

中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

040411

十八啦！擲骰子，求組合數

學校名稱：臺北市立中山女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃舒欣	楊佳芳
高二 蔡宜芳	

關鍵詞：循環矩陣、組合個數、骰子和

十八啦！擲骰子，求組合數

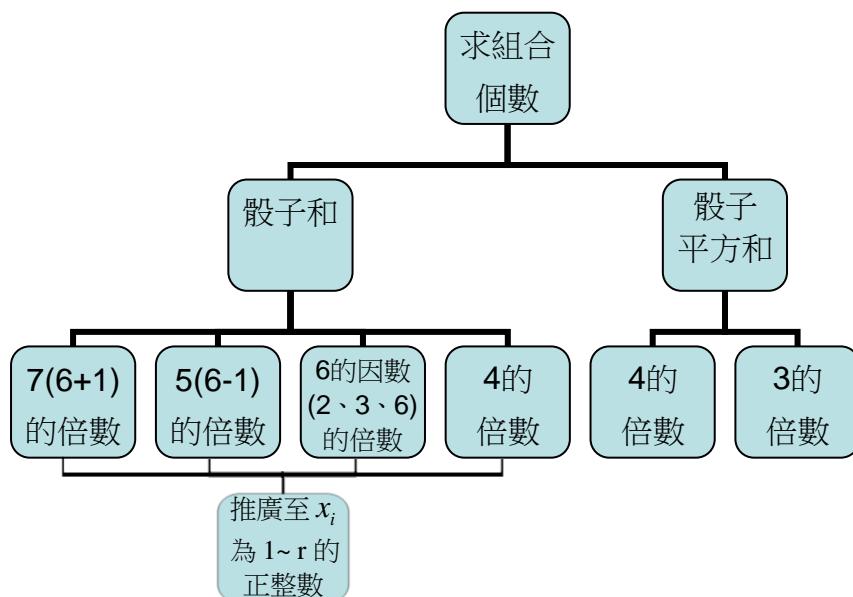
摘要

我們所研究的問題是由許志農教授在「高中數學大賞」書中所提出的問題：設一般子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ，試求 Y_n 為 7、5、3 的倍數之機率為 P_n 。突破以往使用機率方式求解，我們改採用矩陣列出餘數為 0、1、2…的所有組合數，透過矩陣的運算，觀察到各元素間的關係，進而解決上述問題。延續這個技巧，我們再次處理骰子平方和為 4、3 的倍數的組合個數。

壹、研究動機

在一堂數學課中，老師拿了一本許志農教授寫的「高中數學大賞」給我們研讀，我們對書中的某一題題目很感興趣(設一般子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ，試求 Y_n 為 7 的倍數之機率為 P_n)，一開始我們以樹狀圖列出滿足條件的所有可能性，並觀察其特性，發現數字間似乎存在某種規律，讓我們感到非常雀躍。經過許多次的嘗試後，發現矩陣非常符合我們的需求，因此我們開始深入的學習矩陣並利用其解決相關問題。

貳、研究目的



- 一、設一般子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 為 7 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。遵循著七的倍數的方法，討論 Y_n 為五、六、三的倍數時，試求 Y_n 的組合個數。
- 二、設 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 為 $(r+1)$ 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。接著討論 Y_n 為 $(r-1)$ 、 (r) 的因數的倍數時的組合個數 a_n 。
- 三、設一般子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令 $Y_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ，試求 Y_n 為 4 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。接著討論 Y_n 為 3 的倍數時的組合個數 a_n 。

參、研究設備器材

Math type 軟體、Maple 軟體、筆、紙

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與基本性質

(一)、轉換矩陣 $A = [a_{ij}]$ ，其中 a_{ij} 表示使 $Y_{n-1} \equiv (j-1)(\text{mod } r)$ 轉變為 $Y_n \equiv (i-1)(\text{mod } r)$ 的 x_n 所有可能情形個數

例：設骰子連續投擲 n 次後，討論 Y_n 為五的倍數時，所對應的轉換矩陣 A ，其中 a_{11} 為使 $Y_{n-1} \equiv (1-1)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$ 轉變為 $Y_n \equiv (1-1)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$ ，不論 n 為任意正整數，此情形皆發生在 $x_n = 5$ 一種而已，所以 $a_{11}=1$ ；而 a_{15} 為使 $Y_{n-1} \equiv (5-1)(\text{mod } 5) \equiv 4(\text{mod } 5)$ 轉變為 $Y_n \equiv (1-1)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$ 發生在 $x_n = 1, 6$ 兩種情形，所以 $a_{15}=2$ 。

列出所對應的轉換矩陣 A ：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(二)、行矩陣 $Y^{(n)} = \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_r^{(n)} \end{bmatrix}$ ， $y_i^{(n)}$ 為 $Y_n \equiv (i-1)(\text{mod } r)$ 的組合個數。其中 $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

(三)、 $[t]$ 代表小於等於 t 的最大整數值。

(四)、基本性質： $Y^{(n)} = AY^{(n-1)}$ ， $Y^{(n)} = A^n Y^{(0)} = A^{n*1}$ ，(其中 $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ， A^{n*1} 表示 A^n 的第一行。)

二、擲骰子求和為七的倍數

(一)、遊戲規則

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令

$Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ，試求 Y_n 為 7 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。

(二)、利用矩陣列出每項數字並觀察其規律

利用矩陣，不僅能幫助我們看到所求 a_n 的變化規律，且能一併處理其他餘數的情形，甚至它們之間的關聯，因此我們採用矩陣，來解決這個問題。

根據所定義的轉換矩陣，列出

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

再藉由 $Y^{(n)} = AY^{(n-1)}$ 的關係式及 $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 列出 $Y^{(n)}$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} Y^{(1)} & Y^{(2)} & Y^{(3)} & Y^{(4)} & Y^{(5)} \\ \hline \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{30} & \boxed{186} & \boxed{1110} \\ \hline 1 & 5 & 31 & 185 & 1111 \\ 1 & 5 & 31 & 185 & 1111 \\ 1 & 5 & 31 & 185 & 1111 \\ 1 & 5 & 31 & 185 & 1111 \\ 1 & 5 & 31 & 185 & 1111 \\ 1 & 5 & 31 & 185 & 1111 \end{array}$$

所以 $a_1=0, a_2=6, a_3=30, a_4=186, a_5=1110$

(三)、猜測 $a_n = \frac{6^n + (-1)^{n-1}}{7} + (-1)^n = \frac{6}{7} [6^{n-1} - (-1)^{n-1}]$ 並加以證明

性質

- (1). $y_2^{(n)} = y_3^{(n)} = y_4^{(n)} = y_5^{(n)} = y_6^{(n)} = y_7^{(n)}$
- (2). $y_1^{(n)} - y_2^{(n)} = (-1)^n$

證明：

(1)、

I. 當 $n=1$ 時， $y_2^{(1)} = y_3^{(1)} = y_4^{(1)} = y_5^{(1)} = y_6^{(1)} = y_7^{(1)} = 1$

II. 設 $y_2^{(k)} = y_3^{(k)} = y_4^{(k)} = y_5^{(k)} = y_6^{(k)} = y_7^{(k)}$ 成立

則由 $Y^{(n)} = AY^{(n-1)}$ 推得

$$y_2^{(k+1)} = \sum_{i=1}^7 y_i^{(k)} - y_2^{(k)}$$

$$y_3^{(k+1)} = \sum_{i=1}^7 y_i^{(k)} - y_3^{(k)}$$

\vdots

$$y_7^{(k+1)} = \sum_{i=1}^7 y_i^{(k)} - y_7^{(k)}$$

$$\begin{aligned}\because y_2^{(k)} &= y_3^{(k)} = y_4^{(k)} = y_5^{(k)} = y_6^{(k)} = y_7^{(k)} \\ \therefore y_2^{(k+1)} &= y_3^{(k+1)} = y_4^{(k+1)} = y_5^{(k+1)} = y_6^{(k+1)} = y_7^{(k+1)}\end{aligned}$$

