中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳團隊合作獎

040408

帥（Ceva）！孟（Menelaus）想變立體

學校名稱：高雄縣立福誠高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳宜煌	王智偉
高二 王順弘	謝錦盛
高二 黃傳鈞	
高二 張嘉升	

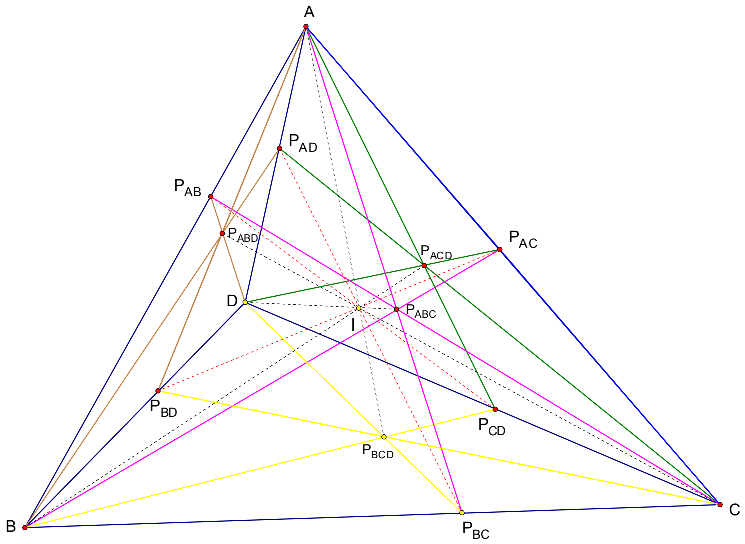
關鍵詞：Menelaus、Ceva

摘要

我們發現

一、 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理亦可應用於平面的凸多邊形與空間中的多角錐，
且結論彼此有高度關聯性。

二、(一)、能畫出三角錐內部7條線段共點及內部6個Δ亦共於此點的方法。
(二)、若三角錐中的任一個Δ之任 2 條線段的比例為已知，
只要再任給剩下$[25-(2+4)]=19$條的其中1條線段比例，必可知所有 25 條線段比例！



三、(一)、正四面體的外接球球心及內切球球心均為同一點I 。
(二)、(外接球半徑):(內切球半徑) $=3:1$

四、(一)、 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』的Δ跳法可推廣到三角錐。
(二)、三角錐內部7條線段共點的結論可應用於
在已知空間中任意相異四點P_1,P_2,P_3,P_4(任三點不共線)的條件下，

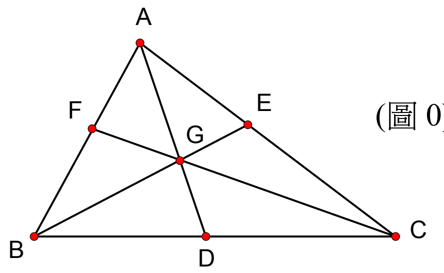
證明出若此四點P_1,P_2,P_3,P_4共平面$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$

空間中任意相異四點P_1,P_2,P_3,P_4(任三點不共線，但此四點不管有無共平面皆可)， 均可畫出三角錐$ABCD$，其中線段$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{AD}$分別含此四點$P_1,P_2,P_3,P_4$。

註：本文所提及之「線段的比例」均指　一線段上有分點，使其分為兩小段， 則我們將這兩小段的比例稱為「線段的比例」。

壹、研究動機

在高二上學期，讀到平面向量的三點共線、三線共點時，王老師不僅介紹 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理，還讓倍感神奇的我們欣賞了過去學長姐曾於第四十四屆中小學分區科學展覽會參展佳作的作品－ *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』－ (如圖0)



(圖 0)

ΔABC 有 $\overline{AFB},\overline{BDC},\overline{CEA}$ (Δ外圍3條) , $\overline{AGD},\overline{BGE},\overline{CGF}$ (Δ內部3條) 共 6 條線段的比例，

若 $\overline{AFB},\overline{BDC},\overline{CEA}$, $\overline{AGD},\overline{BGE},\overline{CGF}$ 6 條線段中有任 2 條線段的比例是已知的，

透過 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』必然可求出其它 4 條線段的比例。
這樣的結論激發了我們的想像力，也更加以學長姐為目標，甚至希望能超越他們，
當王老師一教到空間向量時，我們知道我們的機會來了！
因為三角錐是多角錐的基本圖形(多角錐可分割成多個三角錐)，如同三角形是多邊形的基本圖形(多邊形可分割成多個三角形)，我們發現了兩者之間的關聯性，我們知道如果能將 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』好好應用在三角錐，就有可能會成為「數學界哥倫布的接班人」。

貳、研究目的

一、希望能推廣 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理至凸多邊形與多角錐，並找出彼此關聯性。！！
二、希望找到簡易畫出任意三角錐 $ABCD$ 內部 7 條線段共點及內部 6 個 Δ 亦共於此點的方法。
三、希望找到最少的條件來決定三角錐內外所有的線段比例。
四、希望利用任意三角錐 $ABCD$ 內部 7 條線段共點來說明正四面體其外接球球心與內切球球心為同一個且 (外接球半徑):(內切球半徑) $=3:1$
五、希望延續並調整 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』的 Δ 跳法，將其推廣成三角錐跳法。
六、希望空間中任意相異四點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線，但此四點不管有無共平面皆可)，

均可畫出三角錐 $ABCD$ ，其中線段 $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{AD}$ 分別含此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 。

接著希望證明若此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 共平面 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$

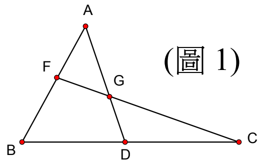
叁、研究設備及器材

彩色筆、色鉛筆、繪圖程式(*GSP*4.0 、 *Cabri 3D*)

肆、研究過程或方法

一、我們使用的定理：

(一)、*Menelaus* 定理：

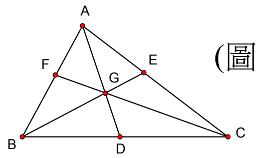


(圖 1)

如果一直線 L 截 ΔABD 的三邊 $\overline{BD}, \overline{DA}, \overline{AB}$(或其延長線)，

依次為點C,G,F，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \dfrac{\overline{DG}}{\overline{GA}} = 1$ (如圖1)

(二)、*Ceva* 定理：



(圖 2)

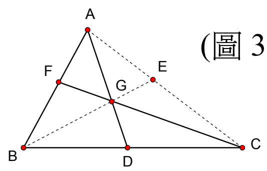
給定 ΔABC，設點D,E,F分別在$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$上且均非頂點，

若$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$共點，則$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$ (如圖2)

註：原 *Ceva* 定理定義在直線$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$，本文 *Ceva* 定理均定義在線段$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$，

如此可使得其逆定理恆成立。

(三)、在 *Menelaus* 定理中，連點 A, C 成 $\overline{AC}$，並連點 B, G 且延長 $\overline{BG}$



(圖 3)

交 $\overline{AC}$ 於點 E，學長姐發現 *Menelaus*、*Ceva* 定理的關聯性，
原來它們的基本圖都相同！！ (如圖3)

二、我們重新調整學長姐的 *Menelaus*、*Ceva* 定理『大和解』，並給予證明，讓它更適合推廣：

(一)、ΔABC 有 $\overline{AFB}, \overline{BDC}, \overline{CEA}$ (Δ外圍3條), $\overline{AGD}, \overline{BGE}, \overline{CGF}$ (Δ內部3條)線段的比例，

若已知 $\overline{AFB}, \overline{BDC}, \overline{CEA}$, $\overline{AGD}, \overline{BGE}, \overline{CGF}$ 這 6 條線段中任 2 條線段的比例，

配合 *Menelaus*、*Ceva* 定理交互使用，就能求出其它 4 條線段的比例。

(二)、將 *Menelaus*、*Ceva* 定理『大和解』的 Δ 跳法調整如下：

①. 使用 ΔABC 6 條線段 $\overline{AFB}, \overline{BDC}, \overline{CEA}, \overline{AGD}, \overline{BGE}, \overline{CGF}$ 中任 3 條線段

(但此 3 條線段必須有三相異交點，這樣的限制保證此三相異交點必不共線)

②. 始終同點 (從三相異交點中任取一點出發，最後就要回到原出發點)

③. 3 條線段接連跳完而同 1 條線段分兩次跳

(先從***一交點***跳到同線段的***非交點***，再從此***非交點***跳到同線段另一端的***交點***，

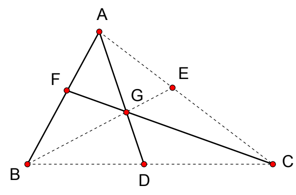
↓ ↓

此長度當分子 此長度當分母

這樣算跳完一段，且接續下一條線段繼續跳，直到 3 條線段跳完恰回原出發點，

並按分子、分母順序一直乘，均可得 $\dfrac{分子_1}{分母_1} \cdot \dfrac{分子_2}{分母_2} \cdot \dfrac{分子_3}{分母_3} = 1$)

例：選 $\overline{AFB}$, $\overline{AGD}, \overline{CGF}$，則 $\dfrac{\overline{FB}}{\overline{BA}} \cdot \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DG}} \cdot \dfrac{\overline{GC}}{\overline{CF}} = 1$ (如圖4)



(圖 4)

證明) (一)、1. 已知Δ外圍2條線段比例，不失其普遍性，令$\overline{AFB}$、$\overline{BDC}$爲已知，則

❶$\overline{CEA}$❷$\overline{AGD}$❸$\overline{BGE}$❹$\overline{CGF}$ (❶by *Ceva*；❷❸❹by *Menelaus*)線段比例均可求出

2. 已知Δ外圍1條線段及內部1條線段的比例，不失其普遍性，

① 令$\overline{AFB}$、$\overline{AGD}$爲已知，則

❶$\overline{BDC}$❷$\overline{CEA}$❸$\overline{BGE}$❹$\overline{CGF}$ (❶❷❸❹ by *Menelaus*) 線段比例均可求出

②令$\overline{AFB}$、$\overline{CGF}$爲已知，則

❶$\overline{BDC}$ ❷$\overline{CEA}$ ❸$\overline{AGD}$❹$\overline{BGE}$ (❶❷❸❹ by *Menelaus*) 線段比例均可求出

3. 已知Δ內部2條線段的比例，不失其普遍性，令$\overline{AGD}$、$\overline{BGE}$爲已知，則

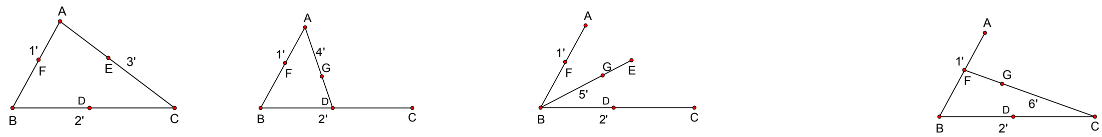
❶$\overline{AFB}$❷$\overline{BDC}$❸$\overline{CEA}$ ❹$\overline{CGF}$ (❶❷❸❹ by *Menelaus*) 線段比例均可求出

(二)、我們用窮舉法： ΔABC 有外圍3條線段及內部3條線段，

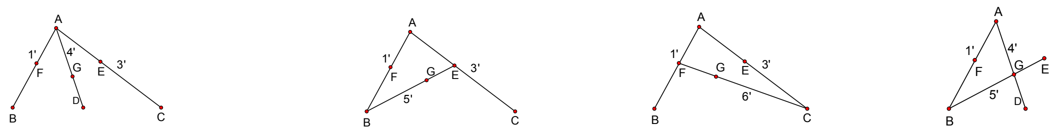
先將$\overline{AFB},\overline{BDC},\overline{CEA},\overline{AGD},\overline{BGE},\overline{CGF}$分別編號爲$1',2',3',4',5',6'$，

並依編號由小到大選出3條線段 (如圖群5)

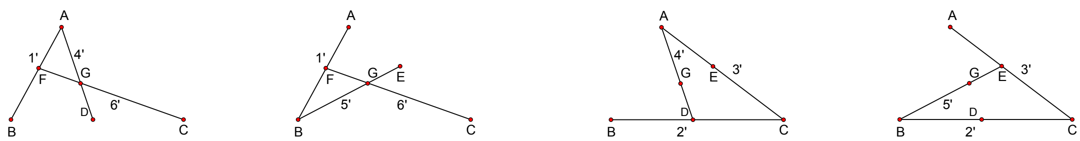
①. $1',2',3'$ ②. $1',2',4'$ ③. $1',2',5'$ ×(三線共點) ④. $1',2',6'$



