中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040413

圈圈相連到天邊

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄭晏奇 高二 楊翔雲 高二 黃紹宸 高二 李育霖	何璩如

關鍵詞：圖論、IC-Colorings、IC-Indices

摘要

四張郵票，四種價值，卻能湊出 1~10 連續不斷的十種價錢。一張圖，能填入的數字與擺放的位置隱藏著絕妙的數學問題。對此，大家給了它一個名稱—*IC* 圖。

我們將 *IC* 圖推廣到複雜的進階圖形，分別是多重放射圖、長鏈放射圖、階梯放射圖；環的研究則有三角環、四方環連接圖。它們的關係大致如下

- *IC* 圖
  - 樹枝狀
    - 放射圖
      - 基本放射圖
      - 多重放射圖
      - 長鏈放射圖
      - 階梯放射圖
    - 長鏈圖
  - 簡單圖(*SimpleGraph*)
    - 三角環連接圖
    - 四方環連接圖
    - ⋮

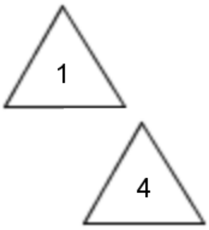
關於更複雜的圖—環與放射狀的結合，我們期望能在未來一窺其奧妙。

壹、研究動機

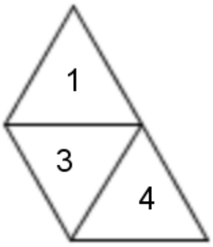
我們研究的靈感來自於論文─*IC-Coloring*，其構想來源─*Stamp Problem* 是這樣的：

若有 4 個價值為 1、2、3、4 元的郵票，我們可以由這 4 張郵票湊出 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 等所有價錢，就像圖(四)所呈現的。所以 *Stamp Problem* 探討的就是找出符合這個條件的郵票。

這裡的郵票可能與現代的郵票稍有出入，此處的郵票有連通性，也就是連接之相鄰兩郵票的價錢才能相加。如下圖(一)，1、4 兩郵票的價錢本是不能相加的，但透過 3 的連接，我們便能得到如下圖(二)的價錢。

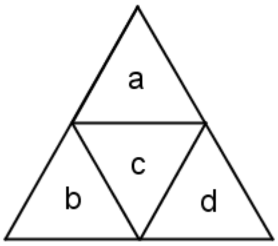


圖(一)

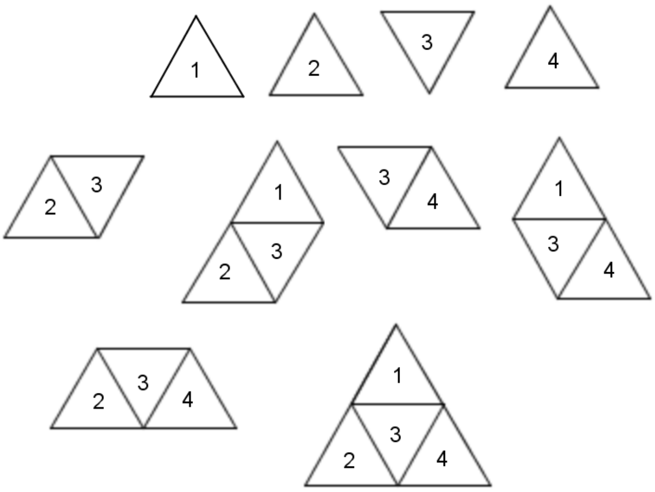


圖(二)

假設有 4 張郵票，如圖(三)的限定連接方式，分別是 a，b，c，d 這 4 張郵票，找到最大的 *IC* 圖，其(a，b，c，d)=(1，2，3，4)，且可以配出 1~10，其放法如圖(四)所示。



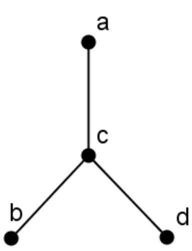
圖(三)



圖(四)

對於這樣的問題，我們藉由這次科展的機會，試著解開長久以來的疑問。我們發現，一個圖裡其實蘊藏著許多的秘密。

我們將圖(三)轉換成圖論中的圖形如圖(五)，以方便之後的討論。a、b、c、d 四張郵票可視為一個一個的”節點(*Vertex*)”，並且分別代表各個價錢，我們稱之為”節點值”。



圖(五)

貳、研究目的

一、 討論一個 IC 圖，試著在節點個數(N)最少的情況下，找出節點值湊出最大的總和($K(G)$)。同時，圖形裡能湊到所有$1\sim K(G)$的連續整數。並觀察節點與總和的關係。

二、 在特定的圖形裡，我們想知道每次放入的節點值時是否有規律存在。

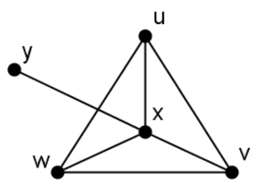
三、 在已知的放射圖中，已經了解了基本放射圖的最佳擺法。所以我們想深入探討延伸圖形的規律性。

參、研究設備及器材

電腦、紙、筆、小畫家繪圖程式、Geogebra。

肆、研究過程或方法

一、 名詞定義(以下皆以圖(六)為例)



圖(六)

（一） $V(G)$：$Vertex$，節點集合(即是每一張郵票)。$V(G)=\{u,v,w,x,y\}$

（二） $E(G)$：$Edge$，點與點連接方式的紀錄，邊的連接代表哪些郵票值可以配在一起。$E(G)=\{uv,uw,ux,vx,vw,xw,xy\}$

（三） $G(V,\ E)$：$\begin{cases}V(G)\\E(G)\end{cases}$。郵票的全部圖形，包含節點($Vertex$)和邊($Edge$)。

（四） $H(V,\ E)$：$\begin{cases}V(H)\subseteq V(G)\\E(H)\subseteq E(G)\end{cases}$，$H\subseteq G$。子圖，即部分的郵票圖形。

（五） $S(G)$：所有子圖的個數，即不重複$H(V,\ E)$的個數。

（六） N：$N\in Z^+$，$N=n(V(G))$。所有郵票的總數，意即節點總數。

（七） $A(V(G))$：郵票的價值，對應$V(G)$的值。

（八） f：$G(V,\ E)$中對應的其中一種擺法

（九） $K_f(G)$：$G(V,\ E)$中，f所對應擺法的郵票價值總和，即節點值的總和，

$K_f(G)=\sum A(V(G))$。

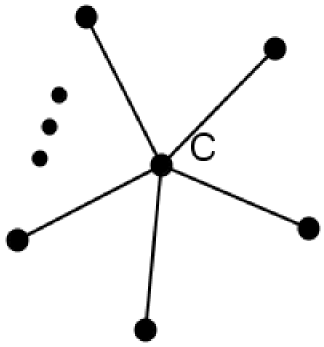
（十） $K(G)$：相對於$K_f(G)$，$K(G)$指的是同樣的節點下能得到的最大總和。

（十一）樹枝狀：沒有$Loops$(節點具有連接自己的邊，如圖(七))&$Multiple\ edges$(節點與節點的連接方式具有兩種以上，如圖(八))的圖。

圖(七)

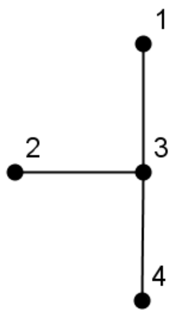
圖(八)

（十二）放射狀：如下圖(九)所示。所有的點都接在一個點上，這類的圖我們定義為放射狀，並命名這點為中心 C。



圖(九)

（十三）IC 圖：如研究動機範例。其各節點值能湊到$1\sim K_f(G)$的連續整數。



圖(十)

二、 基於研究目的，我們探討了幾個問題：

（一） 符合 IC 圖的基本性質

（二） 最佳或具有規律的放法

（三） 延伸形狀圖的 $K(G)$

三、 探討過程

（一） 基本性質：

對於樹枝狀的圖形，找到下列的性質

1、 $1\in A(V(G))$

pf.