(2)、

$$\text{由(1) 及 } Y^{(n)} = AY^{(n-1)}, \text{ 可推得} \begin{cases} y_1^{(n+1)} = 6y_2^{(n)} \\ y_2^{(n+1)} = 5y_2^{(n)} + y_1^{(n)} \end{cases}$$

$$\therefore y_1^{(n+1)} - y_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} - y_1^{(n)} = -(y_1^{(n)} - y_2^{(n)})$$

$$\text{又因為 } y_1^{(0)} - y_2^{(0)} = 1$$

$$\text{故可得 } y_1^{(n)} - y_2^{(n)} = (-1)^n$$

推導一般式

因為投擲骰子 n 次後，共有 6^n 種組合情形，所以 $Y^{(n)}[y_i^{(n)}]$ 內所有元素和為

$$6^n \text{ 即 } 6^n = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + y_3^{(n)} + y_4^{(n)} + y_5^{(n)} + y_6^{(n)} + y_7^{(n)} \\ = y_1^{(n)} + 6y_2^{(n)} \quad \dots \text{①}$$

$$(\because y_2^{(n)} = y_3^{(n)} = y_4^{(n)} = y_5^{(n)} = y_6^{(n)} = y_7^{(n)})$$

$$\text{將性質(2) } y_1^{(n)} - (-1)^n = y_2^{(n)} \text{ 帶入式子①}$$

$$6^n = 7y_1^{(n)} - 6(-1)^n$$

$$\text{所以 } a_n = y_1^{(n)} = \frac{6^n + 6(-1)^n}{7} = \frac{6}{7}[6^{n-1} - (-1)^{n-1}] \text{ 得證。}$$

三、擲骰子求和為五的倍數

(一)、遊戲規則

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令

$Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ，試求 Y_n 為 5 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。

(二)、利用所定義的轉換矩陣列出每項數字並觀察其規律

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y^{(2)} \\ 7 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y^{(3)} \\ 43 \\ 43 \\ 43 \\ 44 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y^{(4)} \\ 259 \\ 259 \\ 259 \\ 259 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y^{(5)} \\ 1556 \\ 1555 \\ 1555 \\ 1555 \\ 1555 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 43, a_4 = 259, a_5 = 1556 \dots \dots$$

(三)、

性質：當 $n=5t$ 時， $y_1^{(n)}$ 會比 $Y^{(n)}$ 中的其他元素多 1；當 $n=5t+l$ ， $1 \leq l \leq 4$ 時， $y_{l+1}^{(n)}$ 會比 $Y^{(n)}$ 中的其他元素多 1。

證明：

由 $Y^{(n+1)} = AY^{(n)}$ 的關係，可推得 $Y^{(n)}$ 與 $Y^{(n+1)}$ 元素之間有下列關係：

$$\begin{cases} y_1^{(n+1)} = \sum_{i=1}^5 y_i^{(n)} + y_5^{(n)} \\ y_2^{(n+1)} = \sum_{i=1}^5 y_i^{(n)} + y_1^{(n)} \\ y_3^{(n+1)} = \sum_{i=1}^5 y_i^{(n)} + y_2^{(n)} \\ y_4^{(n+1)} = \sum_{i=1}^5 y_i^{(n)} + y_3^{(n)} \\ y_5^{(n+1)} = \sum_{i=1}^5 y_i^{(n)} + y_4^{(n)} \end{cases}$$

其中 $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ，依序代入正整數，即可推得此規律。

試求一般解

由上述性質可知：每五個矩陣會循環一次，且其中有一個元素會比其他項多 1。根據這樣的特性，我們可以列出 $y_1^{(n)} = \frac{(6^n - 1)}{5} + f(n)$ ，以 $f(n)$ 來決定是否要比其他項多 1。

下一步來討論 $f(n)$ ， $f(n) = \begin{cases} 1, & n=5k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。我們利用高斯記號的特性，將其改寫為 $f(n) = \left[\frac{n}{5} \right] - \left[\frac{n-1}{5} \right]$ 。最後兩部分合併成為 $a_n = y_1^{(n)} = \frac{(6^n - 1)}{5} + \left[\frac{n}{5} \right] - \left[\frac{n-1}{5} \right]$

四、擲骰子求和為三的倍數

(一)、遊戲規則：

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令

$Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ，試求 Y_n 為 3 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。

(二)、利用所定義的轉換矩陣列出每項數字並觀察其規律

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

矩陣 A 的每個元素都相等，因為要使 $Y_{n-1} \equiv (j-1)(\bmod 3)$ 轉變

為 $Y_n \equiv (i-1)(\bmod 3)$ 的所有可能情形都相等(都是各 2 種方法)。所以

$Y^{(n)} \left[y_i^{(n)} \right] (1 \leq i \leq 3)$ 中的元素也都會相等，且

$$a_n = y_1^{(n)} = y_2^{(n)} = y_3^{(n)} = 2 \sum_{i=1}^3 y_i^{(n-1)} = 2 \times 6^{(n-1)}$$

五、擲骰子求和為四的倍數

(一)、遊戲規則

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1, x_2, \dots, x_n ，令

$Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ，試求 Y_n 為 4 的倍數時，組合數 a_n 的一般解。

(二)、因為 $Y^{(n)} = A^n Y^{(0)} = A^n \cdot 1$ ， $A^n \cdot 1$ 表示 A^n 的第一行，所以我們也可以直接列出轉換矩陣 A 及其 n 次方後的結果，來觀察 a_n 的規律：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 55 & 53 & 53 & 55 \\ 55 & 55 & 53 & 53 \\ 53 & 55 & 55 & 53 \\ 53 & 53 & 55 & 55 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 322 & 324 & 326 & 324 \\ 324 & 322 & 324 & 326 \\ 326 & 324 & 322 & 324 \\ 324 & 326 & 324 & 322 \end{bmatrix} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1946 & 1946 & 1942 & 1942 \\ 1942 & 1946 & 1946 & 1942 \\ 1942 & 1942 & 1946 & 1946 \\ 1946 & 1942 & 1942 & 1946 \end{bmatrix}$$

$$a_1=1, a_2=9, a_3=55, a_4=322, a_5=1946\cdots\cdots$$

從上述我們可以發現 A 矩陣第一行的元素兩兩相同，且數值差 1 或 2，但是因為矩陣裡的數字愈乘愈大，並不容易找出更多的規律，因此我們改用代數 x, d 的方式，重新列出矩陣 B ，取代數字的複雜性，更可以一窺若矩陣中的元素具有兩兩相等的特性，其 n 次後的一般式：

B^1	$\begin{bmatrix} x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \\ x & x+d & x+d & x \end{bmatrix}$
B^2	$\begin{bmatrix} 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 \end{bmatrix}$
B^3	$\begin{bmatrix} 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 \\ 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 \\ 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 \\ 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 \end{bmatrix}$
B^4	$\begin{bmatrix} 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 \\ 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 \\ 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 \\ 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 \end{bmatrix}$

B^5	$\begin{bmatrix} 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 \\ 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 \\ 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 \\ 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 \end{bmatrix}$
-------	--