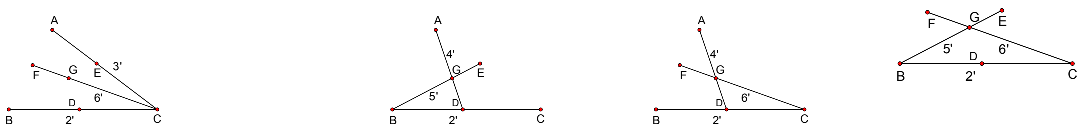
⑤. $1',3',4'$ ×(三線共點) ⑥. $1',3',5'$ ⑦. $1',3',6'$ ⑧. $1',4',5'$



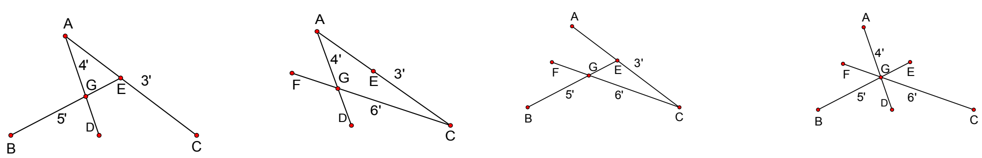
⑨. $1',4',6'$ ⑩. $1',5',6'$ ⑪. $2',3',4'$ ⑫. $2',3',5'$



⑬. $2',3',6'$ ×(三線共點) ⑭. $2',4',5'$ ⑮. $2',4',6'$ ⑯. $2',5',6'$



⑰. $3',4',5'$ ⑱. $3',4',6'$ ⑲. $3',5',6'$ ⑳. $4',5',6'$ ×(三線共點)



(圖群 5)

經我們驗證*Menelaus*、*Ceva*定理『大和解』的Δ跳法，結果上述$(20-4)=16$種情形均成立！

三、研究平面上任意凸 n 邊形和空間中 n 角錐在線段比例連乘的關聯性

(一)、1.平面上，在 ΔABC 內任找一點 D，連接 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$，

在 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$ 分別任找點 P_{AD},P_{BD},P_{CD}，

先連接 $\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}}$，這兩條線段交於點 P_{ABD}

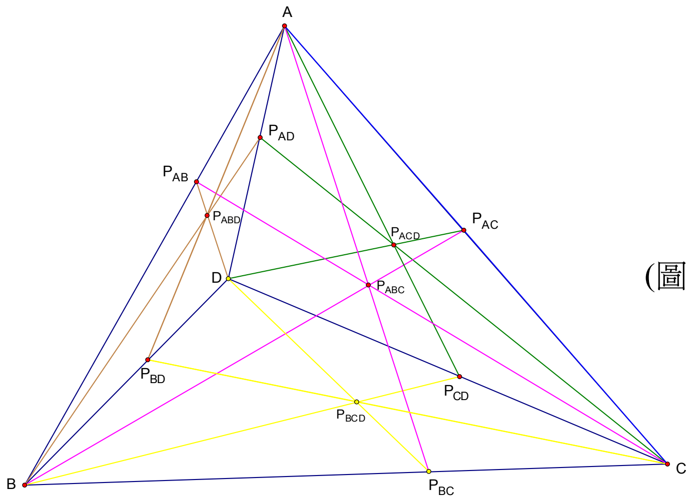
連接 $\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}}$，這兩條線段交於點 P_{ACD}

連接 $\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{BD}}$，這兩條線段交於點 P_{BCD}

再連接 $\overline{DP_{ABD}},\overline{DP_{ACD}},\overline{DP_{BCD}}$ 並延長之，分別交 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 於點 P_{AB},P_{AC},P_{BC}，

證明在 ΔABC 中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$，且得 $\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$ 三線必共點於點 P_{ABC}。

(如圖6)



(圖 6)

證明) ①.在 ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BD}}}{\overline{P_{BD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{AD}}}{\overline{P_{AD}A}}=1$

②.在 ΔBCD 中，$\dfrac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{CD}}}{\overline{P_{CD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{BD}}}{\overline{P_{BD}B}}=1$

③.在 ΔCAD 中，$\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}\cdot\dfrac{\overline{AP_{AD}}}{\overline{P_{AD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{CD}}}{\overline{P_{CD}C}}=1$

由 ①×②×③得 $\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$(在 ΔABC 中)

且得 $\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$ 三線必共點於點 P_{ABC} ($by\quad Ceva$ 逆定理) #

2.平面上，在凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$內任找一點A_{n+1}，連接$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$，

在$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$分別任找點$P_{A_1A_{n+1}},P_{A_2A_{n+1}},P_{A_3A_{n+1}},\cdots,P_{A_nA_{n+1}}$，

先連接$\overline{A_1P_{A_2A_{n+1}}},\overline{A_2P_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_2A_{n+1}}$

連接$\overline{A_2P_{A_3A_{n+1}}},\overline{A_3P_{A_2A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_2A_3A_{n+1}}$

… … … … … … … … … … … … …

連接$\overline{A_{n-1}P_{A_nA_{n+1}}},\overline{A_nP_{A_{n-1}A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_{n-1}A_nA_{n+1}}$

連接$\overline{A_1P_{A_nA_{n+1}}},\overline{A_nP_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_nA_{n+1}}$

再連接$\overline{A_{n+1}P_{A_1A_2A_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_2A_3A_{n+1}}},\cdots,\overline{A_{n+1}P_{A_{n-1}A_nA_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_1A_nA_{n+1}}}$並延長之，

分別交$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\cdots,\overline{A_{n-1}A_n},\overline{A_1A_n}$於點$P_{A_1A_2},P_{A_2A_3},\cdots,P_{A_{n-1}A_n},P_{A_1A_n}$，

證明在凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$中，$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdots\cdots\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1\quad(n\geq 3)$

證明) ①.在$\Delta A_1A_2A_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_2A_{n+1}}A_{n+1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_1A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_1A_{n+1}}A_1}}=1$

②.在$\Delta A_2A_3A_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdot\dfrac{\overline{A_3P_{A_3A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_3A_{n+1}}A_{n+1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_2A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_2A_{n+1}}A_2}}=1$

… … … … … … … … … … … …

$\boxed{n-1}$.在$\Delta A_{n-1}A_nA_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_3P_{A_3A_4}}}{\overline{P_{A_3A_4}A_4}}\cdot\dfrac{\overline{A_4P_{A_4A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_4A_{n+1}}A_{n+1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_3A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_3A_{n+1}}A_3}}=1$

ⓝ.在$\Delta A_nA_1A_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_nA_{n+1}}}}{\overline{P_{A_nA_{n+1}}A_{n-1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_{n-1}A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_{n+1}}A_{n-1}}}=1$

由 ①×②×⋯ ×$\boxed{n-1}$×ⓝ得$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdots\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1$ #

(二)、1.空間中，在異於ΔABC所在平面上任找一點D，連接$\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$，形成三角錐，

在$\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$分別任找點$P_{AD},P_{BD},P_{CD}$，

先連接$\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}}$，這兩條線段交於點$P_{ABD}$

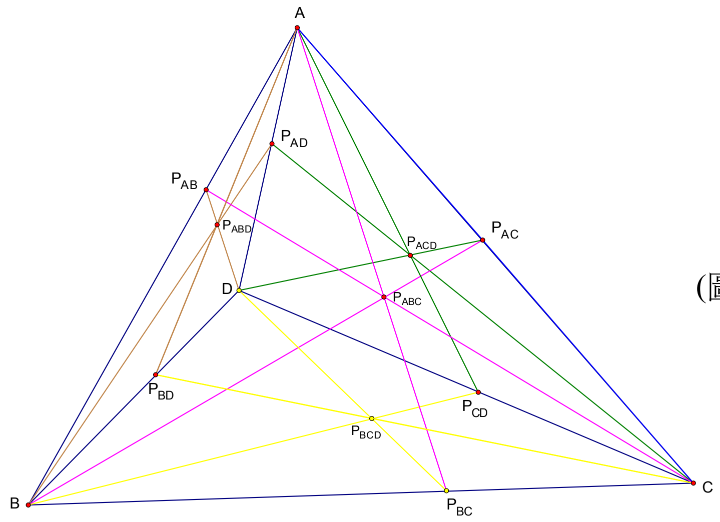
連接$\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}}$，這兩條線段交於點$P_{ACD}$

連接$\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{BD}}$，這兩條線段交於點$P_{BCD}$

再連接$\overline{DP_{ABD}},\overline{DP_{ACD}},\overline{DP_{BCD}}$並延長之，分別交$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$於點$P_{AB},P_{AC},P_{BC}$，

證明在ΔABC中，$\frac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\frac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\frac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$，且得$\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$三線必共點於點$P_{ABC}$。

(如圖7)



(圖 7)

證明) ①.在ΔABD中，$\frac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\frac{\overline{BP_{BD}}}{\overline{P_{BD}D}}\cdot\frac{\overline{DP_{AD}}}{\overline{P_{AD}A}}=1$

②.在ΔBCD中，$\frac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\frac{\overline{CP_{CD}}}{\overline{P_{CD}D}}\cdot\frac{\overline{DP_{BD}}}{\overline{P_{BD}B}}=1$

③.在ΔCAD中，$\frac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}\cdot\frac{\overline{AP_{AD}}}{\overline{P_{AD}D}}\cdot\frac{\overline{DP_{CD}}}{\overline{P_{CD}C}}=1$

由 ①×②×③得$\frac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\frac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\frac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$(在$\Delta ABC$中)

且得$\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$三線必共點於點$P_{ABC}$ (*by* *Ceva* 逆定理) #

2. 空間中，在異於凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$所在平面上任找一點A_{n+1}，

連接$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$，形成$n$角錐，

在$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$分別任找點$P_{A_1A_{n+1}},P_{A_2A_{n+1}},P_{A_3A_{n+1}},\cdots,P_{A_nA_{n+1}}$，

先連接$\overline{A_1P_{A_2A_{n+1}}},\overline{A_2P_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_2A_{n+1}}$

連接$\overline{A_2P_{A_3A_{n+1}}},\overline{A_3P_{A_2A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_2A_3A_{n+1}}$

… … … … … … … … … … … … …

連接$\overline{A_{n-1}P_{A_nA_{n+1}}},\overline{A_nP_{A_{n-1}A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_{n-1}A_nA_{n+1}}$

連接$\overline{A_1P_{A_nA_{n+1}}},\overline{A_nP_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_nA_{n+1}}$

再連接$\overline{A_{n+1}P_{A_1A_2A_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_2A_3A_{n+1}}},\cdots,\overline{A_{n+1}P_{A_{n-1}A_nA_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_1A_nA_{n+1}}}$並延長之，

分別交$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\cdots,\overline{A_{n-1}A_n},\overline{A_1A_n}$於點$P_{A_1A_2},P_{A_2A_3},\cdots,P_{A_{n-1}A_n},P_{A_1A_n}$，

證明在凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$中，$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdots\cdots\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1\quad(n\ge 3)$

證明) ①.在$\Delta A_1A_2A_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_2A_{n+1}}A_{n+1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_1A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_1A_{n+1}}A_1}}=1$

②.在$\Delta A_2A_3A_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdot\dfrac{\overline{A_3P_{A_3A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_3A_{n+1}}A_{n+1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_2A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_2A_{n+1}}A_2}}=1$

… … … … … … … … … … … …

n-1.在$\Delta A_{n-1}A_nA_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_3P_{A_3A_4}}}{\overline{P_{A_3A_4}A_4}}\cdot\dfrac{\overline{A_4P_{A_4A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_4A_{n+1}}A_{n+1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_3A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_3A_{n+1}}A_3}}=1$

ⓝ.在$\Delta A_nA_1A_{n+1}$中，$\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_nA_{n+1}}}}{\overline{P_{A_nA_{n+1}}A_{n-1}}}\cdot\dfrac{\overline{A_{n+1}P_{A_{n-1}A_{n+1}}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_{n+1}}A_{n-1}}}=1$

由 ①×②×⋯ ×n-1×ⓝ得$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdots\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1$ #

四、(一)、研究簡易畫出三角錐 $ABCD$ 內部 7 條線段共點及內部 6 個 Δ 亦共於此點的方法：

空間中，在異於 ΔABC 所在平面上任找一點 D，連接 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$，形成三角錐，

在 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$ 分別任找點 P_{AD},P_{BD},P_{CD}，

先連接 $\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}}$，這兩條線段交於點 P_{ABD}

連接 $\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}}$，這兩條線段交於點 P_{ACD}

連接 $\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{BD}}$，這兩條線段交於點 P_{BCD}

