中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040409

凸多邊形周長的分割與包絡

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高一 江　翊 高一 江哲宇	李宗憙

關鍵詞：周長分割線、包絡線、圓錐曲線

作品名稱：

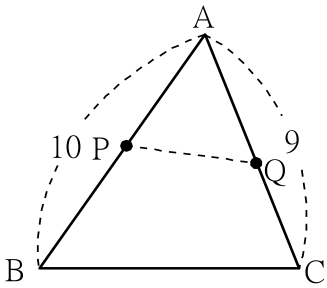
凸多邊形周長的分割與包絡

摘要

首先探討如何用尺規作圖將過三角形周長上的任一點之周長平分線畫出，並將作圖方法套用在幾何軟體上，進而利用幾何軟體「顯示軌跡」的功能觀察其包絡線。藉由觀察猜想某些性質，接著利用嚴謹的數學方法加以證明。再將三角形平分周長線的研究結果延伸至凸多邊形周長平分線的探討。最後延伸至凸多邊形以 1:k 的比例分割周長線，並且找出直接利用幾何軟體會出包絡線的方法。

壹、 研究動機：

98 年學測數學科試題選填第 I 題：「在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$。設點 P、Q 分別在邊 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上使得$\triangle APQ$之面積為$\triangle ABC$面積之一半，則$\overline{PQ}$之最小可能值為？」



同時我們也看到了 1971 年全蘇數學奧林匹克中的一題（分三小題）:「試證：將已知三角形的面積和周長同時等分的直線過該三角形之內心。」

這兩題題目中提到的「平分面積之線」以及「平分周長之線」，給了我們一個靈感。在與老師討論並上網查詢資料後，決定以平分周長之線為研究主題，進行其性質的探討與延伸的研究。

貳、 研究目的：

一、找出繪出過三角形邊上任一點之等分周長之線段(以下簡稱等分周線)的方法。

二、討論三角形等分周線族的包絡線之性質。

三、將三角形所研究出的結果推廣至凸多邊形，研究其性質是否與三角形的性質有關係。

四、將等分周線推廣至$1:k$之比例分割（以下簡稱$1:k$分周線），並研究其性質是否與等分周線相關。

五、藉由等分周線族的包絡線之性質，研究第四點所繪出$1:k$分周線族的包絡線之性質。

六、綜合以上結論，彙整出凸多邊形$1:k$分周線的性質，並推導出直接繪出凸多邊形$1:k$分周線族的包絡線之方法。

參、 研究設備及器材

一、電腦軟體：GeoGebra、GSP 4.07、Microsoft Office Word 2003。

二、其他：紙、筆、圓規、尺、電腦。

肆、 研究過程

一、預備知識：

(一) 包絡線（Envelope）的定義：某參數曲線族F(x,y,t)=0，可找到一曲線P(x,y)=0與F(x,y,t)=0均相切，此P(x,y)=0稱為F(x,y,t)=0的包絡線。

(二) 包絡線的方程式求法：若曲線族以隱函數形式F(x,y,t)=0表示，其包絡線的隱方程，為$\begin{cases} F(x,y,t)=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,t)}{\partial t}=0 \end{cases}$ 兩個方程式消去t得出。

二、名詞定義：

(一) $1:k$分周線：在凸多邊形周長上的兩點P、Q，若P點順時針或逆時針沿著周長移動到Q，使得移動的路徑長為$\dfrac{2s}{k+1}$（其中$s=\dfrac{1}{2}$周長），則稱$\overline{PQ}$為凸n邊形的$1:k$分周線。

(二) 等分周線：即1:1分周線。

(三) 基本等分周線：過頂點的等分周線。

(四) 基本$1:k$分周線：過頂點的$1:k$分周線。

三、等分周線的作圖方法：

首先我們研究三角形等分周線之作圖方法，並將方法套用到幾何軟體上，使一動點移動時，所形成的線段一定是等分周線。

(一) 先作出□ABC的基本等分周線（圖 1）

1. 取$\overline{AD}=\overline{AB}$，其中$D\in\overleftrightarrow{AC}$且$D\notin\overrightarrow{AC}$

2. 取$\overline{CE}=\overline{CB}$，其中$E\in\overleftrightarrow{AC}$且$E\notin\overrightarrow{CA}$

3. 取$\overline{DE}$之中點 F

4. 連接$\overline{BF}$即為所求

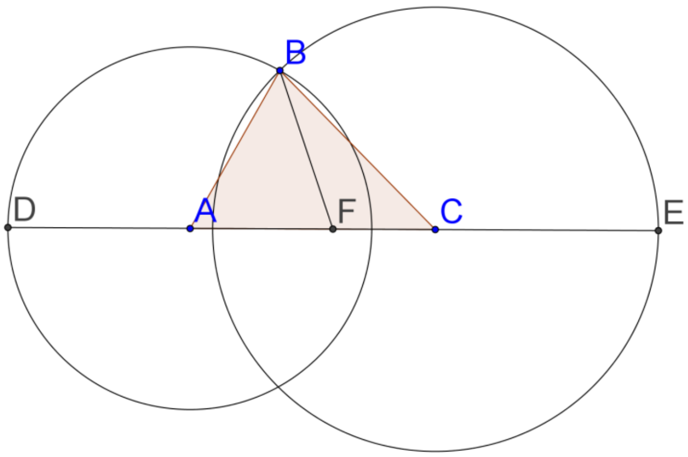


圖 1：基本等分周線作圖

(二) 由一條基本等分周線推廣至過一邊任一點的等分周線（圖 2）。

1. 已知$\overline{AF}$為基本等分周線

2. 在$\overline{AC}$、$\overline{BF}$上作兩點 G、I

   使得$\overline{AG}=\overline{FI}$

3. 連接$\overline{GI}$即為所求

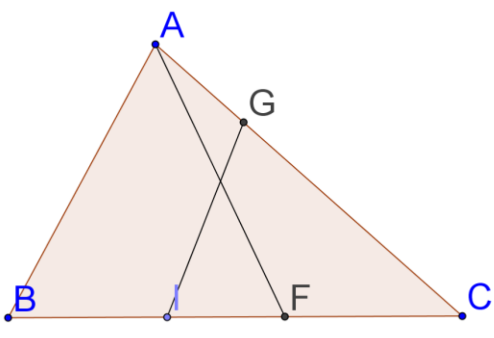


圖 2：任意等分周線作圖

四、任意三角形三條基本等分周線共點：

(一) [已知] $\overline{AO}$ 、 $\overline{BK}$ 、 $\overline{CM}$ 為$\triangle ABC$的三條基本等分周線（圖 3）

[證明] $\overline{AO}$ 、 $\overline{BK}$ 、 $\overline{CM}$ 三線共點

1. $\because$ $\overline{AO}$、$\overline{CM}$ 皆等分周長 $\Rightarrow$ a+b+c=b+c+d $\therefore$可推得 a=d $\Rightarrow$ 同理可得 b=e、c=f

2. 由西瓦逆定理：$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}\times\frac{\overline{CK}}{\overline{KA}}=\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=\frac{a\times c\times b}{b\times a\times c}=1$

   $\Rightarrow$ $\overline{AO}$ 、 $\overline{BK}$ 、 $\overline{CM}$ 三線共點或三線平行。

3. 由於基本等分周線必相交 $\Rightarrow$ $\overline{AO}$ 、 $\overline{BK}$ 、 $\overline{CM}$ 三線共點。

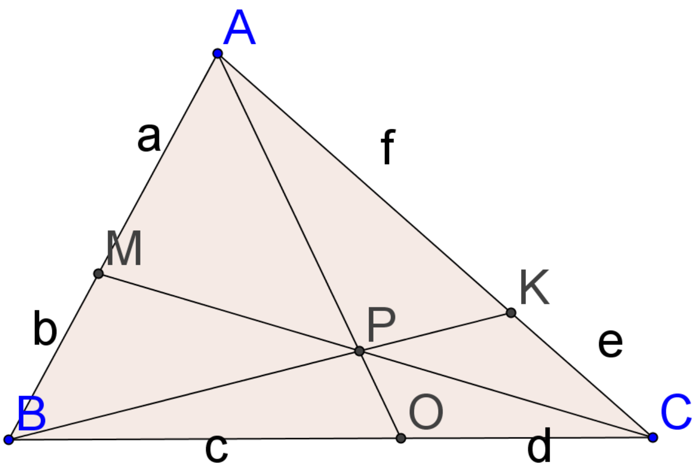


圖 3：三條基本等分周線共點

五、繪出三角形等分周線形成的包絡線

(一) 我們利用等分周線的端點所在的邊上將它分成三類：端點落在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上的等分周線，端點落在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上的等分周線，端點落在 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 的等分周線。

(二) 以下頁圖 5 為例：

1. $\overline{AF}$ $\overline{QR}$ $\overline{PS}$ $\overline{IC}$ 的端點皆落在 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 上，因此 $\overline{AF}$ $\overline{QR}$ $\overline{PS}$ $\overline{IC}$ 分在同一類，而我們定義這一類的等分周線由其端點所在之三角形的邊長命名，稱為「等分周線族 $\overline{AB}-\overline{BC}$ 」。

2. $\overline{AF}$ $\overline{OL}$ $\overline{NM}$ $\overline{KB}$ 以此類推，該類元素的集合稱為「等分周線族 $\overline{BC}-\overline{CA}$ 」。

