中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第一名

最佳創意獎

040410

點到為止—由西姆松定理所衍生的極值與定值探討

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 許勝傑	柯明樹
高二 朱冠勳	藍振倫
高二 張良宇	
高二 董貴翔	

關鍵詞：西姆松定理、棣美弗定理、正弦定理

得獎感言

這是一次令人感到光榮，並且難以忘懷的經驗。我們能夠代表學校參加全國科展，在比賽中展現我們在校所學的專題能力，同時也向評審老師們、教授們學習更多的科學知識，這是我們組員共同的努力、老師辛勤的指導，再加上麗山高中給予我們這樣的機會展現自我的潛力。

在嘗到甜美的果實之前，我們也吃了不少的苦。作數學專題最困難的是：找到自己要做的題目，適不適合?能不能延伸推廣?我們經歷過一段辛苦尋找數學題目的過程，花費了很長時間在尋找及研究，最灰心的是用了整個寒假卻沒做出什麼成果。馬總統在勉勵我們這群小科學家時說過：科學家在做研究時，最辛苦的地方在於等待實驗的結果。我們熬過最辛苦的階段，這一切的努力、一切的付出都是值得的。

比起獎狀、獎盃，我們在參與比賽的過程，是比任何形式上的獎品來的更為重要。辛苦的耕耘，換得甜美的果實，果實固然甜美，但是那努力的過程未嘗不是一番獨特的滋味。

摘　　要

本研究在探討圓上一動點 P 與其內接正 n 邊形及外切正 n 邊形的關係，其所衍生的極值與定值問題，是本研究討論的主要方向。

為了敘述的方便，本研究將過圓內接正 n 邊形各頂點的外切正 n 邊形稱為其相關外切正 n 邊形。針對圓上一動點 P，本作品分為以下幾項研究：

一、探討點 P 到其內接正 n 邊形各頂點距離之一次方和、平方和、四次方和。

二、探討點 P 到其內接正 n 邊形各邊距離乘積。

三、探討點 P 到其內接正 n 邊形及其外切正 n 邊形各邊距離一次方和、平方和。

四、由點 P，對其外切正三角形各邊作投影點 C_1、C_2、C_3，探討 $\triangle C_1C_2C_3$ 的面積。

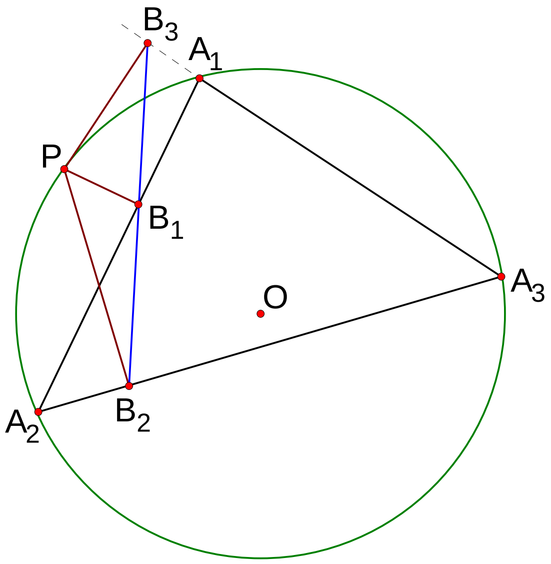
五、探討點 P 到其外切正 n 邊形各頂點距離平方和。

六、作過點 P 的切線 L，探討其內接正 n 邊形各頂點到 L 的距離乘積。

壹、研究動機

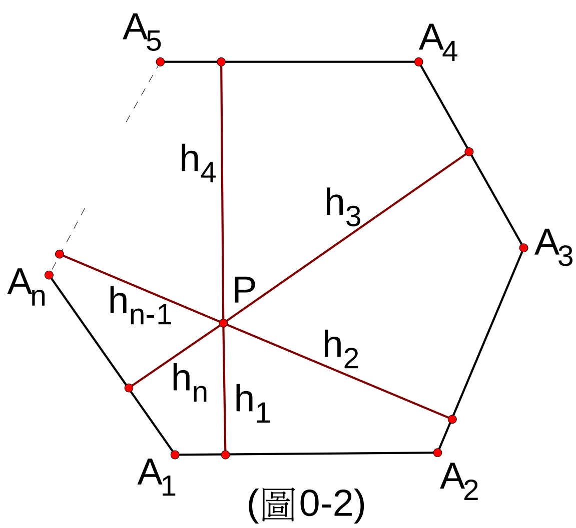
在幾何的課外閱讀中，我們接觸到兩個有趣的定理─西姆松定理及維維安尼定理。
這兩個由動點產生固定結果的定理，令我們產生興趣，於是我們想利用這兩個關係做延伸探討，在使用 *GSP* 繪圖軟體不停地實驗後，試著將動點 P 與正 n 邊形的頂點和邊做了一些連結，發現許多文獻中未曾提過的結果，我們並試著利用高一所學的「三角函數的廣義角」、「和角公式」、「正弦定理」、「積化和差」、「棣美弗定理」等觀念及運算技巧展開研究。

※西姆松定理(圖 0-1)：
P 爲圓 O 上任一點，$\Delta A_1A_2A_3$ 爲圓 O 之內接三角形，P 點在 $\Delta A_1A_2A_3$ 各邊的投影分別爲 B_1、B_2、B_3，則 B_1、B_2、B_3 共線，此線稱爲西姆松線。



(圖0-1)

※維維安尼定理(圖 0-2)：
正 n 邊形內任一點 P 到各邊的距離之和爲定值。
設正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 內任一點 P 到各邊的距離依次爲 $h_1,h_2,\cdots\cdots,h_n$，正 n 邊形面積爲 S，邊長爲 a，則 $h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n=\dfrac{2S}{a}$(成定值)。



(圖0-2)

貳、研究目的

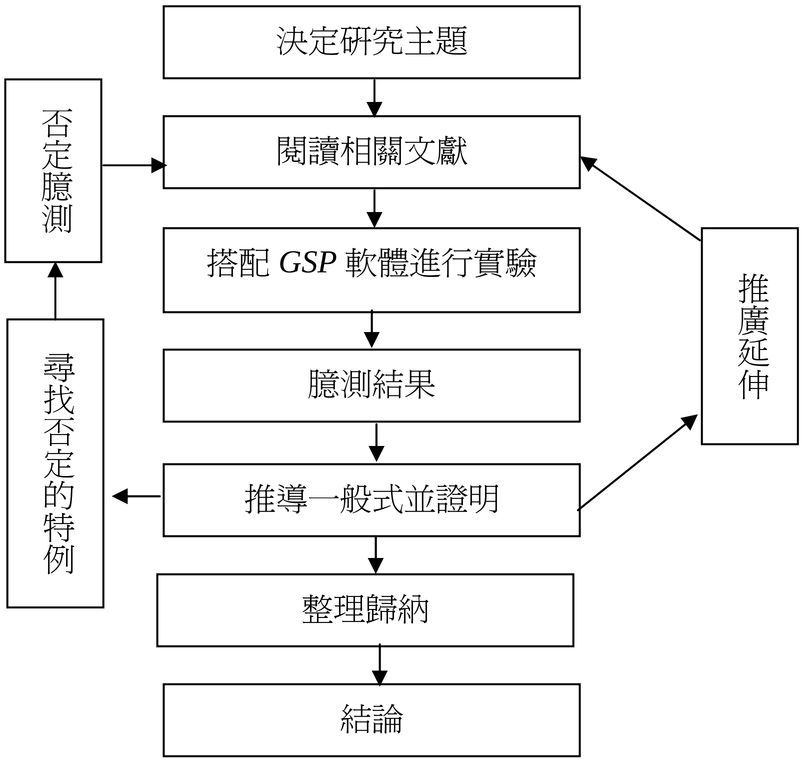
找出圓上一動點 P 與其內接正 n 邊形、外切正 n 邊形之頂點與邊所衍生的極值與定值之公式，並予以證明。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、*GSP* 繪圖軟體、*MathType* 6。

肆、研究過程或方法

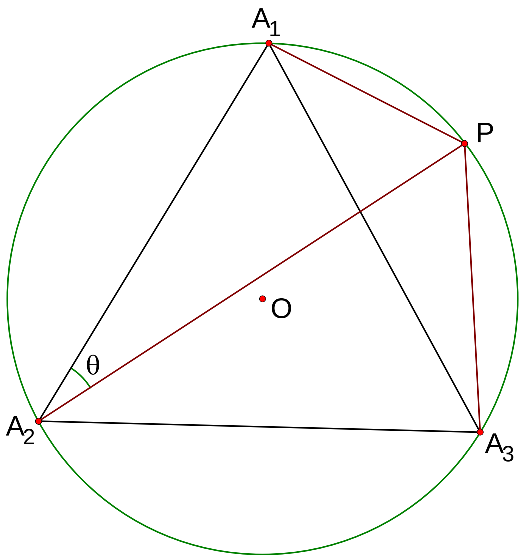
一、研究方法：



二、研究過程：

(一)探討圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各頂點距離之和。

1.正三角形情況(圖 1-1)：



(圖1-1)