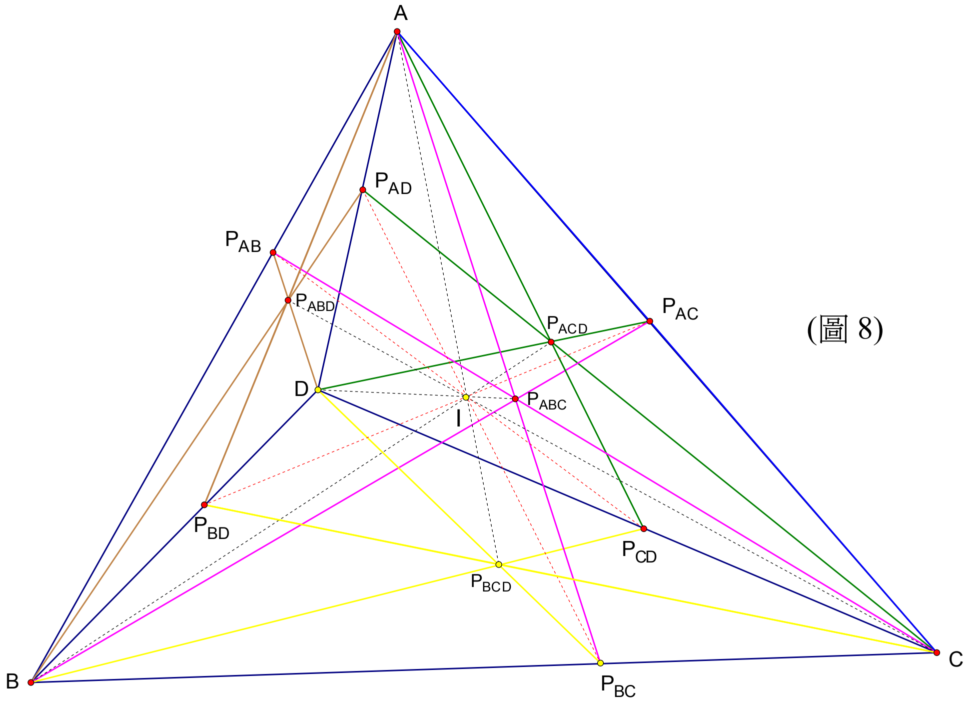
再連接 $\overline{DP_{ABD}},\overline{DP_{ACD}},\overline{DP_{BCD}}$ 並延長之，分別交 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 於點 P_{AB},P_{AC},P_{BC}，

則在 ΔABC 中，$\frac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\frac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\frac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$，且得 $\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$ 三線必共點於點 P_{ABC}。

進一步連接三角錐內部的 7 條線段 $\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{AC}P_{BD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$，

證明這 7 條線段：$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{AC}P_{BD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$ 必共點於點 I，

又共點於點 I 的這 7 條線段任選 2 條線段，其 4 個端點均會共平面，
且內部 6 個 Δ：ΔABP_{CD}, ΔACP_{BD}, ΔADP_{BC}, ΔBCP_{AD}, ΔBDP_{AC}, ΔCDP_{AB} 亦共點於點 I。
(如圖8)



(圖 8)

證明) 令 $\overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=a:b$ ，$\overline{BP_{BD}}:\overline{P_{BD}D}=d:c$ ，$\overline{CP_{CD}}:\overline{P_{CD}D}=f:e$

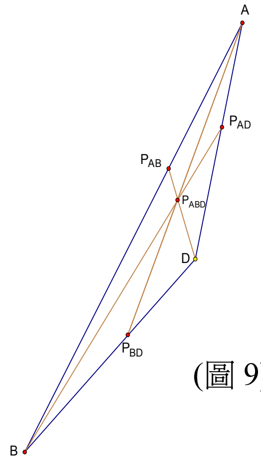
①.在 ΔABD 中 (如圖9)

$\because \overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=a:b$ ，$\overline{BP_{BD}}:\overline{P_{BD}D}=d:c$

利用 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』:

$\Rightarrow$ ❶ $\overline{AP_{AB}}:\overline{P_{AB}B}=ac:bd$

❷ $\overline{AP_{ABD}}:\overline{P_{ABD}P_{BD}}=a(c+d):bd$



(圖 9)

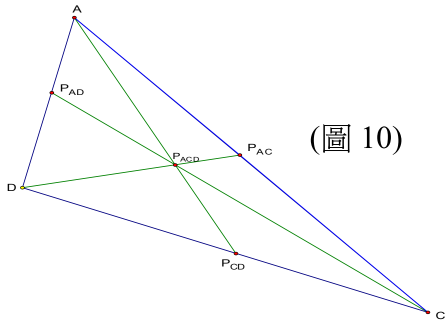
②.在 ΔACD 中 (如圖10)

$\because \overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=a:b$ ，$\overline{CP_{CD}}:\overline{P_{CD}D}=f:e$

利用 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』:

$\Rightarrow$ ❶ $\overline{AP_{AC}}:\overline{P_{AC}C}=ae:bf$

❷ $\overline{AP_{ACD}}:\overline{P_{ACD}P_{CD}}=a(e+f):bf$



(圖 10)

③.在 ΔBCD 中 (如圖11)

$\because \overline{BP_{BD}}:\overline{P_{BD}D}=d:c$ ，$\overline{CP_{CD}}:\overline{P_{CD}D}=f:e$

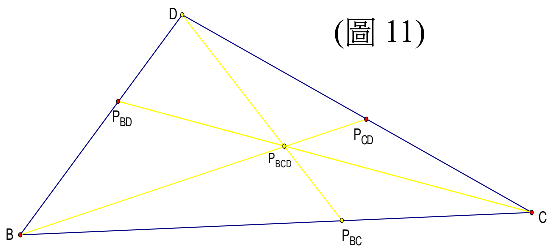
利用 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』:

$\Rightarrow$ ❶ $\overline{BP_{BC}}:\overline{P_{BC}C}=de:cf$

❷ $\overline{BP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{CD}}=d(e+f):cf$

❸ $\overline{CP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{BD}}=f(c+d):de$

❹ $\overline{DP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{BC}}=(de+cf):df$



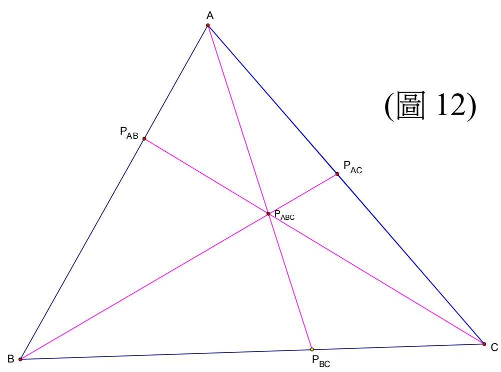
(圖 11)

④.在 ΔABC 中 (如圖12)

$\because \overline{AP_{AB}}:\overline{P_{AB}B}=ac:bd$ ，$\overline{AP_{AC}}:\overline{P_{AC}C}=ae:bf$ ，$\overline{BP_{BC}}:\overline{P_{BC}C}=de:cf$

利用 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』:

$\Rightarrow$ $\overline{AP_{ABC}}:\overline{P_{ABC}P_{BC}}=a(de+cf):bdf$



(圖 12)

由上述的 ①.②.③.④.可得下述的⑤.⑥.⑦

⑤.在ΔABP_{CD}中 (如圖13)

$\because \overline{AP_{AB}}:\overline{P_{AB}B}=ac:bd$，$\overline{BP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{CD}}=d(e+f):cf$，$\overline{AP_{ACD}}:\overline{P_{ACD}P_{CD}}=a(e+f):bf$

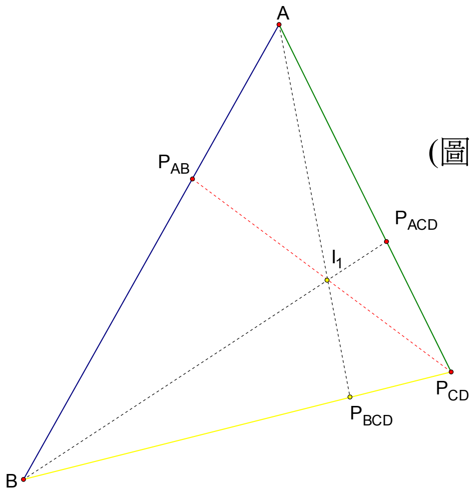
$$\Rightarrow \frac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\frac{\overline{BP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{CD}}}\cdot\frac{\overline{P_{CD}P_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}A}}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{d(e+f)}{cf}\cdot\frac{bf}{a(e+f)}=1$$

利用$Ceva$逆定理，知$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{P_{CD}P_{AB}}$三線共點於$I_1$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_1}}{\overline{I_1P_{BCD}}}\cdot\frac{\overline{P_{BCD}P_{CD}}}{\overline{P_{CD}B}}\cdot\frac{\overline{BP_{AB}}}{\overline{P_{AB}A}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_1}}{\overline{I_1P_{BCD}}}\cdot\frac{cf}{de+cf+df}\cdot\frac{bd}{ac}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_1}}{\overline{I_1P_{BCD}}}=\frac{a(de+cf+df)}{bdf}$$



(圖 13)

⑥.在ΔACP_{BD}中 (如圖14)

$\because \overline{AP_{AC}}:\overline{P_{AC}C}=ae:bf$，$\overline{CP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{BD}}=f(c+d):de$，$\overline{AP_{ABD}}:\overline{P_{ABD}P_{BD}}=a(c+d):bd$

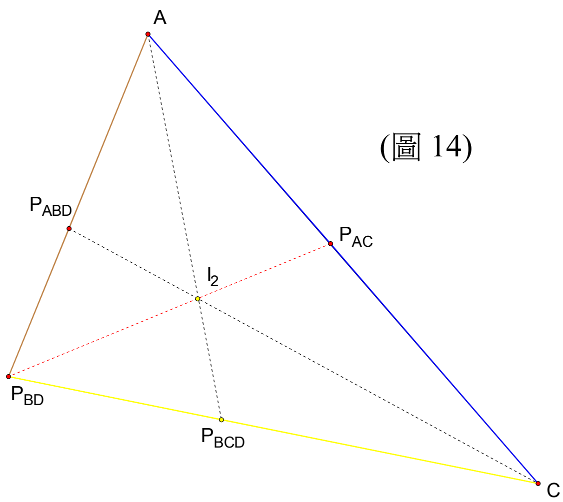
$$\Rightarrow \frac{\overline{AP_{AC}}}{\overline{P_{AC}C}}\cdot\frac{\overline{CP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{BD}}}\cdot\frac{\overline{P_{BD}P_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}A}}=\frac{ae}{bf}\cdot\frac{f(c+d)}{de}\cdot\frac{bd}{a(c+d)}=1$$

利用$Ceva$逆定理，知$\overline{AP_{BCD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{P_{BD}P_{AC}}$三線共點於$I_2$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_2}}{\overline{I_2P_{BCD}}}\cdot\frac{\overline{P_{BCD}P_{BD}}}{\overline{P_{BD}C}}\cdot\frac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_2}}{\overline{I_2P_{BCD}}}\cdot\frac{de}{de+cf+df}\cdot\frac{bf}{ae}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_2}}{\overline{I_2P_{BCD}}}=\frac{a(de+cf+df)}{bdf}$$



(圖 14)

⑦.在ΔADP_{BC}中 (如圖15)

$\because \overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=a:b$，$\overline{DP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{BC}}=(de+cf):df$，$\overline{AP_{ABC}}:\overline{P_{ABC}P_{BC}}=a(de+cf):bdf$

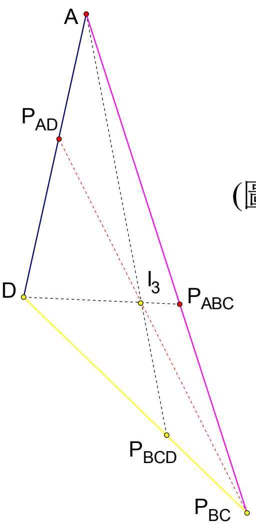
$$\Rightarrow \frac{\overline{AP_{AD}}}{\overline{P_{AD}D}}\cdot\frac{\overline{DP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{BC}}}\cdot\frac{\overline{P_{BC}P_{ABC}}}{\overline{P_{ABC}A}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{de+cf}{df}\cdot\frac{bdf}{a(de+cf)}=1$$

利用$Ceva$逆定理，知$\overline{AP_{BCD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{BC}P_{AD}}$三線共點於$I_3$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_3}}{\overline{I_3P_{BCD}}}\cdot\frac{\overline{P_{BCD}P_{BC}}}{\overline{P_{BC}D}}\cdot\frac{\overline{DP_{AD}}}{\overline{P_{AD}A}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_3}}{\overline{I_3P_{BCD}}}\cdot\frac{df}{de+cf+df}\cdot\frac{b}{a}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI_3}}{\overline{I_3P_{BCD}}}=\frac{a(de+cf+df)}{bdf}$$



(圖 15)