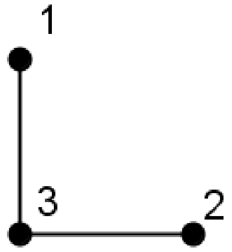
我們是這樣考慮的：假使 IC 圖能配出 B~D(B，$D\in Z^+$)之間的連續整數，那麼在 B、B+1 之間必須是價值 B 與價值為 1 的節點去作連接，因此可以得到

$\Rightarrow$必具有 1 的點

並且在樹枝狀中為了湊得 B-1，就可以發現 1 會在最外圍。

2、 在節點總數 $N\geq 4$的情況下，$K(G)<S(G)$：

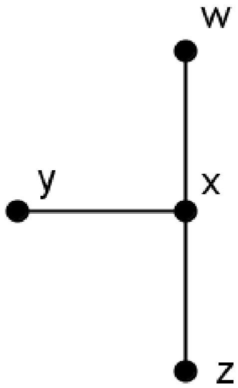
pf. 首先經由計算可以得知，圖(十一)是一個$K(G)=S(G)$的圖形。



圖(十一)

接著：

假設有一圖(十二)節點數為 4，其$K(G)=S(G)=11$：



圖(十二)

令 x > w > y > z

則能得知：

z = 1 (因 z 最小)

又因 w,x,y,z 互異，可以推得

y = 2

接著假設 w = 4，可以得到 x≥5 ，將其相加

w+x+y+z≥12不合(因$S(G)$為 11)

∴ w = 3，並發現 w,y,z 有關係式 y+z=w

可以發現子圖{x,y,z},{x,w}是重複的集合

$\Rightarrow \rightarrow\leftarrow$

同理，w、y、z的大小關係互換後也可推得與假設矛盾的結果。因此對於其餘樹枝狀圖形，也就可以知道在$N\geq 4$時，$K(G)<S(G)$。

3、 對於延伸的圖形，每次新增一次節點，新圖之節點值總和(令其為$K'(G)$)與子圖總數(令其為$S'(G)$)的差值會大於原圖之節點值總和$K(G)$)與子圖總數$S(G)$的差值，即$S'(G)-K'(G)>S(G)-K(G)$。

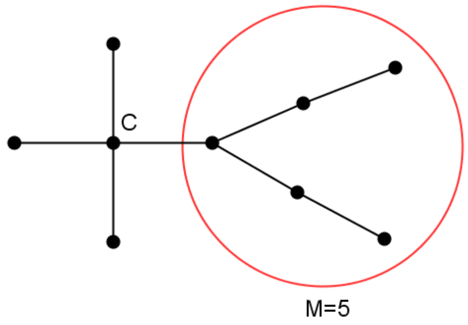
pf.

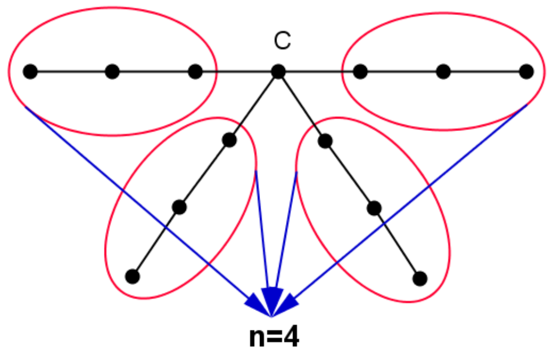
每一次新增節點會使得配出$K(G)$更大的 *IC* 圖會變得比較困難，此部分可以由基本放射圖中可以得知。

同時藉由 2、的結論可以推論—新增後的 *IC* 圖，其節點值總和與子圖總數差值會比較大。

（二） 圖形延伸：

為了方便我們的研究，以下所指的 n 為支鏈個數，M 為每條支鏈所含的節點個數，如圖(十三)、圖(十四)標示。





圖(十三)

圖(十四)

如圖(十三)所標示，這裡的 M=5

如圖(十四)的分支總數，這裡的 n=4

首先我們整理了一些基本的性質與定理如下：

1.1. Lemma. 1 要在最外圍

1.2. Lemma. 放射狀所擁有的子圖個數最多

1.3. Lemma. $N \geq 4$時，$K(G) < S(G)$

1.4. Lemma. 對於延伸的圖形，每新增一個點，$S'(G) - K'(G) > S(G) - K(G)$

2.1. Theorem. 若圖形為多重放射圖的$M = 3$、支鏈個數為n(n ≥ 3, n $\in Z^{+}$)，此時的 $K(G) = 4(5^{n-1} - 1) + 10$ 。

2.2. Theorem. 若圖形為長鏈放射圖，$K(G) = (M+1)^{n} + 2M - 1$

2.3. Theorem. 若圖形為階梯放射圖，

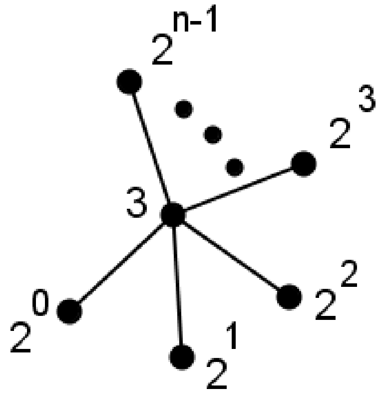
$$(n+1)!+2n-1 \leq K(G) \leq (n+1)!+\sum_{x=1}^{n}\frac{x(x+1)}{2}$$

2.4. Theorem. 若圖形為長鏈結合圖，

$$\prod_{x=1}^{n}(a_x+1)+2a_n-1 \leq K(G) \leq \left(\sum_{x=1}^{n}\frac{a_x(a_x+1)}{2}\right)+\left(\prod_{x=1}^{n}(a_x+1)\right)$$

1、 多重放射圖：

事實上在尋找 *IC* 圖時，目前已有相關的証明及擺法，也就是基本放射圖(如圖(十五))。但我們認為其擺法實用性不高，因為張貼郵票的空間是有限的，並不能滿足多數人的需求，所以我們才試著討論其他的圖形，並找出最佳的擺法。

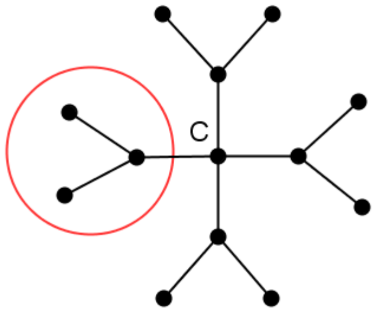


圖(十五)

(1) 定義圖形

I. 找出 C。

II. 規定每次得新增一個放射狀的圖，如圖(十六)所標示的部分。即不可只新增兩個以下的節點。此處我們探討 M=3 的圖形，$M\geq 4$之後再探討。



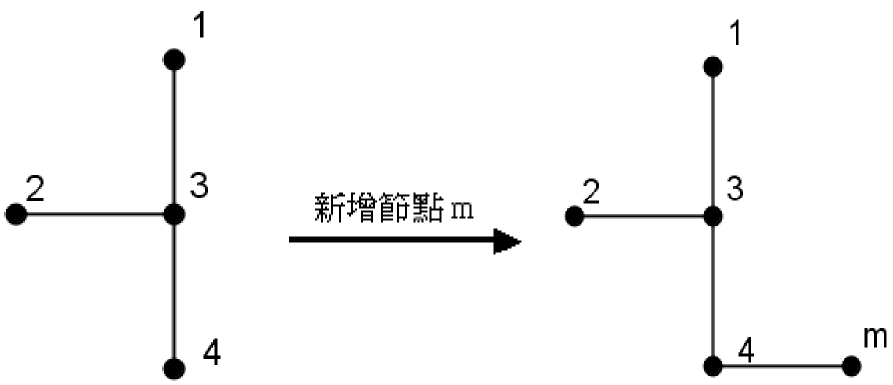
圖(十六)