由上述矩陣可觀察出 $y_1^{(n)} + y_3^{(n)} = y_2^{(n)} + y_4^{(n)} = 2(4)^{n-1}\left(x + \frac{1}{2}d\right)^n$ ，且每隔四個矩陣皆有特殊的關係式，分別條列如下(證明請見(三))

當 $n = 4\ell$ 時的一般解 ($\ell \geq 1$)	當 $n = 4\ell + 1$ 時的一般解 ($\ell \geq 0$)
性質： $\begin{cases} y_2^{(n)} + y_4^{(n)} = 2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n \\ y_2^{(n)} = y_4^{(n)} \\ y_1^{(n)} - y_2^{(n)} = \frac{(-4)^\ell}{2} d^{4\ell} \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)} = y_2^{(n)} + \frac{(-4)^\ell}{2} d^{4\ell}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n - 2(-4)^{\ell-1} d^{4\ell}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n - 2(-4)^{\frac{n-4}{4}} d^n$	性質： $\begin{cases} y_1^{(n)} = y_4^{(n)} \\ y_2^{(n)} = y_3^{(n)} \\ y_1^{(n)} - y_3^{(n)} = -(-4)^\ell d^{4\ell+1} \\ y_1^{(n)} + y_3^{(n)} = 2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)} = \frac{2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + (-(-4)^\ell d^{4\ell+1})}{2}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + 2(-4)^{\ell-1} d^{4\ell+1}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + 2(-4)^{\frac{n-5}{4}} d^n$
當 $n = 4\ell + 2$ 時的一般解 ($\ell \geq 0$)	當 $n = 4\ell + 3$ 時的一般解 ($\ell \geq 0$)
性質： $\begin{cases} y_1^{(n)} = y_3^{(n)} \\ y_1^{(n)} + y_3^{(n)} = 2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)} = \frac{2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n}{2}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n$	性質： $\begin{cases} y_1^{(n)} = y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)} = y_4^{(n)} \\ y_1^{(n)} - y_3^{(n)} = 2(-4)^\ell d^{4\ell+3} \\ y_1^{(n)} + y_3^{(n)} = 2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)} = \frac{2 \times 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + 2(-4)^\ell d^{4\ell+3}}{2}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + (-4)^\ell d^{4\ell+3}$ $= 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + (-4)^{\frac{n-3}{4}} d^n$

我們發現 $y_1^{(n)} = 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + s_n d^n$ ，因此只要求出 s_n 的一般式即可求出 $y_1^{(n)}$ 的一般式。

首先將上述關係，依序代入正整數 n，可得

$y_1^{(1)} = 4^{1-1}(x + \frac{1}{2}d)^1 - \frac{1}{2}d$	$y_1^{(5)} = 4^{5-1}(x + \frac{1}{2}d)^5 + 2d^5$	$y_1^{(9)} = 4^{9-1}(x + \frac{1}{2}d)^9 - 8d^9$
$y_1^{(2)} = 4^{2-1}(x + \frac{1}{2}d)^2 - 0d^2$	$y_1^{(6)} = 4^{6-1}(x + \frac{1}{2}d)^6 + 0d^6$	$y_1^{(10)} = 4^{10-1}(x + \frac{1}{2}d)^{10} - 0d^{10}$
$y_1^{(3)} = 4^{3-1}(x + \frac{1}{2}d)^3 + d^3$	$y_1^{(7)} = 4^{7-1}(x + \frac{1}{2}d)^7 - 4d^7$	$y_1^{(11)} = 4^{11-1}(x + \frac{1}{2}d)^{11} + 16d^{11}$
$y_1^{(4)} = 4^{4-1}(x + \frac{1}{2}d)^4 - 2d^4$	$y_1^{(8)} = 4^{8-1}(x + \frac{1}{2}d)^8 + 8d^8$	$y_1^{(12)} = 4^{12-1}(x + \frac{1}{2}d)^{12} - 32d^{12}$

再來我們將 s_n 拆成三個數列 p_n 、 q_n 、 k_n 、 t_n 的乘積

n	s_n	p_n	q_n	k_n	t_n
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1
2	0	1	0	-1	1
3	1	1	1	1	1
4	-2	2	1	-1	1
5	2	2	1	1	1
6	0	4	0	-1	-1
7	-4	4	1	1	-1
8	8	8	1	-1	-1

下一步來討論 p_n 、 q_n 、 k_n 、 t_n 的一般式

(1). 將 p_n 視為兩兩一組的等比數列，起始值為 $\frac{1}{2}$ ，公比 2，再加上高斯記號的

特性，調整項數，因此列出 $p_n = \frac{1}{2}(2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 。

(2). $q_n = \begin{cases} 0, & n=4k+2 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$ ，將其改寫為 $q_n = \left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1$ 。

(3). 將 k_n 等比數列，起始值為 1，公比-1， $k_n = (-1)^{n-1}$ 。

$$(-1), (1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1), (1,1,1,1) \dots$$

(4). 將數列 $\langle t_n \rangle$ 視為 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ ，其數值不是

第一項 第二項 第三項 第四項

1 就是-1，因此我們以(-1)為底數，以高斯記號調整項數，列出 $t_n = (-1)^{\lceil \frac{n-2}{4} \rceil}$ 。

$$\text{所以 } s_n = \left(\frac{1}{2}(2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1 \right) \times \left((-1)^{(n-1)} \right) \times \left((-1)^{\lceil \frac{n-2}{4} \rceil} \right),$$

接著兩部分合併成為

$$y_1^{(n)} = 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + \left(\frac{1}{2}(2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1 \right) \times \left((-1)^{(n-1)} \right) \times \left((-1)^{\lceil \frac{n-2}{4} \rceil} \right) d^n$$

，最後將 $x=1$ ， $d=1$ 代入可求得組合個數

$$a_n = \frac{(6^n)}{4} + \left(\frac{1}{2}(2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1 \right) \times \left((-1)^{(n-1)} \right) \times \left((-1)^{\lceil \frac{n-2}{4} \rceil} \right)$$

(三)、證明上述定理

$$(1). \boxed{\text{定理 : } y_1^{(n)} + y_3^{(n)} = y_2^{(n)} + y_4^{(n)} = 2(4)^{n-1} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^n}$$

證明 :

由矩陣 B 及 $Y^{(n)} = BY^{(n-1)}$ ，可推得各個 $y_i^{(n)}$ 的值， $1 \leq i \leq 4$ ，

$$y_1^{(n)} = (x)y_1^{(n-1)} + (x)y_2^{(n-1)} + (x+d)y_3^{(n-1)} + (x+d)y_4^{(n-1)} \dots \dots \textcircled{1}$$

$$y_2^{(n)} = (x+d)y_1^{(n-1)} + (x)y_2^{(n-1)} + (x)y_3^{(n-1)} + (x+d)y_4^{(n-1)} \dots \dots \textcircled{2}$$

$$y_3^{(n)} = (x+d)y_1^{(n-1)} + (x+d)y_2^{(n-1)} + (x)y_3^{(n-1)} + (x)y_4^{(n-1)} \dots \dots \textcircled{3}$$

$$y_4^{(n)} = (x)y_1^{(n-1)} + (x+d)y_2^{(n-1)} + (x+d)y_3^{(n-1)} + (x)y_4^{(n-1)} \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\therefore \textcircled{1} + \textcircled{3} = \textcircled{2} + \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1^{(n)} + y_3^{(n)} &= y_2^{(n)} + y_4^{(n)} = (2x+d) \left(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)} + y_3^{(n-1)} + y_4^{(n-1)} \right) \\ &= (2x+d) \left(4^{n-1} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^{n-1} \right) \\ &= 2 \times 4^{n-1} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^n \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &\because y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)} + y_3^{(n-1)} + y_4^{(n-1)} = 2(2x+d) \left(y_1^{(n-2)} + y_2^{(n-2)} + y_3^{(n-2)} + y_4^{(n-2)} \right) \\ &= 4^2 \left(x + \frac{1}{2}d \right)^2 \left(y_1^{(n-3)} + y_2^{(n-3)} + y_3^{(n-3)} + y_4^{(n-3)} \right) \\ &\quad \vdots \\ &= 4^{n-2} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^{n-2} \left(y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + y_3^{(1)} + y_4^{(1)} \right) \\ &= 4^{n-2} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^{n-2} (4x+2d) \\ &= 4^{n-1} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^{n-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{故 } y_1^{(n)} + y_3^{(n)} = y_2^{(n)} + y_4^{(n)} = 2(4)^{n-1} \left(x + \frac{1}{2}d \right)^n$$