設圓半徑爲 R， $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_3P=\theta$

則 $\overline{PA_1}$ 、 $\overline{PA_2}$ 、 $\overline{PA_3}$ 所對圓周角分別爲 θ 、 $\theta+\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{3}-\theta$

由正弦定理得

$$\overline{PA_1}=2R\sin\theta$$

$$\overline{PA_2}=2R\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{PA_3}=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=2R\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$

所以 $\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_3}$

$$=2R\left[\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]$$

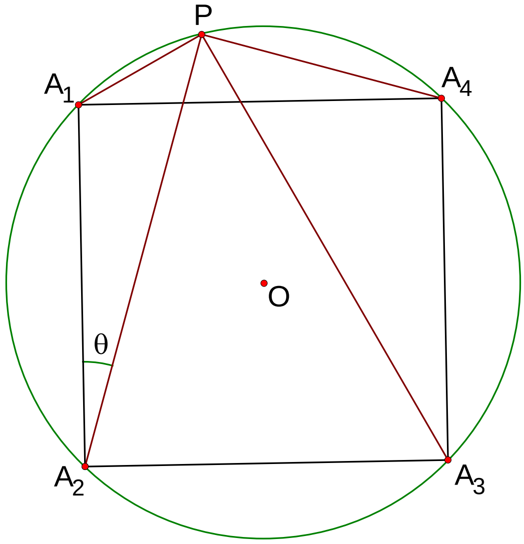
$$=2R\left[\sin\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta\left(1+\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta+2\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right]=2R\left[\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right]=2R\left[2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]\le 4R$$

當 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 時， $\sum_{i=1}^{3}\overline{PA_i}$ 有極大值 $4R$

2.正四邊形情況(圖 1-2)：



(圖1-2)

設圓半徑為 R， $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_4P=\theta$

則 $\overline{PA_1}$ 、 $\overline{PA_2}$ 、 $\overline{PA_3}$ 、 $\overline{PA_4}$ 所對圓周角分別為 θ 、 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 、 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{4}-\theta$

由正弦定理得

$$\overline{PA_1}=2R\sin\theta$$

$$\overline{PA_2}=2R\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\overline{PA_3}=2R\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\overline{PA_4}=2R\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2R\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)$$

故 $\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_3}+\overline{PA_4}$

$$=2R\left[\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta\left(1+\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta+\left(\sqrt{2}+1\right)\cos\theta\right]=2R\left[\sqrt{4+2\sqrt{2}}\sin\left(\theta+\alpha\right)\right]\le 2R\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

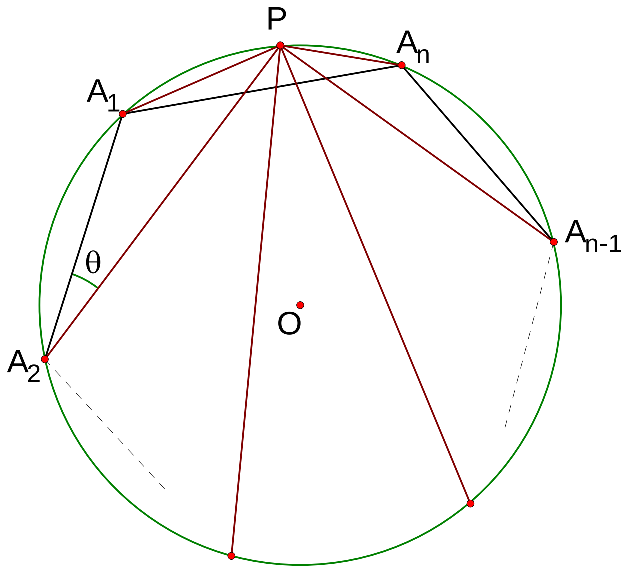
其中 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ 、 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

當 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 時，$\sum_{i=1}^{4}\overline{PA_i}$ 有極大值 $2R\sqrt{4+2\sqrt{2}}=2R\csc\frac{\pi}{8}$

3.根據正三角形、正四邊形的結論，我們做了正 n 邊形情況的臆測，並予以證明。

> 定理一(圖 1-3)：
>
> 半徑爲 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2......A_n$ 各頂點距離之和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}$ 有極大值，且其值爲 $2R\csc\frac{\pi}{2n}$

證明：



(圖1-3)

不失一般性，設 P 點落於 $\overset{\frown}{A_1A_n}$ 上，$\overline{PA_1}$ 所對圓周角 $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_nP=\theta$，圓半徑 R 由正弦定理得

$$\overline{PA_1}=2R\sin\theta$$

$$\overline{PA_2}=2R\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$\overline{PA_i}=2R\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)$$

$$\vdots$$

$$\overline{PA_n}=2R\sin\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)=2R\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

所以$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}=2R\left[\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)+\cdots+\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)\right]$

$$=\sum_{i=1}^{n}2R\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)$$

將等式兩邊同乘以$\sin\frac{\pi}{2n}$，再利用積化和差運算。

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{PA}_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2R\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)$$

$$=R\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(\theta+\frac{2i-3}{2n}\pi\right)-\cos\left(\theta+\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right]$$

分項對消，只剩前後兩項。

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}=R\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)\right]$$

$$=R\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

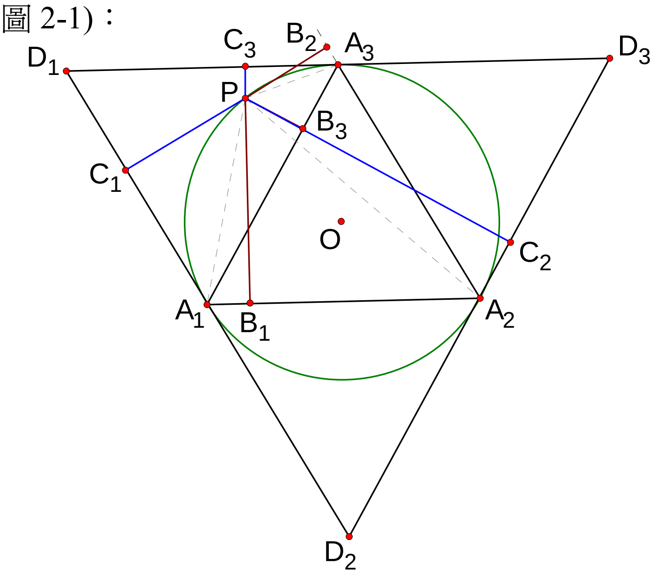
$$=2R\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)$$

所以$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}=2R\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\csc\frac{\pi}{2n}\le 2R\csc\frac{\pi}{2n}$

當$\theta=\frac{\pi}{2n}$時，$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}$有極大值$2R\csc\frac{\pi}{2n}$

(二)探討圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各邊距離乘積，與該點到其相關外切正 n 邊形各邊距離乘積。

1.正三角形情況(圖 2-1)：



(圖2-1)

設圓半徑 R，$\angle PA_1C_1 = \angle PA_2A_1 = \angle PA_3A_1$ (弦切角等於圓周角)

由正弦定理得 $\sin\angle PA_1C_1 = \sin\angle PA_2A_1 = \sin\angle PA_3A_1 = \dfrac{\overline{PA_1}}{2R}$

所以 $\overline{PB_1} = \overline{PA_2}\cdot\sin\angle PA_2A_1 = \dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}$

$\overline{PC_1} = \overline{PA_1}\cdot\sin\angle PA_1C_1 = \dfrac{\overline{PA_1}^2}{2R}$

同理 $\overline{PB_2} = \overline{PA_3}\sin\angle PB_2A_3 = \overline{PA_3}\sin\angle PA_2A_3 = \overline{PA_3}\cdot\dfrac{\overline{PA_2}}{2R} = \dfrac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_2}}{2R}$

$\overline{PC_2} = \overline{PA_2}\cdot\sin\angle PA_2C_2 = \overline{PA_2}\cdot\sin\angle PA_1A_2 = \dfrac{\overline{PA_2}^2}{2R}$

$\overline{PB_3} = \overline{PA_3}\cdot\sin\angle PA_3A_1 = \overline{PA_3}\cdot\dfrac{\overline{PA_1}}{2R} = \dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{2R}$

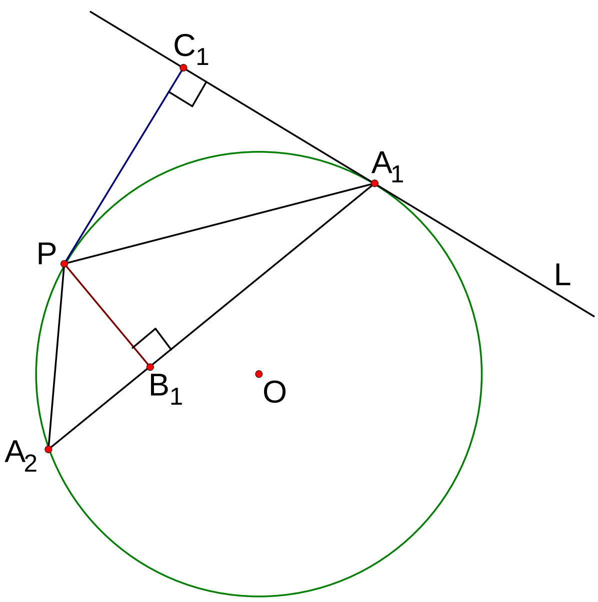
$\overline{PC_3} = \overline{PA_3}\cdot\sin\angle PA_3C_3 = \overline{PA_3}\cdot\sin\angle PA_2A_3 = \dfrac{\overline{PA_3}^2}{2R}$