⑧. 由上述的⑤.⑥.⑦可得

$\frac{\overline{AI_1}}{\overline{I_1P_{BCD}}}=\frac{a(de+cf+df)}{bdf}$，$\frac{\overline{AI_2}}{\overline{I_2P_{BCD}}}=\frac{a(de+cf+df)}{bdf}$，$\frac{\overline{AI_3}}{\overline{I_3P_{BCD}}}=\frac{a(de+cf+df)}{bdf}$，

又點I_1,I_2,I_3均在線段$\overline{AP_{BCD}}$上

故點I_1,I_2,I_3必為同一點，將此點統一令為點I

由上述⑤.⑥.⑦的圖示及⑧.的結論，整理後得知

在三角錐內部的這7條線段：$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{AC}P_{BD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$

必共點於點I。

又共點於點I的這7條線段任選2條線段，其4個端點均會共平面，

且內部6個Δ：ΔABP_{CD}, ΔACP_{BD}, ΔADP_{BC}, ΔBCP_{AD}, ΔBDP_{AC}, ΔCDP_{AB}亦共點於點I。

(二)、研究透過已知三角錐 $ABCD$ 中的 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$ 這3條線段的比例，

能求得三角錐 $ABCD$ 中所有25條線段的比例：

由上述(一) 的結論，我們分析可知這樣的三角錐 $ABCD$ 共有

①. 10個Δ：在三角錐中

❶外部有4個Δ：ΔABC，ΔABD，ΔACD，ΔBCD

❷內部有6個Δ：ΔABP_{CD}，ΔACP_{BD}，ΔADP_{BC}，ΔBCP_{AD}，ΔBDP_{AC}，ΔCDP_{AB}

②. 25條線段：在10個Δ中

$\Delta ABC -\ \overline{AB},\overline{AC},\overline{BC},\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$

$\Delta ABD -\ \overline{AB},\overline{AD},\overline{BD},\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}},\overline{DP_{AB}}$

$\Delta ACD -\ \overline{AC},\overline{AD},\overline{CD},\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}},\overline{DP_{AC}}$

$\Delta BCD -\ \overline{BC},\overline{BD},\overline{CD},\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{BD}},\overline{DP_{BC}}$

$\Delta ABP_{CD} -\ \overline{AB},\overline{AP_{CD}},\overline{BP_{CD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{P_{CD}P_{AB}}$

$\Delta ACP_{BD} -\ \overline{AC},\overline{AP_{BD}},\overline{CP_{BD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{P_{BD}P_{AC}}$

$\Delta ADP_{BC} -\ \overline{AD},\overline{AP_{BC}},\overline{DP_{BC}},\overline{AP_{BCD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{BC}P_{AD}}$

$\Delta BCP_{AD} -\ \overline{BC},\overline{BP_{AD}},\overline{CP_{AD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$

$\Delta BDP_{AC} -\ \overline{BD},\overline{BP_{AC}},\overline{DP_{AC}},\overline{BP_{ACD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AC}P_{BD}}$

$\Delta CDP_{AB} -\ \overline{CD},\overline{CP_{AB}},\overline{DP_{AB}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AB}P_{CD}}$

❶出現3次的線段：$\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD},\overline{BC},\overline{BD},\overline{CD},\ \overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}}$ 共10條

❷出現2次的線段：$\overline{AP_{BC}},\overline{AP_{BD}},\overline{AP_{CD}},\overline{BP_{AC}},\overline{BP_{AD}},\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{AB}},\overline{CP_{AD}},\overline{CP_{BD}},$

$\overline{DP_{AB}},\overline{DP_{AC}},\overline{DP_{BC}},\overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{AC}P_{BD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$ 共15條

由❶ ❷知每個Δ的6條線段中，均有3條出現3次的線段及3條出現2次的線段

若知$\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$這3條線段比例，

即$\overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=a:b$ ，$\overline{BP_{BD}}:\overline{P_{BD}D}=d:c$ ，$\overline{CP_{CD}}:\overline{P_{CD}D}=f:e$

則其餘22條線段比例，我們均可利用*Menelaus*、*Ceva*定理『大和解』的Δ跳法求出，這22條線段比例整理如下：

$\overline{AB}\to\overline{AP_{AB}}:\overline{P_{AB}B}=ac:bd$ 、 $\overline{AC}\to\overline{AP_{AC}}:\overline{P_{AC}C}=ae:bf$ 、 $\overline{BC}\to\overline{BP_{BC}}:\overline{P_{BC}C}=de:cf$

$\overline{AP_{BCD}}\to\overline{AI}:\overline{IP_{BCD}}=a(de+cf+df):bdf$ 、 $\overline{BP_{ACD}}\to\overline{BI}:\overline{IP_{ACD}}=d(ae+af+bf):acf$

$\overline{CP_{ABD}}\to\overline{CI}:\overline{IP_{ABD}}=f(ac+ad+bd):ade$、$\overline{DP_{ABC}}\to\overline{DI}:\overline{IP_{ABC}}=(ade+acf+bdf):adf$

$\overline{AP_{BC}}\to\overline{AP_{ABC}}:\overline{P_{ABC}P_{BC}}=a(de+cf):bdf$ 、 $\overline{AP_{BD}}\to\overline{AP_{ABD}}:\overline{P_{ABD}P_{BD}}=a(c+d):bd$

$\overline{AP_{CD}}\to\overline{AP_{ACD}}:\overline{P_{ACD}P_{CD}}=a(e+f):bf$

$\overline{BP_{AC}}\to\overline{BP_{ABC}}:\overline{P_{ABC}P_{AC}}=d(ae+bf):acf$ 、 $\overline{BP_{CD}}\to\overline{BP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{CD}}=d(e+f):cf$

$\overline{BP_{AD}}\to\overline{BP_{ABD}}:\overline{P_{ABD}P_{AD}}=d(a+b):ac$

$\overline{CP_{AB}}\to\overline{CP_{ABC}}:\overline{P_{ABC}P_{AB}}=f(ac+bd):ade$ 、 $\overline{CP_{AD}}\to\overline{CP_{ACD}}:\overline{P_{ACD}P_{AD}}=f(a+b):ae$

$\overline{CP_{BD}}\to\overline{CP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{BD}}=f(c+d):de$

$\overline{DP_{AB}}\to\overline{DP_{ABD}}:\overline{P_{ABD}P_{AB}}=(ac+bd):ad$ 、 $\overline{DP_{AC}}\to\overline{DP_{ACD}}:\overline{P_{ACD}P_{AC}}=(ae+bf):af$

$\overline{DP_{BC}}\to\overline{DP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{BC}}=(de+cf):df$

$\overline{P_{AB}P_{CD}}\to\overline{P_{AB}I}:\overline{IP_{CD}}=ad(e+f):f(ac+bd)$

$\overline{P_{AC}P_{BD}}\to\overline{P_{AC}I}:\overline{IP_{BD}}=af(c+d):d(ae+bf)$

$\overline{P_{AD}P_{BC}}\to\overline{P_{AD}I}:\overline{IP_{BC}}=a(de+cf):df(a+b)$

(三)、 由上述(二) 的結論可知，若三角錐 $ABCD$ 中的 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$

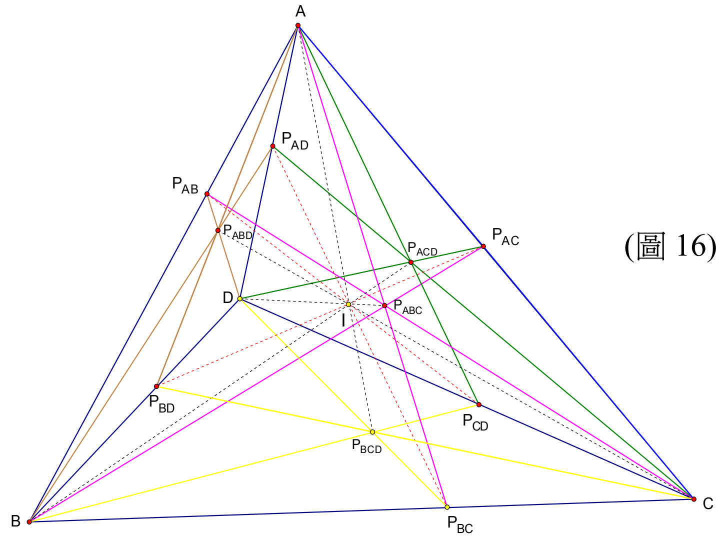
這3條線段的比例均為已知，就可知三角錐 $ABCD$ 中所有25條線段的比例。

我們想大膽假設：

若已知三角錐 $ABCD$ 中的任一個 Δ 之任2條線段的比例，

則此 Δ 的6條線段的比例均變已知，經去除掉此 Δ 的6條線段後，這時只要再任給剩下 $[25-(2+4)]=19$ 條的其中 1 條線段比例，必然可知所有25條線段比例！！

(如圖16)



(圖 16)

證明) 不失其普遍性，我們讓 ΔABD 的2條線段的比例 $\overline{AD},\overline{BD}$ 已知

則 ΔABD － $\overline{AB},\overline{AD},\overline{BD},\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}},\overline{DP_{AB}}$ 這6條線段的比例全變已知

$\because$ 每個 Δ 的6條線段中，均有3條出現3次的線段及3條出現2次的線段，

$\therefore$ 在這10個 Δ 中，我們用特殊符號☆★◇◆□■來表示線段比例變成已知

ΔABC － $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC},\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$

☆

ΔABD － $\overline{AB},\overline{AD},\overline{BD},\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}},\overline{DP_{AB}}$

☆ ★ ◇ ◆ □ ■

ΔACD － $\overline{AC},\overline{AD},\overline{CD},\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}},\overline{DP_{AC}}$

★

ΔBCD － $\overline{BC},\overline{BD},\overline{CD},\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{BD}},\overline{DP_{BC}}$

◇

ΔABP_{CD} － $\overline{AB},\overline{AP_{CD}},\overline{BP_{CD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{P_{CD}P_{AB}}$

☆

ΔACP_{BD} － $\overline{AC},\overline{AP_{BD}},\overline{CP_{BD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{P_{BD}P_{AC}}$

◆

ΔADP_{BC} － $\overline{AD},\overline{AP_{BC}},\overline{DP_{BC}},\overline{AP_{BCD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{BC}P_{AD}}$

★

ΔBCP_{AD} － $\overline{BC},\overline{BP_{AD}},\overline{CP_{AD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$

□

ΔBDP_{AC} － $\overline{BD},\overline{BP_{AC}},\overline{DP_{AC}},\overline{BP_{ACD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AC}P_{BD}}$

◇

ΔCDP_{AB} － $\overline{CD},\overline{CP_{AB}},\overline{DP_{AB}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{AB}P_{CD}}$

■

這時再提供1條線段的比例

①.提供的這條線段是出現 2 次的，不失其普遍性，我們選 $\overline{AP_{CD}}$ 爲已知時，

則 ΔACD － $\overline{AC},\overline{AD},\overline{CD},\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}},\overline{DP_{AB}}$

及 ΔABP_{CD} － $\overline{AB},\overline{AP_{CD}},\overline{BP_{CD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{P_{CD}P_{AB}}$ 同時全變已知

此時剩下的 7 個 Δ 中，每個 Δ 均至少有 2 條線段的比例會是已知，
則三角錐 $ABCD$ 中，所有 25 條線段的比例全變已知。

②.提供的這條線段是出現 3 次的，不失其普遍性，我們選 $\overline{AP_{BCD}}$ 爲已知時，

則 ΔABP_{CD} － $\overline{AB},\overline{AP_{CD}},\overline{BP_{CD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{P_{CD}P_{AB}}$

及 ΔACP_{BD} － $\overline{AC},\overline{AP_{BD}},\overline{CP_{BD}},\overline{AP_{BCD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{P_{BD}P_{AC}}$

與 ΔADP_{BC} － $\overline{AD},\overline{AP_{BC}},\overline{DP_{BC}},\overline{AP_{BCD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{P_{BC}P_{AD}}$

同時全變已知
此時剩下的 6 個 Δ 中，每個 Δ 均至少有 2 條線段的比例會是已知，
則三角錐 $ABCD$ 中，所有 25 條線段的比例全變已知。

由①②知
若已知三角錐 $ABCD$ 中的任一個 Δ 之任 2 條線段的比例，
則此 Δ 的 6 條線段的比例均變已知，經去除掉此 Δ 的 6 條線段後，這時只要再任給剩下 $[25-(2+4)]=19$ 條的其中1條線段比例，必然可知所有 25 條線段比例！！

五、將上述四、的結論應用於正四面體 $ABCD$ (如圖17 、18)：

令 $\overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=1:1$，$\overline{BP_{BD}}:\overline{P_{BD}D}=1:1$，$\overline{CP_{CD}}:\overline{P_{CD}D}=1:1$

