

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040405

千「迴」百轉的遞迴圖形

學校名稱：國立彰化高級中學

作者： 高一 胡士麒 高一 黃顥毅 高一 賴璟霈 高一 蕭博文	指導老師： 蔡其南
---	--------------

關鍵詞：遞迴、不動點、函數迭代

千「迴」百轉的遞迴圖形

摘要

在遞迴式 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$ 中簡單的代入幾個值，發現有九個一循環的現象。在一番巧思之下，我們先證明：函數 $f_1(x)$ 分別為 1 及 -1 、 $f_2(x)=x$ ，且 $f_{n+2}(x)=|f_{n+1}(x)|-f_n(x)$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ ， $f_5(x)$ 與 $f_6(x)$ 圖形對稱於 $x=\frac{1}{2}$ ，進一步證得遞迴式循環，再將初始值伸縮至 a_1, a_2 為任意實數值。解法固然令人拍案叫絕，但令我們深深著迷，決定投入大量心血在此研究的原因，乃是遞迴式 $a_{n+2}=\beta|a_{n+1}|-a_n$ ，當 $0 < \beta < 1$ 時，點 (a_n, a_{n+1}) 構成遞迴圖形的種種現象。

我們大量使用了函數及圖形分析的方法，定義函數 $f_\beta(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta, \beta|\sin\theta| - \cos\theta)$ ，發現 $f_\beta^{(n)}$ 皆為 ①連續函數；②一對一；③ $(\cos\theta, \sin\theta)$ 逆時針旋轉時 $f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ 同樣逆時針旋轉。藉由上述的性質推得遞迴圖形 ①在角度上稠密；②形狀與初始值無關；③初始值的改變產生相似的遞迴圖形。

在研究過程中，發現 $\beta=0.86$ 的遞迴圖形有別於其他 β 值，有待未來，我們四人能一窺遞迴圖形的終極密碼。

壹、研究動機

數學課的時候，老師介紹一個遞迴的題目，題目是來自花蓮區九十五年學科能力競賽：數列 $a_1=2, a_2=3, a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$ 的第 2006 項為何？我們從來沒看過絕對值和遞迴式結合在一起，經過謹慎小心的嘗試後，赫然發現數列為九個一循環，意即： $a_{n+9}=a_n, \forall n \in \mathbf{N}$ 。雖然稍微測試幾個項之後便能知道有循環，但是這個遞迴式為何會循環？就是我們探究的目標！再者，將原題改成 $a_{n+2}=\beta \times |a_{n+1}|-a_n, \beta \neq 1$ 時會循環嗎？繪製點 (a_n, a_{n+1}) 形成了奇妙的遞迴圖形，讓我們來一窺究竟吧！

貳、研究目的

- 一、討論 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 的循環性。
- 二、分析 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 式的遞迴圖形。
- 三、研究函數 $f_\beta^{(n)}$ 的性質。
- 四、 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 遞迴圖形的形成。

參、研究設備及器材

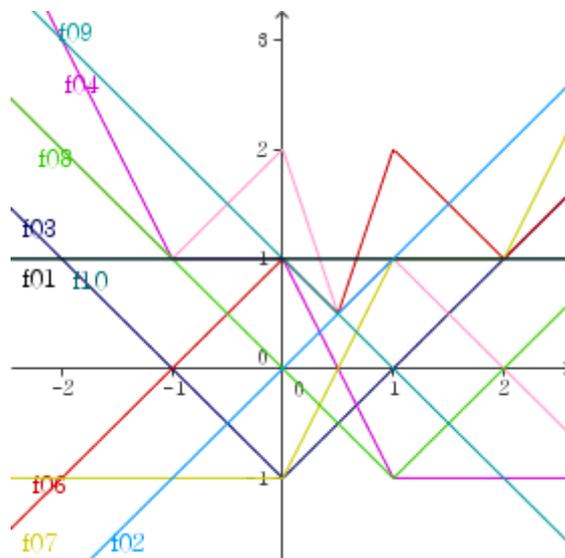
- 一、文房四寶（筆、紙、尺、立可白）
- 二、電腦軟體：Word、Excel、Geogebra、Geometer's Sketchpad
- 三、手提電腦×2

肆、研究方法及過程

一、討論 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 的循環性

用繁雜的討論方法可以證得 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 的循環性，但是卻喪失了研究的價值！所以我們決定尋找最簡便而直觀的方法。

