中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040406

過號看診等候問題之研究

學校名稱：高雄市立小港高級中學

作者：	指導老師：
高二 許聖泉 高二 林柏彰 高二 陳建融 高二 王宣博	黃靜婷

關鍵詞：分段法則、Catalan 數列、等候理論

過號看診等候問題之研究

摘要

我們想要了解過號看診等候的相關問題，在此研究中，我們先利用手繪⊗、O圖及電腦驗證找出「分段法則Ⅰ」，進而導出遲到情形與過號需等候人數的函數關係。

利用方格「走最短路徑」的方法，將到診情形轉爲方格走最短路徑圖，找出「分段法則Ⅱ」，求遲到者插號位置及新的看診序號，並由等待數列$\langle A_n \rangle$，求過號需等候人數。

在一個獨立插號作業中，要找出到診可能情形方法數，我們將 Catalan 數列的條件加以變化，在一個$n \times n$的方格內，向右走r單位長，向上走 1 單位長， 其中$k \in N, n = rk$ ，證明其一路領先的方法數爲$\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$。

最後將取號碼單機器運用在候診上，並利用等候理論(Queueing theory)，做不同插號規則的比較。

壹、 研究動機

感冒了，打電話預約看診，但因爲有事耽擱，所以遲到了，原本以爲遲到一下，應該很快可以看診，可是卻等了很久才輪到我，爲什麼之前幾次遲到看診，有時候很快輪到，有時候卻又等很久呢?

曾經在一份醫院的滿意度問卷裡，看到院方列出許多與時間有關的部分，「等候醫師看診時間」的滿意度爲其中的調查項目，這不但是醫院管理中很重要的一環，也深深影響著病人就醫的品質。

這引起了我的好奇，想知道遲到者到底需等候多少人數，才能看診呢?不同的到診情形與等候人數之間是不是存在著函數關係?在不同的插號規則下，對過號者而言，等候的狀況是否合理?

貳、 研究目的

一、 找出影響過號看診需等候人數的因素。
二、 找出遲到的情形和需等候的人數之間的函數關係。
三、 利用方格走最短路徑方法，探討過號看診需等候的人數。
四、 找出遲到者插號的位置與新的看診序號。
五、 找出到診可能情形的方法數。
六、 不同插號規則的比較。

參、 研究設備

一、(一)電腦
(二)筆
(三)紙、方格紙。
二、軟體：Excel、Word、GeoGebra。

肆、 研究過程

一、首先，我們利用手繪⊗，O圖及電腦驗證，找出每一位遲到者所需等候的人數，並由延後 2 號看診的規則所得的數據，找到「分段法則 I 」，導出遲到情形與過號需等候人數的函數關係。

(一)插號規則：

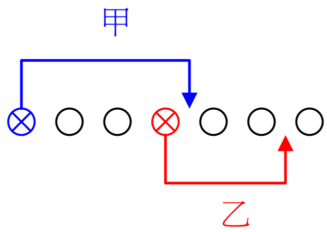
1.我們從網路的搜尋，發現大部分的醫院對過號看診的處理爲延後 r 號看診，r 爲正整數，也就是每隔 r 位準時到診者，才能插入 1 位遲到者看診。

2.在候診的病患中，對每一位遲到者而言，爲了考慮所要等候的最多人數，我們做如下的設定:

(1)不限制醫生的看診人數。

(2)每位遲到者到診時，都有足夠的人已經準時到診。

(3)爲了找出需等候的最多人數，當畫圖時甲遲到者欲插號的時段有另一乙遲到者到診，將甲插號位置放在乙到診之後。

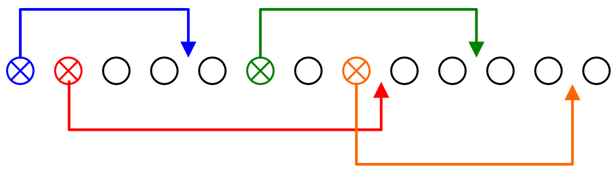


(二)討論 $r=2$

實際畫出遲到者到診與插號情形，找出每個遲到者需等候的人數。

(如附錄) ⊗代表遲到者到診點；O代表準時者看診點；↓ 代表遲到者插號點

範例：



(三)利用電腦程式算出(如附錄)

我們發現：

1.遲到者需等候的人數：

(1)和(在他到診之前的遲到者)及(遲到者彼此到診之間準時者看診的人數)有關。

(2)和(在他到診之後的遲到者)無關。

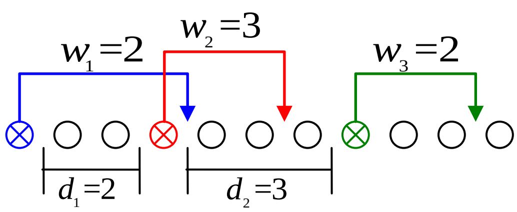
2.第一位遲到者只要等 r 人次就可以看診。

(四)找出影響第 n 位遲到者需等候人數的其他病人

1.令 d_i 爲第 i 個與第 $i+1$ 個遲到者到診之間準時者看診的人數；

w_i 爲第 i 個遲到者需等候的人數

定義： $f(d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}) = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$



2.討論 r=2，由數據歸納出 $f(d_1)$， $f(d_1,d_2)$，…

$$f(d_1)=(w_1,w_2)\Rightarrow\begin{cases}d_1\ge 3\Rightarrow f(d_1)=(2,2)\\ d_1<3\Rightarrow f(d_1)=(2,5-d_1)\end{cases}$$

$$f(d_1,d_2)=(w_1,w_2,w_3)\Rightarrow\begin{cases}d_1\ge 3\begin{cases}d_2\ge 3\Rightarrow f(d_1,d_2)=(2,2,2)\\ d_2<3\Rightarrow f(d_1,d_2)=(2,2,5-d_2)\end{cases}\\ d_1<3\begin{cases}d_1+d_2<3 \Rightarrow f(d_1,d_2)=(2,5-d_1,8-d_1-d_2)\\ 3\le d_1+d_2<5\Rightarrow f(d_1,d_2)=(2,5-d_1,7-d_1-d_2)\\ 5\le d_1+d_2 \Rightarrow f(d_1,d_2)=(2,5-d_1,2)\end{cases}\end{cases}$$

3.找出影響 w_n 的 $d_i,\forall i\in N$

(1)名詞說明：(a)插號作業：每隔 r 位準時者，插號入一位遲到者的過程。

(b)獨立的插號作業：一個有關 1 個或多個連續的遲到者的插號作業，作業內第一位遲到者需等候 r 個人，若有二位以上的遲到者，則第二位以上的遲到者須等候大於 r 個人。

(2)如果遲到者要等候的人數為 r 人時，則我們稱他不受前面所有遲到者的影響。

(3)由所得數據可知：

若 $n\in N$, 對任何 $i\in N, i<n-1, \sum_{k=1}^{i} d_k<ri+1$，

(a)當 $\sum_{k=1}^{n-1} d_k<r(n-1)+1$時， $w_n\ge r+1$

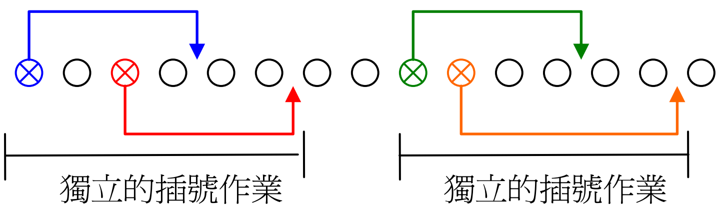
(b)當 $\sum_{k=1}^{n-1} d_k\ge r(n-1)+1$時， $w_n=r$

(4)若 $\sum_{k=1}^{i} d_k<ri+1$，其中 $i\in N, i<n-1$，且 $\sum_{k=1}^{n-1} d_k\ge r(n-1)+1$，

$\Rightarrow$(a) $w_n=r$

(b)第 $1,\ldots,n$ -1 個遲到者自成一個獨立的插號作業，不影響第 n 個之後遲到者的插號。

(c)可將第 n 個遲到者視為另一組獨立的插號作業中第一位遲到者。



4.「分段法則Ⅰ」

對第 n 個遲到者，考慮 $d_1, d_2, ..., d_{n-1}$ (1)若 $\exists i_1 \in N, 1 \le i_1 < n$ ，使得 $\sum_{k=1}^{i_1} d_k \ge r i_1 + 1$ ， 但對於 $\forall i \in N, i < i_1$ ， $\sum_{k=1}^{i} d_k < ri + 1$ ， 則繼續考慮(2)，否則令 $p = 0$ (2)承(1)， $\begin{cases} \text{(a)當} i_1 = n-1, \text{則} p = n-1 \\ \text{(b)當} i_1 \ne n-1, \text{若} \exists\ i_2 \in N, i_1+1 \le i_2 < n, \text{使} \sum_{k=i_1+1}^{i_2} d_k \ge r(i_2 - i_1) + 1, \\ \qquad \text{但對於} \forall i \in N, i_1+1 \le i < i_2, \sum_{k=i_1+1}^{i} d_k < r(i-i_1)+1, \\ \qquad \text{則繼續考慮(3), 否則} p = i_1 \end{cases}$ (3)承(2)， $\begin{cases} \text{(a)當} i_2 = n-1, \text{則} p = n-1 \\ \text{(b)當} i_2 \ne n-1, \text{若} \exists i_3 \in N, i_2+1 \le i_3 < n, \text{使} \sum_{k=i_2+1}^{i_3} d_k \ge r(i_3 - i_2) + 1, \\ \qquad \text{但對於} \forall i \in N, i_2+1 \le i < i_3, \sum_{k=i_2+1}^{i} d_k < r(i-i_2)+1, \\ \qquad \text{則繼續考慮(4), 否則} p = i_2 \end{cases}$ …持續這些步驟，可得 p