III. 要從 C 新增子圖，不能自其餘節點新增。

IV. 符合 IC 圖。

(2) 找出擺法

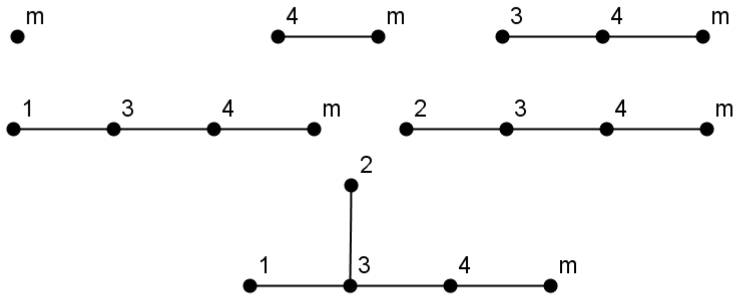
接下來要如何找出最佳的擺法呢？首先由 **1.3. Lemma.**可以知道 1─2─3─4 為最佳 IC 圖，即下圖(十七)。所以我們以此為**基本圖形**開始新增圖形，接著每次新增一個最大的節點，如圖(十八)所示 ，最後便能找到最佳擺法。



圖(十七)

圖(十八)

I. 所以如圖(十八)的 m 點，從這裡開始新增節點。我們觀察新增的子圖(即下方之圖(十九)，並依大小排列)，就可以知道在最小連續部份開始新增即可得到最大的節點值。



圖(十九)

所以在此處即自上面所列之m─3─4 的圖開始新增，讓其等於原圖總和 +1，即下列的式子：

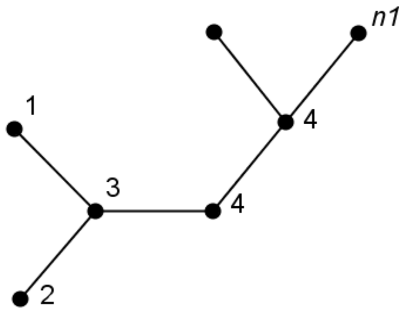
m+3+4=10+1

$\Rightarrow m=4$

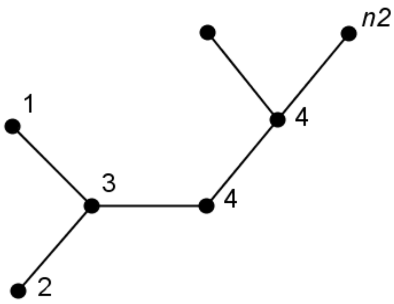
即可得到最大的 m 值。

II. 之後再逐步新增直到支鏈個數為 *n*，即可找到最佳擺法。

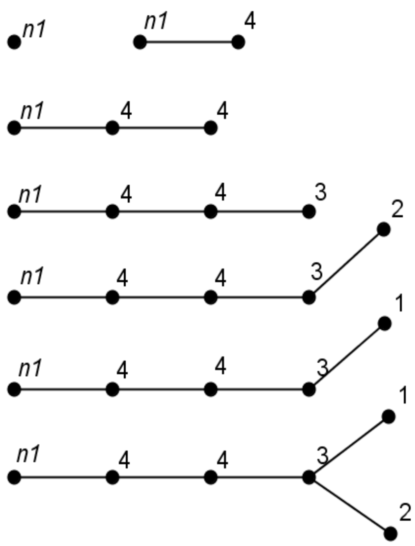
III. 此時可能有疑慮，新增的點會不會影響接下來點的生成呢？事實上是不會的。如圖(二十)、圖(二十一)，而它們新增的部分如下圖(二十二) 、圖(二十三)。

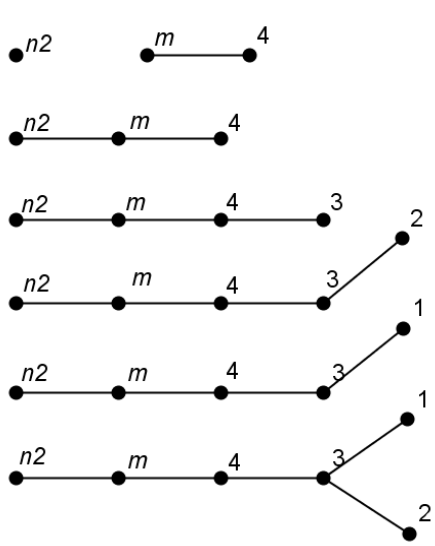


圖(二十)



圖(二十一)





圖(二十二) 圖(二十三)

觀察新增子圖最小連續部分後可知：

$n1+11=14+1$ (讓 $n1+11$ 為原圖總和 $+1$)

$n1=4$

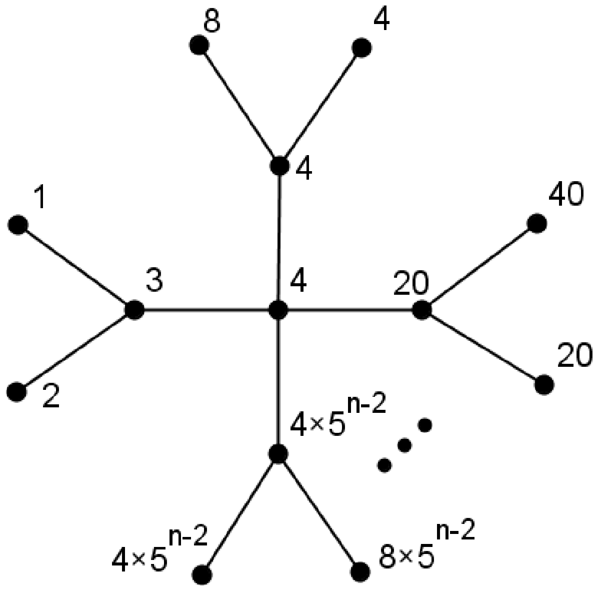
$n2+m+7=10+m+1$ (讓 $n2+m+11$ 為原圖總和 $+1$)

$n2=4$

$\Rightarrow$ 得知 m 不影響 $n2$ 的生成。

由此可以發現它們最小連續部分是一樣的，所以不會影響之後的節點值。

（3）最後我們得到的擺法如圖(二十四)所示。



圖(二十四)

$K(G)=4(5^{n-1}-1)+10$ 。(定義在 n=1 時為基本圖形 1─2─3─4。)

（4）圖形擺法公式推導：若隨機給一個值為 x，以最少的節點得到 IC 圖。

由 $K(G)=4(5^{n-1}-1)+10$ (圖本身具有 n+1 條支鏈，3n+4 個點)

求值 x：

$x\geq 4(5^{n-1}-1)+10$ 則

$$\Rightarrow \frac{x-10}{4}\geq 5^{n-1}-1$$

$$\Rightarrow n-1\leq \log_5\frac{x-6}{4}$$

$$n\leq \log_5\frac{5(x-6)}{4}$$

$$\because n\in Z^{+}$$

$$\Rightarrow n=[\log_5\frac{5(x-6)}{4}]$$

而剩餘的數字則放入新增的支鏈中。

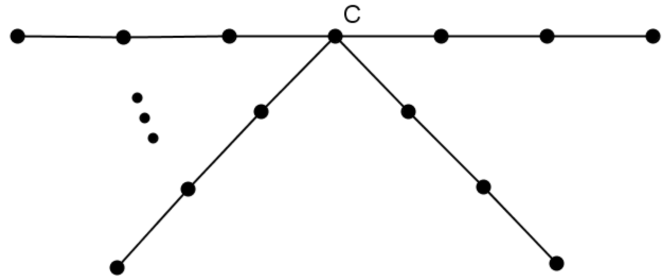
2、 長鏈放射圖

如同上一個圖形的理由，這種放法是第二種我們想研究的圖形。相對於多重放射圖，我們想知道將長鏈接於中心上，是不是能找到並歸納出最佳的放法呢？雖然此圖形於論文中已有提及，**但是我們研究後竟找出 $K(G)$ 值比論文中更大且不一樣的放法**，並且存在著規律可循！以下是探討的過程。

（1）定義圖形

Ⅰ. 找出 C。

Ⅱ. 每次新增相同的支鏈長度接於 C 點，如圖(二十五)。



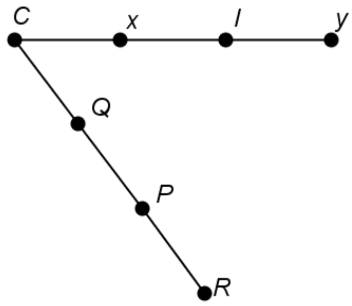
圖(二十五)