先來看 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = x$ 時，令函數 $f_1(x) = 1$ 、 $f_2(x) = x$ ，且 $f_{n+2}(x) = |f_{n+1}(x)| - f_n(x)$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ 考慮絕對值函數圖形如下： $y = f_n(x)$ 與 $y = f_{11-n}(x)$ ， $1 \leq n \leq 5$ 對稱於 $x = \frac{1}{2}$ 。



(一)循環性的證明 先在初始值 $a_1 = \pm 1, a_2 = x \in \mathbf{R}$ 來證明 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 的循環，再伸縮變換推廣至任意初始值，可以避免冗長的分類討論證明。

定理一 若 $x \in \mathbf{R}$ ，函數 $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$ ，且 $f_{n+2}(x) = |f_{n+1}(x)| - f_n(x), \forall n \in \mathbf{N}$

則(1) $f_5(1-x) = f_6(x)$ 。(2) $f_n(1-x) = f_{11-n}(x), 1 \leq n \leq 5$ 。(3) $f_{n+9}(x) = f_n(x), n \in \mathbf{N}$

證明 (1) $f_3(x) = |x| - 1, f_4(x) = ||x| - 1| - x, f_5(x) = |||x| - 1| - x| - (|x| - 1)$

$$f_6(x) = |||x| - 1| - x| - |x| + 1| - ||x| - 1| + x$$

$$f_5(x) = |||x| - 1| - x| - |x| + 1| = \begin{cases} -x+2 & x \geq 1 \\ x & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ -3x+2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x+2 & -1 \leq x < 0 \\ -x & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f_5(1-x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ -x+1 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 3x-1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -x+3 & 1 < x \leq 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases}$$

$$f_6(x) = |||x| - 1| - x| - |x| + 1| - ||x| - 1| + x = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ -x+1 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 3x-1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -x+3 & 1 < x \leq 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \therefore f_5(1-x) = f_6(x)$$

$$(2) f_4(x) = |f_5(x)| - f_6(x) \Rightarrow f_4(1-x) = |f_5(1-x)| - f_6(1-x) = |f_6(x)| - f_5(x) = f_7(x)$$

$$f_3(x) = |f_4(x)| - f_5(x) \Rightarrow f_3(1-x) = |f_4(1-x)| - f_5(1-x) = |f_7(x)| - f_6(x) = f_8(x)$$

$$f_2(x) = |f_3(x)| - f_4(x) \Rightarrow f_2(1-x) = |f_3(1-x)| - f_4(1-x) = |f_8(x)| - f_7(x) = f_9(x)$$

$$f_1(x) = |f_2(x)| - f_3(x) \Rightarrow f_1(1-x) = |f_2(1-x)| - f_3(1-x) = |f_9(x)| - f_8(x) = f_{10}(x)$$

$$(3) \begin{cases} f_{10}(x) = f_1(x) \\ f_{11}(x) = |f_{10}(x)| - f_9(x) = 1 - (1-x) = x = f_2(x) \end{cases} \therefore \text{由數學歸納法易證 } f_{n+9}(x) = f_n(x), n \in \mathbf{N}$$

定理二 若 $x \in \mathbf{R}$ ，函數 $f_1(x) = -1$ 、 $f_2(x) = x$ ，且 $f_{n+2}(x) = |f_{n+1}(x)| - f_n(x)$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$

則(1) $f_5(1-x) = f_6(x)$ 。(2) $f_n(1-x) = f_{11-n}(x)$ ， $1 \leq n \leq 5$ 。(3) $f_{n+9}(x) = f_n(x)$ ， $n \in \mathbf{N}$

證明 (1) $f_3(x) = |x| + 1$ 、 $f_4(x) = ||x| + 1| - x$ 、 $f_5(x) = |||x| + 1| - x| - (|x| + 1)$

$$\cdot f_6(x) = ||||x| + 1| - x| - |x| - 1| - ||x| + 1| + x$$

分範圍討論 $f_5(x)$ ，得 $f_5(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = -x \Rightarrow f_5(1-x) = x - 1$

$$f_6(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases} = x - 1 \quad \therefore f_5(1-x) = f_6(x)$$

(2) $f_4(x) = |f_3(x)| - f_2(x) \Rightarrow f_4(1-x) = |f_3(1-x)| - f_2(1-x) = |f_6(x)| - f_5(x) = f_7(x)$

$f_3(x) = |f_4(x)| - f_5(x) \Rightarrow f_3(1-x) = |f_4(1-x)| - f_5(1-x) = |f_7(x)| - f_6(x) = f_8(x)$