證明(一)、在正四面體 $ABCD$ 內部的 4 條線段：$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}}$ 必共點於點 I 。

(二)、此點 I 既是正四面體 $ABCD$ 的外接球球心，亦是正四面體 $ABCD$ 的內切球球心。

① 外接球半徑爲 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$ ② 內切球半徑爲 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$ ③ (外接球半徑):(內切球半徑) $=3:1$

證明) (一)、$\because$ 已知 $\overline{AP_{AD}D},\ \overline{BP_{BD}D},\ \overline{CP_{CD}D}$ 3 條線段的比例

$\therefore$ 在正四面體 $ABCD$ 內部的 4 條線段 $\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}}$ 必共點於點 I

(二)、在 ΔABP_{CD} 中，$\because$ $\overline{AP_{AB}}:\overline{P_{AB}B}=1:1$，$\overline{BP_{BCD}}:\overline{P_{BCD}P_{CD}}=2:1\Rightarrow \overline{AI}:\overline{IP_{BCD}}=3:1$ #

令 $\overline{AB}=a$ 得 $\overline{AP_{CD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ \overline{BP_{BCD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\ \overline{P_{BCD}P_{CD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\Rightarrow \overline{AP_{BCD}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ (餘弦定理)

$\Rightarrow\ \overline{AI}=\dfrac{3}{3+1}\overline{AP_{BCD}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，$\overline{IP_{BCD}}=\dfrac{1}{3+1}\overline{AP_{BCD}}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

①. $\because\ \overline{DI}=\overline{CI}=\overline{BI}=\overline{AI}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，

故點 I 爲正四面體 $ABCD$ 的外接球球心，外接球半徑爲 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$ #

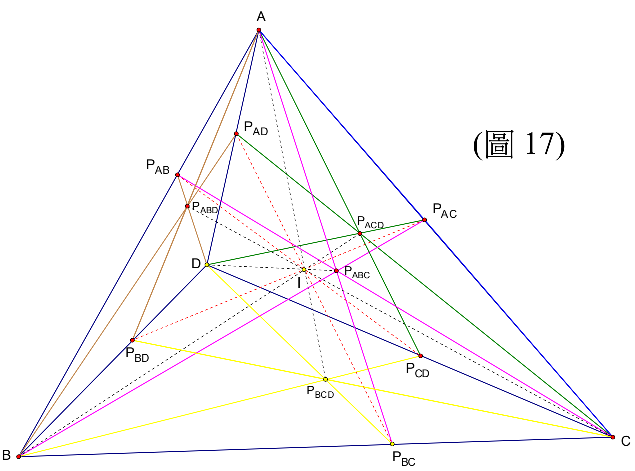
②. $\because \overline{AB}^2=\overline{BP_{BCD}}^2+\overline{AP_{BCD}}^2$ $\therefore \overline{AP_{BCD}}\perp\overline{BP_{CD}}$ 同理 $\overline{AP_{BCD}}\perp\overline{CP_{BD}}$，故 $\overline{AIP_{BCD}}\perp$ 平面BCD

同理 $\overline{BIP_{ACD}}\perp$ 平面ACD，$\overline{CIP_{ABD}}\perp$ 平面ABD，$\overline{DIP_{ABC}}\perp$ 平面ABC

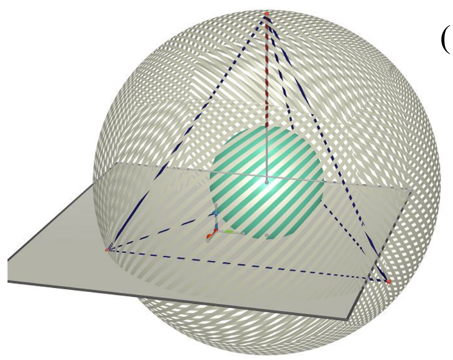
又 $\overline{IP_{ABC}}=\overline{IP_{ABD}}=\overline{IP_{ACD}}=\overline{IP_{BCD}}=\dfrac{1}{3}\cdot\overline{AI}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

故點 I 爲正四面體 $ABCD$ 的內切球球心，內切球半徑爲 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$ #

③. 由 ①②知(外接球半徑):(內切球半徑) $=\overline{AI}:\overline{IP_{BCD}}=3:1$ #



(圖 17)



(圖 18)

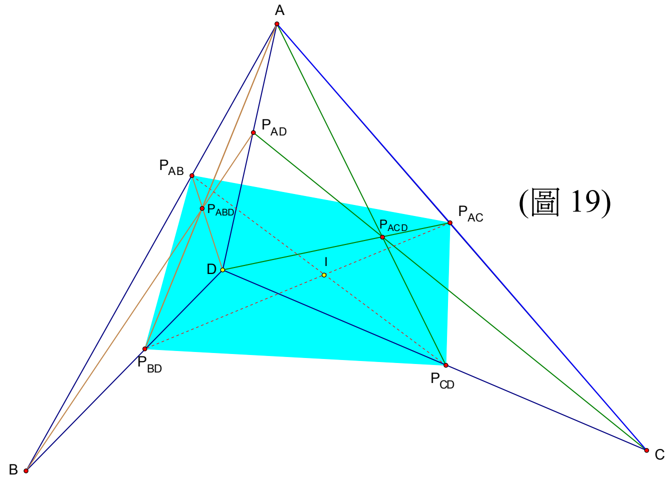
六、當我們關注到在三角錐 $ABCD$ 中，有著共用線段 $\overline{AD}$ 的 ΔABD 與 ΔACD 這兩個 Δ (如圖19)

$\because$ ❶.在 ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BD}}}{\overline{P_{BD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{AD}}}{\overline{P_{AD}A}}=1$

❷.在 ΔADC 中，$\dfrac{\overline{AP_{AD}}}{\overline{P_{AD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{CD}}}{\overline{P_{CD}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$

由❶×❷得 $\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BD}}}{\overline{P_{BD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{CD}}}{\overline{P_{CD}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$ #

我們興奮極了，



(圖 19)

因為 $\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BD}}}{\overline{P_{BD}D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{CD}}}{\overline{P_{CD}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$，像極了 Δ 的 *Menelaus* 定理，

而 $P_{AB,}\ P_{BD,}\ P_{CD,}\ P_{AC}$ 四個分割點共面 ($\because\ \overline{P_{AB}P_{CD}}, \overline{P_{AC}P_{BD}}$ 這兩線段共點於點 I)，

又像極了 Δ 的 *Menelaus* 逆定理，
但我們卻還置身三角錐 $ABCD$ 的幻境中。
於是我們乾脆將夢作的更大些，分兩部分來處理。

(一)、三角錐 $ABCD$ 有外圍18條線段及內部7條線段，總共25條線段的比例，
我們延續並調整學長姐 *Menelaus* 、 *Ceva* 定理『大和解』的 Δ 跳法，
將其推廣到三角錐，發現結論出奇的漂亮！
帥(*Ceva*)！孟(*Menelaus*)想變立體的三角錐跳法如下：
①.使用三角錐 $ABCD$ 的25條線段中，不在同一 Δ 的任4條線段
(但此4條線段必須有四相異交點，這樣的限制保證此四相異交點必不共面)
②.始終同點
(從四相異交點中任取一點出發，最後就要回到原出發點)
③.4條線段接連跳完而同1條線段分兩次跳
(先從***一交點***跳到同線段的***非交點***，再從此***非交點***跳到同線段另一端的***交點***，

↓ 此長度當分子　　↓ 此長度當分母

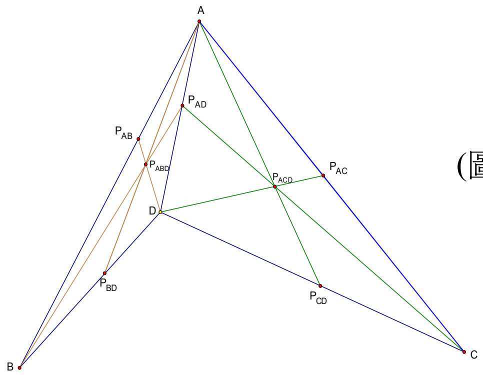
這樣算跳完一段，且接續下一條線段繼續跳，直到4條線段跳完恰回原出發點，
並按分子、分母順序一直乘，均可得 $\dfrac{分子_1}{分母_1}\cdot\dfrac{分子_2}{分母_2}\cdot\dfrac{分子_3}{分母_3}\cdot\dfrac{分子_4}{分母_4}=1$)

我們用窮舉法：三角錐$ABCD$有外部4個Δ及內部6個Δ，從中任選2個Δ

1.外部選2個Δ(共用一線段) 有$C_2^4=6$種，

不失其普遍性，舉ΔABD與ΔADC(共用線段$\overline{AP_{AD}D}$)，

(如圖20)



(圖 20)

將ΔABD中，$\overline{AB},\overline{BD},\overline{DA},\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}},\overline{DP_{AB}}$依序編號爲$1',2',3',4',5',6'$，

將ΔADC中，$\overline{AD},\overline{DC},\overline{CA},\overline{AP_{CD}},\overline{DP_{AC}},\overline{CP_{AD}}$依序編號爲$1'',2'',3'',4'',5'',6''$，

並依編號由小到大各從ΔABD, ΔADC中選3條線段(必選共用線段$\overline{AP_{AD}D}=3'=1''$)，

❶'.$1',2',3'$ $\overline{AP_{AD}D}$ 用到交點 A,D●	❶".$1'',2'',3''$ $\overline{AP_{AD}D}$ 用到交點 A,D●
❷'.$1',3',5'$ 、、用到交點 A,P_{AD}○	❷".$1'',2'',4''$ 、、用到交點 A,D●
❸'.$1',3',6'$ 、、用到交點 A,D●	❸".$1'',2'',6''$ 、、用到交點 P_{AD},D◎
❹'.$2',3',4'$ 、、用到交點 A,D●	❹".$1'',3'',5''$ 、、用到交點 A,D●
❺'.$2',3',5'$ 、、用到交點 P_{AD},D◎	❺".$1'',3'',6''$ 、、用到交點 A,P_{AD}○
❻'.$3',4',5'$ 、、用到交點 A,P_{AD}○	❻".$1'',4'',5''$ 、、用到交點 A,D●
❼'.$3',4',6'$ 、、用到交點 A,D●	❼".$1'',4'',6''$ 、、用到交點 A,P_{AD}○
❽'.$3',5',6'$ 、、用到交點 P_{AD},D◎	❽".$1'',5'',6''$ 、、用到交點 P_{AD},D◎

因爲左邊❶'～ ❽'與右邊❶" ～ ❽"配對時，需使用兩個交點是相同的，
所以左邊的●配右邊的●、左邊的○配右邊的○、左邊的◎配右邊的◎，
這樣共$(4\times4+2\times2+2\times2)=24$種，
故在 1.之中 總共有$C_2^4\cdot(4\times4+2\times2+2\times2)=144$種
經逐項驗證後，均滿足帥$(Ceva)$！孟$(Menelaus)$想變立體的三角錐跳法。

例. 如圖20, (i).在ΔABD中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}P_{AD}}}\cdot\dfrac{\overline{P_{AD}D}}{\overline{DA}}=1$

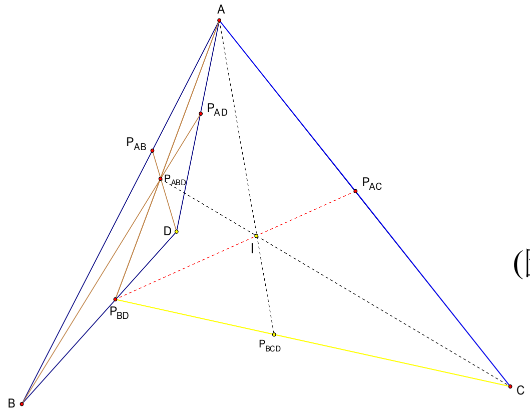
(ii).在ΔADC中，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DP_{AD}}}\cdot\dfrac{\overline{P_{AD}P_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$

由(i)×(ii)得$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}P_{AD}}}\cdot\dfrac{\overline{P_{AD}P_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$ #

2.外部選1個Δ及內部選1個Δ (共用一線段) 有兩類，不失其普遍性，

①.舉ΔABD與$\Delta AP_{BD}C$ (共用線段$\overline{AP_{ABD}P_{BD}}$)這一類有$C_1^4 \cdot C_1^3 = 12$種

(如圖21)



(圖 21)

將ΔABD中，$\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{DA}$, $\overline{AP_{BD}}, \overline{BP_{AD}}, \overline{DP_{AB}}$依序編號為$1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ ，