5.由「分段法則Ⅰ」可得：

(1)若 $p < n-1$ ，則 $\sum_{k=p+1}^{n-1} d_k < r(n-p-1)+1$

(2) $w_{p+1} = r$

(3)第 $1, ..., p$ 個遲到者不影響第 $p+1$ 個之後遲到者的插號

(4)可將第 $p+1, \ldots,\ n$ 個遲到者視爲一組新的獨立插號作業

(5)將第1到第n 個遲到者的插號作業，分解成許多段獨立的插號作業。

$(1,...,i_1)$ ， $(i_1+1,...,i_2)$ ， … ， $(p+1,...,n)$

pf ：假設 $p = i_m, m \in N$ ，

(1) $\sum_{k=1}^{i} d_k < ri + 1$ ，其中 $i \in N, i < i_1$ ，但 $\sum_{k=1}^{i_1} d_k \ge r i_1 + 1$

$\Rightarrow w_{i_1+1} = r$

$\Rightarrow$第 $1, \ldots, i_1$ 個遲到者不影響第 i_1+1個之後遲到者的插號

$\Rightarrow$可將第 i_1+1個遲到者視爲另一組獨立的插號中第一位遲到者

(2)承(1)，從第i_1+1個遲到者開始另一組新的插號

$$\sum_{k=i_1+1}^{i} d_k < r(i-i_1)+1 \text{，其中} i \in N, i < i_2 \text{，但} \sum_{k=i_1+1}^{i_2} d_k \ge r(i_2-i_1)+1 \text{，}$$

$\Rightarrow w_{i_2+1}=r \Rightarrow$第$i_1+1,\ldots,i_2$個遲到者不影響第$i_2+1$個之後遲到者的插號

$\Rightarrow$可將第i_2+1個遲到者視爲另一組獨立的插號中第一位遲到者

$\ldots$依此類推可得$w_{i_m+1}=r \Rightarrow w_{p+1}=r$

$\Rightarrow$第$i_{m-1}+1,\ldots,p$個遲到者不影響第$p+1$個之後遲到者的插號

$\Rightarrow$可將第$p+1$個遲到者視爲另一組獨立的插號中第一位遲到者

(五) $f(d_1,d_2,\ldots,d_{n-1})=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$，求$w_n$

> 將$d_1,\ldots,d_{n-1}$經由「分段法則 I 」，可得p
>
> $\Rightarrow$1.若$p=n-1$，則$w_n=r$
>
> 2.若$p<n-1$，$S=\sum_{k=p+1}^{n-1} d_k$，則$\begin{cases} S=0 \Rightarrow w_n=(r+1)(n-p)-1 \\ S\ge 1 \Rightarrow w_n=(r+1)(n-p)-1-S-\left\lceil \dfrac{S-1}{r} \right\rceil \end{cases}$

證明：1.若$p=n-1$，$\because w_{p+1}=r \quad \therefore w_n=r$

2.若$p<n-1$，$S=\sum_{k=p+1}^{n-1} d_k$，則$\sum_{k=p+1}^{n-1} d_k < r(n-p-1)+1$，且$d_1,\ldots,d_p$皆不影響$w_n$，

可將第$p+1,\ldots,n$個遲到者的插號視爲一組獨立的插號作業，

且第$p+1,\ldots,n$個遲到者，每隔r位準時到診者，就會插號入 1 位遲到者

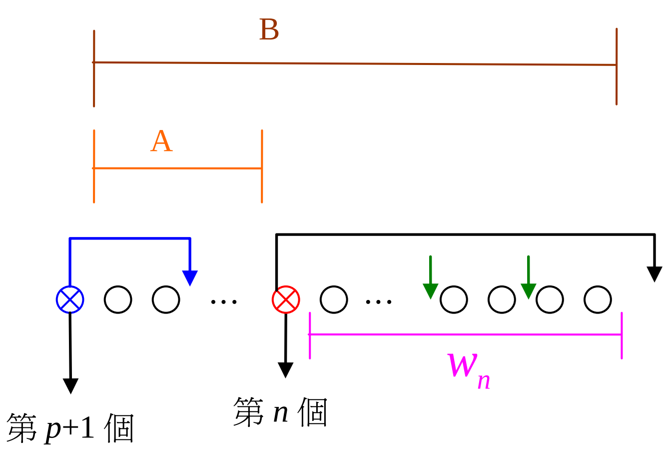
(1)當$S\ge 1$

w_n=(B段中的O)+(B段中插入的⊗)−(A段中的O)−(A段中插入的⊗)

$$=r\times(n-p)+(n-p-1)-S-\left\lceil \frac{S-1}{r} \right\rceil=(r+1)(n-p)-1-S-\left\lceil \frac{S-1}{r} \right\rceil$$

(2)當S=0 $\Rightarrow w_n=r(n-p)+(n-p-1)$ =(r+1)$(n-p)-1$

=(r+1)$(n-p)-1$



二、利用方格(走最短路徑)方法：

我們將到診情形轉變為方格走最短路徑圖，由路徑圖來找出分段法則、遲到者插號的位置、新的看診序號，以及遲到者需等候的人數，並針對插號規則 r ，找到對應的等待數列。

(一) 1.在方格走最短路徑的方法中，我們令⊗ ，O 圖中(1)遲到者⊗向右走 r 單位長

(2)準時者 O 向上走 1 單位長

2.在直角座標系中從原點(0,0)出發，走格子點，由第一個遲到者開始，按⊗ ，O 圖順序，依次畫出，可得一路徑。(如下之範例)

(二)1.每一組$(d_1, d_2, \ldots, d_{n-1})$的⊗ ，O 圖會對應到一條路徑，

令第 n 位遲到者⊗在圖形上的位移為 $\overline{G_nG_n'}$ ，

第 n 位準時者 O 在圖形上的位移為 $\overline{E_nE_n'}$ ：

(1) $G_1 = (0,0)$ ， $G_1' = (r,0)$

(2)當 $n \geq 2, n \in N$ ， $G_n = (r(n-1), \sum_{k=1}^{n-1} d_k)$ ， $G_n' = (rn, \sum_{k=1}^{n-1} d_k)$

(3) $n \in N$ ， E_n' 的 y 座標為 n

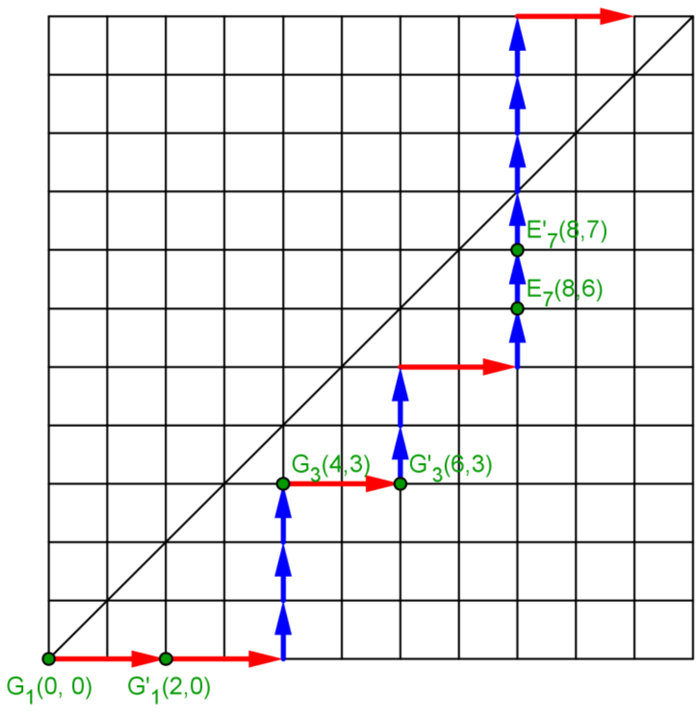
(4) G_n, G_n', E_n, E_n' 皆為格子點

2.定義：(1) $m_{\overline{G_iG_j}} = \begin{cases} \overline{G_iG_j}\text{的斜率} & ,\text{當} i \neq j \\ 0 & ,\text{當} i = j \end{cases}$ ，

(2)直線 L_i 為過點 G_i 且斜率為 1 的直線

範例：r=2，f(0,3,2,6)=(2,5,4,4,2)

⊗ ⊗ O O O ⊗ O O ⊗ O O O O O O ⊗



(1)若 $m_{\overline{G_1G_n}} > 1$, 其中 $n \in N$ ，但對任何 $i \in N, i < n,\ m_{\overline{G_1G_i}} \le 1$,,

則第 n 個遲到者可視爲另一組獨立插號作業的開始

證明：$\because m_{\overline{G_1G_i}} = \dfrac{\sum_{k=1}^{i-1} d_k - 0}{r(i-1)-0} \le 1$, 對任何 $i \in N, i < n$

$\Rightarrow$ 對任何 $i \in N, i < n$ ，$\sum_{k=1}^{i-1} d_k \le r(i-1) < r(i-1)+1$ ，