$f_2(x) = |f_3(x)| - f_4(x) \Rightarrow f_2(1-x) = |f_3(1-x)| - f_4(1-x) = |f_8(x)| - f_7(x) = f_9(x)$

$f_1(x) = |f_2(x)| - f_3(x) \Rightarrow f_1(1-x) = |f_2(1-x)| - f_3(1-x) = |f_9(x)| - f_8(x) = f_{10}(x)$

(3) $\begin{cases} f_{10}(x) = f_1(x) \\ f_{11}(x) = |f_{10}(x)| - f_9(x) = |-1| - (1-x) = x = f_2(x) \end{cases} \quad \therefore \text{由數學歸納法易證 } f_{n+9}(x) = f_n(x), n \in \mathbf{N}$

定理三 給定任意初始值 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ ， $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ ，則 $a_{n+9} = a_n$ ， $n \in \mathbf{N}$

證明 (1)若 $a_1 = 0$ ， $a_2 = p > 0$ ，則

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
0	p	p	0	$-p$	p	$2p$	p	$-p$	0	p

若 $a_1 = 0$ ， $a_2 = p < 0$ ，則

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
0	p	$-p$	$-2p$	$-p$	p	0	$-p$	$-p$	0	p

(2)若 $a_1 > 0$ ，由**定理一**，取 $x = \frac{a_2}{a_1}$ ，則 $a_1 = a_1 f_1(x) = a_1$ 、 $a_2 = a_1 \frac{a_2}{a_1} = a_1 f_2(x)$

$f_{n+2}(x) = |f_{n+1}(x)| - f_n(x)$ ， $n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_1 f_{n+2}(x) = a_1 |f_{n+1}(x)| - a_1 f_n(x) = |a_1 f_{n+1}(x)| - a_1 f_n(x)$

亦滿足 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ ， $\forall n \in \mathbf{N} \quad \therefore a_n = a_1 f_n(x) \Rightarrow a_{n+9} = a_1 f_{n+9}(x) = a_1 f_n(x) = a_n$ ， $n \in \mathbf{N}$

(3)若 $a_1 < 0$ ，由**定理二**，取 $x = \frac{a_2}{-a_1}$ ，則 $a_1 = (-a_1) f_1(x) = a_1$ 、 $a_2 = (-a_1) \frac{a_2}{-a_1} = (-a_1) f_2(x)$

$f_{n+2}(x) = |f_{n+1}(x)| - f_n(x) \Rightarrow (-a_1) f_{n+2}(x) = (-a_1) |f_{n+1}(x)| - (-a_1) f_n(x) = |(-a_1) f_{n+1}(x)| - (-a_1) f_n(x)$

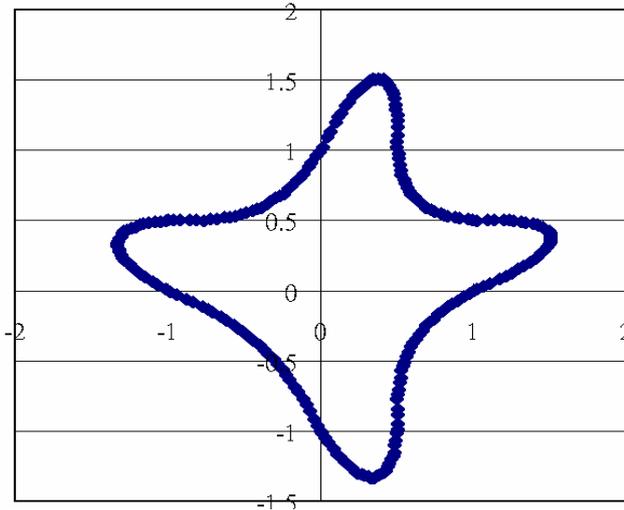
亦滿足 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ ， $\forall n \in \mathbf{N} \quad \therefore a_n = a_1 f_n(x) \Rightarrow a_{n+9} = a_1 f_{n+9}(x) = a_1 f_n(x) = a_n$ ， $n \in \mathbf{N}$

二、分析 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 式的遞迴圖形

(一) $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 式的遞迴圖形形狀

$a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 式中點 (a_n, a_{n+1}) 所描繪出來的圖形，我們稱作「遞迴圖形」。