將$\Delta AP_{BD}C$中，$\overline{AP_{BD}}, \overline{P_{BD}C}, \overline{CA}$, $\overline{AP_{BCD}}, \overline{P_{BD}P_{AC}}, \overline{CP_{ABD}}$依序編號為$1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$ ，

並依編號由小到大各從ΔABD, $\Delta AP_{BD}C$中選 3 條線段(必選共用線段$\overline{AP_{ABD}P_{BD}} = 4' = 1''$)，

❶'.$1'$, $2'$, $4'$ $\overline{AP_{ABD}P_{BD}}$ 用到交點 A, P_{BD} ● ❶".$1''$, $2''$, $3''$ $\overline{AP_{ABD}P_{BD}}$ 用到交點 A, P_{BD} ●

❷'.$1'$, $4'$, $5'$ 、、用到交點 A, P_{ABD} ○ ❷".$1''$, $2''$, $4''$ 、、用到交點 A, P_{BD} ●

❸'.$1'$, $4'$, $6'$ 、、用到交點 A, P_{ABD} ○ ❸".$1''$, $2''$, $6''$ 、、用到交點 P_{ABD}, P_{BD} ◎

❹'.$2'$, $3'$, $4'$ 、、用到交點 A, P_{BD} ● ❹".$1''$, $3''$, $5''$ 、、用到交點 A, P_{BD} ●

❺'.$2'$, $4'$, $5'$ 、、用到交點 P_{ABD}, P_{BD} ◎ ❺".$1''$, $3''$, $6''$ 、、用到交點 A, P_{ABD} ○

❻'.$2'$, $4'$, $6'$ 、、用到交點 P_{ABD}, P_{BD} ◎ ❻".$1''$, $4''$, $5''$ 、、用到交點 A, P_{BD} ●

❼'.$3'$, $4'$, $5'$ 、、用到交點 A, P_{ABD} ○ ❼".$1''$, $4''$, $6''$ 、、用到交點 A, P_{ABD} ○

❽'.$3'$, $4'$, $6'$ 、、用到交點 A, P_{ABD} ○ ❽".$1''$, $5''$, $6''$ 、、用到交點 P_{ABD}, P_{BD} ◎

因為左邊❶'～ ❽'與右邊❶" ～ ❽"配對時，需使用兩個交點是相同的，
所以左邊的●配右邊的●、左邊的○配右邊的○、左邊的◎配右邊的◎，
這樣共$(2\times4+4\times2+2\times2)=20$種
故在這一類中 總共有$C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot (2\times4+4\times2+2\times2)=240$種
經逐項驗證後，均滿足帥 $(Ceva)$ ！孟$(Menelaus)$想變立體的三角錐跳法。

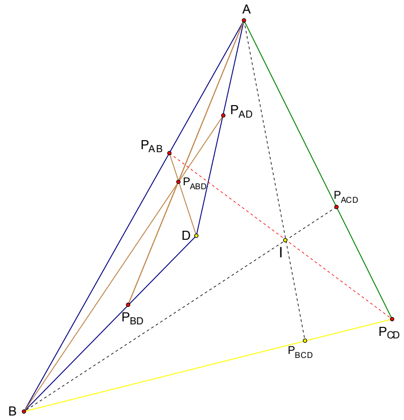
例. 如圖21, (i).在ΔABD中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}} \cdot \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DP_{BD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{BD}P_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}A}} = 1$

(ii).在$\Delta AP_{BD}C$中，$\dfrac{\overline{AP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}P_{BD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{BD}P_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}C}} \cdot \dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}} = 1$

由(i)×(ii)得$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}} \cdot \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DP_{BD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{BD}P_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}C}} \cdot \dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}} = 1$ #

②.舉ΔABD與ΔABP_{CD} (共用線段$\overline{AP_{AB}B}$)這一類有$C_1^4 \cdot C_1^3 = 12$種

(如圖22)



(圖 22)

將ΔABD中，$\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{DA}$, $\overline{AP_{BD}}, \overline{BP_{AD}}, \overline{DP_{AB}}$依序編號為$1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ ，

將ΔABP_{CD}中，$\overline{AB}, \overline{BP_{CD}}, \overline{P_{CD}A}$, $\overline{AP_{BCD}}, \overline{BP_{ACD}}, \overline{P_{CD}P_{AB}}$依序編號為$1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$ ，

並依編號由小到大各從ΔABD, ΔABP_{CD}中選3條線段(必選共用線段$\overline{AP_{AB}B} = 1' = 1''$)，

❶'.$1'$, $2'$, $3'$　$\overline{AP_{AB}B}$用到交點A, B●　　❶".$1''$, $2''$, $3''$　$\overline{AP_{AB}B}$用到交點A, B●

❷'.$1'$, $2'$, $4'$　、、用到交點A, B●　　❷".$1''$, $2''$, $4''$　、、用到交點A, B●

❸'.$1'$, $2'$, $6'$　、、用到交點P_{AB}, B◎　　❸".$1''$, $2''$, $6''$　、、用到交點P_{AB}, B◎

❹'.$1'$, $3'$, $5'$　、、用到交點A, B●　　❹".$1''$, $3''$, $5''$　、、用到交點A, B●

❺'.$1'$, $3'$, $6'$　、、用到交點A, P_{AB}○　　❺".$1''$, $3''$, $6''$　、、用到交點A, P_{AB}○

❻'.$1'$, $4'$, $5'$　、、用到交點A, B●　　❻".$1''$, $4''$, $5''$　、、用到交點A, B●

❼'.$1'$, $4'$, $6'$　、、用到交點A, P_{AB}○　　❼".$1''$, $4''$, $6''$　、、用到交點A, P_{AB}○

❽'.$1'$, $5'$, $6'$　、、用到交點P_{AB}, B◎　　❽".$1''$, $5''$, $6''$　、、用到交點P_{AB}, B◎

因為左邊❶'～ ❽'與右邊❶" ～ ❽"配對時，需使用兩個交點是相同的，
所以左邊的●配右邊的●、左邊的○配右邊的○、左邊的◎配右邊的◎，
這樣共$(4\times4+2\times2+2\times2)=24$種
故在這一類中 總共有$C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot (4\times4+2\times2+2\times2)=288$種
經逐項驗證後，均滿足帥 (*Ceva*) ！孟(*Menelaus*)想變立體的三角錐跳法。

例. 如圖22, (i).在ΔABD中，$\dfrac{\overline{AP_{AD}}}{\overline{P_{AD}D}} \cdot \dfrac{\overline{DP_{BD}}}{\overline{P_{BD}B}} \cdot \dfrac{\overline{BP_{AB}}}{\overline{P_{AB}A}} = 1$

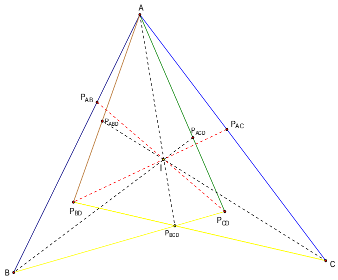
(ii).在ΔABP_{CD}中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}} \cdot \dfrac{\overline{BP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{CD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{CD}P_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}A}} = 1$

由(i)×(ii)得$\dfrac{\overline{AP_{AD}}}{\overline{P_{AD}D}} \cdot \dfrac{\overline{DP_{BD}}}{\overline{P_{BD}B}} \cdot \dfrac{\overline{BP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{CD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{CD}P_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}A}} = 1$ #

3.內部選 2 個 Δ (共用一線段) 有兩類，不失其普遍性，

① 舉 ΔABP_{CD} 與 $\Delta AP_{BD}C$ (共用線段 $\overline{AIP_{BCD}}$)這一類有 $C_1^4 \cdot C_2^3 = 12$ 種，

(如圖23)



(圖 23)

將 ΔABP_{CD} 中， $\overline{AB}, \overline{BP_{CD}}, \overline{P_{CD}A}, \overline{AP_{BCD}}, \overline{BP_{ACD}}, \overline{P_{CD}P_{AB}}$ 依序編號爲 $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ ，

將 $\Delta AP_{BD}C$ 中， $\overline{AP_{BD}}, \overline{P_{BD}C}, \overline{CA}, \overline{AP_{BCD}}, \overline{P_{BD}P_{AC}}, \overline{CP_{ABD}}$ 依序編號爲 $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$ ，

並依編號由小到大各從 ΔABP_{CD}, $\Delta AP_{BD}C$ 中選 3 條線段(必選共用線段 $\overline{AIP_{BCD}} = 4' = 4''$)，

❶'. $1'$, $2'$, $4'$ $\overline{AIP_{BCD}}$ 用到交點 A, P_{BCD} ● ❶". $1''$, $2''$, $4''$ $\overline{AIP_{BCD}}$ 用到交點 A, P_{BCD} ●

❷'. $1'$, $4'$, $5'$ 、 、用到交點 A, I ○ ❷". $1''$, $4''$, $5''$ 、 、用到交點 A, I ○

❸'. $1'$, $4'$, $6'$ 、 、用到交點 A, I ○ ❸". $1''$, $4''$, $6''$ 、 、用到交點 A, I ○

❹'. $2'$, $3'$, $4'$ 、 、用到交點 A, P_{BCD} ● ❹". $2''$, $3''$, $4''$ 、 、用到交點 A, P_{BCD} ●

❺'. $2'$, $4'$, $5'$ 、 、用到交點 I, P_{BCD} ◎ ❺". $2''$, $4''$, $5''$ 、 、用到交點 I, P_{BCD} ◎

❻'. $2'$, $4'$, $6'$ 、 、用到交點 I, P_{BCD} ◎ ❻". $2''$, $4''$, $6''$ 、 、用到交點 I, P_{BCD} ◎

❼'. $3'$, $4'$, $5'$ 、 、用到交點 A, I ○ ❼". $3''$, $4''$, $5''$ 、 、用到交點 A, I ○

❽'. $3'$, $4'$, $6'$ 、 、用到交點 A, I ○ ❽". $3''$, $4''$, $6''$ 、 、用到交點 A, I ○

因爲左邊❶'～ ❽'與右邊❶" ～ ❽"配對時，需使用兩個交點是相同的，
所以左邊的●配右邊的●、左邊的○配右邊的○、左邊的◎配右邊的◎，
這樣共 $(2\times2+4\times4+2\times2)=24$ 種
故在這一類中 總共有 $C_1^4 \cdot C_2^3 \cdot (2\times2+4\times4+2\times2) = 288$ 種
經逐項驗證後，均滿足帥 ($Ceva$)！孟($Menelaus$)想變立體的三角錐跳法。

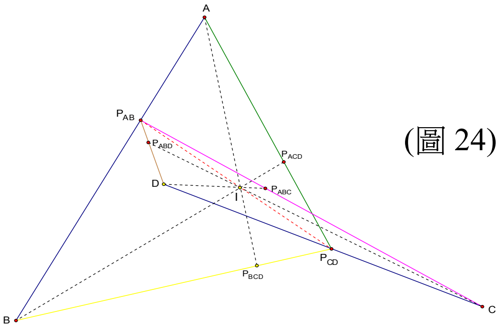
例. 如圖23, (i).在 ΔABP_{CD} 中， $\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}} \cdot \dfrac{\overline{BP_{CD}}}{\overline{P_{CD}P_{BCD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{BCD}I}}{\overline{IA}} = 1$

(ii).在 $\Delta AP_{BD}C$ 中， $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{IP_{BCD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{BCD}P_{BD}}}{\overline{P_{BD}C}} \cdot \dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}} = 1$

由(i)×(ii)得 $\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}} \cdot \dfrac{\overline{BP_{CD}}}{\overline{P_{CD}P_{BCD}}} \cdot \dfrac{\overline{P_{BCD}P_{BD}}}{\overline{P_{BD}C}} \cdot \dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}} = 1$ ＃

②舉ΔABP_{CD}與$\Delta P_{AB}DC$ (共用線段$\overline{P_{AB}IP_{CD}}$)這一類有$C_1^3=3$種，

(如圖24)



(圖 24)

將ΔABP_{CD}中，$\overline{AB},\overline{BP_{CD}},\overline{P_{CD}A}$,$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{P_{CD}P_{AB}}$依序編號為$1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ ，

將$\Delta P_{AB}DC$中，$\overline{P_{AB}D},\overline{DC},\overline{CP_{AB}}$,$\overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{DP_{ABC}},\overline{CP_{ABD}}$依序編號為$1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$ ，

並依編號由小到大各從ΔABP_{CD}, $\Delta P_{AB}DC$中選3條線段(必選共用線段$\overline{P_{AB}IP_{CD}}=6'=4''$)，

❶'.$1'$, $2'$, $6'$ $\overline{P_{AB}IP_{CD}}$ 用到交點 P_{AB},P_{CD} ● ❶".$1''$, $2''$, $4''$ $\overline{P_{AB}IP_{CD}}$ 用到交點 P_{AB},P_{CD} ●