3. 基本等分周線(例如 $\overline{AF}$)，同時屬於兩個等分周線族。

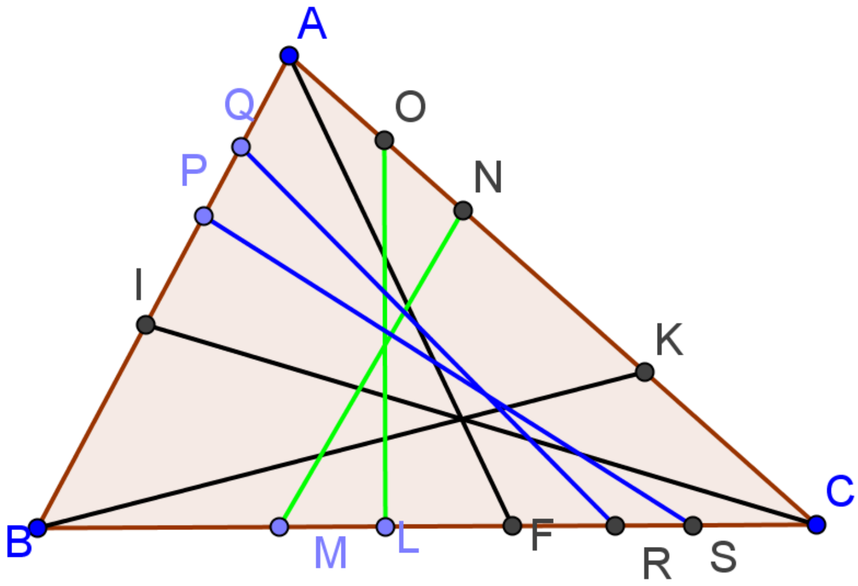


圖 5

(三) 利用 GeoGebra，我們可以將前面提到的作圖方法在軟體上作圖，並利用「顯示軌跡的功能」繪出數條等分周線，並且得到下圖 6、7、8。

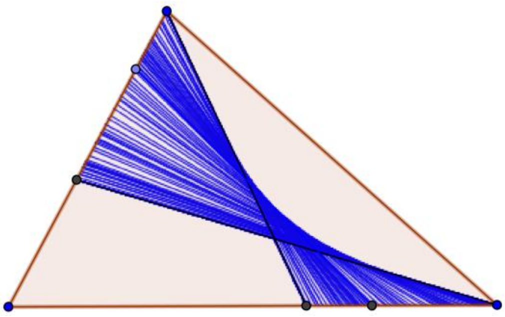


圖 6

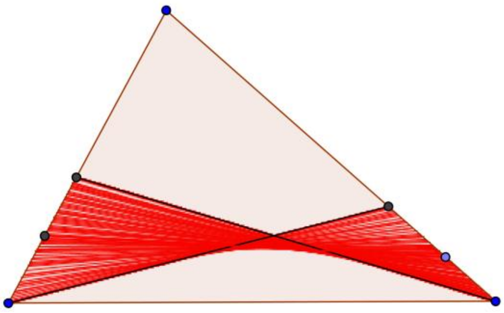


圖 7

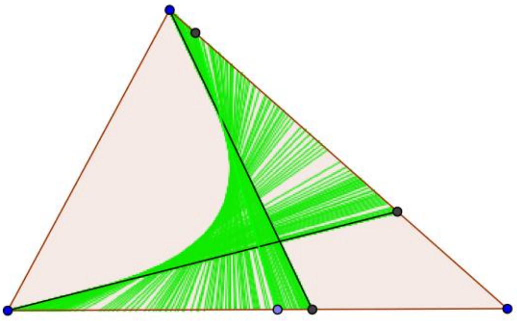


圖 8

(四) 將以上三圖繪在一張圖上（圖 9）：

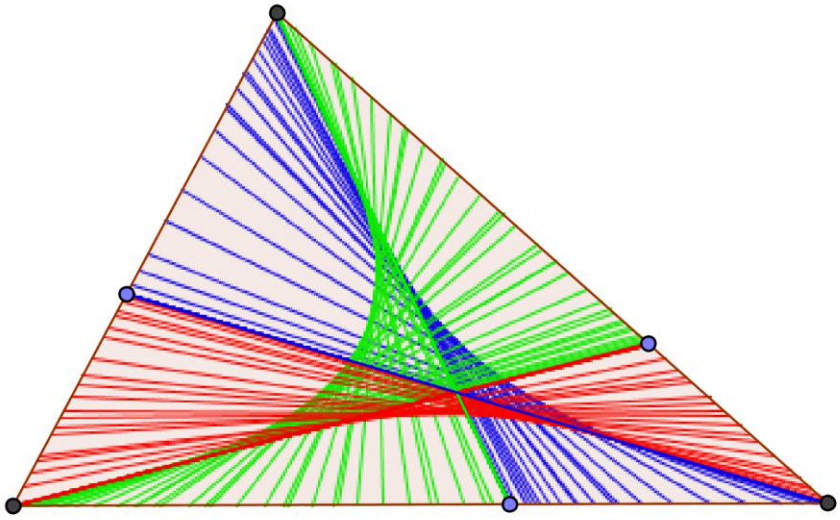


圖 9：等分周線軌跡

由圖 6~9，經過觀察我們可得知：

1. 一個等分周線族形成一條包絡線。
2. 三角形有 3 個等分周線族。
3. 三角形會有 3 條等分周線所形成的包絡線。
4. 由基本等分周線及等分周線族的定義，我們易得知任一線族都以兩條基本等分周線作為邊界。我們稱這兩條基本等分周線為該線族的「邊界基本等分周線」。

六、求出等分周線族的包絡線方程式：

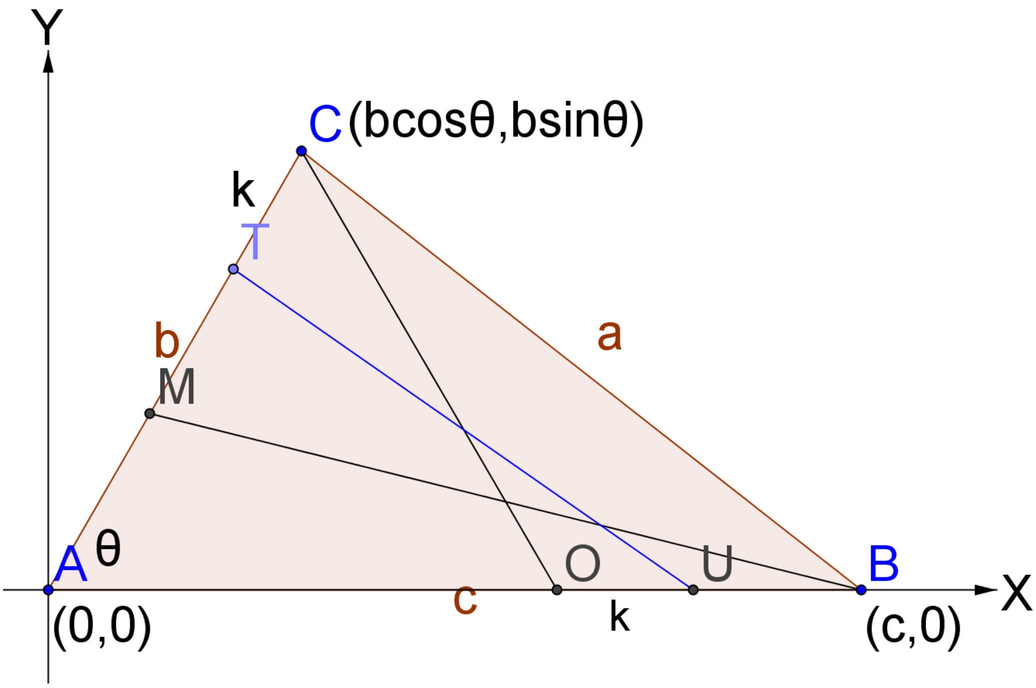


圖 10

(一)如上圖 10，ΔABC 的基本等分周線為 $\overline{BM}$ 、 $\overline{CO} \Rightarrow$ 令 $\overline{BC}$=a ， $\overline{AC}$=b ， $\overline{AB}$=c ，

$\angle$CAB=θ ，三頂點座標 A(0,0) B(c,0) C$(\text{b}\cos\theta, \text{b}\sin\theta)$，周長為 2s。

(二)令 $\overline{TU}$ 為端點落在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的等分周線，其兩點座標分別為

$U(s-b+k,0)$ 、 $T\big((b-k)\cos\theta,\ (b-k)\sin\theta\big)$，其中 k 為變數，且 $0 \le k \le s-a$

(三)由上述兩點可得到等分周線方程式為：

$\big[(b-k)\sin\theta\big]x+\big[s-(b-k)(1+\cos\theta)\big]y-(b-k)\ (s-b+k)\sin\theta=0$ (其中

$0 \le k \le s-a$)

(四)由預備知識，將等分周線方程式與其對 k 偏微分之方程式，兩方程式聯立即可得包絡線方程式。

(五)將方程式對 k 偏微分：

1. 對方程式作以 k 為變數的整理：

$$\sin\theta\cdot k^2+\big[-\sin\theta\cdot x+(1+\cos\theta)y+(s-2b)\sin\theta\big]k+\big[s-b(1+\cos\theta)\big]y+b\sin\theta\cdot x-(s-b)b\sin\theta=0$$

2. 將方程式對 k 偏微分：

$$\frac{\partial}{\partial k}\left\{\sin\theta\cdot k^2+\big[-\sin\theta\cdot x+(1+\cos\theta)y+(s-2b)\sin\theta\big]k+\big[s-b(1+\cos\theta)\big]y+b\sin\theta\cdot x-(s-b)b\sin\theta\right\}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x-\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}y+b-\frac{s}{2}-k=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x-\cot\frac{\theta}{2}y+b-\frac{s}{2}-k=0$$