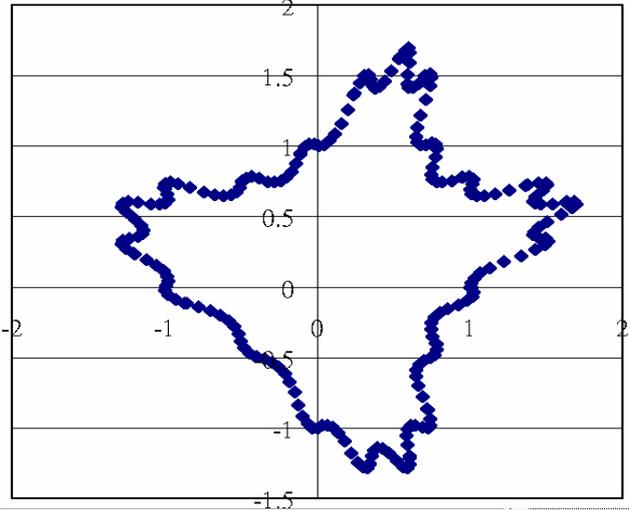
圖(一)、圖(二)、圖(三)、圖(四)分別為 $\beta=0.5$ 、 $\beta=0.7$ 、 $\beta=0.9$ 、 $\beta=0.99$ 且初始值 $(1, 0)$ 時的遞迴圖形密集的構成近似連續封閉曲線。



圖(一)

$$a_{n+2} = 0.5|a_{n+1}| - a_n$$

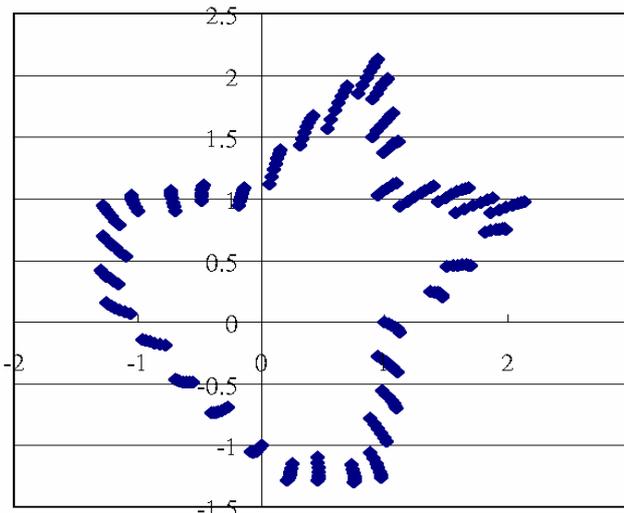
類似四角星形，圖形較圓滑的曲線



圖(二)

$$a_{n+2} = 0.7|a_{n+1}| - a_n$$

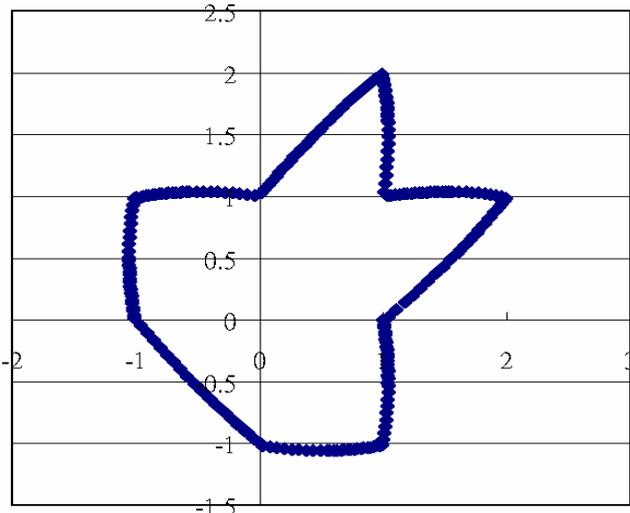
類似四角星形，圖形呈現鋸齒狀



圖(三)

$$a_{n+2} = 0.9|a_{n+1}| - a_n$$

類似四角星形，圖形呈現放射狀



圖(四)