在此我們探討的 $M \geq 3, M \in Z^{+}$。

Ⅲ. 我們稱此圖為長鏈放射圖。

（2）找出最佳放法：

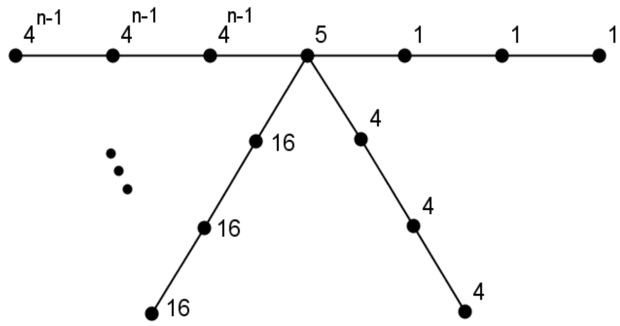
Ⅰ. 如圖(二十六)



圖(二十六)

當 M=3 時，比較放法的總和並依結果討論出最佳的放法，而這裡因為以直觀的想法由 1 直接湊到 $K(G)$ 是極其困難的，於是我們使用**倒扣的方式**找出最大的圖形，也就是由 $K(G)$、$K(G)-1$、$K(G)-2$、…逐漸湊到剩 3、2、1 的方式來尋找。以下是探討的過程。

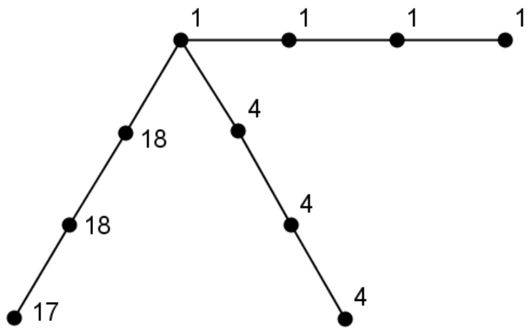
（Ⅰ） 論文中提到，在 M=3 的圖中，最佳 IC 圖的 $K(G)$ 值起碼在 $4^{n}+4$ 以上，擺法如圖(二十七)而此圖 $K_{f}(G)$ 值為 $4^{n}+4$。



圖(二十七)

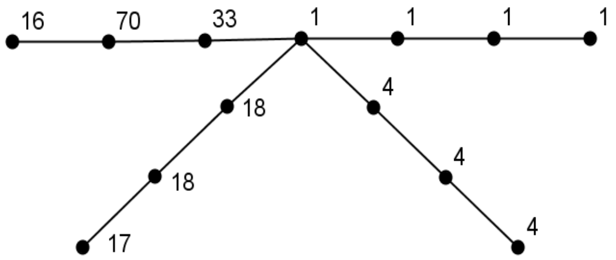
（II） 討論完 $K_f(G)$ 值在 4^n+4 的狀況後，我們尋找 $K_f(G)$ 值大於 4^n+4 的圖，且找尋其規律。

在同為 M=3 的圖中，發現如圖(二十八)的擺法，其 $K_f(G)$ 值為 4^n+5 。



圖(二十八)

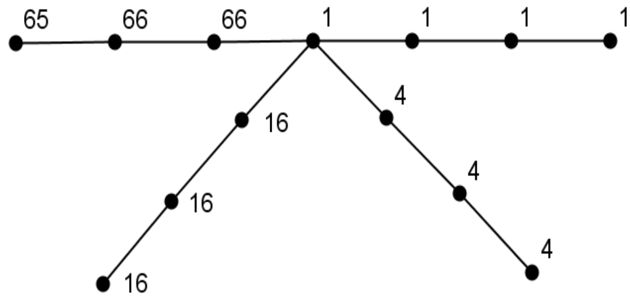
於是試著以圖(二十八)的擺法方式再繼續新增支鏈，而得到了圖(二十九)。但其 $K_f(G)$ 值尚未超過 4^n+4 ，並不是我們所尋找的最佳 IC 圖，那麼為何其 $K_f(G)$ 值會小於 4^n+4 呢？



圖(二十九)

我們推論的原因是：在 $K_f(G)$ 值為 4^n+4 的圖中，每條支鏈與支鏈間是互相影響且具有規律的，而在圖(二十八)中，除了最後一條支鏈是另外形成外，其餘支鏈均具有規律。於是圖(二十九)的總和反而會比 4^n+4 還要來的小。

於是將第三條支鏈上節點值改回原本的 16 後，再用**倒扣的方式**找出最大值，如圖(三十)。



圖(三十)

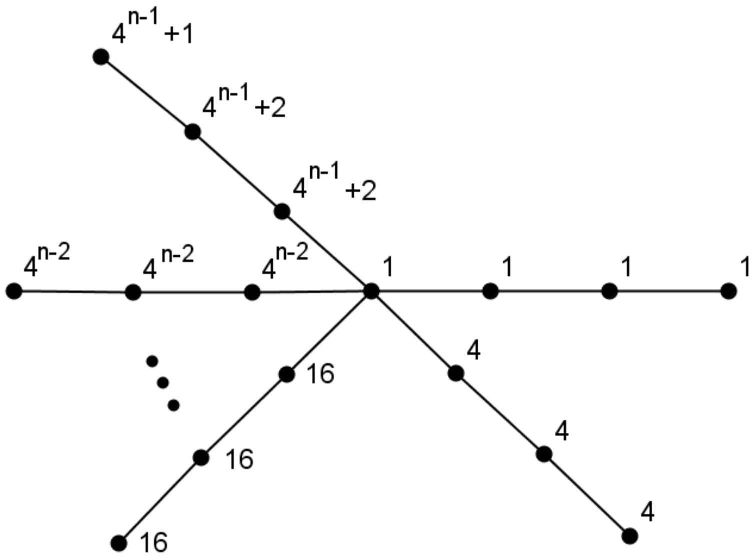
而在除去最後一條支鏈時，發現還有其他$K_f(G)$值相同

的擺法，但不具規律，且$K_f(G)$值小於4^n+4，所以我

們選了有規律的圖，以倒扣的方式找出能放的最大值。

其最佳放法為：

鄰近 C 點的 2 個節點為$4^{n-1}+2$，最後 1 個節點為$4^{n-1}+1$，如圖(三十一)。



圖(三十一)

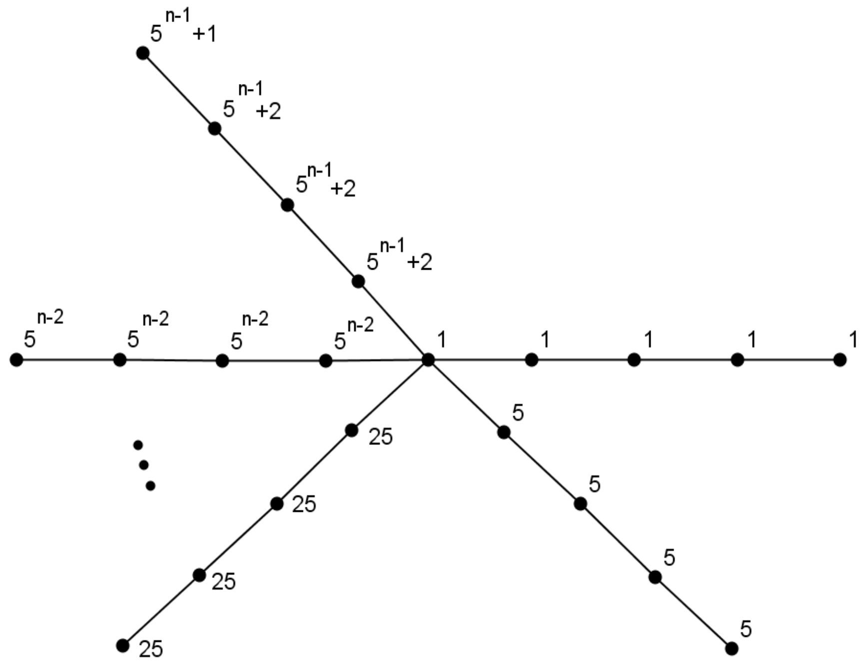
在此種擺法中，$K_f(G)=(4^n+5)$。之後在 II. 中說明此

放法在$n\geq 3$時是 IC 圖且是最好的擺法。

II. 接著討論$M\geq 3$的情形，如：當$M=4$時，擺法如圖(三十二)

，此時$K_f(G)=5^n+7$，且同樣為 IC 圖。下面說明當支鏈上有

M 個節點時，擺法依舊成立。



圖(三十二)