(2). 因為觀察到每隔四個行矩陣 $Y^{(n)}$ 會有相同的規律，例如 $Y^{(1)}$ 、 $Y^{(5)}$ 、 $Y^{(9)}$...，

$$n = 4\ell + 1 \text{ 時，都符合 } \begin{cases} y_1^{(n)} = y_4^{(n)} \\ y_2^{(n)} = y_3^{(n)} \\ y_1^{(n)} - y_3^{(n)} = -(-4)^\ell d^{4\ell+1} \end{cases} \text{ 的特質，我們利用}$$

$Y^{(n)} = (B)^4 Y^{(n-4)}$ 的關係式及數學歸納法，分別證明當 $n = 4\ell$ 、 $n = 4\ell + 1$ 、 $n = 4\ell + 2$ 、 $n = 4\ell + 3$ 四種情形。

性質一：當 $n=4\ell+1$ 時， $y_1^{(n)} = y_4^{(n)}$ ， $y_2^{(n)} = y_3^{(n)}$ ，且 $y_1^{(n)} - y_3^{(n)} = -(-4)^\ell d^{4\ell+1}$

證明：

I. 當 $\ell=0$ ， $n=1$ 時， $y_1^{(1)} = y_4^{(1)} = x$ ， $y_2^{(1)} = y_3^{(1)} = x+d$ ，
 $y_1^{(1)} - y_3^{(1)} = -d = -(-4)^0 \times d^{(4 \times 0 + 1)}$ 成立

II. 設 $Y^{(4\ell+1)} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ q \\ p \end{bmatrix}$ ，且 $p-q = -(-4)^\ell d^{4\ell+1}$ 則

$$Y^{(4(\ell+1)+1)} = (B)^4 Y^{(4\ell+1)} = \begin{bmatrix} 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) - 2d^4(p-q) \\ 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) + 2d^4(p-q) \\ 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) + 2d^4(p-q) \\ 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) - 2d^4(p-q) \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow y_1^{(4(\ell+1)+1)} = y_4^{(4(\ell+1)+1)}, y_2^{(4(\ell+1)+1)} = y_3^{(4(\ell+1)+1)}$$

$$\text{且 } y_1^{(4(\ell+1)+1)} - y_3^{(4(\ell+1)+1)}$$

$$= -4d^4(p-q)$$

$$= -4d^4(-(-4)^\ell d^{4\ell+1})$$

$$= -(-4)^{\ell+1} d^{4(\ell+1)+1}$$

故得證

性質二：當 $n=4\ell+2$ 時， $y_1^{(n)} = y_3^{(n)}$

證明：

I. 當 $\ell=0$ ， $n=2$ 時， $y_1^{(2)} = y_3^{(2)} = 4(x + \frac{1}{2}d)^2$ 成立

II. 設 $Y^{(4\ell+2)} = \begin{bmatrix} p \\ a \\ p \\ b \end{bmatrix}$ ，則 $Y^{(4(\ell+1)+2)} = (B)^4 Y^{(4\ell+2)} = \begin{bmatrix} 64(x + \frac{1}{2}d)^4(2p+a+b) \\ 64(x + \frac{1}{2}d)^4(2p+a+b) - 2d^4(a-b) \\ 64(x + \frac{1}{2}d)^4(2p+a+b) \\ 64(x + \frac{1}{2}d)^4(2p+a+b) + 2d^4(a-b) \end{bmatrix}$

所以 $y_1^{(4(\ell+1)+2)} = y_3^{(4(\ell+1)+2)}$ ，故得證

性質三：當 $n=4\ell+3$ 時， $y_1^{(n)} = y_2^{(n)}$ ， $y_3^{(n)} = y_4^{(n)}$ ，且 $y_1^{(n)} - y_3^{(n)} = 2(-4)^\ell d^{4\ell+3}$

證明：

I. 當 $\ell=0$ ， $n=3$ 時， $y_1^{(3)} = y_2^{(3)} = 16(x + \frac{1}{2}d)^3 + d^3$ ，

$$y_3^{(3)} = y_4^{(3)} = 16(x + \frac{1}{2}d)^3 - d^3, \quad y_1^{(3)} - y_3^{(3)} = 2d^3 = 2(-4)^0 d^{(4 \times 0 + 3)} \text{ 成立}$$

II. 設 $Y^{(4\ell+3)} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ q \\ q \end{bmatrix}$, 且 $p-q=2(-4)^\ell d^{4\ell+3}$, 則

$$Y^{(4(\ell+1)+3)} = (B)^4 Y^{(4\ell+3)} = \begin{bmatrix} 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) - 2d^4(p-q) \\ 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) - 2d^4(p-q) \\ 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) + 2d^4(p-q) \\ 128(x + \frac{1}{2}d)^4(p+q) + 2d^4(p-q) \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow y_1^{(4(\ell+1)+3)} = y_2^{(4(\ell+1)+3)} \text{ 且 } y_3^{(4(\ell+1)+3)} = y_4^{(4(\ell+1)+3)}$$

$$\text{且 } y_1^{(4(\ell+1)+3)} - y_3^{(4(\ell+1)+3)}$$

$$= -4d^4(p-q)$$

$$= -4d^4(2(-4)^\ell d^{4\ell+3})$$

故得證

$$= 2(-4)^{\ell+1} d^{(4(\ell+1)+3)}$$

性質四：當 $n=4\ell$ 時， $y_2^{(n)} = y_4^{(n)}$ ， $y_1^{(n)} = y_2^{(n)} + k$ ， $y_3^{(n)} = y_2^{(n)} - k$ ，且
 $k = \frac{(-4)^\ell}{2} d^{4\ell}$

證明：

$$\text{I. 當 } \ell=1, n=4 \text{ 時, } y_2^{(4)} = y_4^{(4)} = 64(x + \frac{1}{2}d)^4, \quad y_1^{(4)} = y_2^{(4)} + (-2d^4),$$

$$y_3^{(4)} = y_2^{(4)} - (-2d^4) \text{ 成立}$$

II. 設 $Y^{(4\ell)} = \begin{bmatrix} p+k \\ p \\ p-k \\ p \end{bmatrix}$, 其中 $k = \frac{(-4)^\ell}{2} d^{4\ell}$, 則

$$Y^{(4(\ell+1))} = (B)^4 Y^{(4\ell)} = \begin{bmatrix} 256(x + \frac{1}{2}d)^4 - 4kd^4 \\ 256(x + \frac{1}{2}d)^4 \\ 256(x + \frac{1}{2}d)^4 + 4kd^4 \\ 256(x + \frac{1}{2}d)^4 \end{bmatrix}, \Rightarrow y_2^{(4(\ell+1))} = y_4^{(4(\ell+1))}$$

$$\text{且 } y_1^{(4(\ell+1))} - y_2^{(4(\ell+1))} = y_2^{(4(\ell+1))} - y_3^{(4(\ell+1))} = -4kd^4 = -4d^4 \left(\frac{(-4)^\ell}{2} d^{4\ell} \right) = \frac{(-4)^{\ell+1}}{2} d^{4(\ell+1)}$$