(六)將兩式聯立：

$$\begin{cases}\sin\theta\cdot k^2+\left[-\sin\theta\cdot x+(1+\cos\theta)y+(s-2b)\sin\theta\right]k+\left[s-b(1+\cos\theta)\right]y+b\sin\theta\cdot x-(s-b)b\sin\theta=0\\ \frac{1}{2}x-\cot\frac{\theta}{2}y+b-\frac{s}{2}-k=0\end{cases}$$

經計算，可得等分周線族$\overline{BA}-\overline{AC}$包絡線方程式為：

$$x^2-\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta}xy+\left[\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2y^2-2sx-2s\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\cdot y+s^2=0$$

$$\Rightarrow x^2-2\cot\frac{\theta}{2}\cdot xy+\cot^2\frac{\theta}{2}\cdot y^2-2sx-2s\tan\frac{\theta}{2}\cdot y+s^2=0$$

七、等分周線所形成的包絡線性質：

由包絡線方程式$x^2-2\cot\frac{\theta}{2}\cdot xy+\cot^2\frac{\theta}{2}\cdot y^2-2sx-2s\tan\frac{\theta}{2}\cdot y+s^2=0$可得到下列性質：

(一) 包絡線為二次曲線，可由判別式$\delta=\left(-2\cot\frac{\theta}{2}\right)^2-4\times1\times\cot^2\frac{\theta}{2}=0$以及判別式

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -2\cot\frac{\theta}{2} & -2s\\ -2\cot\frac{\theta}{2} & 2\cot^2\frac{\theta}{2} & -2s\tan\frac{\theta}{2}\\ -2s & -2s\tan\frac{\theta}{2} & 2s^2\end{vmatrix}=8s^2\times\begin{vmatrix}1 & -\cot\frac{\theta}{2} & -1\\ -\cot\frac{\theta}{2} & \cot^2\frac{\theta}{2} & -\tan\frac{\theta}{2}\\ -1 & -\tan\frac{\theta}{2} & 1\end{vmatrix}=-8s^2\left(2+\cot^2\frac{\theta}{2}+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$\because \frac{\theta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $s\neq0$ ，$\therefore$ $\Delta\neq0\Rightarrow$包絡線為拋物線。

(二) 將此拋物線標準化：

1. 令座標軸逆時針旋轉ϕ，

$$\text{由}\cot2\phi=\frac{1-\cot^2\frac{\theta}{2}}{-2\cot\frac{\theta}{2}}=\frac{\cot^2\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$\Rightarrow \phi = \dfrac{\theta}{2}$，此拋物線對稱軸與 x 軸夾 $\dfrac{\theta}{2}$。

2. 令新的座標任意點為 (X,Y)，由旋轉矩陣可得：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & \sin(-\phi) \\ -\sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = X\cos\dfrac{\theta}{2} - Y\sin\dfrac{\theta}{2} \\ y = X\sin\dfrac{\theta}{2} + Y\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

3. 帶入原方程式得到：

$$\left(X\cos\frac{\theta}{2} - Y\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 - 2\cot\frac{\theta}{2}\left(X\cos\frac{\theta}{2} - Y\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(X\sin\frac{\theta}{2} + Y\cos\frac{\theta}{2}\right) + \cot^2\frac{\theta}{2}\left(X\sin\frac{\theta}{2} + Y\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$-2s\left(X\cos\frac{\theta}{2} - Y\sin\frac{\theta}{2}\right) - 2s\tan\frac{\theta}{2}\left(X\sin\frac{\theta}{2} + Y\cos\frac{\theta}{2}\right) + s^2 = 0$$

4. 經計算，得到新方程式為：$X - \dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}Y^2 + \dfrac{s}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow X = \dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}Y^2 - \dfrac{s}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}$

(三) 由包絡線方程式可得知，方程式與三角形的一角($\angle CAB$)以及周長(2s)相關。若三角形周長相等，且一角相等，且以圖 10 方式訂定座標，則所得出的包絡線方程式將會一樣。（藉此也可推出同一條拋物線可以為多個三角形的等分周線的包絡線）

八、將包絡線的方程式找到後，將三角形的等分周線研究大致已完整。但若想將等分周線的畫法推廣到任意凸多邊形，那我們勢必要找出一種跳脫三角形侷限的包絡線繪圖方法與性質證明的方式。

(一) 如下頁圖 11，欲求出$\triangle ABC$的等分周線族$\overline{BA} - \overline{AC}$之包絡線與其性質。

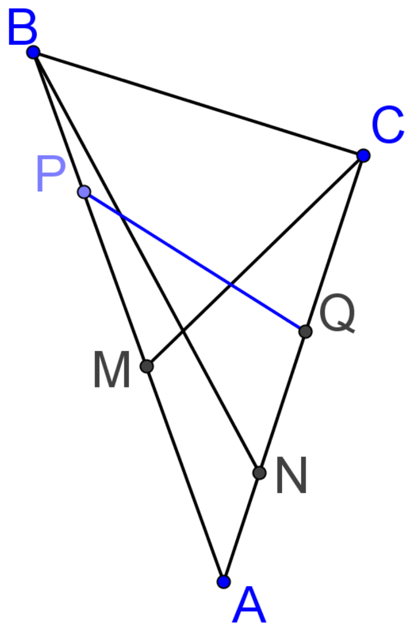


圖 11

既然等分周線族$\overline{BA}-\overline{AC}$的端點皆落在$\overline{BA}$ 、 $\overline{AC}$上，我們嘗試用另外一種觀點，簡化我們的對於等分周線族$\overline{BA}-\overline{AC}$包絡線的繪圖過程，並讓等分周線的證明與作法更易進行推廣：

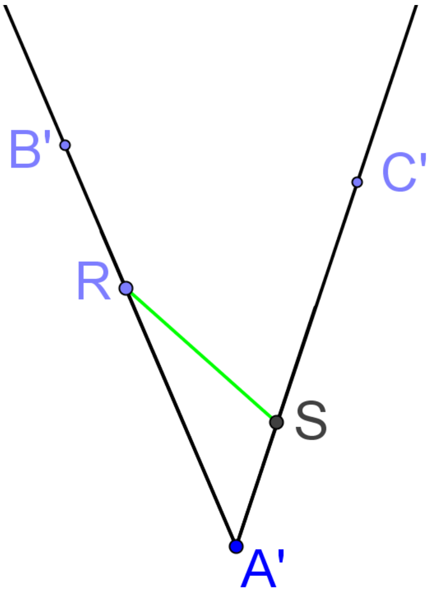


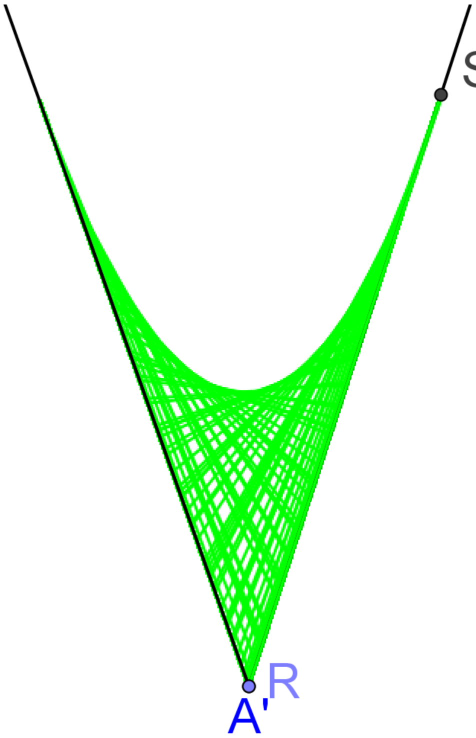
圖 12

今有任意兩條$\overrightarrow{A'B'}$ $\overrightarrow{A'C'}$(如上圖 12)。現在在$\overrightarrow{A'B'}$上有一動點 R、在$\overrightarrow{A'C'}$上取一點 S，使得$\overline{RA'}+\overline{A'S}$為固定值 l，且$0\le\overline{RA'}\le l$。(為了方便說明，以下將在定義範圍內的$\overline{RS}$ ，合稱$\overline{RS}$集合)

比較圖 11、12，若令 $\angle A' = \angle A$ 、 $l = s$ ，則等分周線族 $\overline{BA}$ - $\overline{AC} \subseteq \overline{RS}$ 集合，因此若能找到 $\overline{RS}$ 集合的包絡線，該包絡線即為等分周線族 $\overline{BA}$ - $\overline{AC}$ 的包絡線。

接下來的重點將從「研究等分周線族 $\overline{BA}$ - $\overline{AC}$ 」，轉為「研究 $\overline{RS}$ 集合」:

1. 將 $\overline{RS}$ 集合的掃略圖與 $\angle$A'的角平分線繪出，由 $\overline{RS}$ 集合作圖方式的對稱性可得出其包絡線以 $\angle A'$ 的角平分線為對稱軸(如下圖 13、14)。