Sol. 在放入第 n-2 條支鏈時，圖中包含 C 點的子圖可湊得 $1\sim K_f{}'(G)$ ($K_f{}'(G)$ 為未加入第 n-1 條支鏈時 G 的總和)，故第 $n-1$ 條支鏈上連接 C 之節點值最大為 $K_f{}'(G)-C+1$(若為 $K_f{}'(G)-C+2$ 則 G 必會缺少 $K_f{}'(G)+1$ 的子圖)

- 由上可知，C 值在越小的情況下越接近最佳完美圖故選定的 C 值為 1
- 第 n-1 條支鏈上接近 C 的第一個節點若放 $K_f{}'(G)$ ，則可湊成 $K_f{}'(G)+1$ 到 $2K_f{}'(G)$ 。而第二個節點必須先通過第一個節點，才能到達 C 點，故此點最大值也同為 $K_f{}'(G)$ ，依此類推可以得到

  $K_f(G)=K_f{}'(G)+M\times K_f{}'(G)$

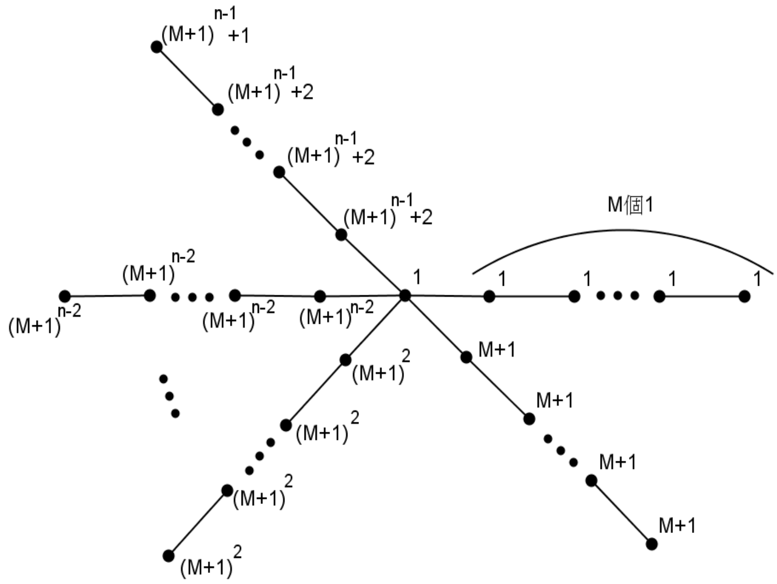
  $N=(n-1)\times M+1$
- 現在在最後一條支鏈內放入最大的節點值，其最佳放法為：

  鄰近 C 的 M-1 個節點為 $(M+1)^{n-1}+2$ ，最後 1 個節點為 $(M+1)^{n-1}+1$，如圖(三十三)。

  故 $S(G)=(M+1)^n+\dfrac{M(M+1)}{2}\times n$

而 $K_f(G)$ 值為：

$\Rightarrow (M+1)^n + 2M - 1$。



圖(三十三)

而此擺法的 $K_f(G)$ 與論文中推測的擺法多了：

$$[2\times(M-1)+1]-[(M+2)-1]=2M-2+2-M-2=M-2$$

歸納以上幾點：此擺法的總和為最大，所以

$K(G)=(M+1)^n+2M-1$

圖(四十一)的這種擺法，在 M=3 時，會比論文的擺法多 1；M = 4 則多 2……依此類推，也就是說只要在 $M\geq 3$ 的情況下我們得到的擺法是恆大於它的，這也是為什麼我們會宣稱找到更佳擺法的理由。

（3）圖形擺法公式推導：若隨機給一個值為 x，以最少的節點得到 IC 圖。

由 $K(G)=(M+1)^n+2M-1$（圖本身具有 n 條支鏈，MN+1 個節點）求值 x：

$x\geq (M+1)^n+2M-1$ 則：

$$\Rightarrow x-(2M-1)\geq (M+1)^n$$
$$\Rightarrow n\leq \log_{M+1} x-(2M-1)$$
$$\because n\in Z^+$$
$$\Rightarrow n=[\log_{M+1} x-(2M-1)]$$

而剩餘的數字放入新增的支鏈內。

3、 階梯放射圖

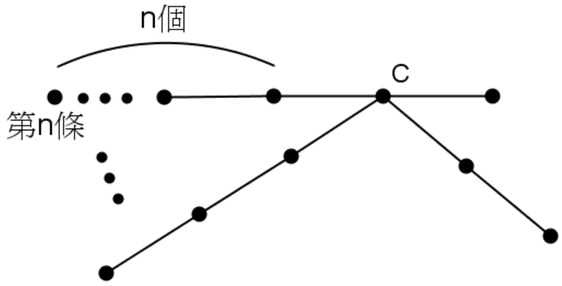
研究了固定長度支鏈的圖形後，我們對於不固定長度支鏈很感興趣，是不是節點值的放入同樣有規律呢？以下是我們對不固定長度支鏈的探討

過程。

(1) 定義圖形

I. 找出中心 C。

II. 每次新增一條長鏈接於 C，新增的節點個數與新增的次數相同，如圖(三十四)。



圖(三十四)

III. 我們稱此圖為階梯放射圖。

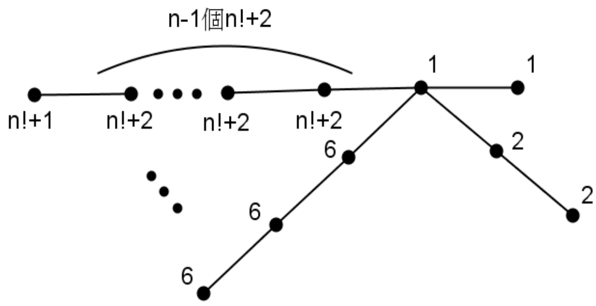
(2) 找出最佳的放法

I. 首先我們可以知道：

$$N=\frac{(n+1)\times n}{2}+1，\ S(G)=(n+1)!+\sum_{b=1}^{n}\frac{b(b+1)}{2}$$

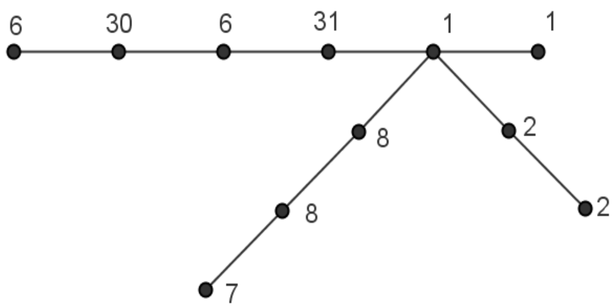
II. 經過多次嘗試，發現此圖形的放法會與上一點所討論的節點放法相似，同為中心 C=1，而最後一條支鏈去做改變，如圖(三十五)。

(I)



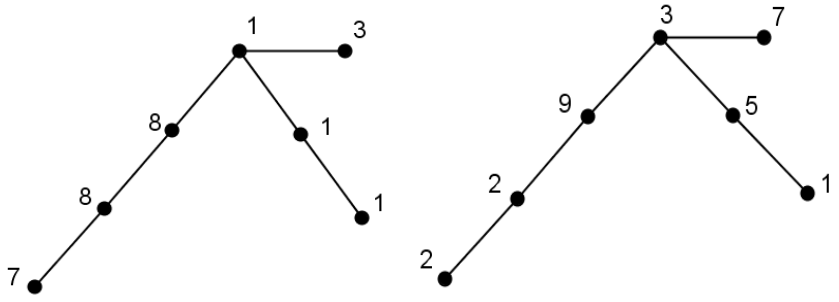
圖(三十五)

(II) 依據(I)的放法，若不改變圖形繼續新增節點，則其 $K_f(G)$ 會變小，如下圖(三十六)