，故得證

六、推廣至一般性

仿照上述的討論，將遊戲規則推廣成 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數，而不再侷限於骰子的情形。

(一)、**問題**當 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數，試求 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv 0 \pmod{r+1}$ 之組合個數 a_n 。

列出相對應的轉換矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，並由 $Y^{(n+1)} = AY^{(n)}$ ，可得

$$\text{到下列關係式 } \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{r+1} y_i^{(k)} - y_1^{(k)} \\ y_2^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{r+1} y_i^{(k)} - y_2^{(k)} \\ y_3^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{r+1} y_i^{(k)} - y_3^{(k)} \\ \vdots \\ y_{(r+1)}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{r+1} y_i^{(k)} - y_{(r+1)}^{(k)} \end{array} \right. , \text{ 其中 } Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此可找出類似於研究方法二中關於 $Y^{(n)}$ 的性質：

$$(1). \quad y_2^{(n)} = y_3^{(n)} = y_4^{(n)} = \cdots = y_{(r+1)}^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(2). \quad y_1^{(n)} - y_2^{(n)} = (-1)^n$$

又已知 $Y^{(n)} \left[y_i^{(n)} \right] (1 \leq i \leq r+1)$ 內所有元素和為 r^n

$$\begin{aligned} \text{即 } r^n &= y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + y_3^{(n)} + \cdots + y_{(r)}^{(n)} + y_{(r+1)}^{(n)} \\ &= y_1^{(n)} + (n)y_2^{(n)} \cdots \text{①} \quad (\because y_2^{(n)} = y_3^{(n)} = y_4^{(n)} = \cdots = y_{(r+1)}^{(n)}) \end{aligned}$$

將性質(2) $y_1^{(n)} - (-1)^n = y_2^{(n)}$ 帶入式子①

$$\text{可得 } r^n = (r+1)y_1^{(n)} - r(-1)^n, \text{ 所以 } a_n = y_1^{(n)} = \frac{r^n + r(-1)^n}{r+1} = \frac{r}{r+1} \left[r^{n-1} - (-1)^{n-1} \right].$$

(二)、**問題**當 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數，試求 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv 0 \pmod{r-1}$ 之組合個數 a_n 。

列出相對應的轉換矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 2 \\ \hline 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & 1 \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，並由 $Y^{(n+1)} = AY^{(n)}$ ，可得到下列

$$\text{關係式} \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r-1} y_i^{(n)} + y_{r-1}^{(n)} \\ y_2^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r-1} y_i^{(n)} + y_1^{(n)} \\ \vdots \\ y_{r-1}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r-1} y_i^{(n)} + y_{r-2}^{(n)} \end{array} \right. \quad \text{其中 } Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

依序代入正整數，即可推得類似於研究方法三中關於 $Y^{(n)}$ 的性質：

當 n 為 $(r-1)$ 的倍數時， $y_1^{(n)}$ 會比 $Y^{(n)}$ 中的其他元素多 1；

當 $n = (r-1)t + l, 1 \leq l < (r-1), t \in \mathbb{N}$ 時， $y_{l+1}^{(n)}$ 會比 $Y^{(n)}$ 中的其他元素多 1。

由上述性質可知：每 $(r-1)$ 個矩陣會循環一次，且其中有一個元素會比其他項多 1。根據這樣的特性，我們可以列出 $y_1^{(n)} = \frac{(r^n - 1)}{r-1} + f(n)$ ，以 $f(n)$ 來決定是否要比其他項多 1。

下一步來討論 $f(n)$ ， $f(n) = \begin{cases} 1, & n = (r-1)k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。我們利用高斯記號的特性，將其

改寫為 $f(n) = \left[\frac{n}{r-1} \right] - \left[\frac{n-1}{r-1} \right]$ 。

最後兩部分合併成為 $a_n = y_1^{(n)} = \frac{(r^n - 1)}{r-1} + \left[\frac{n}{r-1} \right] - \left[\frac{n-1}{r-1} \right]$

(三)、問題當 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數，試求 $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv 0 \pmod{r}$ (的因數) 之組合個數 a_n 。

列出相對應的轉換矩陣

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} & \dots & \dots & \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} \\ \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} & \dots & \dots & \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} & \dots & \dots & \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} \\ \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} & \dots & \dots & \frac{r}{r \text{的因數}} & \frac{r}{r \text{的因數}} \end{bmatrix} = \frac{r}{r \text{的因數}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

矩陣 A 的每個元素都相等，因為要使 $Y_{n-1} \equiv (j-1) \pmod{r}$ 轉變為

$Y_n \equiv (i-1) \pmod{r}$ (的因數) 的所有可能情形都相等(都是各 $\frac{r}{r \text{的因數}}$ 種方法)。所以

$Y^{(n)} \left[y_i^{(n)} \right]$ 中的元素也都會相等，且

$$a_n = y_1^{(n)} = y_2^{(n)} = \dots = y_{(r \text{的因數})}^{(n)} = \frac{r}{r \text{的因數}} \sum_{i=1}^{r \text{的因數}} y_i^{(n-1)} = \frac{r}{r \text{的因數}} \times r^{(n-1)}$$

七、擲骰子求平方和為四的倍數

(一)、遊戲規則

記錄每次骰出的點數，將其數值依序命名為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，令

$$Y_n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2, \text{ 並且 } a_n \text{ 是 } Y_n \text{ 為四的倍數的所有可能情形個數}。$$

(二)、利用矩陣列出每項數字並觀察其規律

偶數的平方除以 4 會被整除，奇數平方除以 4 會餘 1，現在有 1~6 六個數，所以平方後除以 4，會有 3 個數被整除，3 個數餘 1，因此每次擲出骰子後，有三種可能維持原狀，三種可能會是原狀加上 1，所以可以列出以下的

$$\text{轉換矩陣 } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{我們發現 } A \text{ 矩陣與研究過程五中所提及的 } B \text{ 矩陣} \begin{bmatrix} x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \\ x & x+d & x+d & x \end{bmatrix}$$

$$\text{有相似之處，若 } B = [b_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \\ b_{4*} \end{bmatrix} (b_{i*} \text{ 表示 } B \text{ 的第 } i \text{ 列}) \text{，則}$$

$$A = \begin{bmatrix} b_{4*} \\ b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix} \text{ 其中 } x=3, d=-3.$$

性質：

$$\text{若循環矩陣 } B = \begin{bmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \\ b_{4*} \end{bmatrix}, \text{ 且 } B^n = \begin{bmatrix} b_{1*}^{(n)} \\ b_{2*}^{(n)} \\ b_{3*}^{(n)} \\ b_{4*}^{(n)} \end{bmatrix}, \text{ 又 } A = \begin{bmatrix} b_{4*} \\ b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \end{bmatrix}$$

$$\text{則 } A^{4k+1} = \begin{bmatrix} b_{4*}^{(4k+1)} \\ b_{1*}^{(4k+1)} \\ b_{2*}^{(4k+1)} \\ b_{3*}^{(4k+1)} \end{bmatrix}, A^{4k+2} = \begin{bmatrix} b_{3*}^{(4k+2)} \\ b_{4*}^{(4k+2)} \\ b_{1*}^{(4k+2)} \\ b_{2*}^{(4k+2)} \end{bmatrix}, A^{4k+3} = \begin{bmatrix} b_{2*}^{(4k+3)} \\ b_{3*}^{(4k+3)} \\ b_{4*}^{(4k+3)} \\ b_{1*}^{(4k+3)} \end{bmatrix}, A^{4k+4} = \begin{bmatrix} b_{1*}^{(4k+4)} \\ b_{2*}^{(4k+4)} \\ b_{3*}^{(4k+4)} \\ b_{4*}^{(4k+4)} \end{bmatrix},$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