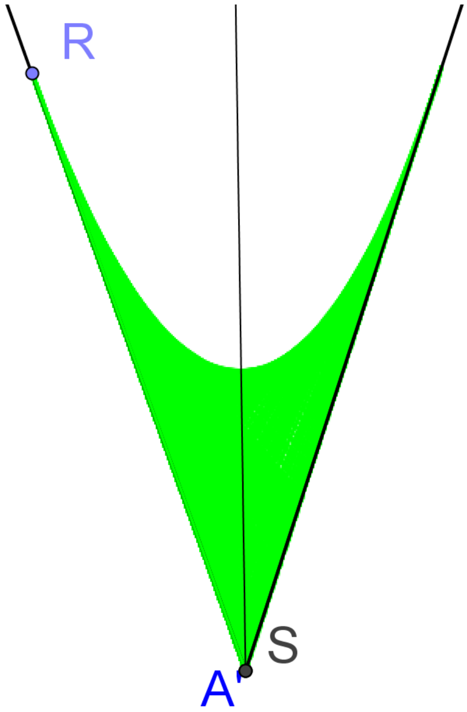


圖 13、14

2. 將 $\overline{RS}$ 集合的中垂線掃略出來，集合內所有元素的中垂線會共點(如下頁圖 15)。

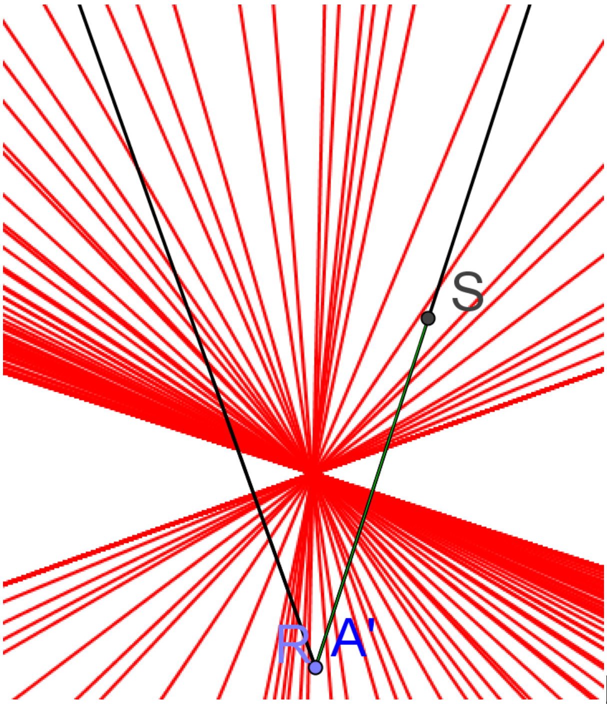


圖 15

3. 對 $\overline{RS}$ 集合的中點進行掃略，發現這些中點共線(如下圖 16)。再將中點掃略圖與 $\overline{RS}$ 集合的掃略圖疊合，發現兩者似乎相切(如下圖 17)。這時移動動點 R，使 $\overline{RS}$ 與中點掃略圖重合，藉此我們推測中點掃略出的線段也是 $\overline{RS}$ 集合內的元素(如下圖 18)。

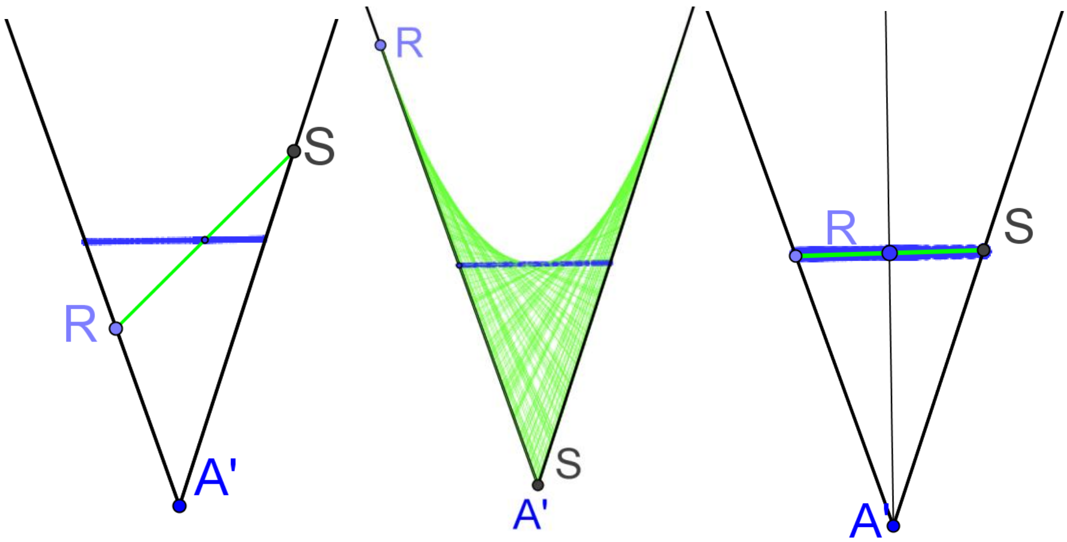


圖 16~18

(二) 到此我們找出了一些問題與性質，以下將進行證明與討論：

1. $\overline{RS}$ 集合的元素中點共線，且該線垂直於角平分線。

2. $\overline{RS}$ 集合的元素通式與包絡線方程式。

3. $\overline{RS}$ 集合形成的包絡線是何種圓錐曲線？

4. $\overline{RS}$ 集合的元素中點連線切過其包絡線（拋物線）頂點。

5. $\overline{RS}$ 集合的元素中垂線過定點。

(三) 開始證明：

1. $\overline{RS}$ 集合的所有元素中點共線：(如下圖 19)

因為 $\overline{RS}$ 集合的作圖具有對稱性，所以中點掃略圖必定對稱於 $\angle A'$ 的角平分線，又因圖 18 觀察到中點掃略圖也是 $\overline{RS}$ 集合內的元素。故合理假設下圖 18 中，$\overline{\mathrm{RS}}$ 之中點都落在 $\overline{\mathrm{MN}}$ 上。

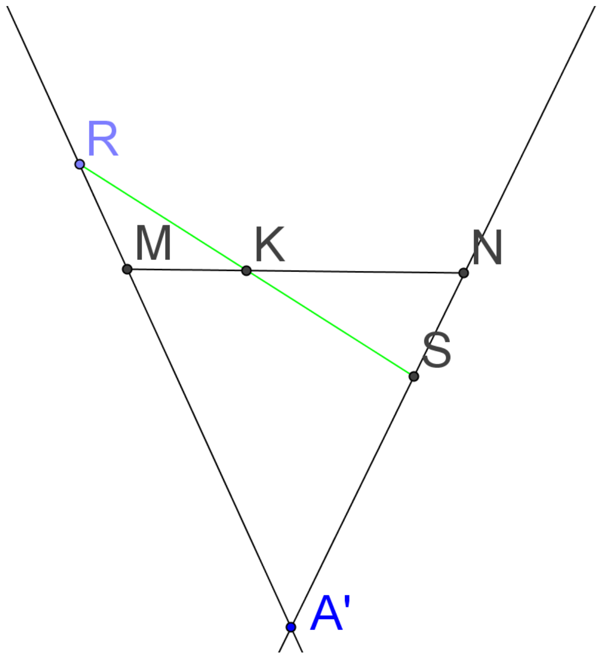


圖 19

[已知] $\overline{A'R}+\overline{A'S}=l$ ，$\overline{A'M}=\overline{A'N}=\dfrac{l}{2}$

[證明] $\overline{RS}$ 集合的中點都落在 $\overline{MN}$ 之上

(1) 設 K 為 $\overline{RS}$ 與 $\overline{MN}$ 的交點，$\because\ \overline{A'R}+\overline{A'S}=l$，$\overline{A'M}=\overline{A'N}=\dfrac{l}{2}\Rightarrow\overline{RM}=\overline{SN}$ 。

(2) 當 $\overline{RS}$ 與 $\overline{MN}$ 重合時，顯然 $\overline{RS}$ 之中點落在 $\overline{MN}$ 上。

(3) 當 $\overline{RS}$ 與 $\overline{MN}$ 不重合時，由孟氏定理可得知：

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{NA'}}\times\frac{\overline{RK}}{\overline{KS}}\times\frac{\overline{A'M}}{\overline{MR}}=\frac{\overline{MR}}{l/2}\times\frac{\overline{RK}}{\overline{KS}}\times\frac{l/2}{\overline{MR}}=1\ \Rightarrow\overline{KR}=\overline{KS}$$

$\Rightarrow$K 為 $\overline{RS}$ 的中點

$\Rightarrow\overline{RS}$ 的中點落在 $\overline{MN}$ 之上（且該交點為 K）。

(4) $\because$R 為動點，綜合(2)(3)可得知 $\overline{RS}$ 集合的中點都落在 $\overline{MN}$ 之上。

2. $\overline{RS}$ 集合內的元素通式與其包絡線方程式：

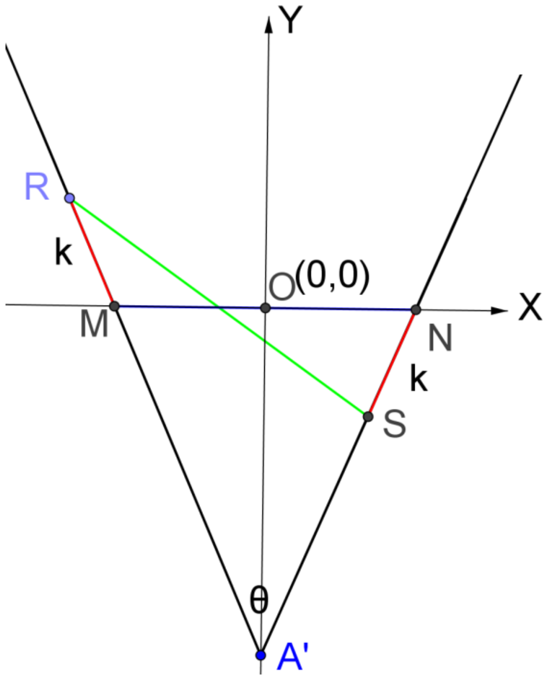


圖 20

如圖 20 所示，令 $\angle A'$ 的角平分線 $\overleftrightarrow{A'O}$ 為 Y 軸、$\overline{RS}$ 集合的中點連線 $\overleftrightarrow{MN}$ 為 X 軸、$\angle MA'N=\theta$ 、$\overline{RA'}+\overline{A'S}=l$ ，$\overline{MA'}=\overline{NA'}=\dfrac{l}{2}$ 、$\overline{MR}=\overline{NS}=k$ 。

