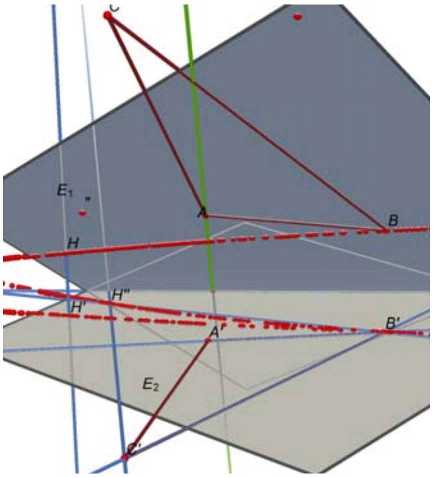
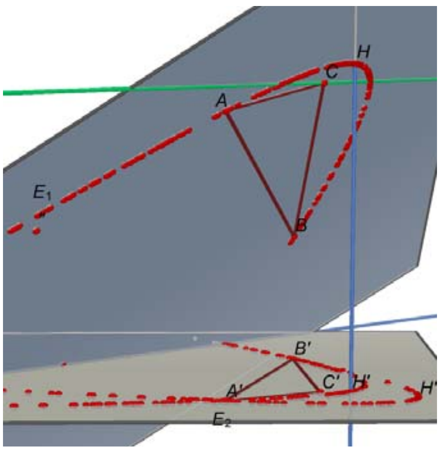
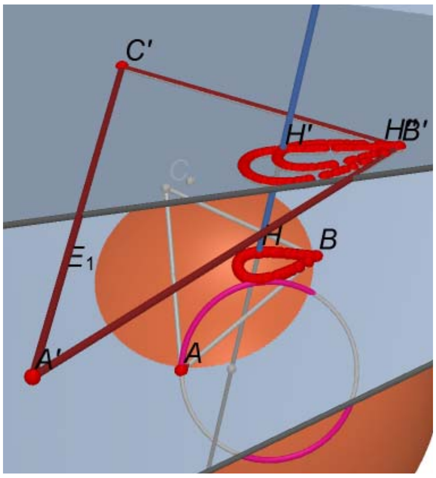
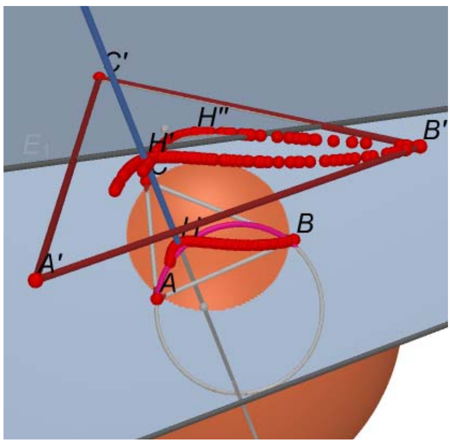
(1)作法：已知圓柱上符合圓柱三角形定義的三點 A, B, C，分別通過任兩點作圓柱上的連線，得到圓柱三角形 ABC。作 A, B 連線的橢圓所在的平面和 A, C 連線的橢圓所在的平面，並且通過圓柱三角形 ABC 內部的角平分面，作出此平面與圓柱的交線，稱為圓柱三角形上角 A 的角平分線。以相同的方法作出另外兩條角平分線，任兩條角平分線的交點即為內心 I。