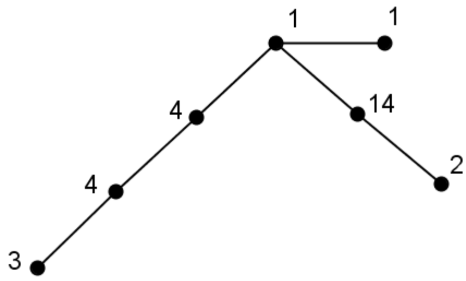


圖(三十六)

III. 對於 n=3，還有以下幾種擺法，但尚未找到規律，如圖(三十七)、圖(三十八)。



圖(三十七)



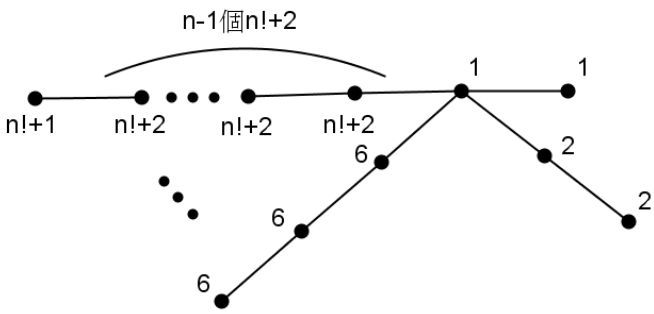
圖(三十八)

雖然還有其他如上的放法，但是它圖形擺放的方式是沒有規律可循的。對於這些沒有規律的圖形，其 $K_f(G)$ 值的範圍是不確定，而且我們無法得知它能不能有更大的擺法，甚至連更大的擺法可能都是不存在的；而目前還尚未能找到比這個更佳且具有規律的擺法，所以我們認為這是階梯放射圖的最佳擺法。

對於 $K(G)$ 值的推論範圍如下：

$$(n+1)!+2n-1 \le K(G) \le (n+1)!+\sum_{b=1}^{n}\frac{b(b+1)}{2}$$

而目前找到的最佳放法如下(圖(三十九))。



圖(三十九)

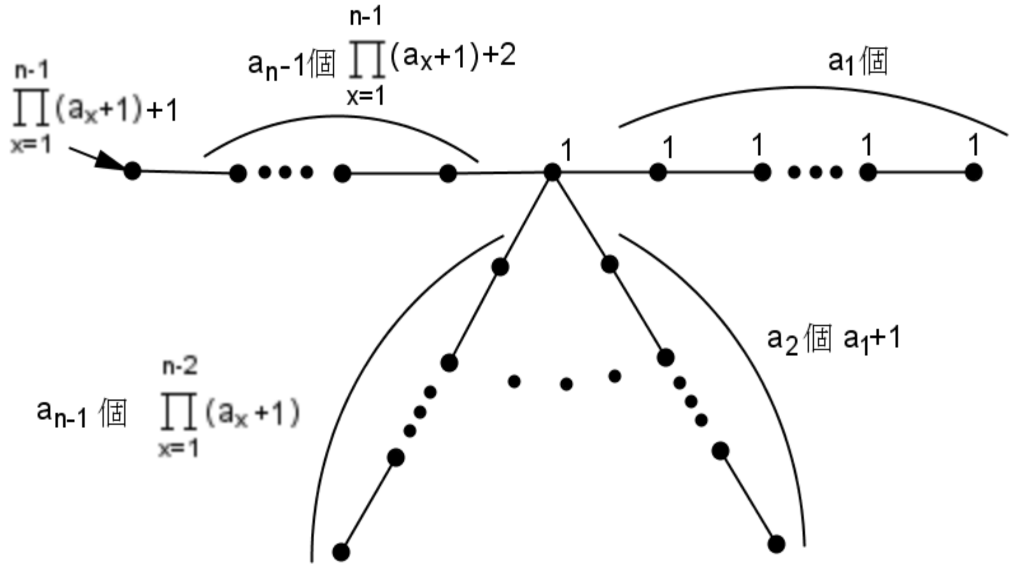
4、 長鏈結合圖：

此圖形是總括 2、3 點，得到了一個支鏈長度不固定的結論。由於 2、3 點已得到具有規律的想法與放法，因此在支鏈長度不固定的情況下，假設支鏈個數由小排到大為 a_1、a_2 …、a_n 。

若 $a_n \ge 3$，則

$$\prod_{x=1}^{n}(a_x+1)+2a_n-1 \le K(G) \le \left(\sum_{x=1}^{n}\frac{a_x(a_x+1)}{2}\right)+\left(\prod_{x=1}^{n}(a_x+1)\right)$$

其放法為如圖(四十)。



圖(四十)

伍、研究結果

1、 首先我們研究了圖的基本性質，發現

1.1. Lemma. 1 必須在最外圍

1.2. Lemma. 放射狀所有的子圖個數最多

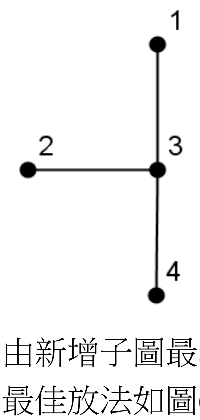
1.3. Lemma. $N \ge 4$時，$K(G) < S(G)$

1.4. Lemma. 對於延伸的圖形，每次新增一次節點，$S'(G)-K'(G) > S(G)-K(G)$

2、 再來是關於放射狀的延伸，我們知道了

（1） 多重放射圖

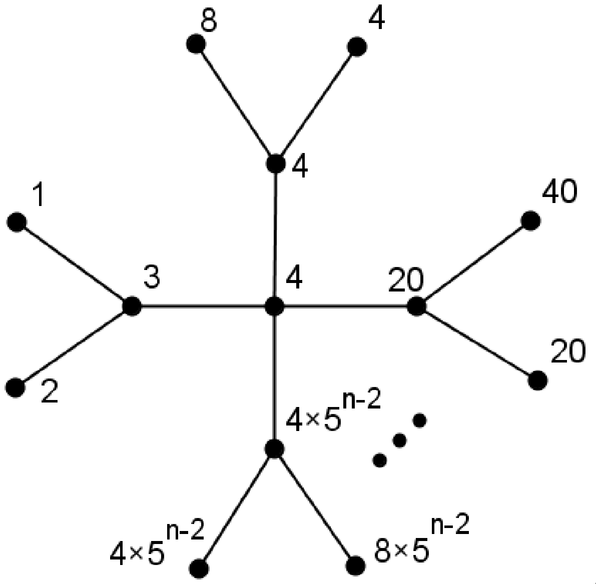
１. 在 *M*=3 時，基本圖形為圖(四十一)



圖(四十一)

２. 由新增子圖最小連續部分開始新增即可得到新增的節點最大值為何。

３. 最佳放法如圖(四十二)所示



圖(四十二)