$$a_{n+2} = 0.99|a_{n+1}| - a_n$$

類似四角星形，圖形屬於凹八邊形的剪刀狀

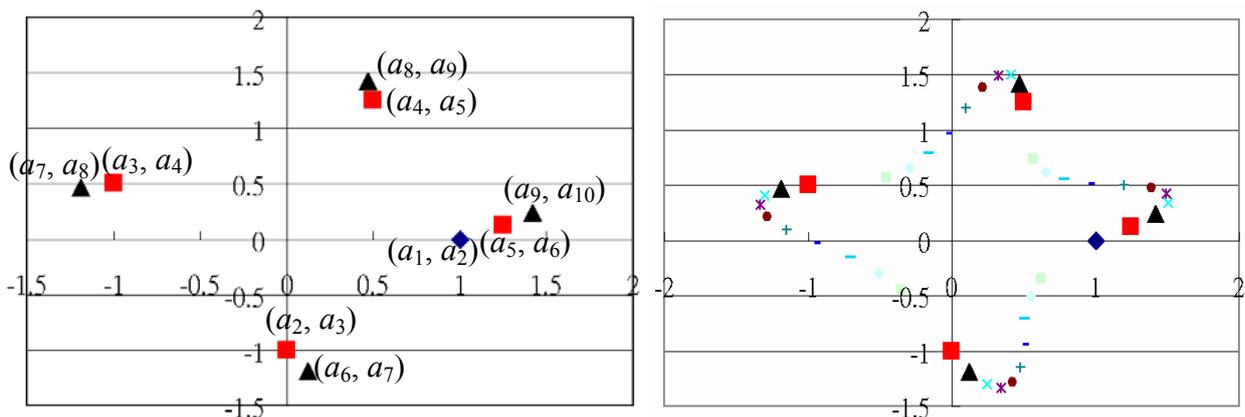
我們比較有興趣的是：為什麼會出現近似連續的封閉圖形？其中 $a_{n+2}=0.9|a_{n+1}|-a_n$ 遞迴圖形呈現放射狀的原因其實是因為資料只跑出 240 個點不夠多，數列點只要增加至 1000 個圖形仍然可以呈現近似連續的封閉形狀。

(二)遞迴圖形中數值的大小與點的順序

以 $a_{n+2}=0.5|a_{n+1}|-a_n, (a_1, a_2)=(1, 0)$ 的遞迴式為例，下表列出 240 筆數列，乍看之下，似乎毫無規律，其值大約在 $-1.4 \sim 1.6$ 之間。