詳細證明過程請見附錄。

由上述性質可推得當 $A = \begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$ 時，

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 - d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + d^2 & 4\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 \\ 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 \\ 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 \\ 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 - d^3 & 16\left(x + \frac{1}{2}d\right)^3 + d^3 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 \\ 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 \\ 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 \\ 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 + 2d^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x + \frac{1}{2}d\right)^4 - 2d^4 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 \\ 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 \\ 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 \\ 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 - 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 & 256\left(x + \frac{1}{2}d\right)^5 + 2d^5 \end{bmatrix}$$

再來我們發現 A^{n+1} 中的 $y_1^{(n)}$ 與 B^{n+1} 中的 $y_1^{(n)}$ 是相等的，所以我們可以得知

$$a_n = y_1^{(n)} = 4^{n-1}(x + \frac{1}{2}d)^n + \left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4}\right] - \left[\frac{n+2}{4}\right] + 1\right) \times \left((-1)^{(n-1)}\right) \times \left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right) d^n$$

當我們在求骰子平方和為 4 的倍數時，其所對應的矩陣為 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，

因此將 $x=3$ ， $d=-3$ 代入可得到

$$a_n = \frac{(6^n)}{4} + \left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2} \right]} \right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1 \right) \times \left((-1)^{(n-1)} \right) \times \left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4} \right]} \right) (-3)^n$$

八、擲骰子求平方和為三的倍數

(一)、遊戲規則

記錄每次骰出的點數，將其數值依序命名為 x_1 、 x_2 、 x_3 …… x_n ，令

$$Y_n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2，並且 a_n 是 Y_n 為三的倍數的所有可能情形個數。$$

(二)、我們直接列出轉換矩陣 A 及 n 次方後的結果，來觀察 a_n 的規律：

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} & A^2 &= \begin{bmatrix} 4 & 16 & 16 \\ 16 & 4 & 16 \\ 16 & 16 & 4 \end{bmatrix} & A^3 &= \begin{bmatrix} 72 & 96 & 48 \\ 48 & 72 & 96 \\ 96 & 48 & 72 \end{bmatrix} \\ A^4 &= \begin{bmatrix} 528 & 384 & 384 \\ 384 & 528 & 384 \\ 384 & 384 & 528 \end{bmatrix} & A^5 &= \begin{bmatrix} 2592 & 2304 & 2880 \\ 2880 & 2592 & 2304 \\ 2304 & 2880 & 2592 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以 $a_1=2$ ， $a_2=4$ ， $a_3=72$ ， $a_4=528$ ， $a_5=2592$ ……

從上述表格，我們可以發現第一行的元素不是相同，就是會有等差的關係，但是因為矩陣裡的數字愈乘愈大，並不容易找出更多的規律，因此我們改用代數 x 、 d 的方式，重新列出矩陣 B，取代數字的複雜性，更可以一窺若矩陣中的元素具有等差關係，其 n 次後的一般式：

B^1	$\begin{bmatrix} x+d & x & x+2d \\ x+2d & x+d & x \\ x & x+2d & x+d \end{bmatrix}$
B^2	$\begin{bmatrix} 3(x+d)^2 - 2d^2 & 3(x+d)^2 + d^2 & 3(x+d)^2 + d^2 \\ 3(x+d)^2 + d^2 & 3(x+d)^2 - 2d^2 & 3(x+d)^2 + d^2 \\ 3(x+d)^2 + d^2 & 3(x+d)^2 + d^2 & 3(x+d)^2 - 2d^2 \end{bmatrix}$
B^3	$\begin{bmatrix} 9(x+d)^3 & 9(x+d)^3 + 3d^3 & 9(x+d)^3 - 3d^3 \\ 9(x+d)^3 - 3d^3 & 9(x+d)^3 & 9(x+d)^3 + 3d^3 \\ 9(x+d)^3 + 3d^3 & 9(x+d)^3 - 3d^3 & 9(x+d)^3 \end{bmatrix}$
B^4	$\begin{bmatrix} 27(x+d)^4 + 6d^4 & 27(x+d)^4 - 3d^4 & 27(x+d)^4 - 3d^4 \\ 27(x+d)^4 - 3d^4 & 27(x+d)^4 + 6d^4 & 27(x+d)^4 - 3d^4 \\ 27(x+d)^4 - 3d^4 & 27(x+d)^4 - 3d^4 & 27(x+d)^4 + 6d^4 \end{bmatrix}$
B^5	$\begin{bmatrix} 81(x+d)^5 & 81(x+d)^5 - 9d^5 & 81(x+d)^5 + 9d^5 \\ 81(x+d)^5 + 9d^5 & 81(x+d)^5 & 81(x+d)^5 - 9d^5 \\ 81(x+d)^5 - 9d^5 & 81(x+d)^5 + 9d^5 & 81(x+d)^5 \end{bmatrix}$
B^6	$\begin{bmatrix} 243(x+d)^6 - 18d^6 & 243(x+d)^6 + 9d^6 & 243(x+d)^6 + 9d^6 \\ 243(x+d)^6 + 9d^6 & 243(x+d)^6 - 18d^6 & 243(x+d)^6 + 9d^6 \\ 243(x+d)^6 + 9d^6 & 243(x+d)^6 + 9d^6 & 243(x+d)^6 - 18d^6 \end{bmatrix}$

(三)、觀察上述表格規律推測以下性質：

$$(1). \quad B^{2k+1} = \begin{bmatrix} 3^{2k}(x+d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} - (-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} + (-3)^k(d)^{2k+1} \\ 3^{2k}(x+d)^{2k+1} + (-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} - (-3)^k(d)^{2k+1} \\ 3^{2k}(x+d)^{2k+1} - (-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} + (-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} \end{bmatrix}$$

$$(2). \quad B^{2k} = \begin{bmatrix} 3^{2k-1}(x+d)^{2k} - 2(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k} + (-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k} + (-3)^{k-1}(d)^{2k} \\ 3^{2k-1}(x+d)^{2k} + (-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k} - 2(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k} + (-3)^{k-1}(d)^{2k} \\ 3^{2k-1}(x+d)^{2k} + (-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k} + (-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k} - 2(-3)^{k-1}(d)^{2k} \end{bmatrix}$$

證明：

$$(1). \quad \text{令 } B^n = \begin{bmatrix} b_{ij}^n \end{bmatrix}$$

$$\text{I. 當 } k=0 \text{ 時, } B^1 = \begin{bmatrix} x+d & x & x+2d \\ x+2d & x+d & x \\ x & x+2d & x+d \end{bmatrix}$$

II. 設 $k=t$ 時，

$$B^{2t+1} = \begin{bmatrix} 3^{2t}(x+d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} - (-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} + (-3)^t(d)^{2t+1} \\ 3^{2t}(x+d)^{2t+1} + (-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} - (-3)^t(d)^{2t+1} \\ 3^{2t}(x+d)^{2t+1} - (-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} + (-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} \end{bmatrix}$$