$K(G)=4(5^{n-1}-1)+10$。

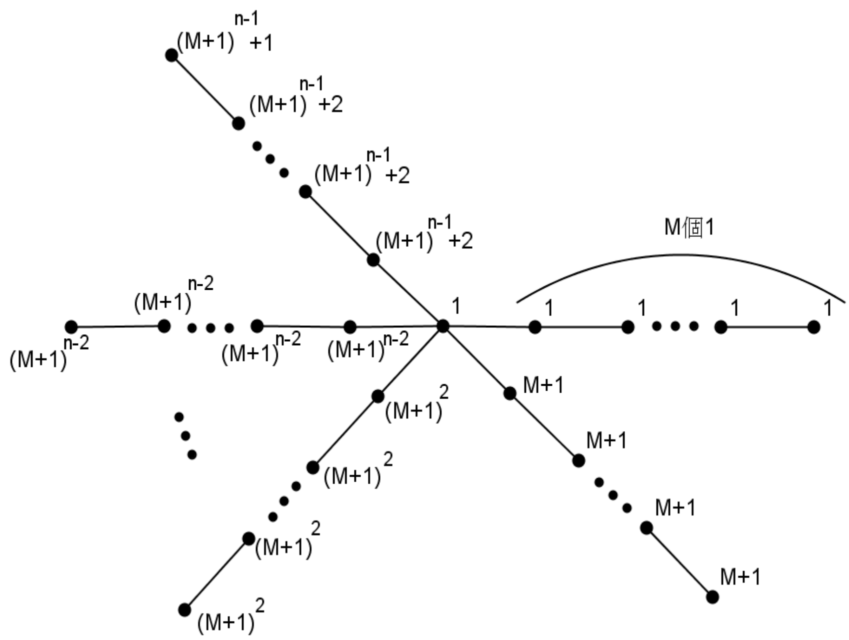
（2） 長鏈放射圖

1. 若 $N=n\times M+1$，則 $S(G)=(M+1)^n+\dfrac{M(M+1)}{2}\times n$

2. 在 M=3 的長鏈放射圖中，圖(三十一)必是最好的放法。

3. 在 M>3 的長鏈放射圖中，目前可以找到圖 $K(G)$=$(M+1)^n+2M-1$。

4. 最佳放法如圖(四十三)所示



$K(G)=(M+1)^n+2M-1$

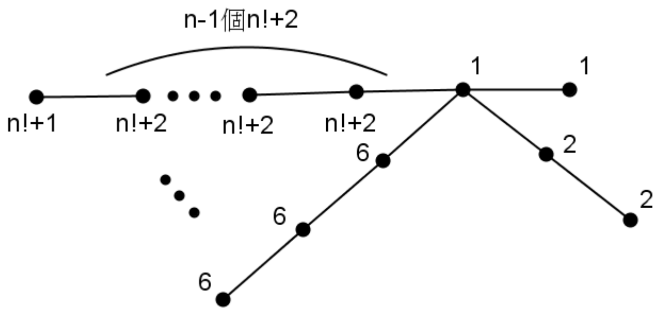
圖(四十三)

（3） 階梯放射圖

1. 節點總數當支鏈長度以等差 1 遞增，則

$$(n+1)!+2n-1\le K(G)\le(n+1)!+\sum_{b=1}^{n}\frac{b(b+1)}{2}$$

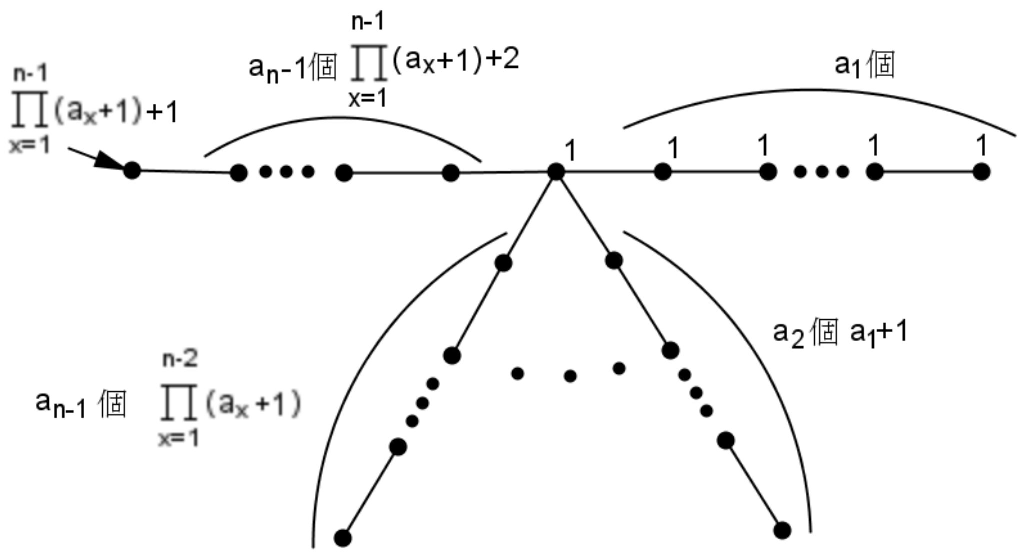
2． 目前找到的最佳放法如圖(四十四)所示



圖(四十四)

（4） 長鏈結合圖

目前找到的最佳放法如圖(四十五)所示。



圖(四十五)

當具有 n 條支鏈，每條支鏈長度不具有規律時

則令由小排到大的支鏈個數為 a_1、a_2 …、a_n 。

若 $a_n \geq 3$ ，則：

$$\prod_{x=1}^{n}(a_x+1)+2a_n-1 \leq K(G) \leq (\sum_{x=1}^{n}\frac{a_x(a_x+1)}{2})+(\prod_{x=1}^{n}(a_x+1))$$ 。

陸、討論

一、 遇到的問題與解決方法

（一） 如何快速計算一個圖的子圖個數，藉此知道 $K(G)$值的上限。由此我們在尋找完美圖時可以避免考慮某些過大的節點值，以達到事半功倍的效果。

對此我們的解決方法是：

1、 碰到放射狀之類的圖時，我們可以藉由排列組合，分成有無中心來做討論，以找出 $S(G)$值。

2、 若為其他樹枝狀的圖，我們目前尚未有一個較有系統的方法，只能將組合一一列出來計算。但若碰到 N 極大或環等極複雜的連通圖，此時的我們便束手無策。我們正尋找一個有系統的方法來解決此類的問題。

（二） 對於任一樹枝狀圖形，已經找到長鏈結合圖，但尚未找到任一多重放射狀的放法，若能將長鏈結合圖與任一多重放射狀的圖結合在一起，則對於任一樹枝狀的圖形就已經完成了，但目前尚未完成。

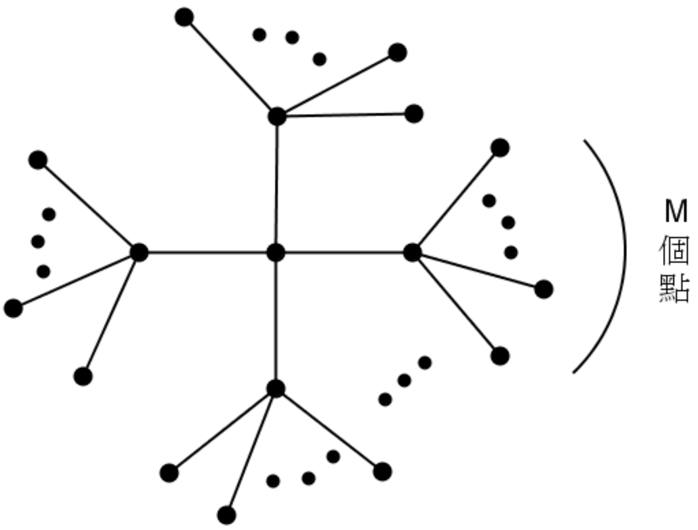
二、 展望

（一） 多重放射狀的延伸，如圖(四十六)，目前已能進行初步的推論，雖然尚未能證明和找到最佳完美圖，不過成果應是指日可待。

若得到了此類圖形的最佳擺法，那麼便可以再和長鏈放射圖與階梯放射圖結合，若此，在樹枝狀的所有圖形裡面，我們都可以這個結果找到最佳的擺法，這代表著無論是怎樣的郵票，我們都能找到它們所能得到的最大價錢以及擺法！

關於這個問題，我們的作法是：

1、 找出基本盤並找出最佳 C
2、 找出新增支鏈上的最大節點值
3、 找出總和 $K(G)$
4、 對以上三點加以證明。

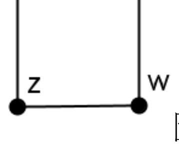


圖(四十六)

（二） 非樹枝狀圖的研究：

最主要的兩種有三角連接圖、四方環連接圖如下：

圖(四十七)

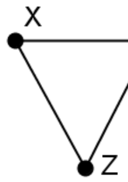


圖(四十八)

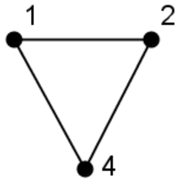
樹枝狀的圖形研究完之後，接下來要面對的勢必就是非樹枝狀的圖形，它的連接個數多，因此子圖個數多，自然而然能得到更大的總和，因此其將更接近最完美的 IC 圖。但是正因為連接的個數多，節點之間的影響大，使的它難以探討。但要是在未來得到了結果，再將其與我們先前樹枝狀圖形的成果結合，那麼無論節點如何連接，我們都能迎刃而解，只是目前非樹枝狀的圖只有初步的成果。以下是我們的研究：