(1) 由已知可得出 $R\left(-(\dfrac{l}{2}+k)\sin\dfrac{\theta}{2}\ ,k\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ 、$S\left((\dfrac{l}{2}-k)\sin\dfrac{\theta}{2}\ ,-k\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

(2) 由 R、S 兩點座標求得 $\overleftrightarrow{RS}$ 之方程式通式為：

$$2k\cos\frac{\theta}{2}x+l\sin\frac{\theta}{2}y+2k^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$$

(3) 接下來以 k 對方程式作偏微分：

$$\frac{\partial}{\partial k}[2k\cos\frac{\theta}{2}x+l\sin\frac{\theta}{2}y+2k^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}]=0$$

$$\Rightarrow 2k\sin\frac{\theta}{2}+x=0$$

(4) 將兩式聯立 $\begin{cases}2k\sin\frac{\theta}{2}+x=0\\ 2k\cos\frac{\theta}{2}x+l\sin\frac{\theta}{2}y+2k^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0\end{cases}$

可得到包絡線方程式為 $y=\dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}x^2$

3. $\overline{RS}$ 集合的包絡線是何種圓錐曲線：

由包絡線方程式可知其為拋物線。

4. $\overline{RS}$ 集合的元素中點連線切過其包絡線（拋物線）頂點：

由包絡線的方程式可知其切過 X 軸，因為令 X 軸為 $\overline{RS}$ 集合的中點連線。故 $\overline{RS}$ 集合的中點連線切過其包絡線頂點。

5. $\overline{RS}$ 集合內元素的中垂線過定點：

(1) $R\left(-(\frac{l}{2}+k)\sin\frac{\theta}{2}\ ,k\cos\frac{\theta}{2}\right)$ 、 $S\left((\frac{l}{2}-k)\sin\frac{\theta}{2}\ ,-k\cos\frac{\theta}{2}\right)$ $\Rightarrow \overline{RS}$ 中點為 $\left(-k\sin\frac{\theta}{2}\ ,0\right)$

(2) 利用 $\overleftrightarrow{RS}$ 方程式： $2k\cos\frac{\theta}{2}x+l\sin\frac{\theta}{2}y+2k^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$ ，得垂直於 $\overleftrightarrow{RS}$ 之直線斜率為 $\dfrac{l\tan\frac{\theta}{2}}{2k}$

(3) 綜合(1)(2)，得 $\overline{RS}$ 集合之中垂線方程式通式為 $y=\dfrac{l\tan\frac{\theta}{2}}{2k}x+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cot\frac{\theta}{2}}l$

(4) 由通式可知 $\overline{RS}$ 集合的中垂線通過 $(0,\ \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cot\frac{\theta}{2}}l\ )$。

6. 原先提出的問題已全部解決，此時又有意外的發現：

$\overline{RS}$ 集合中垂線所過的定點 $(0,\ \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cot\frac{\theta}{2}}l\ )$ 就是包絡線（拋物線）$y=\dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}x^2$ 的焦點。

(四) 由以上證明可得知：在 $\overline{RS}$ 集合中，我們只要有任意兩條元素，就可以用中垂線交點找包絡線的焦點，也可以用中點連線切過頂點的性質，再利用拋物線的基本定義找出準線。有了準線和焦點，我們就有能力用數學軟體直接將包絡線繪出。對於上述的性質證明與繪出包絡線的方法，在以下的報告中簡稱廣義版。

(五) 對照前面第 9 頁的方程式 $X=\dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2s\sin\frac{\theta}{2}}Y^2-\dfrac{s\cos\frac{\theta}{2}}{2}$，與 $y=\dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}x^2$ 做比較。可以發現，若取 $l=s$，再經由座標的平移，可以發現兩方程式完全一樣，如此可證明「第八點」所討論的所有性質均可套回等周線的研究，並藉此得到延伸的功能。值得注意的是，在廣義版的証明當中我們並沒有規定 $\overline{A'R}+\overline{A'S}=s$，而是以定值 l 來做假設，因此不論定值 l 代入任意正數，其結果不變。（以下的報告中若出現 l，即代表廣義版中 $\overline{A'R}+\overline{A'S}$ 的固定值）

九、將廣義版作圖套用在三角形的等分周線包絡線作圖上：

(一) 有一個 $\triangle ABC$，欲求等分周線族 $\overline{BA}-\overline{AC}$ 之包絡線（圖 21）：

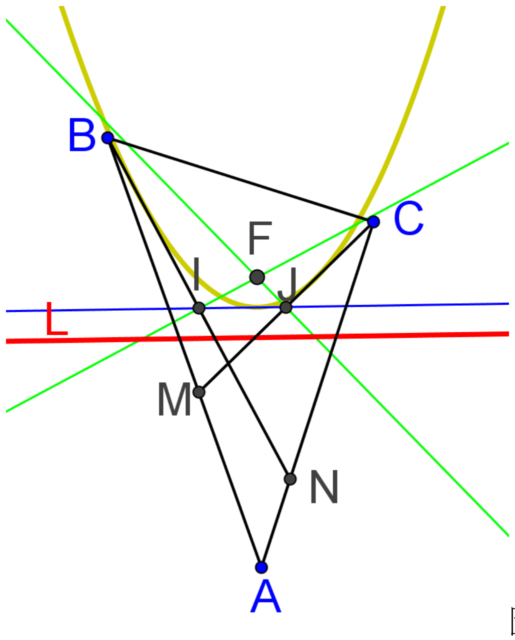


圖 21

1. 找出基本等分周線 $\overline{BN}$ 、 $\overline{MC}$ 。

2. 取 $\overline{BN}$ 、 $\overline{MC}$ 的中垂線交點 F 即為包絡線焦點。

3. 連接 $\overline{BN}$ 、 $\overline{MC}$ 中點 $\overleftrightarrow{IJ}$ ，該線切過包絡線頂點。

4. 取 L// $\overleftrightarrow{IJ}$ ，且 $d\left(L,\overleftrightarrow{IJ}\right)=d\left(\overleftrightarrow{IJ},F\right)$ ，L 即為包絡線的準線。

5. 用 GeoGebra「繪出拋物線」的功能直接將包絡線繪出。

(二) 實際將 $\overline{\text{PQ}}$ 掃略，其包絡線與我們所繪出的拋物線相符(如下圖 22)。

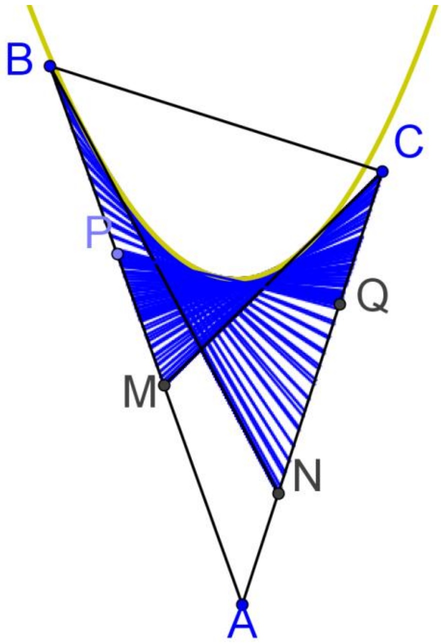


圖 22

十、推廣至任意凸多邊形

(一) 此時三角形已經大抵討論結束，接下來要進展至凸多邊形。在三角形等分周線的研究中，我們已經知道：若同一等分周線族的端點落在「不平行的兩條鄰邊上」，那麼藉由廣義版作圖，我們可以很輕易的畫出該等分周線族所形成的包絡線。既然如此，在推廣至凸多邊形時，需要多考慮以下兩個因素就好：