$\Rightarrow$ 對任何 $i \in N, i < n-1$，$\sum_{k=1}^{i} d_k < ri+1$ ，

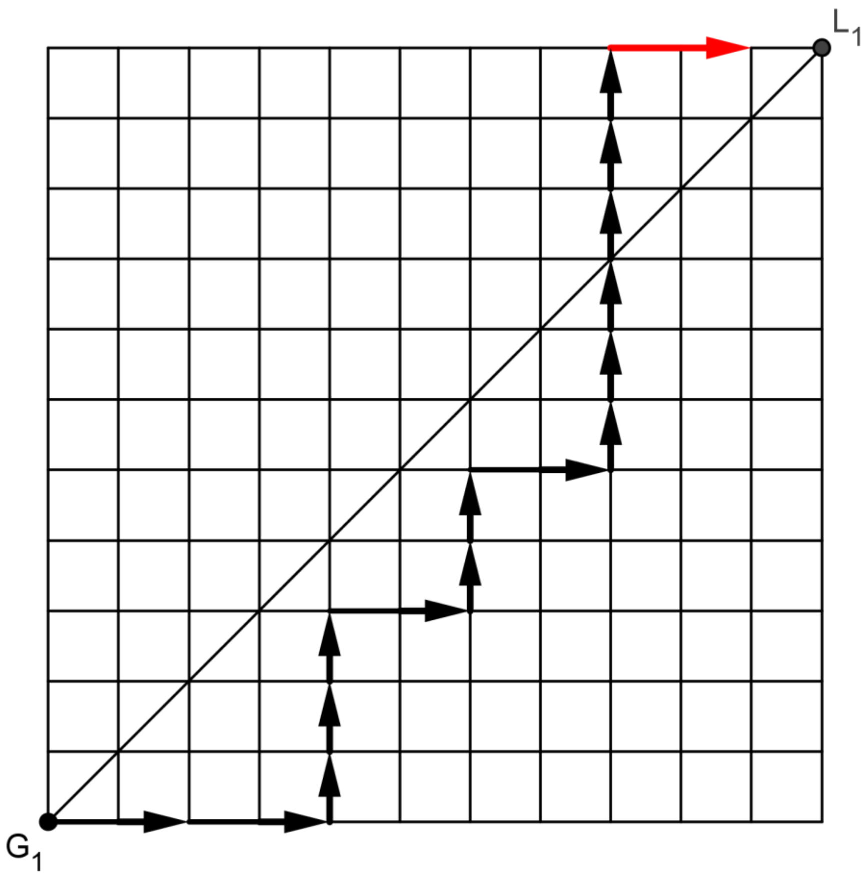
又 $m_{\overline{G_1G_n}} = \dfrac{(\sum_{k=1}^{n-1} d_k) - 0}{r(n-1)-0} > 1$,

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} d_k > r(n-1)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} d_k \ge r(n-1)+1$

由「分段法則Ｉ」可知：第 n 個遲到者可視爲另一組獨立插號作業的開始

(2)過點 G_1 ，做一條斜率爲 1 的直線 L_1 ，若路徑一出現在直線 L_1 的左上方，則可視爲另一個獨立插號作業的開始。(如下圖紅色段)



(三)利用最短路徑法，找出「分段法則Ⅰ」的 p

1.「分段法則Ⅱ」

> 對第 n 個遲到者而言，其中 $n \in N$ ，利用最短路徑圖
>
> (1)若 $\exists i_1 \in N, 1 \le i_1 < n$ ，使得 $m_{\overline{G_1 G_{i_1+1}}} > 1,$ 但對於 $\forall i \in N, i \le i_1$ ， $m_{\overline{G_1 G_i}} \le 1,$ ，
>
> 則繼續考慮(2)，否則令 $p' = 0$
>
> (2)承(1)， $\begin{cases} \text{(a)當} i_1 = n-1, \text{則} p' = n-1 \\ \text{(b)當} i_1 \ne n-1, \text{若} \exists\ i_2 \in N, i_1+1 \le i_2 < n, \text{使得} m_{\overline{G_{i_1+1} G_{i_2+1}}} > 1, \\ \qquad \text{但對於} \forall i \in N, i_1+1 \le i \le i_2, m_{\overline{G_{i_1+1} G_i}} \le 1, \\ \qquad \text{則繼續考慮(3), 否則} p' = i_1 \end{cases}$
>
> (3)承(2)， $\begin{cases} \text{(a)當} i_2 = n-1, \text{則} p = n-1 \\ \text{(b)當} i_2 \ne n-1, \text{若} \exists i_3 \in N, i_2+1 \le i_3 < n, \text{使得} m_{\overline{G_{i_2+1} G_{i_3+1}}} > 1, \\ \qquad \text{但對於} \forall i \in N, i_2+1 \le i \le i_3, m_{\overline{G_{i_2+1} G_i}} \le 1, \\ \qquad \text{則繼續考慮(4), 否則} p' = i_2 \end{cases}$
>
> $\vdots$
>
> 持續這些步驟，可得 p'

2.「分段法則Ⅰ」與「分段法則Ⅱ」同義，即 $p = p'$

(1)「分段法則Ⅰ」$\Rightarrow$「分段法則Ⅱ」

證明：由「分段法則Ⅰ」之(1)：

若 $\exists i_1 \in N, 1 \le i_1 < n$ ，使得 $\sum_{k=1}^{i_1} d_k \ge r i_1 + 1$ ，

但對於 $\forall i \in N, i < i_1$ ， $\sum_{k=1}^{i} d_k < ri + 1$ ，則繼續考慮(2)，否則令 $p = 0$

(a) $\because \sum_{k=1}^{i_1} d_k \ge r i_1 + 1 \quad \therefore m_{\overline{G_1 G_{i_1+1}}} = \dfrac{(\sum_{k=1}^{i_1} d_k) - 0}{r i_1 - 0} \ge \dfrac{r i_1 + 1}{r i_1} > \dfrac{r i_1}{r i_1} = 1 \quad \Rightarrow m_{\overline{G_1 G_{i_1+1}}} > 1,$

(b) $\because$ 對於 $\forall i \in N, i < i_1$ ， $\sum_{k=1}^{i} d_k < ri + 1$ ，

$\Rightarrow$ 對於 $\forall i \in N, i \le i_1$ ， $\sum_{k=1}^{i-1} d_k < r(i-1) + 1$

$\therefore m_{\overline{G_1 G_i}} = \dfrac{(\sum_{k=1}^{i-1} d_k) - 0}{r(i-1) - 0} < \dfrac{r(i-1)+1}{r(i-1)} \quad \Rightarrow m_{\overline{G_1 G_i}} \le \dfrac{r(i-1)}{r(i-1)} = 1 \quad \Rightarrow m_{\overline{G_1 G_i}} \le 1,$

由(a)(b)可推得「分段法則Ⅱ」(1)

同理「分段法則Ⅰ」(2)$\Rightarrow$「分段法則Ⅱ」(2)

「分段法則Ⅰ」(3)$\Rightarrow$「分段法則Ⅱ」(3)…

(2)「分段法則Ⅱ」$\Rightarrow$「分段法則Ⅰ」

證明：由「分段法則Ⅱ」(1)：

若 $\exists i_1 \in N, 1 \le i_1 < n$，使得 $m_{\overline{G_1G_{i_1+1}}} > 1$, 但對於 $\forall i \in N, i \le i_1$ ，$m_{\overline{G_1G_i}} \le 1$,，

則繼續考慮(2)，否則令 $p' = 0$

(a) $\because m_{\overline{G_1G_{i_1+1}}} = \dfrac{(\sum_{k=1}^{i_1} d_k) - 0}{ri_1 - 0} > 1 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{i_1} d_k > ri_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{i_1} d_k \ge ri_1 + 1$

(b)對於 $\forall i \in N, i \le i_1$ ，$m_{\overline{G_1G_i}} = \dfrac{(\sum_{k=1}^{i-1} d_k) - 0}{r(i-1) - 0} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{i-1} d_k \le r(i-1)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{i-1} d_k < r(i-1) + 1$$

$\therefore$ 對於 $\forall i \in N, i < i_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{i} d_k < ri + 1$

由(a)(b)可推得「分段法則Ⅰ」(1)

同理「分段法則Ⅱ」(2)$\Rightarrow$「分段法則Ⅰ」(2)

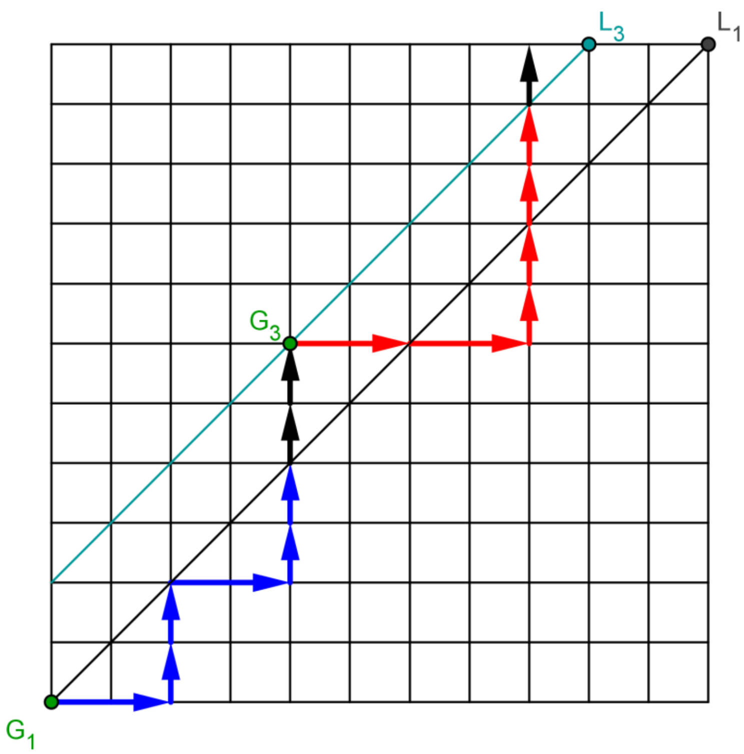
「分段法則Ⅱ」(3)$\Rightarrow$「分段法則Ⅰ」(3)　…

由(1)(2)證明可得：「分段法則Ⅰ」$\Leftrightarrow$(分段法則Ⅱ)　$\therefore p = p'$

3.(1)可將第1到第n個遲到者的路徑圖，分解成許多段獨立的插號作業。

$(1,\ldots,i_1)$，$(i_1+1,\ldots,i_2)$，…，$(p+1,\ldots,n)$

(2)對上述其中任一段獨立的插號作業$(s,\ldots,t)$，其路徑圖皆不出現在斜率為 1 的直線 L_s 左上方區域。(如下圖，藍色、紅色路徑分別為獨立插號作業)