所以 $\overline{PB_1}\cdot\overline{PB_2}\cdot\overline{PB_3} = \overline{PC_1}\cdot\overline{PC_2}\cdot\overline{PC_3} = \dfrac{\overline{PA_1}^2\cdot\overline{PA_2}^2\cdot\overline{PA_3}^2}{(2R)^3}$

2.為了推廣及證明一般的情況，我們先證明了一個引理。

> 引理一(圖 2-2)：
>
> 已知半徑為 R 的圓 O，L 為過 A_1 的切線，若 P 為圓上任一點，$\overline{PB_1}\perp\overline{A_1A_2}$ 於 B_1 點，
>
> $\overline{PC_1}\perp L$ 於 C_1 點，則 $\overline{PB_1} = \dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}$，$\overline{PC_1} = \dfrac{\overline{PA_1}^2}{2R}$

證明：



(圖2-2)

因為$\angle PA_1C_1 = \angle PA_2A_1$(弦切角等於圓周角)

由正弦定理得$\sin\angle PA_2A_1 = \sin\angle PA_1C_1 = \dfrac{\overline{PA_1}}{2R}$

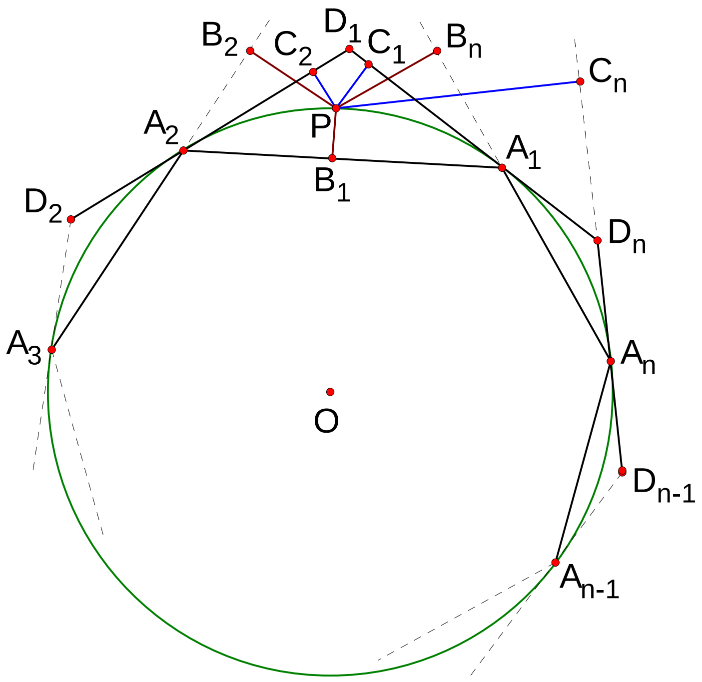
故在ΔPA_2B_1中，$\overline{PB_1} = \overline{PA_2}\cdot\sin\angle PA_2A_1 = \dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}$

在ΔPA_1C_1中，$\overline{PC_1} = \overline{PA_1}\cdot\sin\angle PA_1C_1 = \dfrac{\overline{PA_1}^2}{2R}$

3.根據正三角形的情況和引理一，我們證明正n邊形情況的一般式。

> 定理二(圖 2-3)：
>
> 半徑為R之圓上一動點P，到其內接正n邊形$A_1A_2\cdots\cdots A_n$各邊距離乘積$\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}$，
>
> 恆等於該點到其相關外切正n邊形$D_1D_2\cdots\cdots D_n$各邊距離乘積$\prod_{i=1}^{n}\overline{PC_i}$，其值
>
> $$\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i} = \prod_{i=1}^{n}\overline{PC_i} = \frac{\overline{PA_1}^2\cdot\overline{PA_2}^2\cdot\overline{PA_3}^2\cdots\cdots\overline{PA_n}^2}{(2R)^n} = \frac{1}{(2R)^n}\prod_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^2$$

證明：



(圖2-3)

不失一般性，設P落於$\overset{\frown}{A_1A_2}$，P點是圓上任一點，圓半徑為R

B_i為P在內接正n邊形$\overline{A_iA_{i+1}}$上的投影，其中$1\le i\le n$，$A_{n+1}=A_1$

C_i為P在相關外切正n邊形$\overline{D_{i-1}D_i}$上的投影，其中$1\le i\le n$，$D_0=D_n$

由引理一

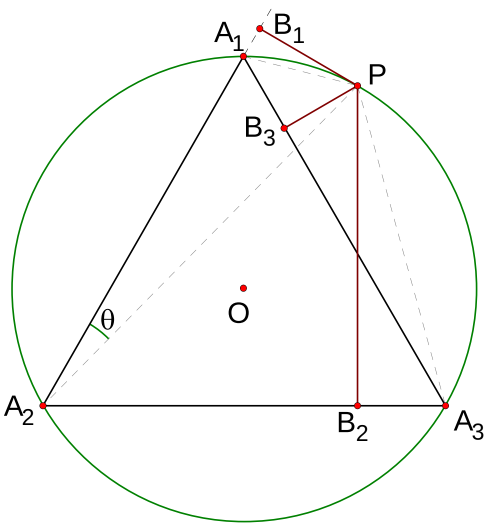
$$\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}=\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}\cdot\frac{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}}{2R}\cdots\cdots\cdot\frac{\overline{PA_n}\cdot\overline{PA_1}}{2R}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\overline{PC_i}=\frac{\overline{PA_1}^2}{2R}\cdot\frac{\overline{PA_2}^2}{2R}\cdots\cdots\cdot\frac{\overline{PA_n}^2}{2R}$$

所以 $\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{PC_i}=\dfrac{\overline{PA_1}^2\cdot\overline{PA_2}^2\cdot\overline{PA_3}^2\cdots\cdots\overline{PA_n}^2}{(2R)^n}=\dfrac{1}{(2R)^n}\prod_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^2$

(三)探討圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各邊距離之和。

1.正三角形情況(圖 3-1)：



(圖3-1)

設圓半徑爲 R， $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_3P=\theta$

由引理一得 $\overline{PB_1}=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}$ ， $\overline{PB_2}=\dfrac{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}}{2R}$ ， $\overline{PB_3}=\dfrac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}}{2R}$

其中 $\overline{PA_1}=2R\sin\theta$

$$\overline{PA_2}=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

$$\overline{PA_3}=2R\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

所以 $\overline{PB_1}+\overline{PB_2}+\overline{PB_3}$

$$=\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}+\frac{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}}{2R}+\frac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}}{2R}$$

$$=2R\left[\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]$$

$$=2R\left[\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)+\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta+\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\right]$$

$$=2R\left(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\frac{1}{4}\right)=2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\right)$$

$$=2R\left[\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\right]\le\frac{5}{2}R$$

當$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\sum_{k=1}^{3}\overline{PB_k}$ 有最大值$\dfrac{5}{2}R$

2.根據上例，圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各邊距離之和的極大值並無法一眼判斷 為了後續的論証，我們引入一個有關三角級數和的引理，以便於討論正 n 邊形的情況。

> 引理二：
>
> $$\sum_{t=1}^{n}\cos k\left(\frac{2t\pi}{n}+\alpha\right)=\begin{cases}0\left(若k不是n的倍數\right)\\ n\cos k\alpha\left(若k爲n的倍數\right)\end{cases}\left(其中n,k\in N\right)$$

證明：

令複數$Z=\cos\dfrac{2kt\pi}{n}+i\sin\dfrac{2kt\pi}{n}$，根據棣美弗定理我們知道$Z^n=1$

移項後因式分解得到$\left(Z-1\right)\left(Z^{n-1}+Z^{n-2}+\cdots+Z+1\right)=0$

(1)當$Z=1$時，則$\cos\dfrac{2kt\pi}{n}=1$，$\sin\dfrac{2kt\pi}{n}=0$

所以我們知道 k 必爲 n 的倍數。

因此$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\cos k\left(\frac{2t\pi}{n}+\alpha\right)=\cos k\alpha\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos\frac{2kt\pi}{n}-\sin k\alpha\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin\frac{2kt\pi}{n}=n\cos k\alpha$

(2)當$Z^{n-1}+Z^{n-2}+\cdots+Z+1=0$時，則$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\left(\cos\frac{2kt\pi}{n}+i\sin\frac{2kt\pi}{n}\right)=0$

展開後得到$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\cos\frac{2kt\pi}{n}+i\sum_{t=1}^{n}\sin\frac{2kt\pi}{n}=0$

所以$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\cos\frac{2kt\pi}{n}=0$且$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\sin\frac{2kt\pi}{n}=0$