1. 等分周線族的端點落在不相鄰的兩邊(圖 23)：

(1) 如下圖，給定四邊形 ABCD，試繪出等分周線族 $\overline{AD}-\overline{BC}$ 的包絡線。

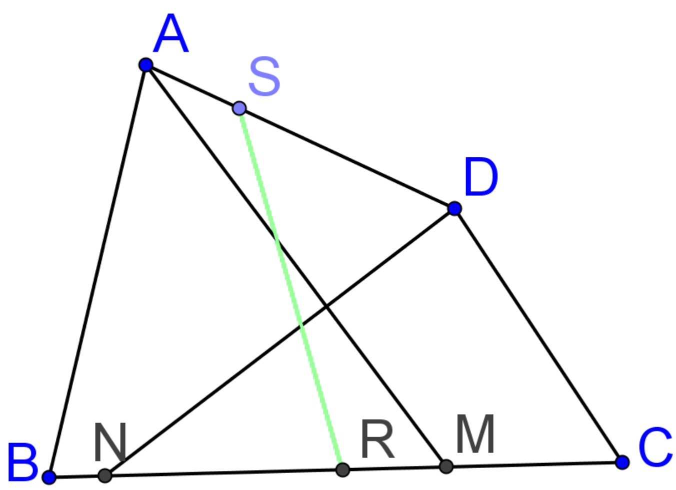


圖 23

(2) 首先延長 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 交於 O。（圖 24）

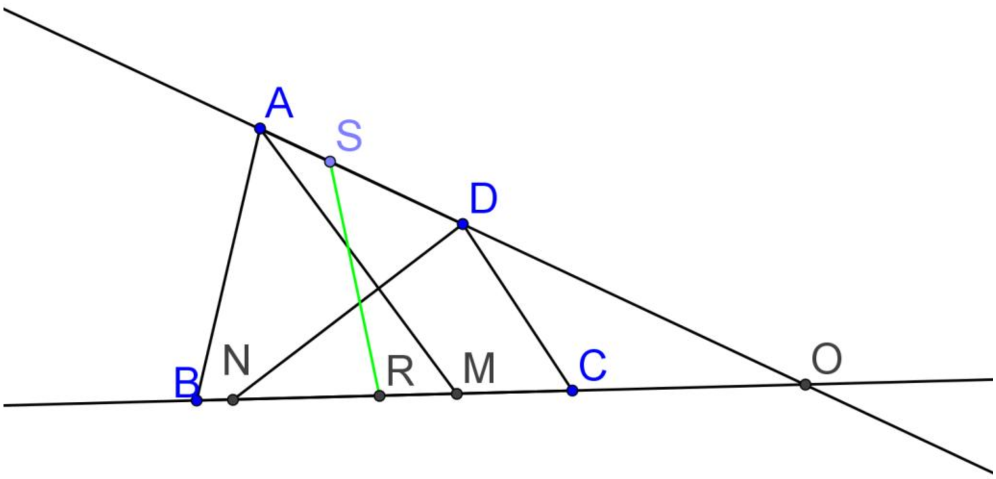


圖 24

(3) 現在仿造廣義版作圖的方式對問題作如下的轉換：

今有任意兩條射線 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ 、 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 皆由 O 點向外放射(如圖 25)。在 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 上有一動點 R，在 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ 上取一點 S，使得 $\overline{\mathrm{SO}}+\overline{\mathrm{OR}}$ 為固定值 l ，且 $0 \le \overline{\mathrm{SO}} \le l$ 。(為了方便說明，以下依舊將動點 S 在定義範圍內掃出的所有 $\overline{RS}$ ，統稱 $\overline{RS}$ 集合)

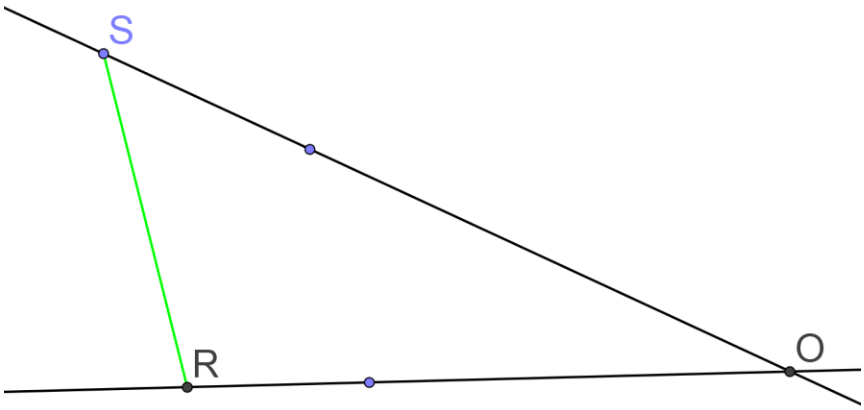


圖 25

(4) 此時套入廣義版，並取 l 等於圖 25 之 $\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{MO}}$ 。因此得出：即使等分周線族 $\overline{AD}-\overline{BC}$ 的端點落在不相鄰的兩邊，其依舊符合廣義版的結論。故當初在廣義版作圖討論出的準線與焦點找法，也同樣適用於端點落在不相鄰二

邊的等分周線族。

(5) 實際以圖 26 作為驗證：

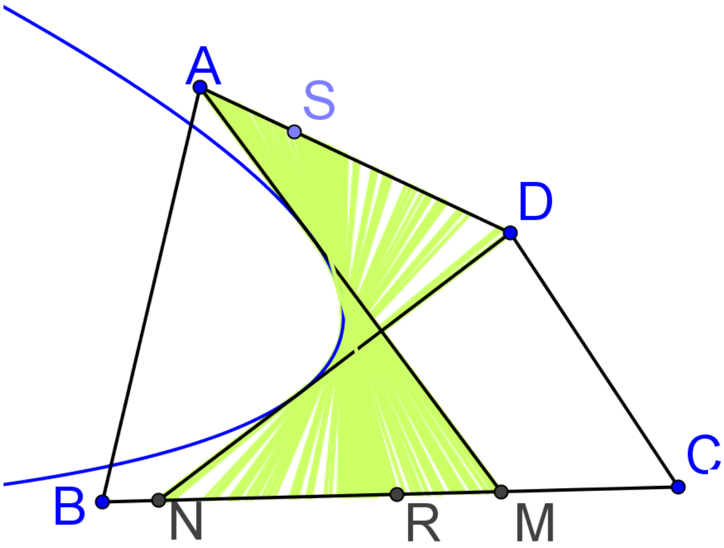


圖 26

2. 等分周線端點落在平行的兩邊：

透過上面的討論 1，我們知道廣義版的限制變得更少了，但仍僅限於兩條邊的延長線有交點的情況下才適用。因為圖 28 的 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 延長線有交點，我們才有辦法在廣義版中取 $\overline{SO}+\overline{OR}$ 為固定值 l 來討論。但若 $\overline{AD} // \overline{BC}$，這種情況要怎麼解決呢？

(1) 由觀察我們猜測：若有一等分周線族 a-b ，其中 $a // b$，那麼等分周線族的元素共點，以下為證明(如圖 27)：

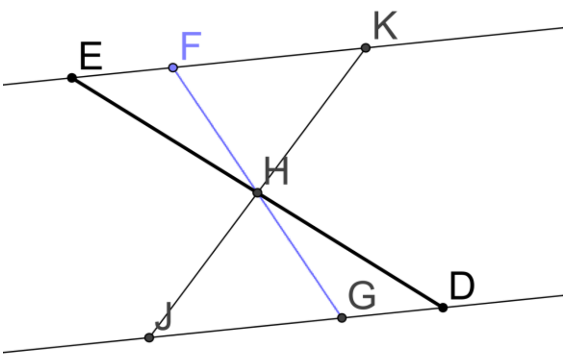


圖 27

(2) [已知] $\overline{EK} // \overline{DJ}$ ， $F \in \overline{EK}$ ， $G \in \overline{DJ}$ ， $\overline{EF} = \overline{DG}$ 。

[求證]所有的 $\overline{DG}$ 交於共點，且其共點為所有 $\overline{DG}$ 的中點。

(3) $\because \overline{EK} \,//\, \overline{DJ} \quad \therefore \angle EDK = \angle DEK$ 、 $\angle DGF = \angle EFG$ ， $\overline{EF} = \overline{DG}$ (以知)

$\Rightarrow \Delta EHF \cong \Delta DHG$ (ASA 全等性質)

(4) $\because \Delta EHF \cong \Delta DHG \Rightarrow$ H 為所有 $\overline{DG}$ 的中點，且所有 $\overline{EF} = \overline{DG}$ 交於 H

由以上的討論，我們可以得知兩條邊平行，以這兩條邊為端點的等分周線族會過定點，因此拋物線不存在。若嘗試以廣義版的方式作圖，則會發現焦點落在準線之上，由此也可得其包絡線不存在。