(四)利用最短路徑圖，找出第n個遲到者插號的位置

1.若第 1 個到第n個遲到者在一個獨立的插號作業內，則對$i \in N, i \le n$，第i位遲到者所要插號的位置，爲直線$y = ri$與所畫出路徑圖的交點。

證明：(1)在一個獨立的插號作業內，每隔r位準時到者要插號入一位遲到者。

(2)第i位遲到者所要插號的位置與第一個遲到者到診位置，需間隔ri個準時者，所以會插號在第ri個與第$ri+1$個準時者之間。

(3)第ri個準時者在圖形上的位移爲$\overline{E_{ri}E'_{ri}}$，點E'_{ri}的y座標爲ri，所以第i位遲到者所要插號的位置，爲直線$y = ri$與所畫出路徑圖的交點

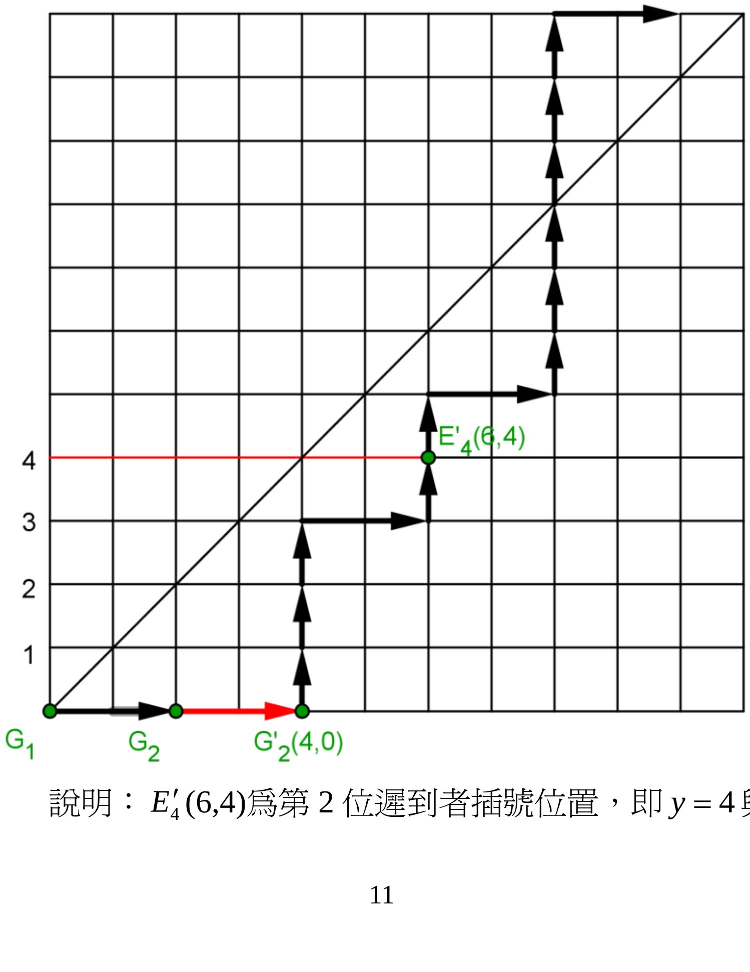
2.對第n個遲到者，由「分段法則Ⅱ」得到的p值，若點G_{p+1}坐標爲(x_{p+1}, y_{p+1})，則第n位遲到者所要插號的位置，爲直線$y = r(n-p) + y_{p+1}$與路徑圖的交點。

證明：(1)對第n個遲到者而言，由「分段法則Ⅱ」得到的p值，使得從第$p+1$個遲到者到第n個遲到者爲一個獨立的插號作業。

(2)將路徑圖平移，使點$G_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1})$平移至原點(0,0)，由前述證明可知，此時第$n$位遲到者所要插號的位置，爲直線$y = r(n-p)$與路徑圖的交點。

(3)再將原點平移回G_1，則第n位遲到者所要插號的位置，爲原直角座標圖直線$y = r(n-p) + y_{p+1}$與路徑圖的交點。

範例：插號規則 r=2



說明：E'_4(6,4)爲第 2 位遲到者插號位置，即$y = 4$與路徑圖之交點

(五)利用最短路徑圖，求第n個遲到者新的看診序號：

對第n個遲到者而言，由「分段法則Ⅱ」所得到的p值，若點G_{p+1}的坐標爲(x_{p+1}, y_{p+1})，a_0爲在第一個遲到者到診時準時者已看診的人數，則第n個遲到者新的看診序號爲($(r+1)n-rp+y_{P+1}+a_0$)

證明：∵第n位遲到者所要插號的位置，為直線$y=r(n-p)+y_{p+1}$與路徑圖的交點。

∴第n位遲到者在路徑圖上所要插號的位置之前有$a_0+r(n-p)+y_{p+1}$個準時者，再加上n位遲到者，

⇒第n位遲到者新的看診序號爲$a_0+r(n-p)+y_{p+1}+n$

$$=(r+1)n-rp+y_{p+1}+a_0$$

(六)利用最短路徑圖，求第n個遲到者需等候的人數

1.已知第 1 個到第n個遲到者在一個獨立的插號作業內，點$G'_n(x'_n, y'_n)$，

若$x'_n-y'_n=rs+q$,其中$s,q\in Z, 0\le q\le r-1$，

(1)當$y'_n=0$，第n個遲到者需等候的人數爲$(r+1)n-1$

(2)當$y'_n\ne 0$，第n個遲到者需等候的人數爲$(r+1)s+q$

證明：(1)由前面證明已知：第n位遲到者插號的位置的y坐標爲rn，

∴從$y=y'_n$到$y=rn$之間需等候$(rn-y'_n)$個準時者

(2)在一個獨立的插號作業內，

每隔r位準時者要插入一位遲到者，

(a)當$y'_n=0$，

則從$y=0$到$y=rn$之間需等候$(n-1)$個遲到者，

∴第n個遲到者需等候的人數

$$=(rn-y'_n)+(n-1)$$
$$=(rn-0)+(n-1)$$
$$=(r+1)n-1$$

(b)當$y'_n\ne 0$，

則從$y=y'_n$到$y=rn$之間需等候$\left[\dfrac{rn-y'_n}{r}\right]$個遲到者，又$x'_n=rn$

∴第n個遲到者需等候的人數

$$=(rn-y'_n)+\left[\frac{rn-y'_n}{r}\right]$$
$$=(x'_n-y'_n)+\left[\frac{x'_n-y'_n}{r}\right]$$
$$=(rs+q)+s$$
$$=(r+1)s+q$$

2. 對第 n 個遲到者而言，由「分段法則Ⅱ」，得到 p 值，點 $G_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1})$，

點 $G'_n(x'_n, y'_n)$，若 $(x'_n - x_{p+1}) - (y'_n - y_{p+1}) = rs + q$, 其中 $s, q \in Z, 0 \le q \le r-1$，

(1)當 $y'_n - y_{p+1} = 0$，第 n 個遲到者需等候的人數為 $(r+1)n-1$

(2)當 $y'_n - y_{p+1} \ne 0$，第 n 個遲到者需等候的人數為 $(r+1)s+q$

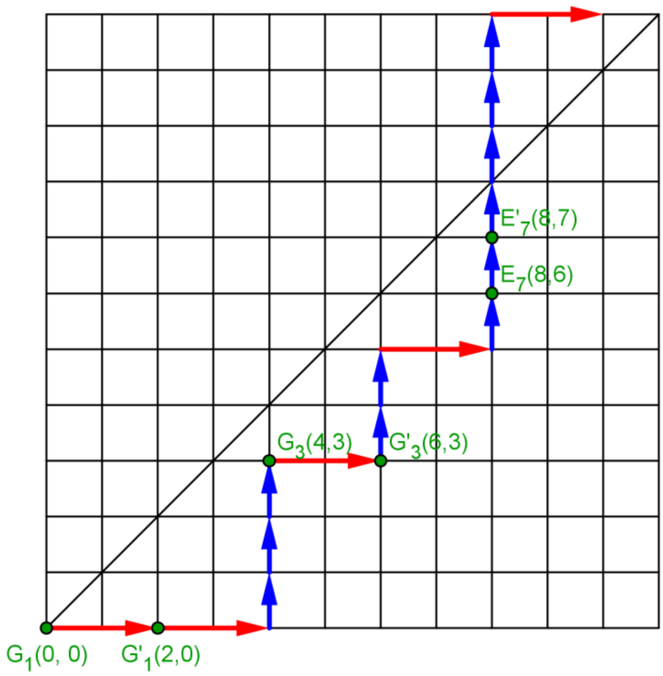
證明：(1)將路徑圖平移，

使點 $G_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1})$ 平移至原點(0,0)，

則點 $G'_n(x'_n, y'_n)$ 的新座標為 $(x'_n - x_{p+1}, y'_n - y_{p+1})$，

(2)利用第 12 頁之證明結果，即可得証。

範例：r=2，f(0,3,2,6)=(2,5,4,4,2)