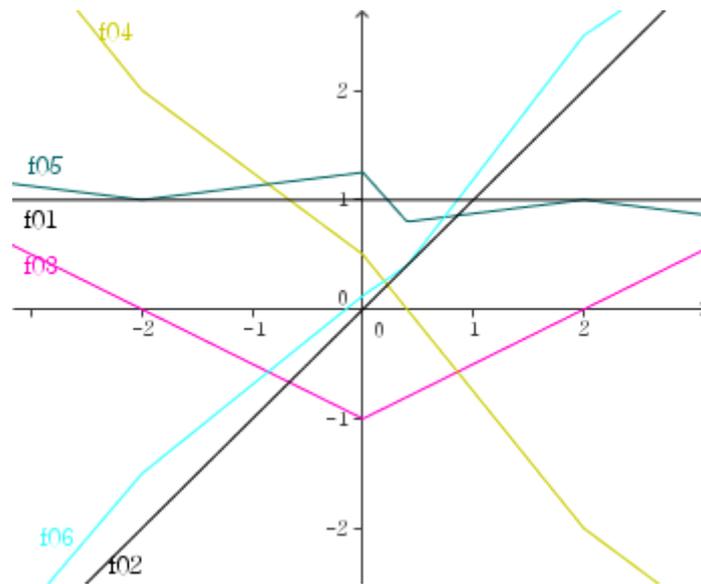
n	a_n														
1	1	31	-0.70639	61	0.373643	91	0.794273	121	-0.98661	151	0.453472	181	0.645741	211	-1.19692
2	0	32	-0.15699	62	1.505785	92	-0.14812	122	-0.00844	152	1.442053	182	-0.30839	212	0.136638
3	-1	33	0.784885	63	0.379249	93	-0.72021	123	0.990832	153	0.267555	183	-0.49155	213	1.265241
4	0.5	34	0.549437	64	-1.31616	94	0.508224	124	0.503858	154	-1.30828	184	0.554164	214	0.495982
5	1.25	35	-0.51017	65	0.278831	95	0.974326	125	-0.7389	155	0.386583	185	0.768628	215	-1.01725
6	0.125	36	-0.29435	66	1.455576	96	-0.02106	126	-0.13441	156	1.501567	186	-0.16985	216	0.012642
7	-1.1875	37	0.657344	67	0.448957	97	-0.9638	127	0.806106	157	0.364201	187	-0.6837	217	1.023571
8	0.46875	38	0.623025	68	-1.2311	98	0.502959	128	0.537459	158	-1.31947	188	0.511701	218	0.499143
9	1.421875	39	-0.34583	69	0.166592	99	1.215275	129	-0.53738	159	0.295533	189	0.939554	219	-0.774
10	0.242188	40	-0.45011	70	1.314393	100	0.104679	130	-0.26877	160	1.467233	190	-0.04192	220	-0.11214
11	-1.30078	41	0.570886	71	0.490605	101	-1.16294	131	0.671762	161	0.438084	191	-0.91859	221	0.830071
12	0.408203	42	0.735553	72	-1.06909	102	0.476789	132	0.604652	162	-1.24819	192	0.50122	222	0.527179
13	1.504883	43	-0.20311	73	0.04394	103	1.40133	133	-0.36944	163	0.186012	193	1.169202	223	-0.56648
14	0.344238	44	-0.634	74	1.091061	104	0.223876	134	-0.41993	164	1.341197	194	0.083381	224	-0.24394
15	-1.33276	45	0.520109	75	0.50159	105	-1.28939	135	0.579403	165	0.484587	195	-1.12751	225	0.688451
16	0.322144	46	0.894052	76	-0.84027	106	0.42082	136	0.709636	166	-1.0989	196	0.480375	226	0.588163
17	1.493835	47	-0.07308	77	-0.08146	107	1.499802	137	-0.22459	167	0.064865	197	1.367699	227	-0.39437
18	0.424774	48	-0.85751	78	0.880995	108	0.329081	138	-0.59734	168	1.131336	198	0.203474	228	-0.39098
19	-1.28145	49	0.501838	79	0.521954	109	-1.33526	139	0.523257	169	0.500803	199	-1.26596	229	0.589858
20	0.21595	50	1.10843	80	-0.62002	110	0.338549	140	0.858971	170	-0.88093	200	0.429506	230	0.685908
21	1.389423	51	0.052377	81	-0.21195	111	1.504536	141	-0.09377	171	-0.06034	201	1.480715	231	-0.2469
22	0.478762	52	-1.08224	82	0.72599	112	0.413719	142	-0.81209	172	0.911103	202	0.310851	232	-0.56246
23	-1.15004	53	0.488744	83	0.574941	113	-1.29768	143	0.499814	173	0.515887	203	-1.32529	233	0.528132
24	0.09626	54	1.326613	84	-0.43852	114	0.23512	144	1.061993	174	-0.65316	204	0.351794	234	0.826522
25	1.198172	55	0.174563	85	-0.35568	115	1.415237	145	0.031182	175	-0.18931	205	1.501186	235	-0.11487
26	0.502827	56	-1.23933	86	0.61636	116	0.472499	146	-1.0464	176	0.747813	206	0.398799	236	-0.76909
27	-0.94676	57	0.445103	87	0.663861	117	-1.17899	147	0.492018	177	0.563214	207	-1.30179	237	0.499415
28	-0.02945	58	1.461883	88	-0.28443	118	0.116995	148	1.292411	178	-0.46621	208	0.252094	238	1.018794
29	0.961483	59	0.285839	89	-0.52165	119	1.237485	149	0.154187	179	-0.33011	209	1.427833	239	0.009982
30	0.510188	60	-1.31896	90	0.545253	120	0.501747	150	-1.21532	180	0.631261	210	0.461823	240	-1.0138

而點 (a_n, a_{n+1}) 出現順序為 $(a_1, a_2) \rightarrow (a_2, a_3) \rightarrow (a_3, a_4) \rightarrow (a_4, a_5) \rightarrow (a_5, a_6)$ 順時針方向依次出現，然後跨越 (a_1, a_2) 再繼續出現 (a_6, a_7) ，並且排列在 (a_2, a_3) 旁邊，如此重複下去，4 個一循環順序排列而成。



三、研究函數 $f_{\beta}^{(n)}$ 的性質

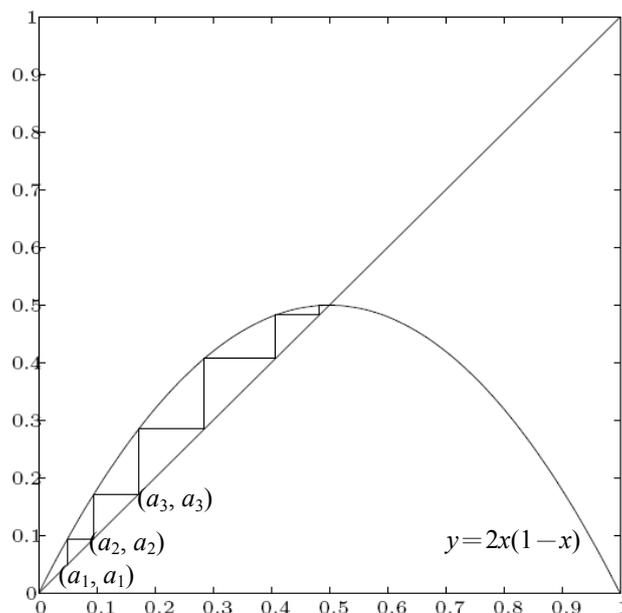
仿照 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$ 的方法來研究 $a_{n+2}=0.5|a_{n+1}|-a_n$ 。令函數 $f_1(x)=1$ 、 $f_2(x)=x$ ，且 $f_{n+2}(x)=0.5|f_{n+1}(x)|-f_n(x)$ 得 $f_3(x)=\frac{1}{2}|x|-1$ 、 $f_4(x)=\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|x|-1|-x$ 、 $f_5(x)=\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|x|-1|-x|-(\frac{1}{2}|x|-1)$ 、
 $f_6(x)=\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|x|-1|-x|-\frac{1}{2}|x|+1|-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|x|-1|+x$ 考慮絕對值函數圖形如下：