❷'.$1'$, $3'$, $6'$ 、 、用到交點 P_{AB},P_{CD} ● ❷".$1''$, $4''$, $5''$ 、 、用到交點 P_{AB},I ○

❸'.$1'$, $4'$, $6'$ 、 、用到交點 P_{AB},I ○ ❸".$1''$, $4''$, $6''$ 、 、用到交點 P_{AB},I ○

❹'.$1'$, $5'$, $6'$ 、 、用到交點 P_{AB},I ○ ❹".$2''$, $3''$, $4''$ 、 、用到交點 P_{AB},P_{CD} ●

❺'.$2'$, $4'$, $6'$ 、 、用到交點 I,P_{CD} ◎ ❺".$2''$, $4''$, $5''$ 、 、用到交點 I,P_{CD} ◎

❻'.$2'$, $5'$, $6'$ 、 、用到交點 I,P_{CD} ◎ ❻".$2''$, $4''$, $6''$ 、 、用到交點 I,P_{CD} ◎

❼'.$3'$, $4'$, $6'$ 、 、用到交點 I,P_{CD} ◎ ❼".$3''$, $4''$, $5''$ 、 、用到交點 P_{AB},I ○

❽'.$3'$, $5'$, $6'$ 、 、用到交點 I,P_{CD} ◎ ❽".$3''$, $4''$, $6''$ 、 、用到交點 P_{AB},I ○

因為左邊❶'～ ❽'與右邊❶" ～ ❽"配對時，需使用兩個交點是相同的，
所以左邊的●配右邊的●、左邊的○配右邊的○、左邊的◎配右邊的◎，
這樣共$(2\times2+2\times4+4\times2)=20$種
故在這一類中 總共有$C_1^3\cdot(2\times2+2\times4+4\times2)=60$種
經逐項驗證後，均滿足帥 ($Ceva$)！孟($Menelaus$)想變立體的三角錐跳法。

例. 如圖24, (i).在ΔABP_{CD}中，$\dfrac{\overline{P_{AB}A}}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{CD}}}\cdot\dfrac{\overline{P_{CD}I}}{\overline{IP_{AB}}}=1$

(ii).在$\Delta P_{AB}DC$中，$\dfrac{\overline{P_{AB}I}}{\overline{IP_{CD}}}\cdot\dfrac{\overline{P_{CD}C}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}P_{AB}}}=1$

由(i)×(ii)得$\dfrac{\overline{P_{AB}A}}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_{CD}}}\cdot\dfrac{\overline{P_{CD}C}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{DP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}P_{AB}}}=1$ #

經我們驗證帥($Ceva$) ！孟($Menelaus$)想變立體的三角錐跳法，
結果上述 1.2.3.共$(144+240+288+288+60)=1020$種情形均成立！

(二)、1. 空間中任意相異四點P_1,P_2,P_3,P_4(任三點不共線，但此四點不管有無共平面皆可)，

均可畫出三角錐$ABCD$，其中線段$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$分別含此四點$P_1,P_2,P_3,P_4$。

畫法) 不失其普遍性 (如圖25)

① 先畫一平面E通過點P_2,P_3且讓點P_1,P_4落在平面E的同一側，

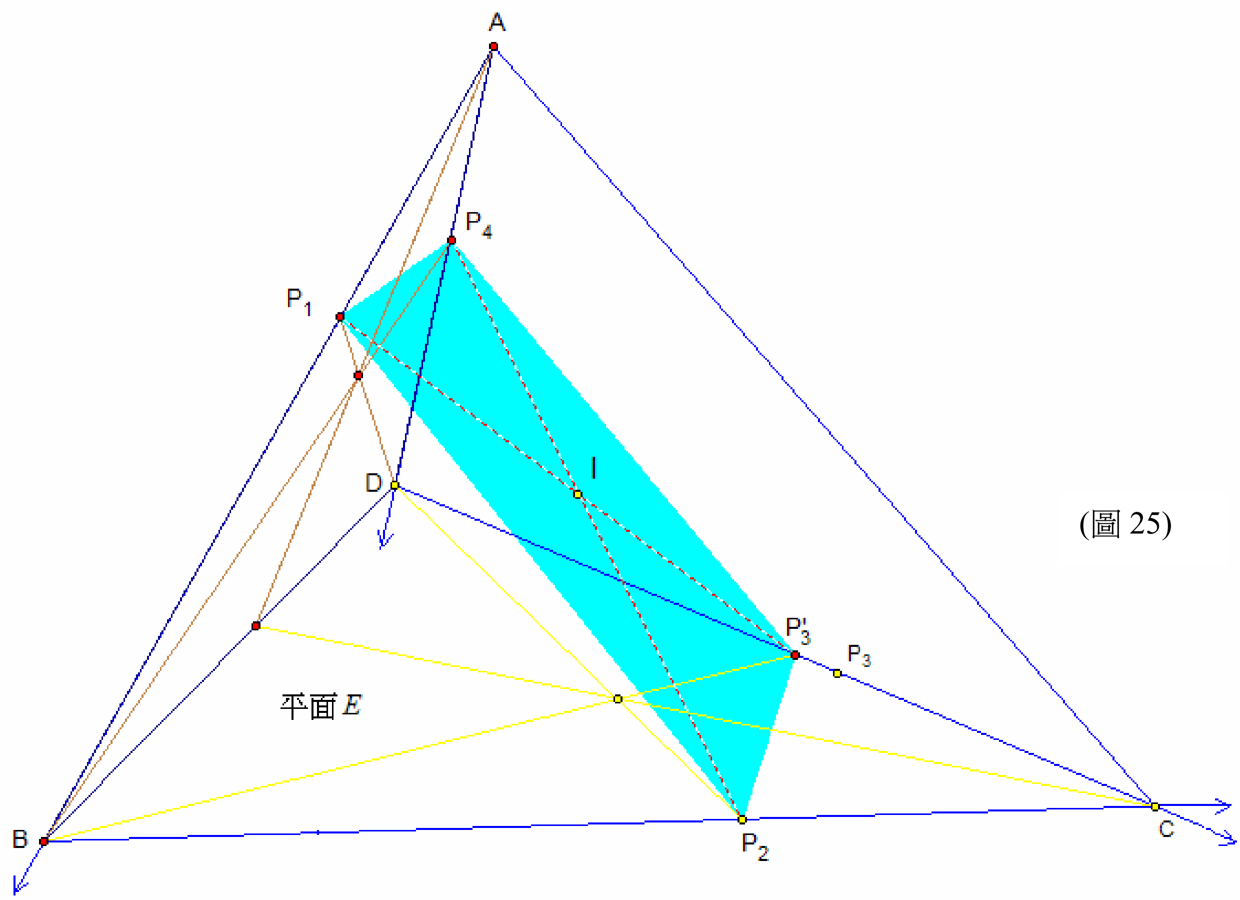
② 同時在此側任找一點A(異於點P_1,P_4)，且此點A需使得射線$\overrightarrow{AP_1},\overrightarrow{AP_4}$分別交平面$E$於點$B$與點$D$(均異於點$P_2,P_3$，萬一有的點產生重合，只要重選$A$點即可)

③ 最後，只要射線$\overrightarrow{BP_2},\overrightarrow{DP_3}$不平行，不失其普遍性，即可交於點$C$

(萬一射線$\overrightarrow{BP_2},\overrightarrow{DP_3}$平行，只要重選$A$點即可)

④ 除了現有的線段$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$，再連接線段$\overline{AC}, \overline{BD}$，即得三角錐$ABCD$，

且在此三角錐中的線段$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$分別含此四點$P_1,P_2,P_3,P_4$



(圖 25)

2. 承 1. 空間中任意相異四點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線，但此四點不管有無共平面皆可)，

均可畫出三角錐 $ABCD$ ，其中線段 $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{AD}$ 分別含此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 。

所以在已知空間中任意相異四點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線) 的條件下，

證明：若此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 共平面 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$

Pf) 先畫出三角錐 $ABCD$ ，其中線段 $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{AD}$ 分別含此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 。

再隱藏線段 $\overline{CD}$ 上的點 P_3 ，因爲 $\overline{AP_1B},\overline{BP_2C},\overline{AP_4D}$ 這 3 條線段的比例若均設爲已知，

就可知三角錐 $ABCD$ 中所有 25 條線段的比例。當然也就包含了 $\overline{CP_3'D}$ 線段的比例，

而且在線段 $\overline{CD}$ 上只有唯一的一點 P_3' 會與點 P_1,P_2,P_4 共平面

且 $\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3'}}{\overline{P_3'D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$ (其中點 P_1,P_2,P_3',P_4 分別可對照點 $P_{AB},P_{BC},P_{CD},P_{AD}$ ，

且 $\overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{BC}P_{AD}}$ 這兩條線段共點於點 I ，

即 $\overline{P_1P_3'},\overline{P_2P_4}$ 這兩條線段共點於點 I)

“充分條件 $\Rightarrow$ ”

$\because$ 點 P_1,P_2,P_3,P_4 共平面

$\Rightarrow$ 點 P_3,P_3' 爲同一點 $\Rightarrow \dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3'}}{\overline{P_3'D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$ #

“必要條件 $\Leftarrow$ ”

$\because$ 必然能在線段 $\overline{CD}$ 上找到唯一的一點 P_3' 使得 $\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3'}}{\overline{P_3'D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$

且點 P_1,P_2,P_4 與點 P_3' 共平面，又已知 $\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\dfrac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$ ，

$\therefore \dfrac{\overline{CP_3'}}{\overline{P_3'D}}=\dfrac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}$

故點 P_3' 與點 P_3 爲同一點。

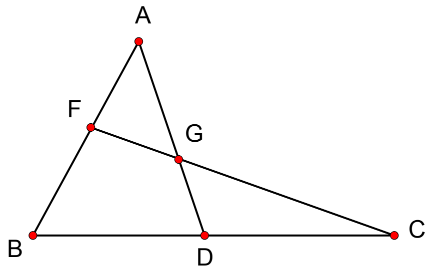
故點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線)共平面 #

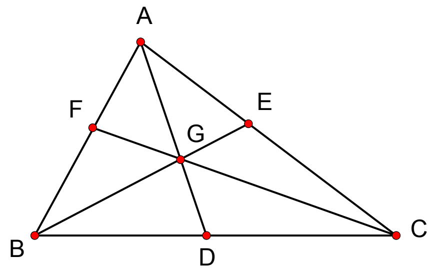
伍、討論

一、本研究只討論三角錐內外所有 25 條線段比例、內部 7 條線段共點、內部 6 個 Δ 亦共於此點，雖然多角錐可分割成數個三角錐，但因現行高中仍以研究三角錐為主，所以針對研究多角錐我們著墨不多，但仍值得再深入研究！

二、由 *Menelaus* 定理及其逆定理得知，在 ΔABC 中，$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}=1 \Leftrightarrow C,G,F$ 三點共線；

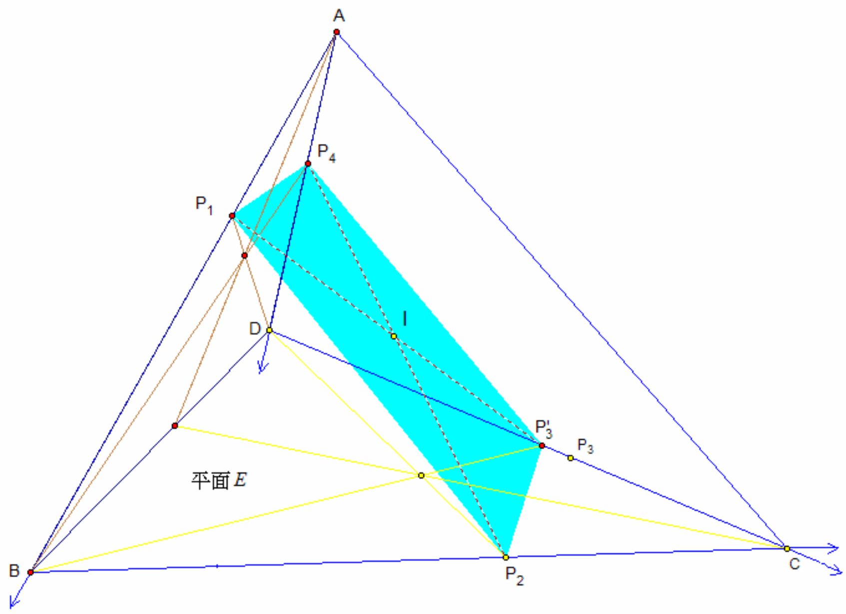
由 *Ceva* 定理及其逆定理得知，在 ΔABC 中，$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1 \Leftrightarrow \overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 三線共點；