說明：(1)由上圖可知 $G'_3(6,3)$

(2) $x'_3 - y'_3 = 6-3$

$= 3$

$= 2\times1+1$

$\Rightarrow s=1, q=1$

$\Rightarrow (r+1)s+q$

$=(2+1)\times1+1$

$=4$

∴第 3 個遲到者需等候的人數為 4

(七)利用等待數列$\langle A_n \rangle$及最短路徑圖，求第n個遲到者需等候的人數

1.找出插號規則r所對應的等待函數：

(1)令B 集合=$\{x | x \ge r, x \in N\}$，

C 集合=$\{x | x = (r+1)n-1, n \in N\}$，

A 集合=B-C

(2)將 A 集合中的元素，由小到大排列所得之數列，我們稱爲等待數列$\langle A_n \rangle$

2.(1)將等待數列$\langle A_n \rangle$列出：

$(r+1)\times 1+0$，$(r+1)\times 1+1$，$(r+1)\times 1+2$，…，$(r+1)\times 1+(r-1)$，

$(r+1)\times 2+0$，$(r+1)\times 2+1$，$(r+1)\times 2+2$，…，$(r+1)\times 2+(r-1)$，

……

(2)等待數列$\langle A_n \rangle$的一般式：

$$A_i = \left[(i+r-1)(\frac{r+1}{r}) \right]$$

$=(r+1)(a+1)+b$，其中 $i-1 = ra+b, i \in N, a,b \in Z, 0 \le b \le r-1,$

3.已知第 1 個遲到者到第n個遲到者在一個獨立的插號作業內，在路徑圖中點$G_n'(x_n', y_n')$，若$y_n' \ne 0$，$i = r(n-1)-y_n'+1$，則第n個遲到者需等候人數爲A_i

證明：(1)$\because i = r(n-1)-y_n'+1$　　$\therefore y_n' = r(n-1)-(i-1)$

又$y_n' \ne 0$　$\therefore 1 \le i \le r(n-1)$

假設$i-1 = ra+b,$ 其中$a,b \in Z,\ 0 \le b \le r-1$

又$x_n' = rn$

則$x_n' - y_n'$

$= rn-(r(n-1)-(i-1))$

$= r+i-1 = r+(ra+b) = r(a+1)+b$

由第 12 頁的證明可知：

第n個遲到者需等候人數爲$(r+1)(a+1)+b = A_i$

4.對第n個遲到者而言，由「分段法則Ⅱ」，得到一個p值，點$G_{p+1}(x_{p+1},y_{p+1})$，點$G'_n(x'_n,y'_n)$，若$y'_n-y_{p+1}\neq 0$，$i=r(n-p-1)-(y'_n-y_{p+1})+1,$，則第$n$個遲到者需等候的人數為$A_i$

證明：將路徑圖平移，使點$G_{p+1}(x_{p+1},y_{p+1})$平移至原點(0,0)，再利用第 14 頁之證明結果，即可得証。

5.利用上述之證明，由等待數列$\langle A_n\rangle$及最短路徑圖求第n個遲到者需等候人數：

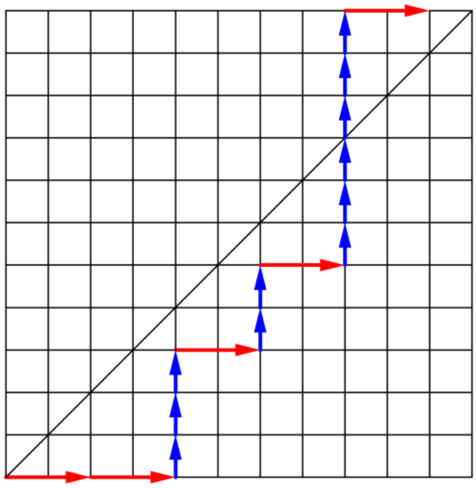
(步驟一)將最短路徑圖畫出，對第n個遲到者，利用「分段法則Ⅱ」，找到p值

(步驟二)過點$G_{p+1}(x_{p+1},y_{p+1})$畫出斜率為 1 的直線L_{p+1}

(步驟三)(1)當$y'_n\neq y_{p+1}$：在直線L_{p+1}的右下方，y'_n所可能的值中，由最大值$y=y_{p+1}+r(n-p-1)$當作第一條線開始依序往下數，若第n個遲到者的位移$\overrightarrow{G_nG'_n}$位於排序為i的水平線上，則第n個遲到者需等候人數為等候數列的第i項$=A_i$

(2)當$y'_n=y_{p+1}$：第n個遲到者需等候的人數為$(r+1)(n-p)-1$

範例：$r=2$，f(0,3,2,6)=(2,5,4,4,2)



說明：(1)$r=2$之等待數列$\langle A_n\rangle$為

2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，…

A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7

(2)第 3 位遲到者的路徑在$y=3$，由最高$y=4$往下數，是排序第 2 條，又$A_2=4$，所以第 3 位遲到者需等待的人數為 4

三.(一)

定理：設 r 為正整數，n 為 r 的倍數，，現有 $n\times n$ 的正方形方格，若由左下角的點走到右上角的點，規定向右每次能走的步數要為 r 的倍數，向上則可任意走，不經過左下角到右上角所成對角線左上方區域，則其最短路徑的方法數為 $\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$ 。

證明：1. $n\times n$ 的正方形方格，現由左下角的點走到右上角的點，任意走的方法數也就是向右要走 $\dfrac{n}{r}$ 步，向上要走 n 步的排列總數，方法數為 $C_n^{n+\frac{n}{r}}$ 。

2.定義：路線高度為對角線左上方部分，所有鉛直步數和。

3.圖形變換步驟：

(步驟一)先找出位於對角線的右下方的路線中，第一個鉛直段的終點碰到對角線，將其標示為紅色，長度為 1 單位長。

(步驟二)將路線中紅段之前與紅段之後的路線對調，形成一個新路線。

4.由上面的變換步驟，可知：

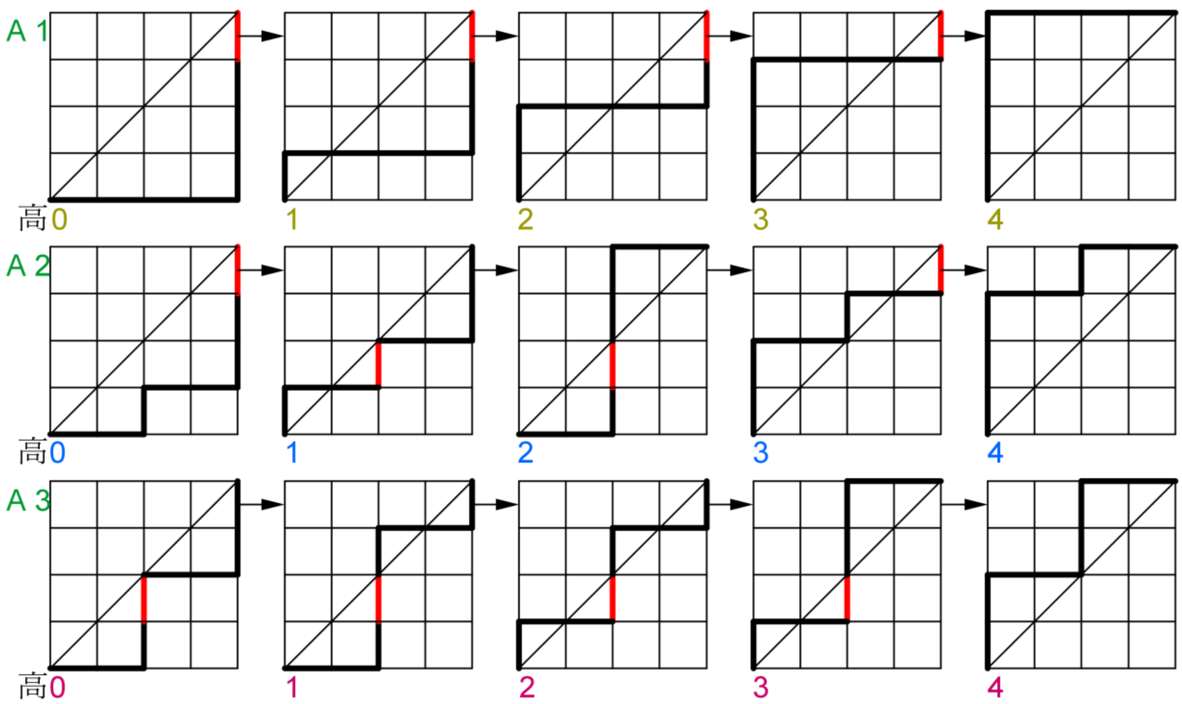
(1)每經過一次變換後，紅段之後的路線高度不變，紅段之前的路線高度會增加1(因為整個上移一格)，故路線的高度會增加1。將每一個路線高度為 0 的路線圖，經由圖形變換步驟繼續下去，最後路線的高度會為 n ，就停止。

(2)由於只是把位置調整，並不影響水平方向的步數，且向右每次也還滿足走的步數為 r 的倍數，故仍為滿足向右每次能走的步數為 r 的倍數，向上任意走。

5.可逆性：對於任何高度大於 0 的路線 P ，必可找到一個路線產生 P 。將圖形變換步驟中，(對角線右下方第一個鉛直段的終點碰到對角線)，變成(對角線左上方第一個鉛直段的起點碰到對角線)，即可找到。

6.利用如此的對應關係，可知路線高度為 $0,1,2,3,\cdots,n$ 的數量都一樣多，故路線高度為 0 的(有就是可行解)，共有總路線數的 $\dfrac{1}{n+1}$ ，也就是 $\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$

範例： $r=2,k=2$



(二)1.我們稱$t_k=\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$,其中$k\in N, n=rk$, 為$T$數列；當$r=1$時，$T$數列即為 Catalan 數列。

2.獨立插號作業中，求到診的可能情形方法數：

由分段法則，我們可以將到診的情形分成許多獨立的插號作業，這些插號作業彼此之間互不影響，我們想要在一個有k個遲到者的獨立插號作業中，$k\in N$，找出所有可能的到診情形方法數。