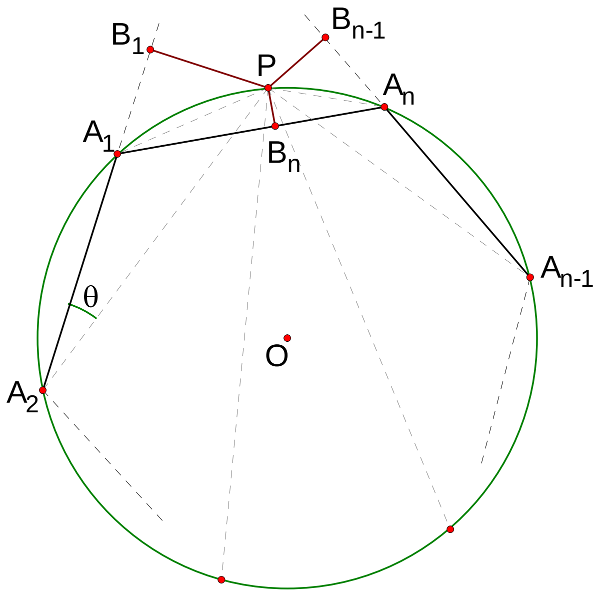
因此$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\cos k\left(\frac{2t\pi}{n}+\alpha\right)=\cos k\alpha\sum_{t=1}^{n}\cos\frac{2kt\pi}{n}-\sin k\alpha\sum_{t=1}^{n}\sin\frac{2kt\pi}{n}=0$

由(1)、(2)的結果得證。

3.根據引理一、引理二，我們證明正 n 邊形情況的一般式。

定理三(圖 3-2)： 半徑爲 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各邊距離之和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}$ 有極大值，且其值爲 $R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}+2\right]$

證明：



(圖3-2)

不失一般性，設 P 點落於 $\overset{\frown}{A_1A_n}$ 上，$\overline{PA_1}$ 所對圓周角 $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_nP=\theta$，圓半徑 R

由引理一得 $\overline{PB_i}=\dfrac{\overline{PA_i}\cdot\overline{PA_{i+1}}}{2R}$，$1\le i\le n$，$A_{n+1}=A_1$

其中 $\overline{PA_i}=2R\sin\left(\theta+\dfrac{i-1}{n}\pi\right)$

$$\begin{aligned}
\text{所以}\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}&=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\overline{PA_i}\cdot\overline{PA_{i+1}}}{2R}+\frac{\overline{PA_n}\cdot\overline{PA_1}}{2R}\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}2R\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)\sin\left(\theta+\frac{i}{n}\pi\right)+2R\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)\sin\theta\\
&=R\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\cos\frac{\pi}{n}-\cos\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)\right]+\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right]\right\}\\
&=R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}-\sum_{i=1}^{n-1}\cos\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)+\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

由引理二得 $\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\theta+\dfrac{2i-1}{n}\pi\right)=0$

所以$-\sum_{i=1}^{n-1}\cos\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)=\cos\left(2\theta-\frac{2n-1}{n}\pi\right)$

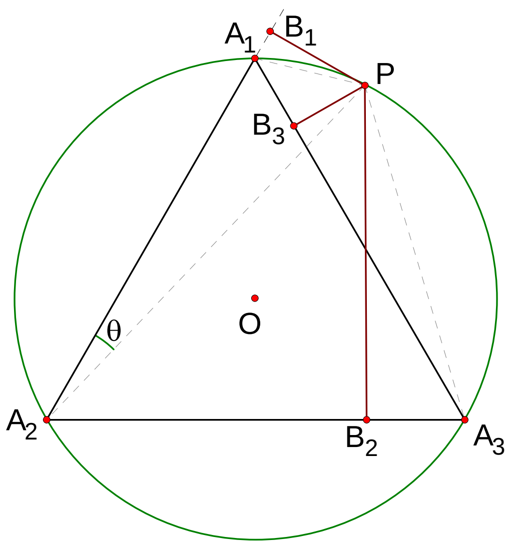
可得$\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}=R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}+\cos\left(2\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)+\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{n}\right)\right]$

$$=R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}+2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{n}\right)\right]\le R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}+2\right]$$

當$\theta=\frac{\pi}{2n}$時，$\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}$有最大值$R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}+2\right]$

(四)探討圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各邊距離平方和爲定值。

1.正三角形情況(圖 4-1)：



(圖4-1)

設圓半徑爲 R， $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_3P=\theta$

由引理一得

$\overline{PB_1}=\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{2R}$ ， $\overline{PB_2}=\frac{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}}{2R}$ ， $\overline{PB_3}=\frac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}}{2R}$

其中$\overline{PA_1}=2R\sin\theta$ ， $\overline{PA_2}=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$ ， $\overline{PA_3}=2R\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

所以$\overline{PB_1}^2+\overline{PB_2}^2+\overline{PB_3}^2$

$$=4R^2\left\{\left[\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\theta\right]^2\right\}^2$$

$$=4R^2\left\{2\sin^2\theta\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right]^2\right\}$$

$$=4R^2\left[2\sin^2\theta\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)+\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^2\right]$$

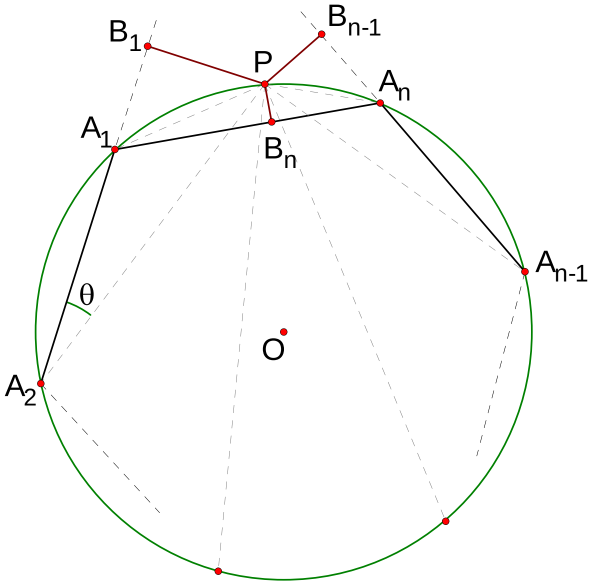
$$=4R^2\left[2\sin^2\theta\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)+\left(\frac{3}{4}-\sin^2\theta\right)^2\right]$$

$$=4R^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-\sin^4\theta+\frac{9}{16}-\frac{3}{2}\sin^2\theta+\sin^4\theta\right)=4R^2\times\frac{9}{16}=\frac{9}{4}R^2$$

2.根據上例，我們利用引理一、引理二，證明正 n 邊形情況的一般式。

定理四(圖 4-2)：
半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各邊距離平方和恆為定值，且其值為 $\frac{nR^2}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{n}+2\right]$

證明：



(圖4-2)

不失一般性，設 P 點落於 $\overset{\frown}{A_1A_n}$ 上， $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_nP=\theta$

由引理一得 $\overline{PB_i}=\dfrac{\overline{PA_i}\cdot\overline{PA_{i+1}}}{2R}$ ，其中 $\overline{PA_i}=2R\sin\left(\theta+\dfrac{i-1}{n}\pi\right)$ ，$1\le i\le n$ ， $A_{n+1}=A_1$

所以 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}^2=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\overline{PA_i}\cdot\overline{PA_{i+1}}}{2R}\right)^2+\left(\frac{\overline{PA_n}\cdot\overline{PA_1}}{2R}\right)^2$

$$=4R^2\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)\cdot\sin\left(\theta+\frac{i}{n}\pi\right)\right]^2+\left[\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)\cdot\sin\theta\right]^2\right\}$$

$$=4R^2\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)\cdot\sin\left(\theta+\frac{i}{n}\pi\right)\right]^2+\left[\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)\cdot\sin\left(\theta+\pi\right)\right]^2\right\}$$

$$=R^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\frac{\pi}{n}+\cos\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)\right]^2\right\}$$

$$=R^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\cos^2\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{\pi}{n}\cos\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)+\cos^2\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=R^2\left[n\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\theta+\frac{2i+1}{n}\pi\right)+\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(2\theta+\frac{2i-1}{n}\pi\right)\right]$$

$$=R^2\left\{n\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\theta+\frac{2i+1}{n}\pi\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(4\theta+\frac{4i-2}{n}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=R^2\left[n\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\theta+\frac{2i+1}{n}\pi\right)+\frac{n}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos\left(4\theta+\frac{4i-2}{n}\pi\right)\right]$$

由引理二得 $\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\theta+\frac{2i+1}{n}\pi\right)=0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\cos\left(4\theta+\frac{4i-2}{n}\pi\right)=0$