成立，則當 $k=t+1$ 時，由 $B^{2t+3} = B^{2t+1}B^2$ 推得

$$\begin{aligned} b_{11}^{(2t+3)} &= b_{11}^{(2t+1)} \times b_{11}^{(2)} + b_{12}^{(2t+1)} \times b_{21}^{(2)} + b_{13}^{(2t+1)} \times b_{31}^{(2)} \\ &= \left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right)\left(3(x+d)^2 - 2d^2\right) + \left(3^{2t}(x+d)^{2t+1} + (-3)^t(d)^{2t+1}\right)\left(3(x+d)^2 + d^2\right) \\ &\quad + \left(3^{2t}(x+d)^{2t+1} - (-3)^t(d)^{2t+1}\right)\left(3(x+d)^2 + d^2\right) \\ &= 3^{2t+1}(x+d)^{2t+3} - 2d^2\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right) + 3^{2t+1}(x+d)^{2t+3} + d^2\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right) \\ &\quad + 3(x+d)^2\left((-3)^t(d)^{2t+1}\right) + (-3)^t(d)^{2t+3} + 3^{2t+1}(x+d)^{2t+3} + d^2\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right) \\ &\quad - 3(x+d)^2\left((-3)^t(d)^{2t+1}\right) - (-3)^t(d)^{2t+3} \\ &= 3^{2t+2}(x+d)^{2t+3} \\ &= 3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1} \end{aligned}$$

$\therefore b_{11}^{(2(t+1)+1)} = 3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1}$ ，仿照上述方式可得

$$b_{21}^{(2(t+1)+1)} = 3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1} + (-3)^{(t+1)}(d)^{2(t+1)+1}，$$

$$b_{31}^{(2(t+1)+1)} = 3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1} - (-3)^{(t+1)}(d)^{2(t+1)+1}$$

最後我們可由循環方陣相乘仍為循環矩陣(見《矩陣》，pp: 90)得知
 $b_{11}^{(n)} = b_{22}^{(n)} = b_{33}^{(n)}$ ， $b_{21}^{(n)} = b_{32}^{(n)} = b_{13}^{(n)}$ ， $b_{31}^{(n)} = b_{12}^{(n)} = b_{23}^{(n)}$ ，故得證

(2). 仿照上述方式可證性質(2)

推導一般式

從上述性質，我們可推得 $b_{11}^{(n)}$ 一般式

$$b_{11}^{(n)} = 3^{(n-1)}(x+d)^n - 2d^n \left(\frac{1^n + (-1)^n}{2} \right) (-3)^{\left[\frac{n-1}{2} \right]}.$$

當我們在求骰子平方和為 3 的倍數時，其所對應的矩陣為 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ，因此將

$$x=0, d=2 \text{ 代入上式，即可得到組合數 } a_n = 3^{(n-1)}(2)^n - 2 \times 2^n \left(\frac{1^n + (-1)^n}{2} \right) (-3)^{\left[\frac{n-1}{2} \right]}$$

伍、研究結果

一、

(一)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 7 的倍數時，組合個數 $a_n = \frac{6}{7} [6^{n-1} - (-1)^{n-1}]$

(二)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 5 的倍數時，組合個數

$$a_n = \frac{1}{5} \times (6^n - 1) + \left[\frac{n}{5} \right] - \left[\frac{n-1}{5} \right]$$

(三)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 3 的倍數時，組合個數 $a_n = 2 \times 6^{n-1}$

(四)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 4 的倍數時，組合個數

$$a_n = \frac{(6^n)}{4} + \left(\frac{1}{2} (2)^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1 \right) \times \left((-1)^{(n-1)} \right) \times \left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4} \right]} \right)$$

二、

(一)、 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數，則 $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv 0 \pmod{r+1}$ 的組合個數

$$a_n = \frac{r}{r+1} [r^{n-1} - (-1)^{n-1}]$$

(二)、 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數， $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv 0 \pmod{r-1}$ 的組合個數

$$a_n = \frac{1}{r-1} \times (r^n - 1) + \left[\frac{n}{r-1} \right] - \left[\frac{n-1}{r-1} \right]$$

(三)、 x_i 為 $1 \sim r$ 的正整數， $Y_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \equiv 0 \pmod{r}$ 的組合個數

$$a_n = \frac{r}{r \text{ 的因數}} \times r^{n-1}$$

三、

(一)、一般子連續投擲 n 次後，其 $\boxed{\text{平方和}}$ Y_n 為 4 的倍數時，組合個數

$$a_n = \frac{(6^n)}{4} + \left(\frac{1}{2} (2)^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \right) \times \left(\left[\frac{n+1}{4} \right] - \left[\frac{n+2}{4} \right] + 1 \right) \times \left((-1)^{(n-1)} \right) \times \left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4} \right]} \right) (-3)^n$$

(二)、一般子連續投擲 n 次後，其 $\boxed{\text{平方和}}$ Y_n 為 3 的倍數時，組合個數

$$a_n = 3^{(n-1)} (2)^n - 2 \times 2^n \left(\frac{1^n + (-1)^n}{2} \right) (-3)^{\left[\frac{n-1}{2} \right]}$$

陸、 討論

在研究的過程中，我們發現一些循環矩陣 A 連乘 n 次方後的特性：

一、在「投擲骰子 n 次後求 $\boxed{\text{平方和}} \text{為 } 4 \text{ 的倍數}$ 」時(研究過程或方法中的第七點)，我們可

得到一矩陣 $A = \begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$ ，接著我們又再求「投擲骰子 n 次後求 $\boxed{\text{和}} \text{為 } 4 \text{ 的倍數}$ 」時(研究過程或方法中的第五點)，我們可以得到另一矩陣

$B = \begin{bmatrix} x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \\ x & x+d & x+d & x \end{bmatrix}$ ，從中我們可以發現兩個矩陣，各自 n 次方後，有

著密切的關係，。如 $A^{4k+1} = \begin{bmatrix} b_{4*}^{(4k+1)} \\ b_{1*}^{(4k+1)} \\ b_{2*}^{(4k+1)} \\ b_{3*}^{(4k+1)} \end{bmatrix}$ 即 A^{4k+1} 會等於 B^{4k+1} 中每一列下移一列，又

$A^{4k+2} = \begin{bmatrix} b_{3*}^{(4k+2)} \\ b_{4*}^{(4k+2)} \\ b_{1*}^{(4k+2)} \\ b_{2*}^{(4k+2)} \end{bmatrix}$ 即 A^{4k+2} 會等於 B^{4k+2} 中每一列下移兩列。

二、在「投擲骰子 n 次後求 $\boxed{\text{平方和}} \text{為 } 3 \text{ 的倍數}$ 」時(研究過程或方法中的第八點)，發現 3 階循環矩陣 A 中的元素有等差關係，則 A^n 也有特殊的規律。是否這樣的規律仍能推廣至 4 階或更高階的循環矩陣中。

三、在「投擲骰子 n 次後求 $\boxed{\text{平方和}} \text{為 } 4 \text{ 的倍數}$ 」時(研究過程或方法中的第七點)，我們可

得到一矩陣 $A = \begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$ ，發現具有如此特性的矩陣，也可以順

利推測它 n 次方後的規律。因此我們很好奇是否還存在有更多循環矩陣 A 與 A^n 之間的關聯性。

柒、 結論

本次科展的主題在研究骰子和、骰子平方和為 k 的倍數時的組合個數，一開始我們使用土法煉鋼的方式列出所有的情形，但是不易觀察規律，所以我們改用矩陣，並透過 Maple 軟體處理數據，最後利用數學歸納法證明所觀察到的規律，進而成功地推導出結果。利用這個技巧，我們成功地解決骰子和為 2~7 的倍數的組合個數，以及骰子平方和為 3、4 的倍數的組合個數，在這個過程中，我們意外看到許多循環矩陣 A 與其 n 次方的巧妙關聯，是否將來能在這方面，找到更多的關聯性。