(1) $r=1$時

(a)一個有k個遲到者的獨立插號作業，在座標圖上遲到者「向右 1 單位」，準時者「向上 1 單位」，其路徑圖在一個$k\times k$的方格內，由左下角走到右上角。

(b)將第 1 位遲到者的位移起點由原點(0,0)開始，此時這k個遲到者的路徑圖，不可以出現在$x=y$這條直線的左上方區域，亦即路線圖經過的點座標(x,y)，$x\geq y$

(c) k個遲到者到診的情形方法數，也就是路線圖上一路領先的可行解方法數，為 Catalan 數列的第k項=$\dfrac{1}{k+1}C_k^{2k}$

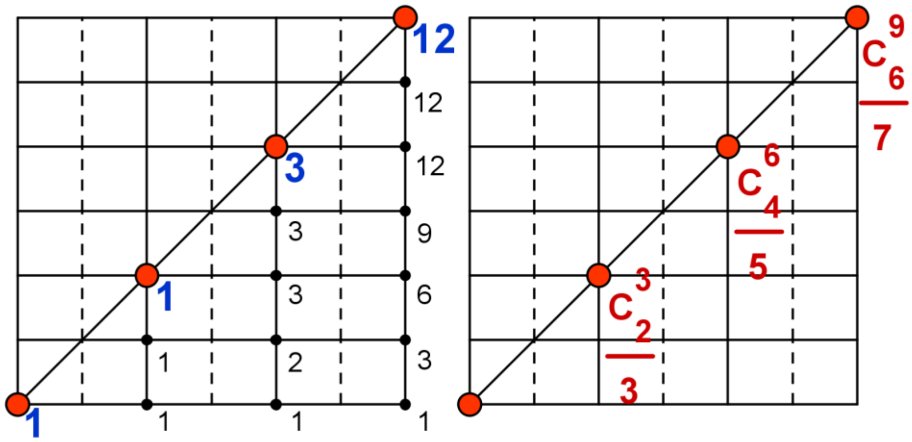
(2) $r\in N$時

一個有k個遲到者的獨立插號系統，在座標圖上遲到者「向右r單位長」，準時者「向上 1 單位長」，其路徑圖在一個$n\times n$的方格內，其中$n=rk, k\in N$，由左下角的點走到右上角的點，由上頁定理可知，其到診的可能情形方法數，即為路線圖中不出現在方格中，由左下角到右上角所連成的對角線之左上方區域的最短路徑可行解方法數：$\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$,其中$n=rk, k\in N$

範例：(1)在一個6×6的方格中，由左下角的點走到右上角的點，
只能「向右走 2 單位長」或「向上走 1 單位長」，

(2)不出現在方格的對角線左上方區域的的可行解方法數為$\dfrac{C_6^{6+\frac{6}{2}}}{6+1}=\dfrac{C_6^9}{7}=\dfrac{\frac{9!}{6!3!}}{7}=12$

(6×6 方格一路領先的方法數)



四、仿照取號碼單方式

(一)仿照取號碼單方式：

1.若某過號者到診時，現場包含自己共有i個遲到者在等待，

則此位過號者需等候的人數最多為$(r+1)i-1$；最少需等待$(r+1)(i-1)$人

證明：(1)每位遲到者需延後r位準時者才能插號

(2)$\because$現場共有i個遲到者在等待　$\therefore$此位過號者在現場排名第i位遲到者

(3)在現場，等候看診排第一位的遲到者，最多還需等候r號，

最少需等候 0 號(即下一個就輪到)，其他的遲到者都需隔r位準時者才能插號

(4)所以排名第i位遲到者，

最多需等待$r+r(i-1)+(i-1)=(r+1)i-1$

最少需等待$\begin{cases} i=1, \text{為} r \\ i\geq 2, \text{為} 0+r(i-1)+(i-1)=(r+1)(i-1) \end{cases}$

2.取號碼單的方法

(1)仿照郵局或銀行取號碼單的模式，每個遲到者在到診時皆需取一張號碼單，準時者則不用。

(2)取號碼單的機器除了列印出總排序的號碼n，機器上還會顯示目前遲到者等待看診的人數i，亦即「取號碼單的遲到者」在現場候診的遲到者中的排序i

3.由上述 1.之證明結果可得：

若總排序的號碼為n，機器上顯示目前遲到者等待看診的人數為i，則第n位遲到者所需等待的人數最多為$(r+1)i-1$，坊間各大醫院、診所的插號規則r不一，但r大多為 1，2，3，4，5 其中一種，因此我們計算出這幾種規則下，取號碼單的遲到者最多需等待人數(下圖黃色區域)：

現場遲到 者候診人數		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
插號規則	r=1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	r=2	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
	r=3	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39
	r=4	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49
	r=5	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59

4.若是醫院能裝設遲到者的取號碼單機器，利用上述結論，遲到者可以推算自己最多需等候的人數。

(二)利用等候理論(Queueing theory)：

1.如果過號者需等候$i-1$人，則對現場候診病人而言，此位過號者排第i順位看診，假設醫生看診一位病人平均花費時間m分鐘，

病人等候時間V的機率密度函數 $f_V(t)=\frac{1}{m}e^{-\frac{t}{m}},t>0$ ，將其看爲$\Gamma(1,m)$分配

令 V_1 是現場候診的第一順位病人在前一個病人開始看診後所等待的時間，

V_2 是第一順位病人開始看診後，第二順位的病人所等待的時間，

…

V_i 是第$i-1$順位病人開始看診後，第i順位的病人所等待的時間，

則第i順位看診的病人總等待時間 $U=V_1+\ldots+V_i$，其中$V_1,\cdots,V_i$彼此獨立，

且U爲$\Gamma(i,m)$分配， $f_U(t)=\frac{1}{m^i(i-1)!}t^{i-1}e^{-\frac{t}{m}},t>0$

2.我們利用$\Gamma(\alpha,\beta)$分配與等候理論的關係，找出在不同的插號規則r，某過號者取號碼單時，由機器上所顯示的遲到者候診人數，當其需等候最多人數時，所需等候時間超過q分鐘的機率。

$$P(U>q)=1-P(U\le q)$$

(1)範例：假設醫生看診一位病人平均花費時間m=3分鐘

若插號規則$r=2$，過號者在現場候診的遲到者中排第 4 順位，

我們可求出此過號者需等候最多人數爲 11 人，

此時，他在現場候診者中排第 12 順位看診，

則其等待的時間超過$q=30$分鐘的機率

$$P(U>30)=1-P(U\le 30)=1-\int_0^{30}\frac{1}{3^{12}(12-1)!}t^{12-1}e^{-\frac{t}{3}}dt$$

$$=1-0.3032=0.6968$$

3.我們可以分別求出，當醫生看診一位病人平均花費時間分別爲 3，5，6，10 分鐘時，由過號看診者到診時，包括自己在內現場候診的遲到者人數，找出當自己需等候最多人次時，等候超過 30，45，60 分鐘的機率。(如下二頁表格所示)

(1)國際管理大師麥可．波特(Michael Porter)曾在來台的演說中提到：台灣的醫生診療一個病人的平均看診時間爲 3 分鐘。倘若一個診次共 3 小時，醫生看診 30 個病人，則每個病人平均看診要 6 分鐘；不同的科別，不同的看診模式，醫生平均看診的時間也不同，因此我們考慮四種醫生看診一位病人平均花費的時間：3，5，6，10 分鐘。

(2)考慮到病人等待的感受，因此我們將等候時間的狀況分爲三種：超過 30，45，60 分鐘。

(3)如下二頁表格，我們可以比較「醫生看診時間」、「插號規則」、「需等待超過的時間」「遲到者候診人數」四項因素。醫院可以由此作爲插號規則制定時的參考，讓遲到者之等候情形能合情合理。

醫生看診一位病人平均花費 3 分鐘

遲到者	候診人數		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
超	插	r=1	0.0005	0.0103	0.0671	0.2202	0.4579	0.6968	0.8645	0.9513	0.9857	0.9965
過	號	r=2	0.0028	0.0671	0.3328	0.6968	0.9165	0.9857	0.9984	0.9999	1	1
30	規	r=3	0.0103	0.2202	0.6968	0.9513	0.9965	0.9999	1	1	1	1
分	則	r=4	0.0293	0.4579	0.9165	0.9965	1	1	1	1	1	1
鐘		r=5	0.0671	0.6968	0.9857	0.9999	1	1	1	1	1	1
超	插	r=1	5E-06	0.0002	0.0028	0.0180	0.0699	0.1848	0.3632	0.5681	0.7489	0.8752
過	號	r=2	4E-05	0.0028	0.0374	0.1848	0.4657	0.7489	0.9170	0.9805	0.9967	0.9996
45	規	r=3	0.0002	0.0180	0.1848	0.5681	0.8752	0.9805	0.9983	0.9999	1	1
分	則	r=4	0.0009	0.0699	0.4657	0.8752	0.9888	0.9996	1	1	1	1
鐘		r=5	0.0028	0.1848	0.7489	0.9805	0.9996	1	1	1	1	1
超	插	r=1	4E-08	3E-06	7E-05	0.0008	0.0050	0.0214	0.0661	0.1565	0.2970	0.4703
過	號	r=2	5E-07	7E-05	0.0021	0.0214	0.1049	0.2970	0.5591	0.7875	0.9221	0.9782
60	規	r=3	3E-06	0.0008	0.0214	0.1565	0.4703	0.7875	0.9475	0.9919	0.9992	0.9999
分	則	r=4	2E-05	0.0050	0.1049	0.4703	0.8432	0.9782	0.9985	0.9999	1	1
鐘		r=5	7E-05	0.0214	0.2970	0.7875	0.9782	0.9992	1	1	1	1