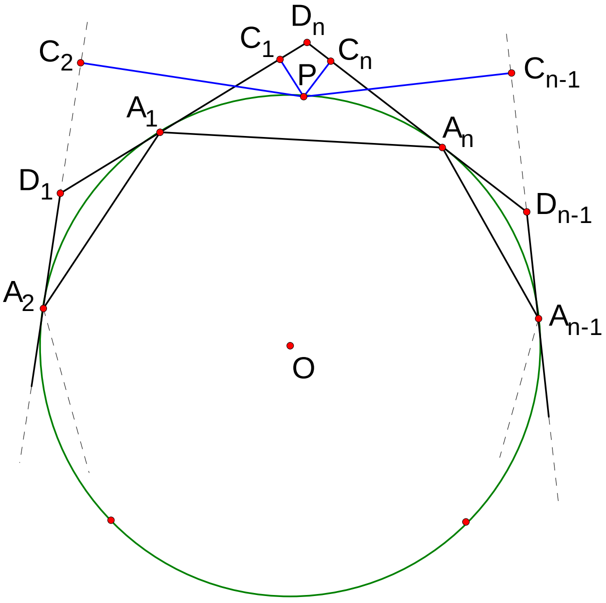
所以 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}^2=R^2\left(n\cos^2\frac{\pi}{n}+\frac{n}{2}\right)=\frac{nR^2}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{n}+2\right)$

(五)探討圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各頂點距離平方和。

1.根據引理一，我們知道動點 P 到其內接正 n 邊形各頂點平方和，與 P 點到其外切正 n 邊形各邊距離之和有直接的關係，所以我們將維維安尼定理改成以下的形式，並利用它來推證動點 P 到其內接正 n 邊形各頂點距離平方和公式。

> 引理三(圖 5-1)：
>
> 半徑為 R 之圓上一點 P，到其外切正 n 邊形 $D_1D_2\cdots\cdots D_n$ 各邊的距離和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PC_i}$ 為定值，且其值為 nR。

證明：



(圖5-1)

不失一般性，設 P 點落於 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上，正 n 邊形邊長為 a、面積為 S

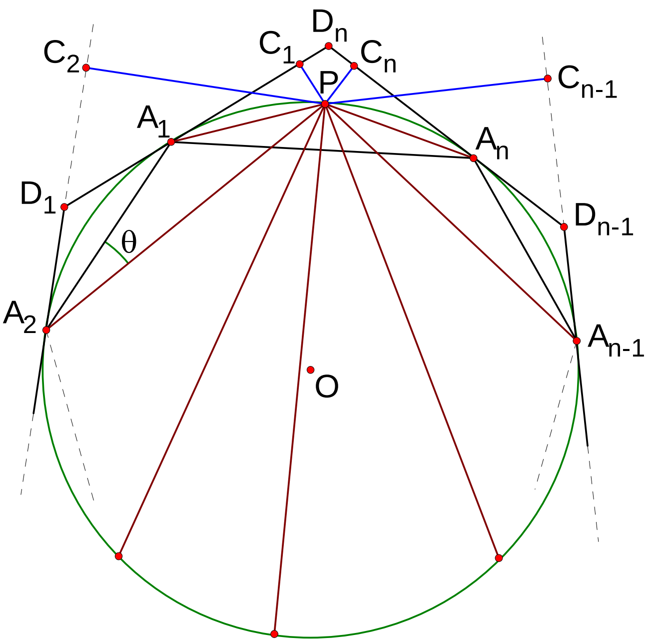
所以$S = \triangle PD_1D_2 + \triangle PD_2D_3 + \cdots + \triangle PD_{n-1}D_n + \triangle PD_nD_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\overline{PC_i} \cdot a = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{PC_i}$

又正 n 邊形面積$S = n \cdot \triangle OD_1D_2 = n \cdot \frac{a \cdot R}{2}$ ，所以$\sum_{i=1}^{n}\overline{PC_i} = nR$

2.我們利用引理一、引理三，證明正 n 邊形情況的一般式。

> 定理五(圖 5-2)：
> 半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各頂點距離平方和恆為定值，且其值為$2nR^2$

證明：



(圖5-2)

設圓半徑為 R

由引理一得$\overline{PC_i} = \frac{\overline{PA_i}^2}{2R}$.，$1 \le i \le n$

所以$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^2 = 2R\left(\overline{PC_1} + \overline{PC_2} + \ldots\ldots + \overline{PC_n}\right)$

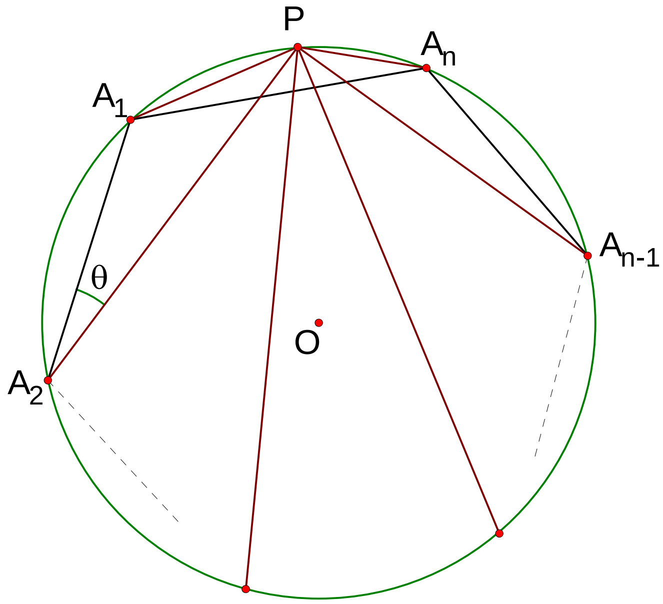
由引理三得$\overline{PC_1} + \overline{PC_2} + \ldots\ldots + \overline{PC_n} = nR$

所以$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^2 = 2nR^2$

(六)探討圓上一動點 P 到其內接正 n 邊形各頂點距離四次方和。

定理六(圖 6-1)：
半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各頂點的距離四次方和恆為定值，且其值為 $6nR^4$

證明：



(圖6-1)

不失一般性，設 P 點落於 $\overset{\frown}{A_1A_n}$ 上， $\overline{PA_1}$ 所對圓周角 $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_nP=\theta$

由正弦定理 $\overline{PA_i}=2R\sin\left(\theta+\dfrac{i-1}{n}\pi\right)$ ，$1\le i\le n$

$$\text{所以}\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^4=\sum_{i=1}^{n}\left[2R\sin\left(\theta+\frac{i-1}{n}\pi\right)\right]^4$$

$$=16R^4\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\theta+\frac{2i-2}{n}\pi\right)\right)\right]^2$$

$$=4R^4\sum_{i=1}^{n}\left[1-\cos\left(2\theta+\frac{2i-2}{n}\pi\right)+\cos^2\left(2\theta+\frac{2i-2}{n}\pi\right)\right]$$

$$=4R^4\left[\sum_{i=1}^{n}1-\cos\left(2\theta+\frac{2i-2}{n}\pi\right)+\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(2\theta+\frac{2i-2}{n}\pi\right)\right]$$

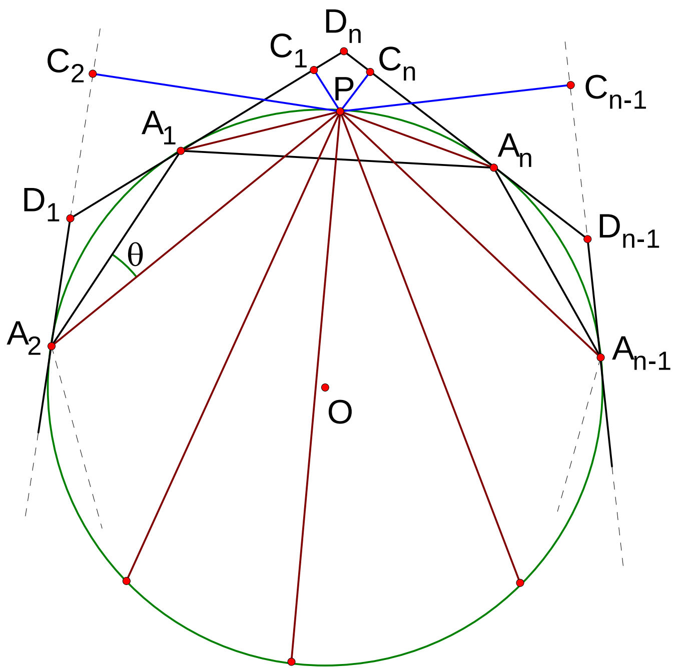
$$=4R^4\left\{n-0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\cos\left(4\theta+\frac{4i-4}{n}\pi\right)\right]\right\}$$

由引理二得 $\cos\left(4\theta+\dfrac{4i-4}{n}\pi\right)=0$ ，所以 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^4=4R^4\left(n+\frac{n}{2}\right)=6nR^4$

(七)探討圓上一動點 P 到其外切正 n 邊形各邊距離平方和。

定理七(圖 7-1)：
半徑為 R 之圓上一動點 P，到其外切正 n 邊形 $D_1D_2\cdots\cdots D_n$ 各邊距離平方和恆為定值，且其值為 $\frac{3}{2}nR^2$

證明：



(圖7-1)

設圓半徑為 R， $\angle A_1A_2P=\angle A_1A_nP=\theta$

由引理一得 $\overline{PC_i}=\dfrac{\overline{PA_i}^2}{2R}$ ，$1\le i\le n$

所以 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PC_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\overline{PA_i}^2}{2R}\right)^2=\dfrac{1}{4R^2}\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^4$