我們發現 $f_5(x) \sim f_1(x)$ 且 $f_6(x) \sim f_2(x)$ 無怪乎 $(a_5, a_6) \sim (a_1, a_2)$ 了！但是這不足以證明 $a_{n+2}=0.5|a_{n+1}|-a_n$ 的遞迴圖形4個一循環順序排列而成，所以改變方式，探討函數的迭代。

(一)遞迴數列與函數迭代

一開始爲了研究 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$ ，我們找了許多相關的資料，發現遞迴數列與函數迭代的關係，比如說： $\begin{cases} a_1=x \text{ (任意值)} \\ a_n=2a_{n-1}(1-a_{n-1}), n \geq 2 \end{cases}$ 可以改成 $f(x)=2x(1-x) \Rightarrow a_{n+1}=f^n(x)$ ，而
 且循環性便是去找**週期點**，如下圖 $a_1=0.05$ ， $a_2=0.095$ ， $a_3=0.17195$ ， $a_4=0.284766395$ ，……近 $\frac{1}{2}$ ，而 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ ，所以 $a_n=\frac{1}{2}$ ， $n \geq 10$ ，這便是圖形分析法。



沒有任何資料顯示二階遞迴數列如何寫成函數迭代，於是我們猜測 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 可改成 $f(f(x)) = |f(x)| - x$ ，其中 $a_1 = x, a_2 = f(x), a_3 = f(f(x))$ ，但是 $a_1 = 1, a_2 = 0 \Rightarrow 1, 0, -1, 1, 2, \dots$ 則 $f(1) = 0$ 會造成 $f^{(4)}(1) = f(f^3(1)) = f(1) = 2$ ，一對多不是函數，所以 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 不可改成 $f(f(x)) = |f(x)| - x$ 。

經過一番嘗試並配合圖形分析法的概念，將遞迴式 $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$ 改成 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 定義為 $f(a_1, a_2) = (a_2, |a_2| - a_1)$ ，於是 $(a_{n+1}, a_{n+2}) = f^{(n)}(x)$ ，二階遞迴數列便寫成了函數迭代。

(二) 定義函數 f_β 與數列點 $P_n^\beta = (a_n, a_{n+1})$

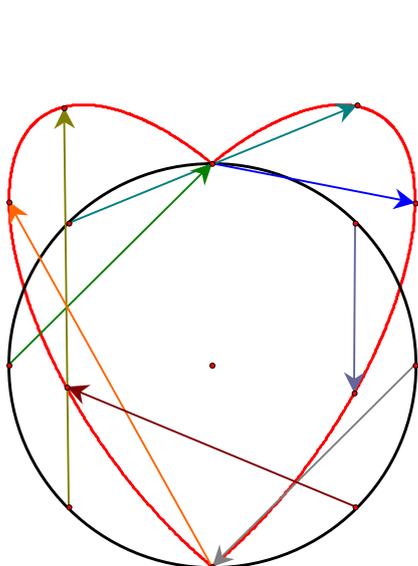
爲了研究的便利性，我們定義：

- ① 遞迴式 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 的對應函數 $f_\beta(a_1, a_2) = (a_2, \beta|a_2| - a_1)$ ，且 $f_\beta^{(n)}(a_1, a_2) = (a_{n+1}, a_{n+2})$ 。
- ② 點 $P_n^\beta = (a_n, a_{n+1})$ ，其中 a_n 滿足 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 。初始值即爲點 $P_1^\beta = (a_1, a_2)$ 。
- ③ $P_m^\beta - P_n^\beta - P_k^\beta$ 表示 $\overline{OP_n^\beta}$ 爲 $\angle P_m^\beta O P_k^\beta$ 的角分線，其中 O 爲原點。