捌、 參考資料及其他

- 一、 許志農，《高中數學大賞》，pp:66~67，2003
- 二、 高中數學第四冊、第五冊
- 三、 林義雄，《矩陣》，九章出版社，pp：80~91，1987

附錄

證明研究過程或方法七的相關性質

(一)、

性質：

$$\text{若循環矩陣 } B = \begin{bmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \\ b_{4*} \end{bmatrix}, \text{ 且 } B^n = \begin{bmatrix} b_{1*}^{(n)} \\ b_{2*}^{(n)} \\ b_{3*}^{(n)} \\ b_{4*}^{(n)} \end{bmatrix}, \text{ 又 } A = \begin{bmatrix} b_{4*} \\ b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \end{bmatrix}$$

$$\text{則 } A^{4k+1} = \begin{bmatrix} b_{4*}^{(4k+1)} \\ b_{1*}^{(4k+1)} \\ b_{2*}^{(4k+1)} \\ b_{3*}^{(4k+1)} \end{bmatrix}, A^{4k+2} = \begin{bmatrix} b_{3*}^{(4k+2)} \\ b_{4*}^{(4k+2)} \\ b_{1*}^{(4k+2)} \\ b_{2*}^{(4k+2)} \end{bmatrix}, A^{4k+3} = \begin{bmatrix} b_{2*}^{(4k+3)} \\ b_{3*}^{(4k+3)} \\ b_{4*}^{(4k+3)} \\ b_{1*}^{(4k+3)} \end{bmatrix}, A^{4k+4} = \begin{bmatrix} b_{1*}^{(4k+4)} \\ b_{2*}^{(4k+4)} \\ b_{3*}^{(4k+4)} \\ b_{4*}^{(4k+4)} \end{bmatrix},$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

證明：

$$\text{令 } X = \begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \text{ 為 } X \text{ 矩陣, } Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ 為 } Y \text{ 矩陣, } XY = \begin{bmatrix} Aa + Bd + Cc + Db \\ Ab + Ba + Cd + Dc \\ Ac + Bb + Ca + Dd \\ Ad + Bc + Cb + Da \end{bmatrix},$$

$$\text{再令 } Y \text{ 矩陣中的每一元素下移後的另一矩陣為 } Z \text{ 矩陣, } Z = \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

	$\begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bd + Cc + Db \\ Ab + Ba + Cd + Dc \\ Ac + Bb + Ca + Dd \\ Ad + Bc + Cb + Da \end{bmatrix} = XY$	
1	$\begin{bmatrix} D & C & B & A \\ A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ac + Bb + Ca + Dd \\ Ad + Bc + Cb + Da \\ Aa + Bd + Cc + Db \\ Ab + Ba + Cd + Dc \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 1 列後乘上 Z 矩陣可得到另一矩陣，此矩陣為 XY 矩陣中的每一列下移 2 列後的結果
2	$\begin{bmatrix} C & B & A & B \\ D & C & B & D \\ A & D & C & B \\ B & A & D & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab + Ba + Cd + Dc \\ Ac + Bb + Ca + Dd \\ Ad + Bc + Cb + Da \\ Aa + Bd + Cc + Db \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 2 列後乘上 Z 矩陣可得到另一矩陣，此矩陣為 XY 矩陣中的每一列下移 3 列後的結果

3	$\begin{bmatrix} B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \\ A & D & C & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bd + Cc + Db \\ Ab + Ba + Cd + Dc \\ Ac + Bb + Ca + Dd \\ Ad + Bc + Cb + Da \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 3 列後乘上 Z 矩陣可得到另一 矩陣，此矩陣為 XY 矩陣中的 每一列下移 4 列後的結果，也 就是兩者結果相等
4	$\begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ad + Bc + Cb + Da \\ Aa + Bd + Cc + Db \\ Ab + Ba + Cd + Dc \\ Ac + Bb + Ca + Dd \end{bmatrix}$	當 X 矩陣乘上 Z 矩陣，可得到 另一矩陣，此矩陣為 XY 矩陣 中的每一列下移 1 列後的結 果

根據上述討論以及「循環方陣的乘積仍為循環方陣」的性質，因此可推得

下列結果：從 $A^1 = \begin{bmatrix} b_{4*}^{(1)} \\ b_{1*}^{(1)} \\ b_{2*}^{(1)} \\ b_{3*}^{(1)} \end{bmatrix}$ 得到 $A^2 = \begin{bmatrix} b_{3*}^{(2)} \\ b_{4*}^{(2)} \\ b_{1*}^{(2)} \\ b_{2*}^{(2)} \end{bmatrix}$ ，從 $A^2 = \begin{bmatrix} b_{3*}^{(2)} \\ b_{4*}^{(2)} \\ b_{1*}^{(2)} \\ b_{2*}^{(2)} \end{bmatrix}$ 得到

$A^3 = \begin{bmatrix} b_{2*}^{(3)} \\ b_{3*}^{(3)} \\ b_{4*}^{(3)} \\ b_{1*}^{(3)} \end{bmatrix}$ ，從 $A^3 = \begin{bmatrix} b_{2*}^{(3)} \\ b_{3*}^{(3)} \\ b_{4*}^{(3)} \\ b_{1*}^{(3)} \end{bmatrix}$ 得到 $A^4 = \begin{bmatrix} b_{1*}^{(4)} \\ b_{2*}^{(4)} \\ b_{3*}^{(4)} \\ b_{4*}^{(4)} \end{bmatrix}$ …，所以我們可以推論

$A^{4k+1} = \begin{bmatrix} b_{4*}^{(4k+1)} \\ b_{1*}^{(4k+1)} \\ b_{2*}^{(4k+1)} \\ b_{3*}^{(4k+1)} \end{bmatrix}$ 、 $A^{4k+2} = \begin{bmatrix} b_{3*}^{(4k+2)} \\ b_{4*}^{(4k+2)} \\ b_{1*}^{(4k+2)} \\ b_{2*}^{(4k+2)} \end{bmatrix}$ 、 $A^{4k+3} = \begin{bmatrix} b_{2*}^{(4k+3)} \\ b_{3*}^{(4k+3)} \\ b_{4*}^{(4k+3)} \\ b_{1*}^{(4k+3)} \end{bmatrix}$ 、 $A^{4k+4} = \begin{bmatrix} b_{1*}^{(4k+4)} \\ b_{2*}^{(4k+4)} \\ b_{3*}^{(4k+4)} \\ b_{4*}^{(4k+4)} \end{bmatrix}$ ，

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

【評語】040411

本篇作品在計算 $x_1m+x_2m+x_3m+\dots+x_nm$ 為 k 的倍數的組合個數，其中每一個 x_i 均為 $1 \sim r$ 的正整數，而 m 為 1 或 2。其所用的方法是轉換矩陣的相乘。主要的成果是 $m=1, r=6, k=3,4,5,6$ 的答案； $m=1$, 一般的 $r, k=r+1, r-1$ 或 r 的因數的答案。

整體說來，本文是有一些成果，但是用轉換矩陣的冪次求解，計算出來的矩陣很大，對一般的 r 和 k 並不容易有規律性，這或許是導致不容易求得解答的原因。如果轉換矩陣只是用來導出如第 13 頁中 $y_i(n)$ 之間的關係，相信有可能不會這樣複雜。