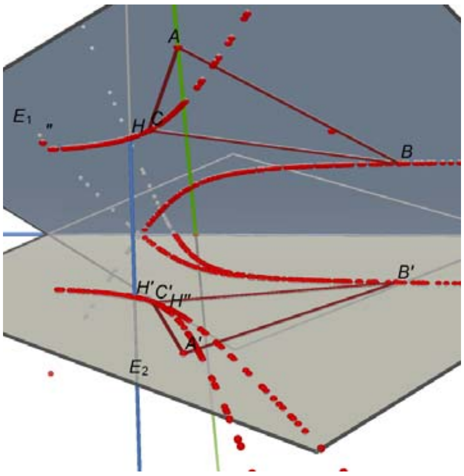
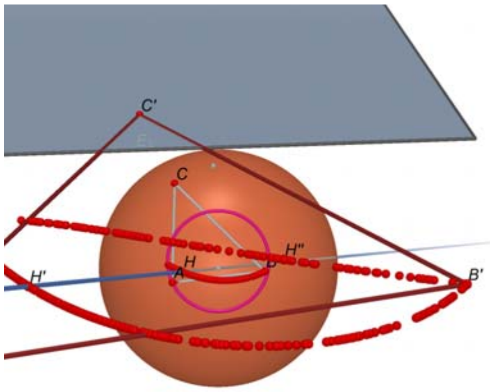
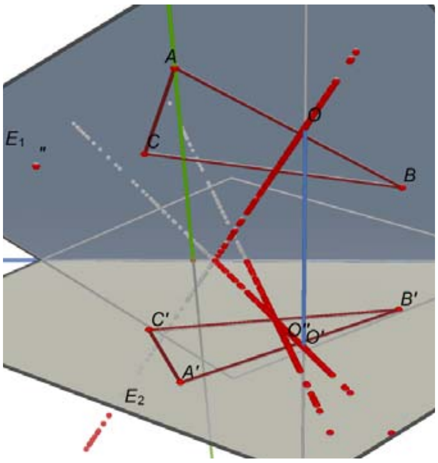
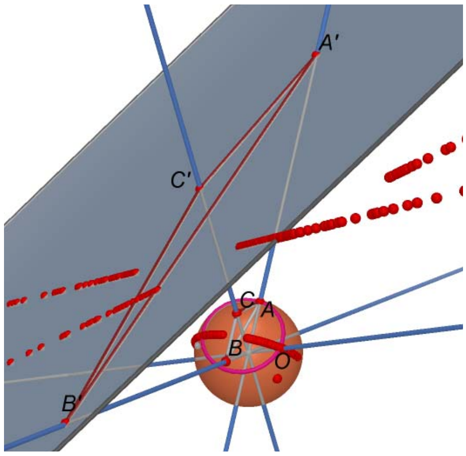
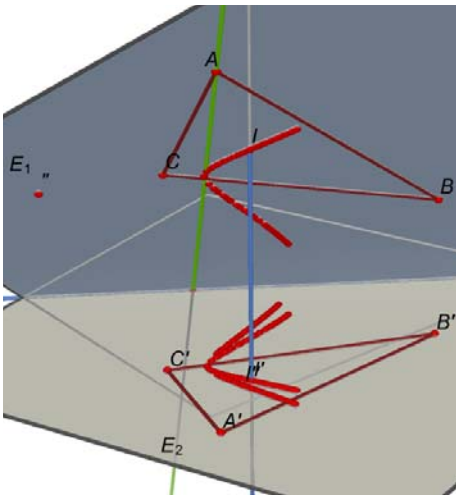
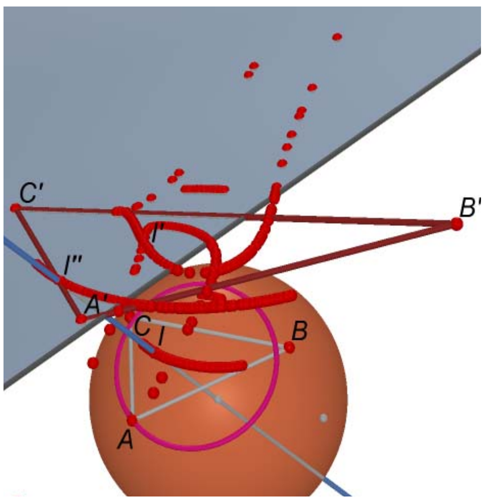


(2)性質：三條角平分線會在圓柱上交於一點。

(3)證明：通過三條角平分線的三張平面均垂直平面三角形 ABC 所在的平面，又同時通過平面三角形 ABC 的內心，所以三張平面交於一線，此線與圓柱三角形 ABC 內部的交點即為圓柱三角形 ABC 的內心 I。

五、軌跡

	平面	球面
作法	令三角形的其中一個頂點沿著一條直線移動。	令三角形中其中一個頂點繞一球面上一圓移動。
G	 G、G’、G”： 直線	 G：圓　G’：圓　G”：橢圓
H	 H：直線 H’：直線 H”：直線 二次曲線：  H、H’、H”：抛物線(橢圓)	 H、H’、H”： 曲線(?)  H、H’、H”：曲線(?)

	 H、H’、H”： 雙曲線	 H：圓弧　H’：圓弧 H”：直線
O	 O、O’、O”：　直線	 O：圓　O’、O”： 直線
I	 I、I’、I”：　曲線(?)	 I：曲線(?) I’：曲線(?) I”：曲線(?)

伍、研究結果與結論

第一部分：

平面上的三角形 ABC 的四心：G、H、O、I 投影到另一平面，只有重心 G 的投影是投影的三角形 A'B'C'的重心，而 H、O 在直角三角形時為其特例，至於 I 則是在當三角形的其中一條角平分線垂直於兩平面的交線時，為其特例。

第二部分：

球面三角形 ABC 的四心，只有當投影到的平面為正平面(平行於三角形的平面)時，四心才會具有不變性。

第三部分：

我們在圓柱上定義出兩點的連線，並證明兩點對於其連線所在的平面所截出橢圓的短軸有對稱性，更進一步利用對稱性定義出圓柱上的中線、中垂線、高和角平分線，而且還發現三中垂線交於一點，三高交於一點，以及三角平分線交於一點，由此定義出外心 O、垂心 H 以及內心 I。另外，我們也證明出圓柱上三點 *A, B, C* 兩兩在圓柱上的連線，在背面交於一點。

第四部分：

已大略畫出各種情況對應的軌跡，但尚未能確認到底在何種情況下會是何種圖形。

陸、未來展望

圓柱部分，希望能探討圓柱的心投影到平面的情形。軌跡的部分，希望未來能詳細討論出圖形的軌跡，其中我們最感興趣的是平面的 H 的軌跡，應該是圓錐曲線，希望未來有機會能證明之。另外，我們希望能夠推廣到其它的曲面上，例如：圓錐。

柒、參考資料及其他

1. 翰林版數學課本第四冊第一章「圓錐曲線」
2. 老顏的家
   http://www.nehs.hc.edu.tw/~ylyen/CT/CT34_2points_distance.htm
3. Geodesics in a cylinder
   http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/web3d/english/geocil.htm
4. 球面三角術 李光蔭著

【評語】040414

1. 這是一篇有策略、按部就班的作品。研究方向正確，把握到重點。

2. 球柱面上三角行之諸心性質，似乎與題目「投影」無關。

3. 圖形可以作得更精緻。