(二) 討論過這兩點以後，我們認為凸多邊形的等分周線討論已經足夠完善。以後遇到凸多邊形，要畫出包絡線時只要進行下列步驟即可：

1. 將所有基本等分周線畫出。
2. 用廣義版的方式畫出每一個集合的包絡線。
3. 若發現某一集合的包絡線焦點落在準線上，則包絡線不存在。

(三) 以下是我們將以上結論套用至凸五邊形以及凸六邊形的範例（圖 28、29）：

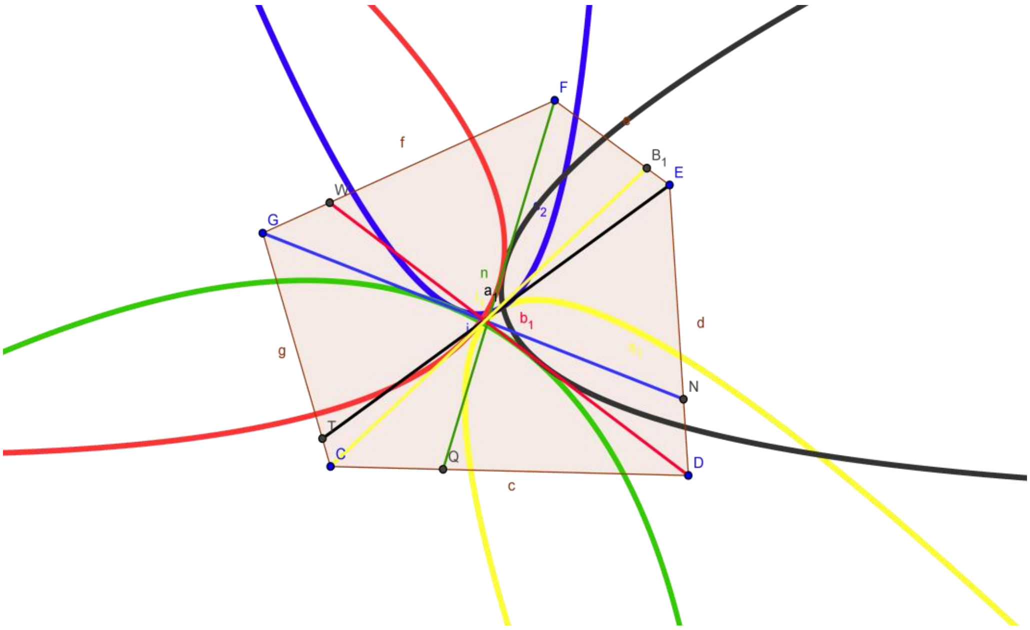


圖 28

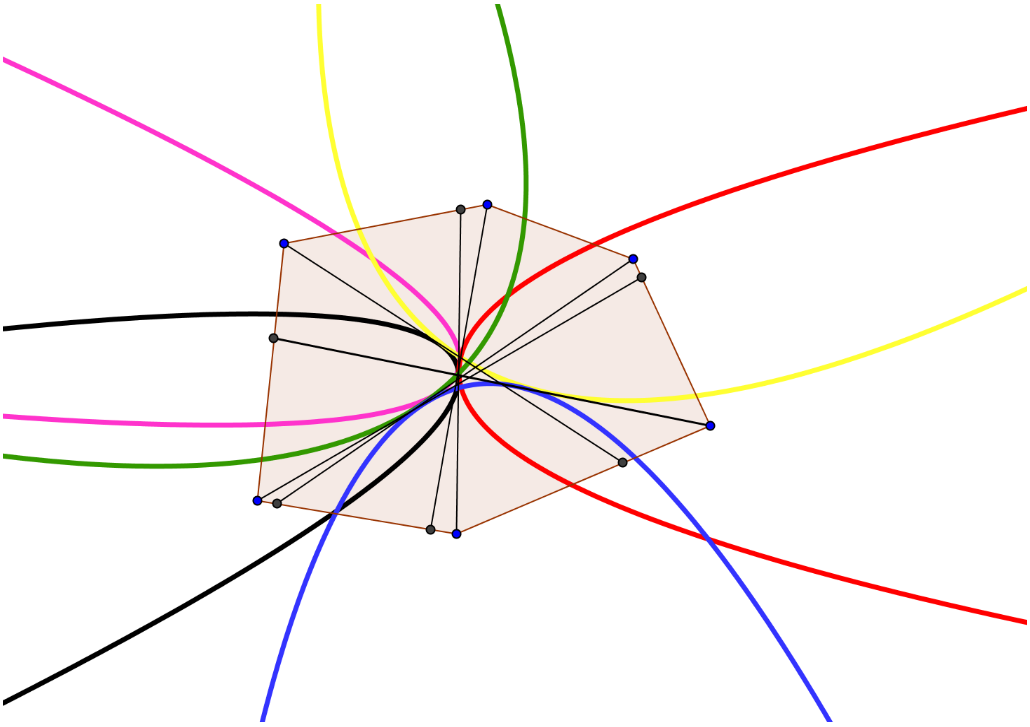


圖 29

十一、繼續推廣到更一般的任意比例分周線。

(一) 若要畫出$1:k$分周線，就等價於在三角形邊上截出一段長度為$\dfrac{2s}{k+1}$的區域，區域的兩個端點就是$1:k$分周線的兩端點。由此可知$1:k$分周線只是將廣義版中的定值l以$\dfrac{2s}{k+1}$代入，其仍然適用於廣義版。

(二) 在$1:k$分周線的討論中，形成同一包絡線的線族依舊是端點落在相同邊上的所有$1:k$分周線，過頂點的$1:k$分周線也一樣稱為基本$1:k$分周線。

(三) 有了先前等分周線的研究基礎，在$1:k$分周線的討論裡，我們直接進行任意凸多邊形的探討，並把三角形當成邊數等於三的特例。首先畫出基本$1:k$分周線，如下圖 30：

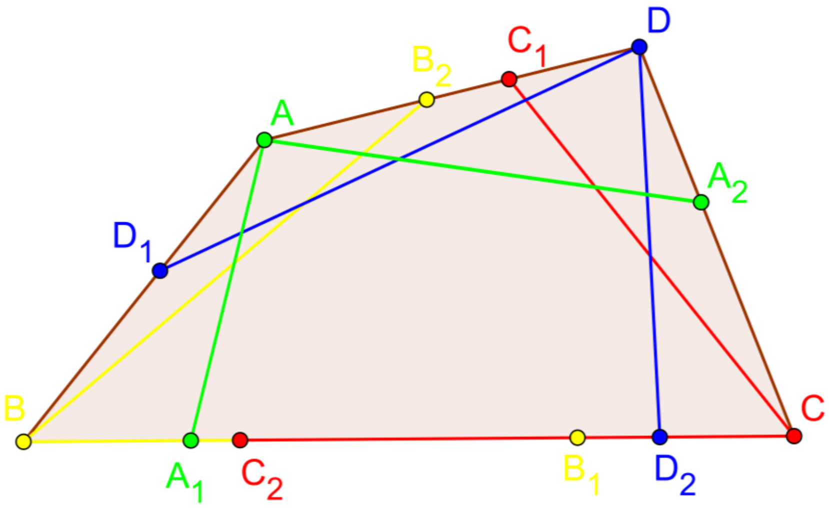


圖 30

(四) 基本$1:k$分周線畫出來後，只要有辦法將所有$1:k$分周線線族的兩條邊界基本$1:k$分周線配對，即可直接套入廣義版。

(五) 由定義我們知道「兩條基本$1:k$分周線的端點所在的邊相同」，是其為同一線族的邊界基本$1:k$分周線的必要條件。並且在任意$1:k$分周線的作圖過程中，與任意等分周線作圖相同，皆是以已知的某條$1:k$分周線，兩端點等速同方向（順時針或逆時針）移動而成，故同一線族的邊界基本$1:k$分周線的又多了一必要條件：「兩線在兩條邊上的端點，排列方式相同。」

由簡單的觀察與推導可以知道：「兩條基本$1:k$分周線的端點所在的邊相同」且「兩基本$1:k$分周線的端點在兩邊上的排列方向相同」，是「兩基本$1:k$分周線為同一線族邊界」的充要條件。

(六) 以圖 30 為例，基本$1:k$分周線$\overline{AA_1}$與$\overline{BB_2}$端點皆落在$\overline{AD}$與$\overline{BC}$上，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$上的端點排列方式「$\mathrm{A} \to B_2$」、「$\mathrm{A}_1 \to B$」皆為順時針，故將$\overline{AA_1}$與$\overline{BB_2}$一組進行廣義版。

而其他的組合例如($\overline{AA_2}$、$\overline{BB_2}$)與($\overline{AA_1}$、$\overline{DD_2}$)，因為不能同時滿足兩個條件，所以而非同一線族的邊界基本$1:k$分周線。

(七) 以此為基礎，我們將任意凸多邊形的所有包絡線繪出，如下圖 31：

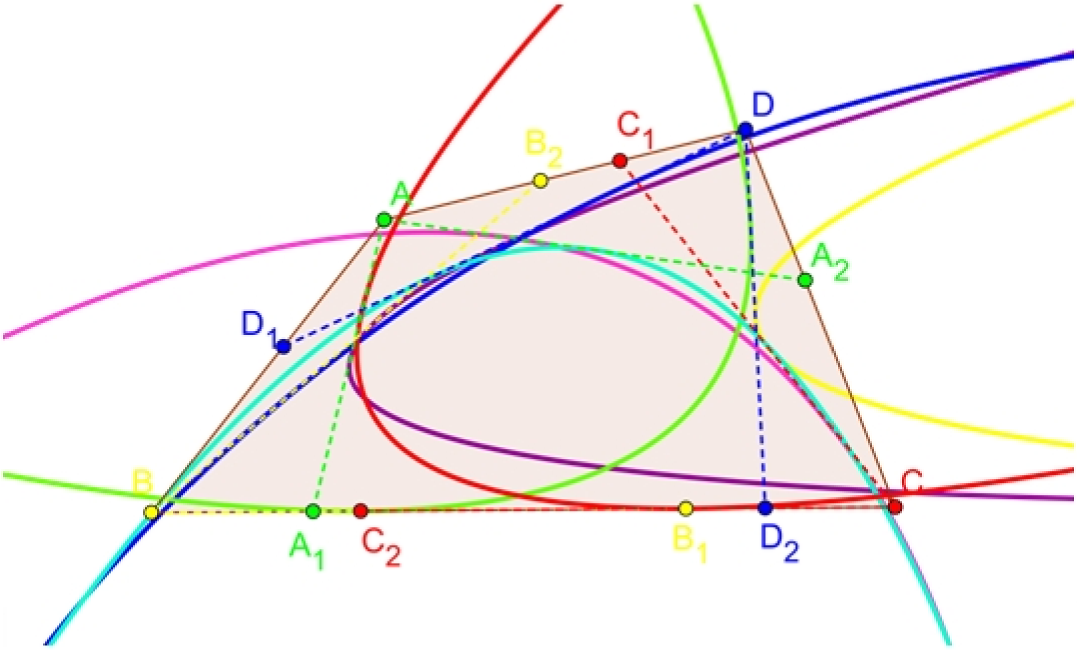


圖 31

伍、　研究結果

一、找出等分周線的作圖方式，並且在幾何軟體上繪出。

二、先利用軌跡功能繪出三角形等分周線族的包絡線（為拋物線），最後利用焦點及準線畫出包絡線。

三、求出三角形等分周線族的包絡線的方程式。

四、由方程式推導出不同的三角形能會有同一條等分周線的包絡線。

五、將廣義版的發現應用到三角形上，我們推導出：同一線族的分周線中垂線交點就是包絡線焦點，且他們的中點連線切過包絡線（拋物線）頂點。因此只要利用基本等分周線我們就能找出準線和焦點的位置，並利用 GeoGebra 直接畫出包絡線（拋物線）。