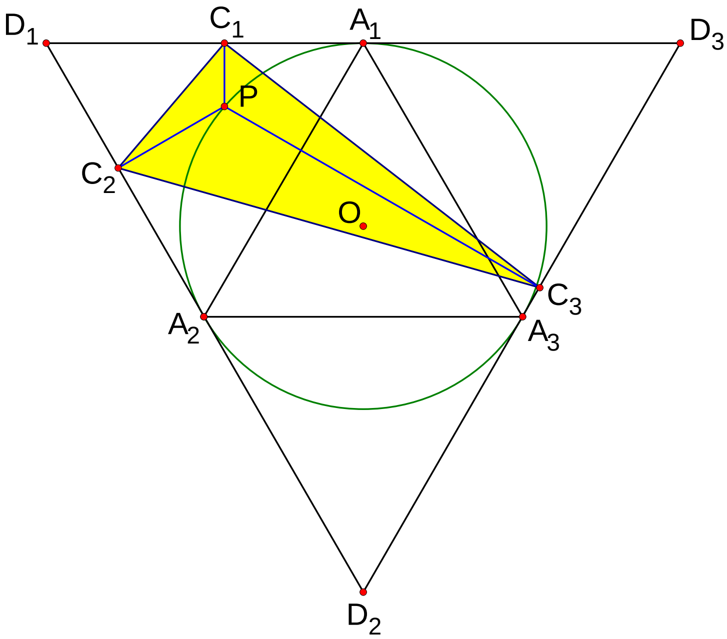
由定理六得 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^4=6nR^4$

所以 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PC_i}^2=\dfrac{1}{4R^2}6nR^4=\dfrac{3}{2}nR^2$

(八)圓上一動點 P，對其外切正三角形各邊作投影點 C_1,C_2,C_3，探討 $\triangle C_1C_2C_3$ 的面積。

定理八(圖 8-1)：
半徑為 R 之圓上一動點 P，對其外切正三角形 $D_1D_2D_3$ 各邊作投影點 C_1、C_2、C_3，則 $\triangle C_1C_2C_3$ 的面積恆為定值，且其值為 $\dfrac{9\sqrt{3}R^2}{16}$

證明：



(圖8-1)

$$\triangle PC_1C_2=\frac{1}{2}\overline{PC_1}\cdot\overline{PC_2}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\triangle PC_2C_3=\frac{1}{2}\overline{PC_2}\cdot\overline{PC_3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\triangle PC_3C_1=\frac{1}{2}\overline{PC_3}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\triangle C_1C_2C_3=\triangle PC_1C_2+\triangle PC_2C_3+\triangle PC_3C_1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\left(\overline{PC_1}\cdot\overline{PC_2}+\overline{PC_2}\cdot\overline{PC_3}+\overline{PC_3}\cdot\overline{PC_1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[\left(\overline{PC_1}+\overline{PC_2}+\overline{PC_3}\right)^2-\left(\overline{PC_1}^2+\overline{PC_2}^2+\overline{PC_3}^2\right)\right]$$

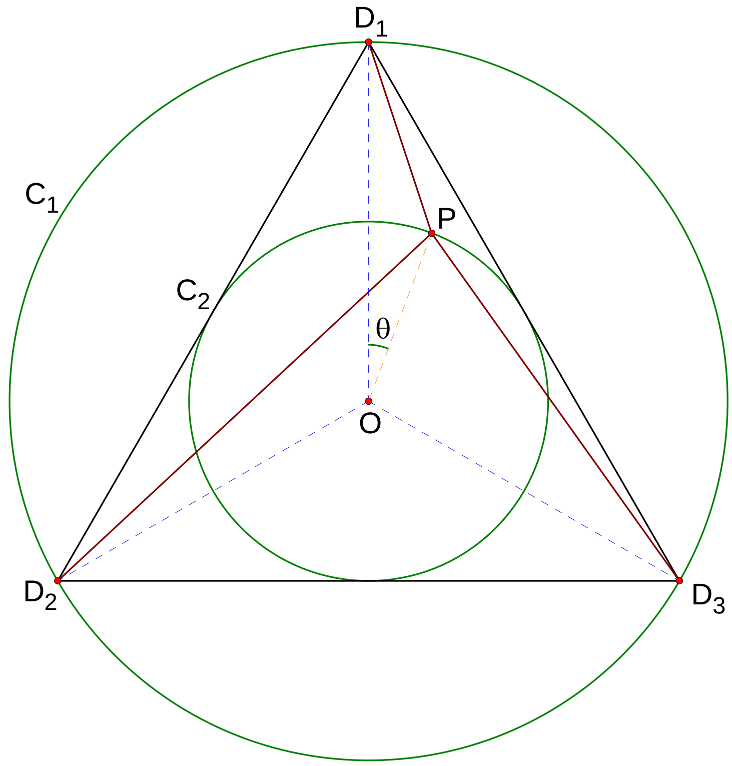
由引理三得 $\overline{PC_1}+\overline{PC_2}+\overline{PC_3}=3R$

由定理七得 $\overline{PC_1}^2+\overline{PC_2}^2+\overline{PC_3}^2=\dfrac{9}{2}R^2$

所以 $\triangle C_1C_2C_3$ 面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left[9R^2-\dfrac{9}{2}R^2\right]=\dfrac{9\sqrt{3}R^2}{16}$

(九)探討圓上一動點 P 到其外切正 n 邊形各頂點距離平方和，並把條件放寬，將內切圓放寬為一般的同心圓。

1.正三角形情況(圖 9-1)：



(圖9-1)

設圓C_1 、C_2 半徑分別為R_1、R_2，$\angle POD_1=\theta$

則$\angle POD_2=\theta+\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle POD_3=\theta+\dfrac{4\pi}{3}$

由餘弦定理

$$\overline{PD_1}^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\theta$$
$$\overline{PD_2}^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\overline{PD_3}^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

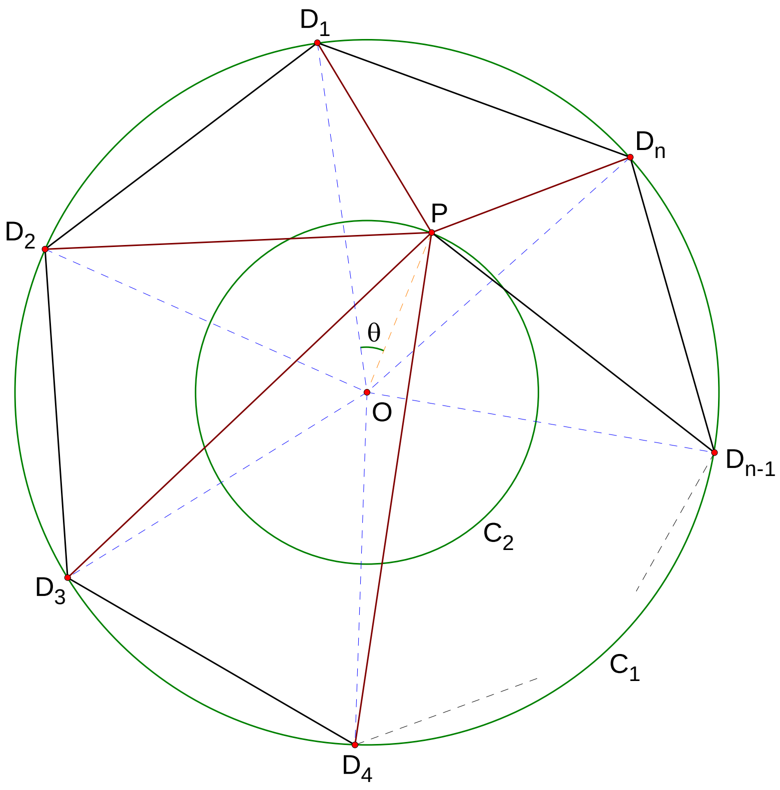
所以$\overline{PD_1}^2+\overline{PD_2}^2+\overline{PD_3}^2$

$$=3\left(R_1^2+R_2^2\right)-2R_1R_2\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$
$$=3\left(R_1^2+R_2^2\right)$$

2.由上例我們發現證明的過程中，不會利用到圓 C_2 與正三角形相切的性質，所以可以放寬條件，將圓 C_2 任意放大或縮小。於是我們證明正 n 邊形情況的一般式。

定理九(圖 9-2)：
以 O 爲圓心，作同心圓 C_1 、C_2 ，半徑分別爲 R_1 、R_2 ，則圓 C_2 上一動點 P，到圓 C_1 內接正 n 邊形 $D_1D_2\cdots\cdots D_n$ 各頂點距離平方和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PD_i}^2$ 恆爲定値，且其値爲 $n\left(R_1^2+R_2^2\right)$

證明：



(圖9-2)