在已知空間中任意相異四點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線)的條件下，

本研究證明出若此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 共平面 $\Leftrightarrow \frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\frac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\frac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\frac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$



但在凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 中 $(n\geq 4)$ ，若能得到 $\frac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\frac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdot\frac{\overline{A_3P_{A_3A_4}}}{\overline{P_{A_3A_4}A_4}}\cdots\cdots\frac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1$ ，

則其對應的幾何性質為何？期間雖不間斷的嘗試各種方法，盡我們所能拜讀坊間的書籍，抑或是利用網路上的搜尋引擎 *Google* 再 *Google* 、 *Yahoo* 再 *Yahoo* ，仍苦於無法找到相呼應的幾何性質，所以關於此問題仍像待開發的處女地，值得再深入研究！

陸、研究結果與結論

一、我們發現平面上任意凸n邊形和空間中n角錐在線段比例連乘的關聯性。

(一)、平面上，在凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$內任找一點A_{n+1}，連接$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$，

在$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$分別任找點$P_{A_1A_{n+1}},P_{A_2A_{n+1}},P_{A_3A_{n+1}},\cdots,P_{A_nA_{n+1}}$，

先連接$\overline{A_1P_{A_2A_{n+1}}},\overline{A_2P_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_2A_{n+1}}$

連接$\overline{A_2P_{A_3A_{n+1}}},\overline{A_3P_{A_2A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_2A_3A_{n+1}}$

… … … … … … … … … … … … …

連接$\overline{A_1P_{A_nA_{n+1}}},\overline{A_nP_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_nA_{n+1}}$

再連接$\overline{A_{n+1}P_{A_1A_2A_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_2A_3A_{n+1}}},\cdots,\overline{A_{n+1}P_{A_{n-1}A_nA_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_1A_nA_{n+1}}}$並延長之，

分別交$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\cdots,\overline{A_{n-1}A_n},\overline{A_1A_n}$於點$P_{A_1A_2},P_{A_2A_3},\cdots,P_{A_{n-1}A_n},P_{A_1A_n}$，

則在凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$中，$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdots\cdots\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1\quad(n\geq 3)$

(二)、空間中，在異於凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$所在平面上任找一點A_{n+1}，

連接$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$，形成 n 角錐，

在$\overline{A_1A_{n+1}},\overline{A_2A_{n+1}},\overline{A_3A_{n+1}},\cdots,\overline{A_nA_{n+1}}$分別任找點$P_{A_1A_{n+1}},P_{A_2A_{n+1}},P_{A_3A_{n+1}},\cdots,P_{A_nA_{n+1}}$，

先連接$\overline{A_1P_{A_2A_{n+1}}},\overline{A_2P_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_2A_{n+1}}$

連接$\overline{A_2P_{A_3A_{n+1}}},\overline{A_3P_{A_2A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_2A_3A_{n+1}}$

… … … … … … … … … … … … …

連接$\overline{A_1P_{A_nA_{n+1}}},\overline{A_nP_{A_1A_{n+1}}}$，這兩條線段交於點$P_{A_1A_nA_{n+1}}$

再連接$\overline{A_{n+1}P_{A_1A_2A_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_2A_3A_{n+1}}},\cdots,\overline{A_{n+1}P_{A_{n-1}A_nA_{n+1}}},\overline{A_{n+1}P_{A_1A_nA_{n+1}}}$並延長之，

分別交$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\cdots,\overline{A_{n-1}A_n},\overline{A_1A_n}$於點$P_{A_1A_2},P_{A_2A_3},\cdots,P_{A_{n-1}A_n},P_{A_1A_n}$，

則在凸n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$中，$\dfrac{\overline{A_1P_{A_1A_2}}}{\overline{P_{A_1A_2}A_2}}\cdot\dfrac{\overline{A_2P_{A_2A_3}}}{\overline{P_{A_2A_3}A_3}}\cdots\cdots\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{A_{n-1}A_n}}}{\overline{P_{A_{n-1}A_n}A_n}}\cdot\dfrac{\overline{A_nP_{A_1A_n}}}{\overline{P_{A_1A_n}A_1}}=1\quad(n\geq 3)$

二、(一)、我們發現簡易畫出三角錐 $ABCD$ 內部 7 條線段共點及內部 6 個 Δ 亦共於此點的方法。

空間中，在異於 ΔABC 所在平面上任找一點 D，連接 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$，形成三角錐，

在 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$ 分別任找點 P_{AD},P_{BD},P_{CD}，

先連接 $\overline{AP_{BD}},\overline{BP_{AD}}$，這兩條線段交於點 P_{ABD}

連接 $\overline{AP_{CD}},\overline{CP_{AD}}$，這兩條線段交於點 P_{ACD}

連接 $\overline{BP_{CD}},\overline{CP_{BD}}$，這兩條線段交於點 P_{BCD}

再連接 $\overline{DP_{ABD}},\overline{DP_{ACD}},\overline{DP_{BCD}}$ 並延長之，分別交 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 於點 P_{AB},P_{AC},P_{BC}，

則在 ΔABC 中，$\dfrac{\overline{AP_{AB}}}{\overline{P_{AB}B}}\cdot\dfrac{\overline{BP_{BC}}}{\overline{P_{BC}C}}\cdot\dfrac{\overline{CP_{AC}}}{\overline{P_{AC}A}}=1$，且得 $\overline{AP_{BC}},\overline{BP_{AC}},\overline{CP_{AB}}$ 三線必共點於點 P_{ABC}。

進一步連接三角錐內部的 7 條線段 $\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\ \overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{AC}P_{BD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$，

則這 7 條線段：$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}},\ \overline{P_{AB}P_{CD}},\overline{P_{AC}P_{BD}},\overline{P_{AD}P_{BC}}$ 必共點於點 I，

又共點於點 I 的這 7 條線段任選 2 條線段，其 4 個端點均會共平面，
且內部 6 個 Δ：ΔABP_{CD}, ΔACP_{BD}, ΔADP_{BC}, ΔBCP_{AD}, ΔBDP_{AC}, ΔCDP_{AB} 亦共點於點 I。

(二)、我們發現三角錐 $ABCD$ 共有

①. 10 個 Δ

②. 25 條線段

❶出現 3 次的線段：共10條

❷出現 2 次的線段：共15條

由❶❷知每個 Δ 均有 3 條出現 3 次的線段，亦有 3 條出現 2 次的線段

若三角錐 $ABCD$ 中的 $\overline{AD},\overline{BD},\overline{CD}$ 這 3 條線段的比例均為已知，

就可知三角錐 $ABCD$ 中所有 25 條線段的比例。

(三)、我們發現若三角錐 $ABCD$ 中的任一個 Δ 之任 2 條線段的比例為已知，
則此 Δ 的 6 條線段的比例均變已知，經去除掉此 Δ 的 6 條線段後，這時只要再任給剩下 $[25-(2+4)]=19$ 條的其中1條線段比例，必然可知所有 25 條線段比例！！

三、我們發現應用於正四面體 $ABCD$，

令 $\overline{AP_{AD}}:\overline{P_{AD}D}=1:1$，$\overline{BP_{BD}}:\overline{P_{BD}D}=1:1$，$\overline{CP_{CD}}:\overline{P_{CD}D}=1:1$

則(一)、在正四面體 $ABCD$ 內部的 4 條線段：$\overline{AP_{BCD}},\overline{BP_{ACD}},\overline{CP_{ABD}},\overline{DP_{ABC}}$ 必共點於點 I。

(二)、此點 I 既是正四面體 $ABCD$ 的外接球球心，亦是正四面體 $ABCD$ 的內切球球心。

① 外接球半徑爲 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$ ② 內切球半徑爲 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ ③ (外接球半徑):(內切球半徑) $=3:1$

四、(一)、三角錐 $ABCD$ 有外圍 18 條線段及內部 7 條線段，總共 25 條線段的比例，

我們延續並調整 Menelaus、Ceva 定理『大和解』的 Δ 跳法，將其推廣到三角錐。

帥 ($Ceva$)！孟($Menelaus$)想變立體的三角錐跳法如下：

①.使用三角錐 $ABCD$ 的 25 條線段中，不在同一 Δ 的任 4 條線段

(但此 4 條線段必須有四相異交點，這樣的限制保證此四相異交點必不共面)

②.始終同點

(從四相異交點中任取一點出發，最後就要回到原出發點)

③. 4 條線段接連跳完而同1條線段分兩次跳

(<u>先從***一交點***跳到同線段的***非交點***</u>，再<u>從此***非交點***跳到同線段另一端的***交點***</u>，

↓ ↓

此長度當分子 此長度當分母

這樣算跳完一段，且接續下一條線段繼續跳，直到 4 條線段跳完恰回原出發點，

並按分子、分母順序一直乘，均可得 $\frac{分子_1}{分母_1}\cdot\frac{分子_2}{分母_2}\cdot\frac{分子_3}{分母_3}\cdot\frac{分子_4}{分母_4}=1$)

(二)、在已知空間中任意相異四點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線)的條件下，

我們證明出若此四點 P_1,P_2,P_3,P_4 共平面 $\Leftrightarrow$ $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\cdot\frac{\overline{BP_2}}{\overline{P_2C}}\cdot\frac{\overline{CP_3}}{\overline{P_3D}}\cdot\frac{\overline{DP_4}}{\overline{P_4A}}=1$

空間中任意相異四點 P_1,P_2,P_3,P_4 (任三點不共線，但此四點不管有無共平面皆可)， 均可畫出三角錐 $ABCD$，其中線段 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{AD}$ 分別含此四點 P_1,P_2,P_3,P_4。

柒、參考資料及其他

一、趙文敏(1992)。**Menelaus** 與 **Ceva** 定理。載於幾何學概論(34-47 頁)。台北市：九章出版社

二、林澤恩、簡士鈞(1997)。**Menelaus** 定理與 **Ceva** 定理的機器證明與推廣。
第三十七屆中小學分區科展作品。感謝基隆女中陳坤松老師提供

三、楊鈞麟、馮孝天、彭孟凱、吳振育(2001)。**Menelaus** 與 **Ceva** 定理的推廣。
第四十一屆中小學全國科展作品。感謝花蓮高中彭成鈿老師提供

四、姚建銘(2003)。「孟」想空間。載於數學新天地第 6 期(22-24 頁)。台北縣：龍騰文化出版社

五、王宏達、謝怡萱(2004)。**Menelaus、Ceva** 定理『大和解』。第四十四屆中小學分區科展作品

六、柳賢、左太政、葉永南、毛延宗、黃重嘉、林漢良、蘇信誠(2004)。
共線與共點的概念及西瓦、孟氏定理。載於幾何學上(6-12 頁)。台南市：翰林出版社

七、林來福、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇(2004)。共點線與共線點。
載於高中幾何學上(18-46 頁)。台南市：南一出版社

八、MathPages。Menelaus and Ceva。取自 http://www.mathpages.com/home/kmath442/kmath442.htm

九、初代小篆部落格。Menelaus and Ceva。取自 http://www.wretch.cc/blog/AlphaLucifer/26975354

十、笹部貞市郎(1998)。比例線段。載於幾何學辭典(207-292 頁)。台北市：九章出版社

十一、劉俊傑(1995)。三角形內的比例線段(一)。載於數學傳播第十九卷第二期(76-85 頁)。
劉俊傑(1996)。三角形內的比例線段(二)。載於數學傳播第二十卷第三期(60-68 頁)。
劉俊傑(1997)。三角形內的比例線段(三)。載於數學傳播第二十一卷第一期(54-66 頁)。
劉俊傑(1997)。三角形內的比例線段(四)。載於數學傳播第二十一卷第三期(54-62 頁)。
劉俊傑(2005)。三角形內的比例線段(五)。載於數學傳播第二十九卷第二期(46-54 頁)。
台北市：書鄉林出版社

十二、林信安(2002)。幾何。
取自 http://www.math.ncu.edu.tw/resource/teach/chen/files91/test91h-html/node6.html

十三、林志成、郭文杰、鍾思齊、李宗燁 (2006)。三角形到四面體的完全類比。
第四十六屆中小學全國科展作品。

十四、國立台灣師範大學數學系網路小組(1999)。動態幾何操作手冊。台北市：九章出版社

十五、Scott Steketee、Nicholas Jackiw、Steven Chanan(2001)。幾何畫板操作手冊。
台北市：九章出版社

【評語】040408

Menelaus 、Ceva 定理為平面幾何中重要定理，這定理有不少推廣，過去科展常見這方面作品應和過去結果作一比較，此作品主要工作是將 Menelaus、 Ceva 推廣至凸多邊形及三角錐，並探討空間四點共平面之充要條件，此作品有點原創性、有趣、有科學精神。但有些敘述太繁瑣大大破壞其美感。數學作文能力有改進空間，採用根軸名詞，宜說明清楚其定義。