六、由廣義版得到延伸多邊形的方法，並找出多邊形等分周線的性質，並比較其與三角形有何異同。

七、將任意凸多邊形的基本$1{:}k$分周線兩兩配對，並畫出所有包絡線。

陸、　討論

一、在以上的研究中，我們已經將凸多邊形周長分割線與其包絡線的性質與作圖研究完整，並且在研究過程中發現許多新的問題，且部分可以直接運用上述研究內容解決，以下是我們想到的凸多邊形周長分割線另一些研究方向：

(一) 討論在平面上每一點對某多邊形$1:k$分周長直線的數量，是否可歸納出不同數量的區域？是否有無解區？當 k 值變化會產生什麼影響？

(二) 對於多邊形$1:k$分周長線的集合中，最短或最長的線段是否具有特殊的性質

(三) 多邊形中，$1:k$分周長線族的包絡線的數量不一，是否可以歸納出不同情況下，產生的數量不同的原因，以及 n 邊形中，最多或最少有幾條？

二、對於三角形「等分周線」與「等分積線」是否有關聯。在此篇報告中，我們知道了等分周線的包絡線是拋物線；經由資料的查詢，我們發現等分積線的包絡線為雙曲線。兩者皆為二次曲線，其兩者是否有關聯，可以作為此篇報告的延伸討論。

柒、　結論

一、找出等分周線的作圖方式。

二、任意三角形三條基本等分周線交於同一點。

三、三角形有 3 個等分周線族與三條包絡線。

四、利用解析幾何及偏微分可得包絡線的方程式(其座標如圖 32 所示，周長為 2s)：

$$x^2-2\cot\frac{\theta}{2}xy+\cot\frac{\theta}{2}y^2-2sx-2s\tan\frac{\theta}{2}y+s^2=0$$

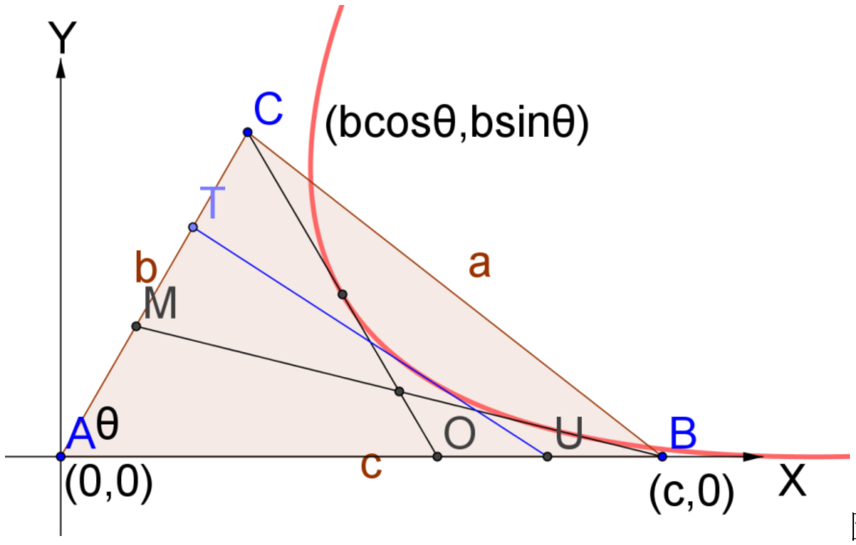


圖 32

五、藉此也可推出同一條拋物線可以為多個三角形的等分周線的包絡線。

六、由廣義版所得結論統整（圖 33）：

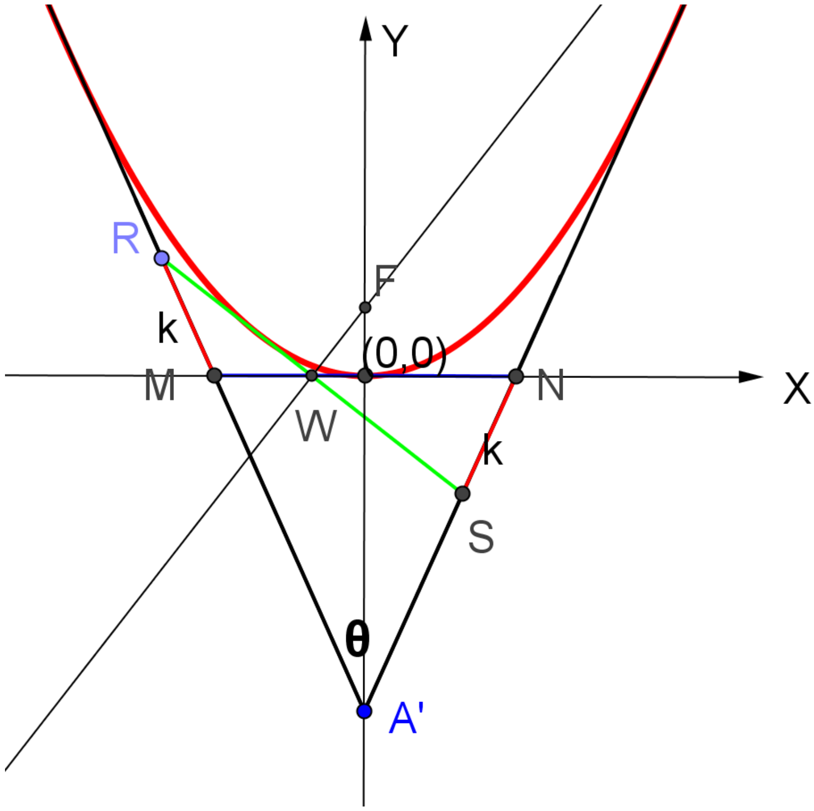


圖 33

(一) 利用偏微分得到包絡線方程式 $y=\dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}x^2$，可證明出 $\overline{RS}$ 集合的包絡線是拋物線。

(二) $\overline{RS}$ 集合的中點共線，且該線段 $\overline{MN}$ 切過拋物線頂點。

(三) 包絡線的頂點位於點 $(0,0)$ 的位置，證明角平分線為包絡線的對稱軸；$\overline{RS}$ 集合的中點連線垂直於角平分線，其中點即為包絡線（為拋物線）之頂點。

(四) 根據 $\overline{RS}$ 集合中垂線 $\overleftrightarrow{FW}$ 通式 $y=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}l}{2k}x+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cot\frac{\theta}{2}}l$，我們得知 $\overline{RS}$ 集合中垂線會過定點，且其座標為 $(0,\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cot\frac{\theta}{2}}l)$。

(五) $\overline{RS}$ 集合中垂線過的定點 $(0,\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cot\frac{\theta}{2}}l)$ 即為包絡線（拋物線）$y=\dfrac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}}x^2$ 之焦點。

七、將廣義版的發現應用到三角形上，只要利用基本等分周線我們就能找出準線和焦點的位置，並利用繪圖軟體直接畫出所有的包絡線。

八、等分周線的包絡線在多邊形中會出現的特例：當某個等分周線族其端點落在平行的兩邊時，此等分周線族所有的等分周線會交於一點，不會有包絡線。

九、為凸多邊形基本$1:k$分周線找出配對依據：「兩基本$1:k$分周線為同一線族邊界」⇔「兩條基本$1:k$分周線的端點所在的邊相同」且「兩基本$1:k$分周線的端點在兩邊上的排列方向相同」。

十、利用結論九將任意凸多邊形的基本$1:k$分周線兩兩配對，並利用凸多邊形等分周線的研究結果畫出所有包絡線。

捌、 參考資料及其他

一、大學入學考試中心（民 98）。98 學年度學科能力測驗試題與解析。台北市：作者。

二、林福來 等（民 98）。高中數學第四冊。台南市：南一書局企業股份有限公司。

三、余文卿 等（民 98）。高中選修數學(1)。台南市：翰林出版事業股份有限公司。

四、陶平生 等（民 98）。高中數學競賽專題講座.解析幾何。杭州：浙江大學出版社。

五、許志農 等（民 98）。數學 2。台北市：龍騰文化事業股份有限公司。

六、陳旻宏（民 80）。三角形分割線形成的包絡線。中華民國第三十一屆全國科學展覽會 高中組 數學科作品。

七、楊維哲(民 71)。微積分(下)。台北市：三民。

八、廖文偉、劉立晴、鄭慈、林士傑（民 95）。三角形周長等分線的數量與分佈。中華民國第四十六屆中小學科學展覽會 國中組 數學科作品。

九、包絡線。取自「維基百科」：
http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8C%85%E7%B5%A1%E7%B7%9A

十、R.E. Woodrow(2004),The Olympiad Corner: No. 239.Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem,272-273.

【評語】040409

1. 本作品如果使用 Cabri Geometry 則效果會更為理想。

2. 類似的討論在過去科展已出現多次。