設圓 C_1 、C_2 半徑分別爲 R_1 、R_2 ，$\angle POD_1=\theta$

則 $\angle POD_i=\theta+\dfrac{2(i-1)\pi}{n}$ ，$i=1,2,\cdots,n$

又 $\overline{OD_i}=R_1,\overline{OP}=R_2$

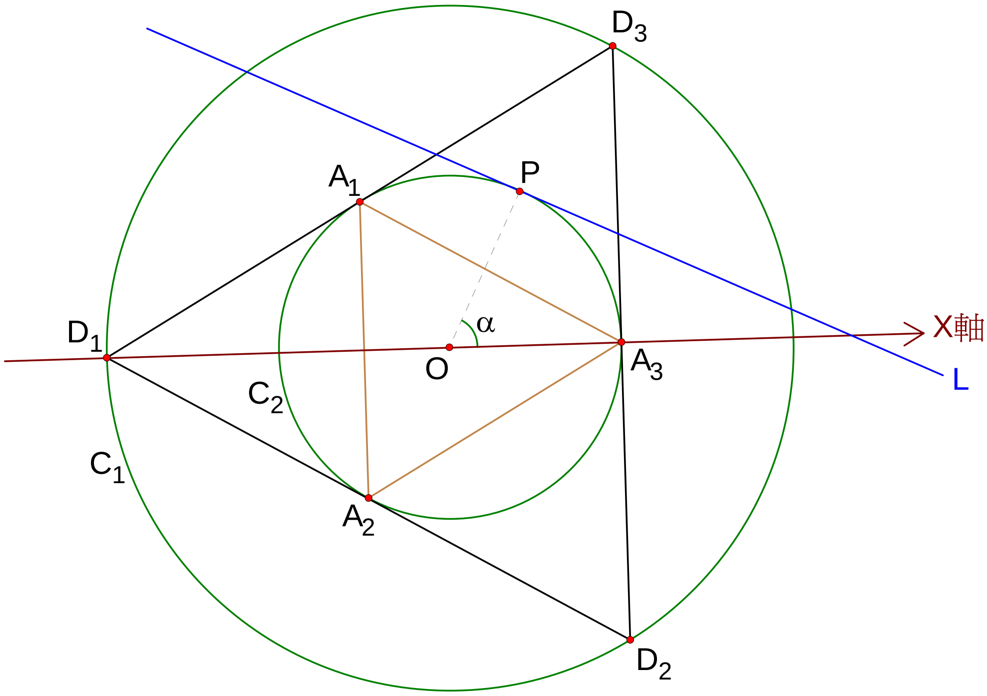
由餘弦定理得 $\overline{PD_i}^2=R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos\left[\dfrac{2(i-1)\pi}{n}+\theta\right]$

所以 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PD_i}^2=n\left(R_1^2+R_2^2\right)+2R_1R_2\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\theta+\dfrac{2(i-1)\pi}{n}\right]$

由引理二得 $\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\dfrac{2(i-1)\pi}{n}+\theta\right]=0$ ，所以 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PD_i}^2=n\left(R_1^2+R_2^2\right)$

(十)作通過圓上一動點 P 的切線 L，探討其內接正 n 邊形各頂點到 L 的距離乘積，與其相關外切正 n 邊形各頂點到 L 的距離乘積之比值。

1.正三角形情況(圖 10-1)：



(圖10-1)

不失一般性，我們設 O 爲原點，圓 C_1 、 C_2 半徑分別爲 R_1 、 R_2 ， A_3 落於 x 軸上，而 P 點爲圓 C_2 上異於頂點 A_k 的動點， $\angle POA_3=\alpha$ ， L 爲過 P 點之圓 C_2 的切線。

可得 $P=\left(R_2\cos\alpha, R_2\sin\alpha\right)$

$$A_k=\left(R_2\cos\frac{2k\pi}{3}, R_2\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\text{，}k=1,2,3$$

$$D_k=\left(R_1\cos\frac{2k+1}{3}\pi, R_1\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)\text{，}k=1,2,3$$

而斜率 $m_L=-\dfrac{1}{m_{\overline{OP}}}=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$

故切線 L 之方程式爲 $y-R_2\sin\alpha=-\dfrac{1}{\tan\alpha}\left(x-R_2\cos\alpha\right)$

經移項整理得 L： $x+\tan\alpha\cdot y-R_2\sin\alpha\tan\alpha-R_2\cos\alpha=0$

由點到直線的距離公式得

$$d\left(A_k, L\right)=\frac{\left|R_2\cos\frac{2k\pi}{3}+\tan\alpha\cdot R_2\sin\frac{2k\pi}{3}-R_2\sin\alpha\tan\alpha-R_2\cos\alpha\right|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$=\frac{R_2\left|\cos\frac{2k\pi}{3}+\tan\alpha\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}-\sin\alpha\tan\alpha-\cos\alpha\right|}{\left|\sec\alpha\right|}$$

$$=R_2\left|\cos\alpha\cos\frac{2k\pi}{3}+\sin\alpha\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right|$$

$$=R_2\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k\pi}{3}\right)-1\right|$$

$$d\left(D_k,L\right)=\frac{\left|R_1\cos\frac{2k+1}{3}\pi+\tan\alpha\cdot R_1\sin\frac{2k+1}{3}\pi-R_2\sin\alpha\tan\alpha-R_2\cos\alpha\right|}{\left|\sqrt{1+\tan^2\alpha}\right|}$$

$$=\frac{R_1\left|\cos\frac{2k+1}{3}\pi+\tan\alpha\cdot\sin\frac{2k+1}{3}\pi-\frac{R_2}{R_1}\sin\alpha\tan\alpha-\frac{R_2}{R_1}\cos\alpha\right|}{\left|\sec\alpha\right|}$$

$$=R_1\left|\cos\alpha\cos\frac{2k+1}{3}\pi+\sin\alpha\cdot\sin\frac{2k+1}{3}\pi-\frac{R_2}{R_1}\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\right|$$

$$=R_1\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{3}\pi\right)-\frac{R_2}{R_1}\right|=R_1\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{3}\pi\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right|$$

由和差化積得

$$d\left(A_k,L\right)=R_2\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k\pi}{3}\right)-1\right|=2R_2\left|\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{3}\right)\right|$$

$$d\left(D_k,L\right)=R_1\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{3}\pi\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right|=2R_1\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k+1}{3}\pi\right)\right|$$

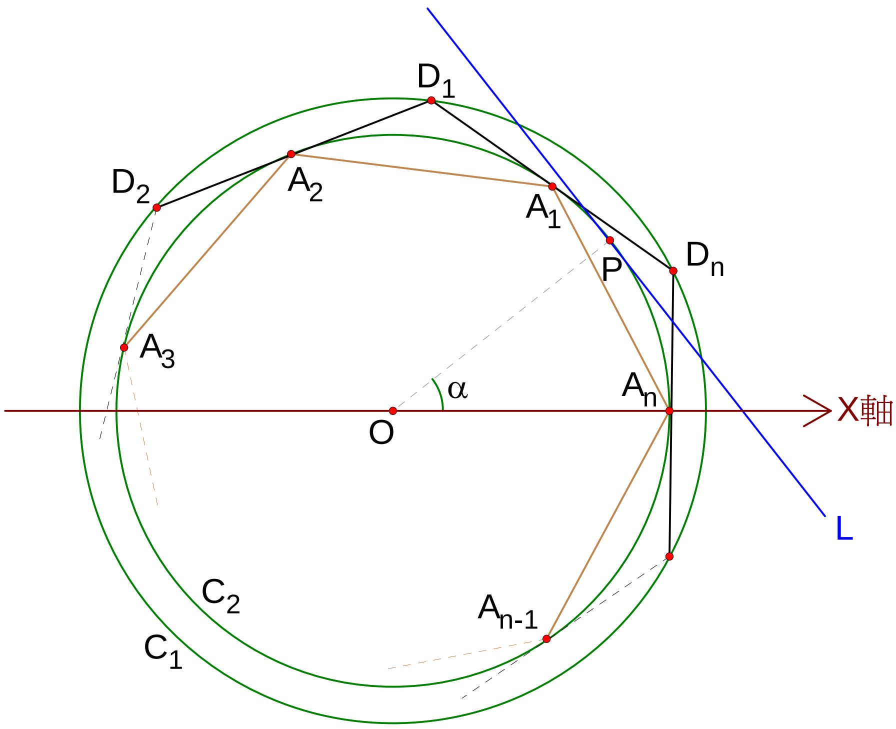
所以$\displaystyle\prod_{k=1}^{3}\frac{d\left(A_k,L\right)}{d\left(D_k,L\right)}=\prod_{k=1}^{3}\frac{R_2\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{3}\right)\right|}{R_1\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k+1}{3}\pi\right)\right|}$

$$=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\cdot\left|\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{4\pi}{3}\right)}\right|=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3=\cos^3\frac{\pi}{3}$$

2.根據上例，我們做了正 n 邊形情況的臆測，並予以證明。

定理十(圖 10-2)： 作通過圓 C_2 上一動點 P 的切線 L，則圓 C_2 的內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各頂點到切線 L 的距離乘積，與其相關外切正 n 邊形 $D_1D_2\cdots\cdots D_n$ 各頂點到切線 L 的距離乘積之比值恆為定值，且其值為 $\cos^n\frac{\pi}{n}$