醫生看診一位病人平均花費 6 分鐘

遲到者	候診人數		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
超	插	r=1	0.0404	0.2650	0.6160	0.8666	0.9682	0.9945	0.9993	0.9999	1	1
過	號	r=2	0.1247	0.6160	0.9319	0.9945	0.9998	1	1	1	1	1
30	規	r=3	0.2650	0.8666	0.9945	0.9999	1	1	1	1	1	1
分	則	r=4	0.4405	0.9682	0.9998	1	1	1	1	1	1	1
鐘		r=5	0.6160	0.9945	1	1	1	1	1	1	1	1
超	插	r=1	0.0047	0.0591	0.2414	0.5246	0.7764	0.9208	0.9784	0.9954	0.9992	0.9999
過	號	r=2	0.0203	0.2414	0.6620	0.9208	0.9897	0.9992	1	1	1	1
45	規	r=3	0.0591	0.5246	0.9208	0.9954	0.9999	1	1	1	1	1
分	則	r=4	0.1321	0.7764	0.9897	0.9999	1	1	1	1	1	1
鐘		r=5	0.2414	0.9208	0.9992	1	1	1	1	1	1	1
超	插	r=1	0.0005	0.0103	0.0671	0.2202	0.4579	0.6968	0.8645	0.9513	0.9857	0.9965
過	號	r=2	0.0028	0.0671	0.3328	0.6968	0.9165	0.9857	0.9984	0.9999	1	1
60	規	r=3	0.0103	0.2202	0.6968	0.9513	0.9965	0.9999	1	1	1	1
分	則	r=4	0.0293	0.4579	0.9165	0.9965	1	1	1	1	1	1
鐘		r=5	0.0671	0.6968	0.9857	0.9999	1	1	1	1	1	1

醫生看診一位病人平均花費 5 分鐘

遲到者		候診人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
超過30分鐘	插號規則	r=1	0.0174	0.1512	0.4457	0.7440	0.9161	0.9799	0.9964	0.9995	0.9999	1
		r=2	0.0620	0.4457	0.8472	0.9799	0.9986	0.9999	1	1	1	1
		r=3	0.1512	0.7440	0.9799	0.9995	1	1	1	1	1	1
		r=4	0.2851	0.9161	0.9986	1	1	1	1	1	1	1
		r=5	0.4457	0.9799	0.9999	1	1	1	1	1	1	1
超過45分鐘	插號規則	r=1	0.0012	0.0212	0.1157	0.3239	0.5874	0.8030	0.9261	0.9780	0.9947	0.9989
		r=2	0.0062	0.1157	0.4557	0.8030	0.9585	0.9947	0.9996	1	1	1
		r=3	0.0212	0.3239	0.8030	0.9780	0.9989	1	1	1	1	1
		r=4	0.0550	0.5874	0.9585	0.9989	1	1	1	1	1	1
		r=5	0.1157	0.8030	0.9947	1	1	1	1	1	1	1
超過60分鐘	插號規則	r=1	8E-05	0.0023	0.0203	0.0895	0.2424	0.4616	0.6815	0.8444	0.9370	0.9787
		r=2	0.0005	0.0203	0.1550	0.4616	0.7720	0.9370	0.9884	0.9985	0.9999	1
		r=3	0.0023	0.0895	0.4616	0.8444	0.9787	0.9985	0.9999	1	1	1
		r=4	0.0076	0.2424	0.7720	0.9787	0.9993	1	1	1	1	1
		r=5	0.0203	0.4616	0.9370	0.9985	1	1	1	1	1	1

醫生看診一位病人平均花費 10 分鐘

遲到者		候診人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
超過30分鐘	插號規則	r=1	0.1991	0.6472	0.9161	0.9881	0.9989	0.9999	1	1	1	1
		r=2	0.4232	0.9161	0.9962	0.9999	1	1	1	1	1	1
		r=3	0.6472	0.9881	0.9999	1	1	1	1	1	1	1
		r=4	0.8153	0.9989	1	1	1	1	1	1	1	1
		r=5	0.9161	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1
超過45分鐘	插號規則	r=1	0.0611	0.3423	0.7029	0.9134	0.9829	0.9976	0.9997	1	1	1
		r=2	0.1736	0.7029	0.9597	0.9976	0.9999	1	1	1	1	1
		r=3	0.3423	0.9134	0.9976	1	1	1	1	1	1	1
		r=4	0.5321	0.9829	0.9999	1	1	1	1	1	1	1
		r=5	0.7029	0.9976	1	1	1	1	1	1	1	1
超過60分鐘	插號規則	r=1	0.0174	0.1512	0.4457	0.7440	0.9161	0.9799	0.9964	0.9995	0.9999	1
		r=2	0.0620	0.4457	0.8472	0.9799	0.9986	0.9999	1	1	1	1
		r=3	0.1512	0.7440	0.9799	0.9995	1	1	1	1	1	1
		r=4	0.2851	0.9161	0.9986	1	1	1	1	1	1	1
		r=5	0.4457	0.9799	0.9999	1	1	1	1	1	1	1

伍、研究結果

依照遲到看診延後 r 號的規則：

一、(一).遲到者需等候的人數：

1.和(在他到診之前的遲到者)及(遲到者彼此到診之間準時者看診的人數)有關。

2.和(在他到診之後的遲到者)無關。

3.第一位遲到者只要等 r 人次就可以看診。

(二)1.「分段法則Ｉ」

對第 n 個遲到者，考慮 $d_1, d_2, ..., d_{n-1}$

(1)若 $\exists i_1 \in N, 1 \le i_1 < n$，使得 $\sum_{k=1}^{i_1} d_k \ge r i_1 + 1$，

但對於 $\forall i \in N, i < i_1$，$\sum_{k=1}^{i} d_k < ri + 1$，

則繼續考慮(2)，否則令 $p = 0$

(2)承(1)，
$$\begin{cases} \text{(a)當} i_1 = n-1, \text{則} p = n-1 \\ \text{(b)當} i_1 \ne n-1, \text{若} \exists\ i_2 \in N, i_1 + 1 \le i_2 < n, \text{使} \sum_{k=i_1+1}^{i_2} d_k \ge r(i_2 - i_1) + 1, \\ \qquad \text{但對於} \forall i \in N, i_1 + 1 \le i < i_2, \sum_{k=i_1+1}^{i} d_k < r(i - i_1) + 1, \\ \qquad \text{則繼續考慮(3), 否則} p = i_1 \end{cases}$$

(3)承(2)，
$$\begin{cases} \text{(a)當} i_2 = n-1, \text{則} p = n-1 \\ \text{(b)當} i_2 \ne n-1, \text{若} \exists i_3 \in N, i_2 + 1 \le i_3 < n, \text{使} \sum_{k=i_2+1}^{i_3} d_k \ge r(i_3 - i_2) + 1, \\ \qquad \text{但對於} \forall i \in N, i_2 + 1 \le i < i_3, \sum_{k=i_2+1}^{i} d_k < r(i - i_2) + 1, \\ \qquad \text{則繼續考慮(4), 否則} p = i_2 \end{cases}$$

…持續這些步驟，可得 p

2.第 $p+1$ 個遲到者只要等 r 人次就可以看診。

3.第 $1, ..., p$ 個遲到者不影響第 $p+1$ 個之後遲到者的插號

4.可將第 $p+1, \ldots,\ n$ 個遲到者視為一組獨立的插號作業

5.將第1到第 n 個遲到者的插號作業，分解成許多段獨立的插號作業。

$(1, ..., i_1)$，$(i_1 + 1, ..., i_2)$，…，$(p + 1, ..., n)$

(三) 將 $d_1,\ldots,d_{n-1}$ 經由「分段法則Ⅰ」，可得 p

$\Rightarrow$1.若 $p=n-1$，則 $w_n=r$

2.若 $p<n-1$，$S=\sum_{k=p+1}^{n-1} d_k$，

$$\text{則}\begin{cases} S=0 \Rightarrow w_n=(r+1)(n-p)-1 \\ S\ge 1 \Rightarrow w_n=(r+1)(n-p)-1-S-\left[\dfrac{S-1}{r}\right] \end{cases}$$

二、方格最短路徑的走法：令遲到者向右走 r 單位長，準時者向上走 1 單位長

(一)1.「分段法則Ⅱ」

對第 n 個遲到者而言，其中 $n\in N$，利用最短路徑圖 (1)若 $\exists i_1\in N, 1\le i_1<n$，使得 $m_{\overline{G_1G_{i_1+1}}}>1,$ 但對於 $\forall i\in N, i\le i_1$，$m_{\overline{G_1G_i}}\le 1,$， 則繼續考慮(2)，否則令 $p'=0$ (2)承(1)，$\begin{cases}(a)\text{當}i_1=n-1,\text{則}p'=n-1\\(b)\text{當}i_1\ne n-1,\text{若}\exists\, i_2\in N, i_1+1\le i_2<n,\text{使得}m_{\overline{G_{i_1+1}G_{i_2+1}}}>1,\\\quad\text{但對於}\forall i\in N, i_1+1\le i\le i_2, m_{\overline{G_{i_1+1}G_i}}\le 1,\\\quad\text{則繼續考慮(3),否則}p'=i_1\end{cases}$ (3)承(2)，$\begin{cases}(a)\text{當}i_2=n-1,\text{則}p=n-1\\(b)\text{當}i_2\ne n-1,\text{若}\exists i_3\in N, i_2+1\le i_3<n,\text{使得}m_{\overline{G_{i_2+1}G_{i_3+1}}}>1,\\\quad\text{但對於}\forall i\in N, i_2+1\le i\le i_3, m_{\overline{G_{i_2+1}G_i}}\le 1,\\\quad\text{則繼續考慮(4),否則}p'=i_2\end{cases}$ ⋮ 持續這些步驟，可得 p'