1、 三角連接圖

以三角形為基本盤向不同方向延伸，在圖(四十九)中可以算得子圖數共 7 個，假設 X<Y<Z，可以發現當 X=1、Y=2、Z=4 時，所形成之子圖皆無重複。如圖(四十九)、圖(五十)。



圖(四十九)



圖(五十)

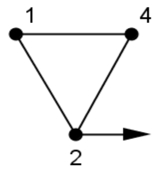
接著我們以圖(五十)做為基本盤，討論向不同方向延伸及放入節點順序的不同來比較其差異並找出何種放法為最佳。

延伸的方向有兩種：

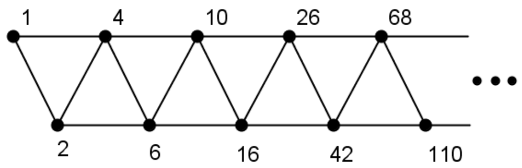
以圖(五十一)、圖(五十二)為例，若箭頭在下，則其順序以值表示為 $2\to 6\to 10\to 16\to 26\to\cdots$；

另一個以圖(五十七)、圖(五十八)為例，若箭頭在上則為 $2\to 8\to 6\to 12\to 10\to 36\to\cdots$，依此類推。

以下有 6 種情況：



圖(五十一)



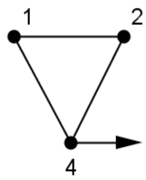
圖(五十二)

規律：

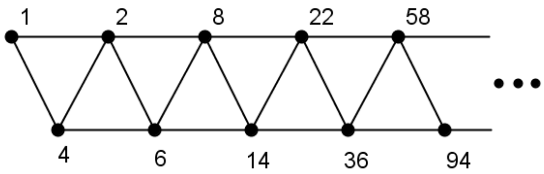
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \ge 3, \ n \in Z^{+} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$K_f(G) = \frac{(10+4\sqrt{5})\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (10-4\sqrt{5})\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - 15}{5}$$



圖(五十三)



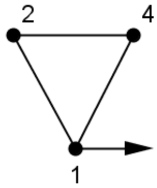
圖(五十四)

規律：

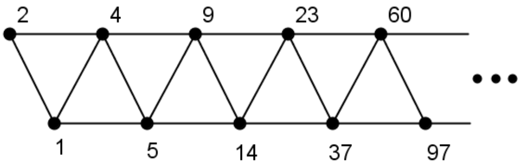
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 3,\ n \in Z^+ \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\sqrt{5}-1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$K_f(G) = (1+\sqrt{5}) \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (1-\sqrt{5}) \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - 1$$



圖(五十五)



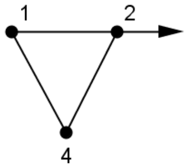
圖(五十六)

規律：

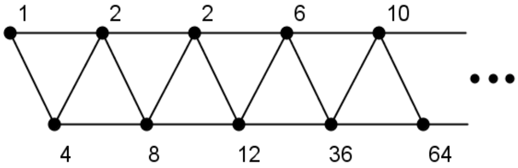
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 3,\ n \in Z^+ \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

$$a_n = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$K_f(G) = (2+\frac{3\sqrt{5}}{5}) \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (2-\frac{3\sqrt{5}}{5}) \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \frac{6\sqrt{5}+10}{5}$$



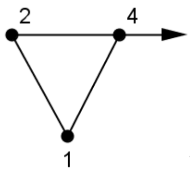
圖(五十七)



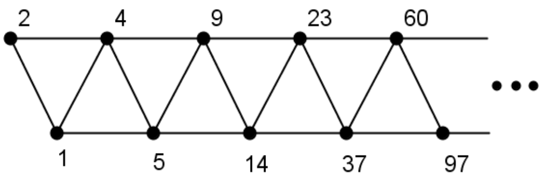
圖(五十八)

規律：

$$\begin{cases} a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1} \\ a_{2n} = 2 \times a_{2n-2} \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases} \quad n \geq 1, n \in Z^+ \quad , \quad \begin{cases} a_{2n} = 2^{n+1} \\ a_{2n+1} = \dfrac{4 \times (2^n - 1)}{3} + 2, & n \in 2k \\ a_{2n+1} = \dfrac{2 \times (2^{n+1} - 1)}{3}, & n \in 2k+1 \end{cases}$$



圖(五十九)



圖(六十)

規律：

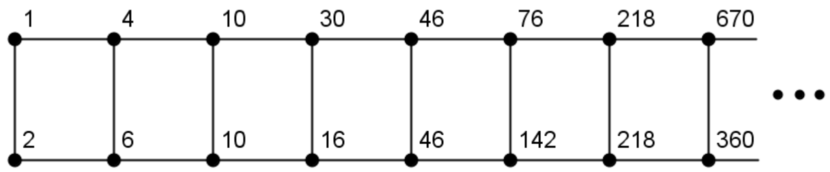
$$\begin{cases} a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1},\ n \ge 1,\ n \in Z^{+} \\ a_{2n} = 2 \times a_{2n-2} \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 9 \end{cases}，\begin{cases} a_{2n} = 9 \times 2^{n-1} \\ a_{2n+1} = 3 \times 2^{n} + 1,\ n \in 2k \\ a_{2n+1} = 6 \times 2^{n-1} - 1,\ n \in 2k+1 \end{cases}$$

由上述可得知，以圖(五十一)的方式接續延伸的圖為最佳，所以

$$K(G) = \frac{(10+4\sqrt{5}) \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} + (10-4\sqrt{5}) \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} - 15}{5}$$ 。

當我們固定基本盤時，能找到最佳擺法和規律，但目前還尚無法求得給定節點個數任意放節點的最佳擺法。

2、 四方連接圖(圖(六十一))



圖(六十一)

柒、結論

一、 在樹枝狀的圖形中，我們找到並證明了最佳的基本 *IC* 圖($K(G) = S(G)$)

二、 延伸圖形的最佳 *IC* 圖中，我們找到了：

（一） 多重放射圖的最佳擺法

（二） 長鏈放射圖的最佳擺法

（三） 階梯放射圖的最佳擺法

（四） 長鏈與階梯放射之結合最佳擺法

捌、參考資料

一、 *Ebrahim Salehi*，*Sin-Min Lee*，*Mahdad Khatirinejad*，*IC-Colorings and IC-Indices of graphs*

二、 *Yao-Ren Lin*，*A Study of IC-Coloring of Graphs*

三、 *DOUGLAS B. WEST*，*INTRODUCTION TO GRAPH THEORY*

四、 *Chin-Lin*、*ShiueHung-Lin Fu*，*The IC-Indices of Complete Bipartite Graphs*

【評語】040413

本篇作品主要在研究圖的 IC-著色，這是一個源自郵票問題的圖著色問題。給定一個連通圖 G，想要將其所有的頂點都標一個整數，令所有頂點所標的整數的和為 f，則要求標號必須滿足：對所有介於 1 和 f 之間的正整數 k，恆存在一連通子圖，其所有點的標號和為 k。能達到這種性質的的標號，稱為 G 的「IC-著色」，以 M(G) 表示所有 IC-著色中 f 的最大值。

過去的大部分工作，主要是得到一些圖的 M(G) 值的下界，真正能算出 M(G) 正確值的很少。本文最主要的工作是得到長鏈結合圖 G 的 M(G) 的一個下界，這個下界比前人的結果更有改進，算是不錯的結果。

可以改進的有下面幾點：

(1) M(G) 及 IC-著色的定義應該說清楚，特別要強調是要找連通子圖其各頂點標號和為 k。

(2)未清楚說明哪些結果是前人的結果，在哪篇文章發表。例如，第 10 頁中提到「論文」中的答案是 4n+4，到底是哪一篇論文？

(3)第 23 頁的參考資料要寫得更清楚、更正確。例如，出版年月、雜誌、卷數、頁數等均須說明。

(4)長鏈結合圖除了如文中在最後一支改變以外，或許每一支都可以做適當改變，以求得更大的答案。