證明：



(圖10-2)

不失一般性，我們設 O 為原點，A_n 落於 x 軸上，圓 C_1、C_2 半徑分別為 R_1、R_2，而 P 點為圓 C_2 上異於頂點 A_k 的動點，$\angle POA_3=\alpha$，L 為過 P 點之圓 C_2 的切線。

可得 $P=\left(R_2\cos\alpha,R_2\sin\alpha\right)$，

又 $\overline{OP}=\left(R_2\cos\alpha,R_2\sin\alpha\right)$ 為 L 的法向量

故過 P 之切線 L 可表示為 $\cos\alpha\left(x-R_2\cos\alpha\right)+\sin\alpha\left(y-R_2\sin\alpha\right)=0$

經移項整理得 L： $\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y-R_2=0$

又 $A_k=\left(R_2\cos\frac{2k\pi}{n},R_2\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$，$k$=1,2,…,$n$

$D_k=\left(R_1\cos\frac{2k+1}{n}\pi,R_1\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$， k=1,2,…,n

由點到直線的距離公式得

$$d\left(A_k,L\right)=\frac{\left|R_2\cos\alpha\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}+R_2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}-R_2\right|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$=R_2\left|\cos\alpha\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}+\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}-1\right|$$

$$=R_2\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k\pi}{n}\right)-1\right|$$

$$d\left(D_k,L\right)=\frac{\left|R_1\cos\alpha\cdot\cos\frac{2k+1}{n}\pi+R_1\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{2k+1}{n}\pi-R_2\right|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$=R_1\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{n}\pi\right)-\frac{R_2}{R_1}\right|$$

$$=R_1\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{n}\pi\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right|$$

由和差化積得

$$d\left(A_k,L\right)=R_2\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k\pi}{n}\right)-1\right|=2R_2\left|\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

$$d\left(D_k,L\right)=R_1\left|\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{n}\pi\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right|=2R_1\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k+1}{n}\pi\right)\right|$$

所以$\prod_{k=1}^{n}\frac{d\left(A_k,L\right)}{d\left(D_k,L\right)}$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{R_2\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)\right|}{R_1\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k+1}{n}\pi\right)\right|}=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n\cdot\frac{\prod_{k=1}^{n}\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)\right|}{\prod_{k=1}^{n}\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k+1}{n}\pi\right)\right|}$$

$$=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n=\cos^n\frac{\pi}{n}$$

伍、研究結果

一、半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2......A_n$ 各頂點距離之和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}$ 有極大值且其值為 $2R\csc\frac{\pi}{2n}$ 。

二、半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形 $A_1A_2......A_n$ 各邊距離乘積 $\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}$ ，恆等於該點到其相關外切正 n 邊形各邊距離乘積 $\prod_{i=1}^{n}\overline{PC_i}$ ，即 $\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{PC_i}=\frac{1}{(2R)^n}\prod_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^{\,2}$ 。

三、半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形各邊距離之和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PB_i}$ 有極大值，且其值為 $R\left[(n-2)\cos\frac{\pi}{n}+2\right]$ 。

四、半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形各邊距離平方和恆為定值，且其值為 $\frac{nR^2}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{n}+2\right]$ 。

五、半徑為 R 之圓上一動點 P，到其內接正 n 邊形各頂點距離平方和恆為定值，其值為 $2nR^2$ 。

六、半徑為 R 之圓上動點 P，到其內接正 n 邊形各頂點距離四次方和恆為定值，其值為 $6nR^4$ 。

七、半徑為 R 之圓上一動點 P，到其外切正 n 邊形各邊距離平方和恆為定值，且其值為 $\frac{3}{2}nR^2$ 。

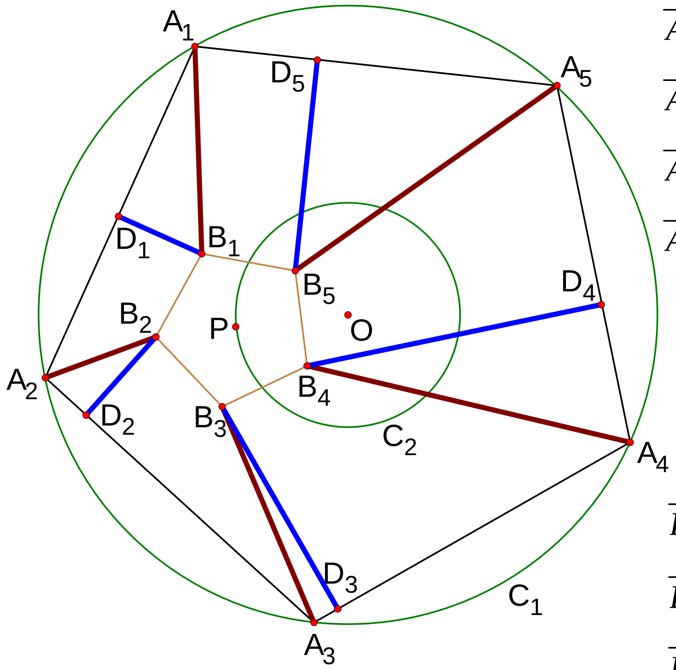
八、半徑為 R 之圓上一動點 P，對其外切正三角形 $D_1D_2D_3$ 各邊作投影點 C_1、C_2、C_3，則 $\triangle C_1C_2C_3$ 的面積恆為定值，且其值為 $\frac{9\sqrt{3}R^2}{16}$ 。

九、以 O 為圓心，作同心圓 C_1 、 C_2 ，半徑分別為 R_1 、 R_2 ，則圓 C_2 上一動點 P，到圓 C_1 內接正 n 邊形 $D_1D_2\cdots\cdots D_n$ 各頂點距離平方和 $\sum_{i=1}^{n}\overline{PD_i}^{\,2}$ 恆為定值，且其值為 $n\left(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}\right)$ 。

十、作通過圓 C_2 上一動點 P 的切線 L，則圓 C_2 的內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各頂點到切線 L 的距離乘積，與其相關外切正 n 邊形 $D_1D_2\cdots\cdots D_n$ 各頂點到切線 L 的距離乘積之比值恆為定值，且其值為 $\cos^n\frac{\pi}{n}$

陸、未來展望

本研究是以圓上一動點 P 和與圓相切或內接的正 n 邊形爲討論對象，我們試著再將條件放寬，以正五邊形情況爲例，若把動點的條件改成以動點爲中心所形成的正五邊形，則內部正五邊形頂點到外部正五邊形各頂點及各邊距離之和也有定值的關係。如(圖 11-1)



(圖11-1)

內部頂點到外部頂點

$\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_2B_2}^2+\overline{A_3B_3}^2+\overline{A_4B_4}^2+\overline{A_5B_5}^2$ 爲定值

$\overline{A_1B_1}^4+\overline{A_2B_2}^4+\overline{A_3B_3}^4+\overline{A_4B_4}^4+\overline{A_5B_5}^4$ 爲定值

$\overline{A_1B_1}^6+\overline{A_2B_2}^6+\overline{A_3B_3}^6+\overline{A_4B_4}^6+\overline{A_5B_5}^6$ 爲定值

$\overline{A_1B_1}^8+\overline{A_2B_2}^8+\overline{A_3B_3}^8+\overline{A_4B_4}^8+\overline{A_5B_5}^8$ 爲定值

內部頂點到外部邊上的投影點

$\overline{B_1D_1}+\overline{B_2D_2}+\overline{B_3D_3}+\overline{B_4D_4}+\overline{B_5D_5}$ 爲定值

$\overline{B_1D_1}^2+\overline{B_2D_2}^2+\overline{B_3D_3}^2+\overline{B_4D_4}^2+\overline{B_5D_5}^2$ 爲定值

$\overline{B_1D_1}^3+\overline{B_2D_2}^3+\overline{B_3D_3}^3+\overline{B_4D_4}^3+\overline{B_5D_5}^3$ 爲定值

$\overline{B_1D_1}^4+\overline{B_2D_2}^4+\overline{B_3D_3}^4+\overline{B_4D_4}^4+\overline{B_5D_5}^4$ 爲定值

未來我們要找出上述定值公式，並予以證明。

柒、參考資料

一、高中數學課本/第二冊/第二、三章/三角函數/龍騰出版社。
二、高中數學課本/第三冊/第三章/圓與球/全華出版社。
三、數學通訊/第三期/用圖解證明公式。
四、數學通訊/第一期/用解析法解決平面幾何問題優勢多多。
五、數學通訊/第十一期//一類高冪次的三角數列求和公式。
六、幾何明珠/黃家禮/九章出版社。
七、數學教育/香港數學教育學會出版刊物。

【評語】040410

優點：作者試圖整合動點 P 到內接正多邊形、外切正多邊形的頂點或邊之距離和與乘積之問題及動點 P 在內接正多邊形、外切 n 邊形邊上的投影點所圍成的面積問題，研究相對完整，值得鼓勵。

缺點：參考資料七的內容籠統。

建議：計算方式可以考慮以複數幾何或是其他幾何工具來處理部份結果。