2.「分段法則Ⅰ」與「分段法則Ⅱ」同義，即 $p=p'$

3.利用「分段法則Ⅱ」

(1)可將第1到第n個遲到者的路徑圖，分解成許多段獨立的插號作業。

$(1,\ldots,i_1)$，$(i_1+1,\ldots,i_2)$，…，$(p+1,\ldots,n)$

(2)對上述其中任一段獨立的插號作業 $(s,\ldots,t)$，其路徑圖皆不出現在斜率為 1 的直線 L_s 左上方區域。

(二)插號位置：

1.若第 1 個到第 n 個遲到者在一個獨立的插號作業內，則對 $i\in N, i\le n$，第 i 位遲到者所要插號的位置，為直線 $y=ri$ 與所畫出路徑圖的交點。

2.對第 n 個遲到者，由「分段法則Ⅱ」得到的 p 值，若點 G_{p+1} 坐標為 (x_{p+1},y_{p+1})，則

第 n 位遲到者所要插號的位置，為直線 $y=r(n-p)+y_{p+1}$ 與路徑圖的交點。

(三)遲到者新的看診序號：

對第n個遲到者而言，由「分段法則Ⅱ」所得到的p值，

若點G_{p+1}的坐標爲(x_{p+1}, y_{p+1})，

a_0爲第一個遲到者到診時準時者已看診的人數，

則第n個遲到者新的看診序號爲($(r+1)n - rp + y_{P+1} + a_0$)

(四)第n個遲到者需等候的人數：

1.等待數列$\langle A_n \rangle$的一般式：$A_i = \left[(i+r-1)(\frac{r+1}{r}) \right]$

$= (r+1)(a+1) + b$，

其中 $i-1 = ra+b, i \in N, a,b \in Z, 0 \le b \le r-1,$

2.第 1 個到第n個遲到者在一個獨立的插號作業內，

點$G'_n(x'_n, y'_n)$，若$y'_n \ne 0$，$i = r(n-1) - y'_n + 1$，則第n個遲到者需等候人數爲A_i

3.對第n個遲到者而言，由(分段法則Ⅱ)，得到一個p值，

點$G_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1})$，點$G'_n(x'_n, y'_n)$，若$y'_n - y_{p+1} \ne 0$，$i = r(n-p-1) - (y'_n - y_{p+1}) + 1$，

則第n個遲到者需等候的人數爲A_i

4.由等待數列$\langle A_n \rangle$及最短路徑圖求第n個遲到者需等候人數的步驟:

(步驟一)將最短路徑圖畫出，對第n個遲到者，利用(排除法則Ⅱ)，找到p值

(步驟二)過點$G_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1})$畫出斜率爲 1 的直線$L_{p+1}$

(步驟三)(1)當$y'_n \ne y_{p+1}$時，在直線L_{p+1}的右下方，y'_n所可能的值中，由最大值

$y = y_{p+1} + r(n-p-1)$當作第一條線開始依序往下數，若第n個遲到者的

位移$\overrightarrow{G_nG'_n}$位於排序爲i的水平線上，則第n個遲到者需等候人數爲等候

數列的第i項= A_i

(2)當$y'_n = y_{p+1}$，第n個遲到者需等候的人數爲$(r+1)(n-p)-1$

三、獨立插號作業中，到診情形的方法數：

(一)插號規則 $r=1$：在一個有 k 個遲到者的獨立插號作業中，到診的情形方法數，也就是路徑圖上一路領先的可行解方法數，爲 Catalan 數列的第 k 項= $\frac{1}{k+1}C_k^{2k}$

(二)插號規則 $r \in N$

1.設 r 爲正整數，n 爲 r 的倍數，現有 $n \times n$ 的正方形方格，由左下角的點走到右上角的點，規定向右每次能走的步數要爲 r 的倍數，向上可任意走，但不可以經過左下角到右上角所連成對角線的左上方區域，則其最短路徑的方法數爲 $\frac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$

2.一個有 k 個遲到者的獨立插號作業，在座標圖上遲到者向右 r 單位，準時者向上 1 單位長，其路徑圖在一個 $rk \times rk$ 的方格內，其到診的可能情形方法數，即爲路線圖中，由左下角的點走到右上角的點，且不出現在方格左下角到右上角所連成對角線之左上方區域的可行解方法數，爲 $\frac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$,其中$k \in N, n = rk$

3.我們稱 $t_k = \frac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$,其中$k \in N, n = rk$, 爲 T 數列；當 $r=1$，T 數列即爲 Catalan 數列。

四、仿照取號碼單方式

(一)若某過號者到診時，現場包含自己共有 i 個遲到者在等待，則此位過號者需等候的人數最多爲 $(r+1)i-1$ ；最少需等待 $(r+1)(i-1)$ 人

(二)取號碼單的方法

1.仿照郵局或銀行取號碼單的模式，每個遲到者在到診時皆需取一張號碼單，準時者則不用。

2.取號碼單的機器除了會列印出總排序的號碼 n，機器上還會顯示目前遲到者等待看診的人數 i

(三)若總排序的號碼爲 n ，機器上顯示目前遲到者等待看診的人數爲 i ，則第 n 位遲到者所需等待的人數最多爲 $(r+1)i-1$，計算遲到者最多需等待人數(下圖黃色區域)：

現場遲到 者候診人數		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
插號規則	r=1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	r=2	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
	r=3	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39
	r=4	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49
	r=5	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59

(四)利用等候理論，我們可以分別求出，當醫生看診一位病人平均花費時間分別爲 3，5，6，10 分鐘時，由號碼單機器上顯示目前遲到者等待看診的人數，找出遲到者自己需等候最多人次時，等候超過 30，45，60 分鐘的機率。比較這些數據，醫院可以由此作爲插號規則制定時的參考，讓遲到者之等候情形能合情合理。

陸、討論

一、我們已找出並證明：插號規則為 r 號時，一個有 k 個遲到者的獨立插號作業，其到診的可能情形方法數為 $\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$, 其中 $k \in N, n = rk$, 在過程中，我們將 Catalan 數列的條件改變，將一路領先的走法，改為向右走 r 單位長，向上走 1 單位長，得到在 $n \times n$ 的方格中，一路領先的方法數為 $\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$, 其中 $k \in N, n = rk$ ，是否可求：在 $n \times n$ 的方格中，當 a,b 為正整數時，向右走 a 單位長，向上走 b 單位長，一路領先的方法數。

二、是否可引入時間的因素，從到診的時間上來考慮過號看診需等待的人數及相關問題。

柒、結論

一、因為過號看診的經驗，讓我們開啓了這個問題的研究，首先我們利用 ⊗ 及 O 代表遲到者和準時者，由繪圖中做歸納，並運用 Excel 軟體，驗證我們的推論，然後加以證明。得到「分段法則 I 」後，我們可以找出過號者所在的獨立插號作業。

二、課堂上，排列組合單元裡，方格走最短路徑的題目，給了我們另一個思考的方向。我們試著把遲到與準時這二件事，換成路徑圖裡向右和向上的向量，從這些路徑圖，不但驗證了我們之前所歸納的結論，而且更直觀的導出一些結果及看出這個主題和一路領先題型的關連。

三、在研究最短路徑的過程中，我們為了導出：當插號規則為延後 r 號時，到診的情形方法數，而碰到 Catalan 數列的範疇，但是到診的路徑中，向右走的單位長不再只是 Catalan 數列中向右 1 單位，而是 r 單位長， $r \in N$ ，因此我們將方格一路領先的走法加以變化，導出一路領先的方法數 $\dfrac{C_n^{n+\frac{n}{r}}}{n+1}$, 其中 $k \in N, n = rk,$ ，並加以證明，我們稱為 T 數列，當 $r = 1$ 時，T 數列即為 Catalan 數列。

四、我們發現如果醫院可以仿照郵局或銀行，為遲到者設立號碼單機器，遲到者便可以預估自己最多需等候多少人，不至於毫無心理準備的等下去，不知道還要等多久。

五、利用等候理論，針對遲到者需等待的時間適當與否，我們計算出不同情形下等候時間的機率，可以作為醫院訂定插號規則的參考。從這個研究中可以發現，原來每天在醫院都要發生的問題，有這麼多的數學道理，真是生活處處是數學啊！

捌、參考資料

一、《高級中學數學課本第 1、4 冊》
二、潘承洞、潘承彪。《簡明數論》。台北：九章出版社。(民 91)
三、王文中。《Excel 於資料分析與統計學上的應用》。台北：博碩文化。(民 86)
四、林宏論。《Excel 應用大全-函數應用與實作》。台北：博碩文化。(民 86)
五、Richard A. Brualdi:Introductory Combinatorics,Prentice Hall,(1992)
六、http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number
七、http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html
八、http://www.libertytimes.com.tw/2007/new/may/13/today-o4.htm
九、http://en.wikipedia.org/wiki/Queueing_theory
十、http://episte.math.ntu.edu.tw/applications/ap_poisson/index.html

【評語】040406

「過號看診等候問題」是個具生活化的課題，作者群將遲到者到診情形轉化成方格上最短路徑問題，甚至引進 Catalan 數的概念，確實具有創意。

然而，有關最短路徑，或計算某段時間內到診的機率課題的討論結果，似與如何縮短過號者等待時程之策略間，並無明顯的關連性。

生活化的課題通常需要有效的策略，因此除上述關連性的探討外，建議作者群可再就準時報到者與遲到者各自等候看診時程間之關連性進行研究，或許可對醫療等相關機構如何排程，給予較佳的建議。