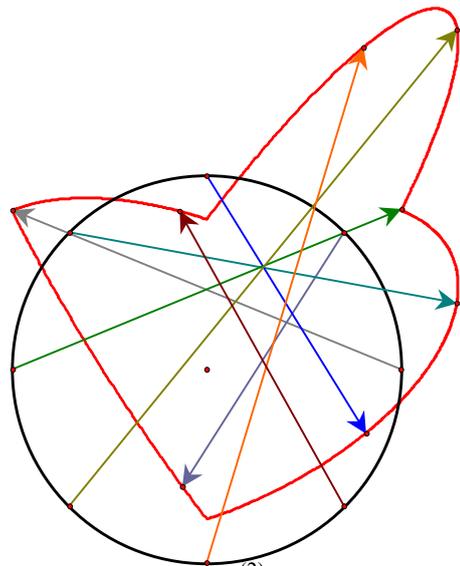
(三) 函數 $f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ 的性質

由於對任意 (a_1, a_2) 皆可找到 $\theta \in \mathbf{R}, r > 0$ ，使得 $(a_1, a_2) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ ，於是 $(a_{n+1}, a_{n+2}) = r f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ ，所以研究初始點 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 便可伸縮至任意初始值 (a_1, a_2) ，並且以 θ 爲變數探討 $f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ 的性質有利於我們對 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 遞迴圖形的了解，所以定義 $\Gamma = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$ ，以下探討 $f_\beta^{(n)}: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^2$ 的性質。

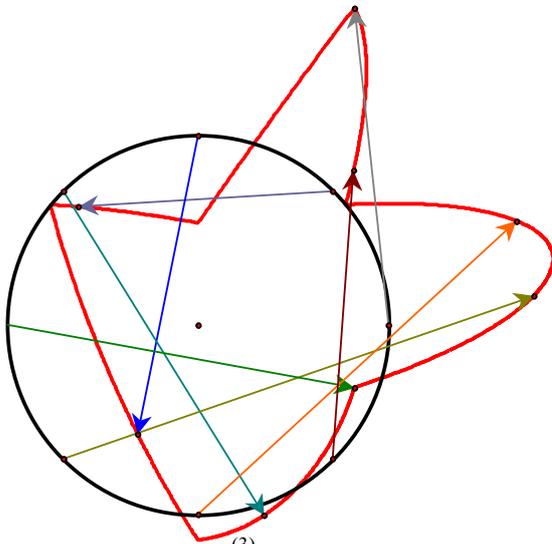
觀察下圖(五)、(六)、(七)、(八)分別爲 $f_\beta, f_\beta^{(2)}, f_\beta^{(3)}, f_\beta^{(4)}$ 的圖形，「 \longrightarrow 」號爲單位圓上取8個點分別對應到 $f_\beta^{(n)}$ 點的示意圖。



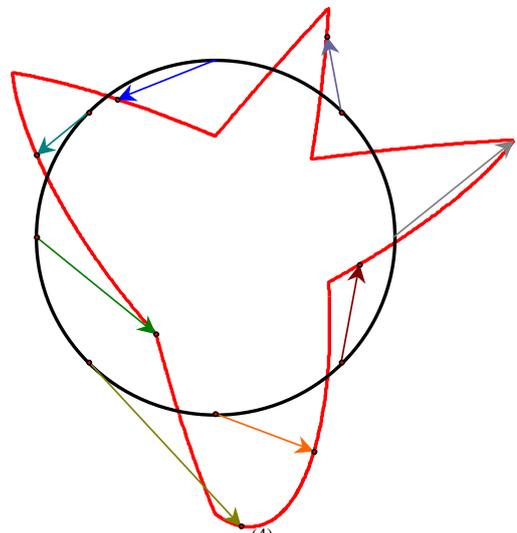
圖(五) f_β



圖(六) $f_\beta^{(2)}$



圖(七) $f_\beta^{(3)}$



圖(八) $f_\beta^{(4)}$

事實上圖(五) $f_\beta(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta, \beta|\sin\theta| - \cos\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sin\theta \\ y = \beta|\sin\theta| - \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sin\theta \\ y - \beta|x| = -\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \sin^2\theta \\ (y - \beta|x|)^2 = \cos^2\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y - \beta|x|)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ 時 } & x^2 + (y - \beta x)^2 = 1 \text{ 為橢圓方程式，令為 } \Gamma_+ \\ x < 0 \text{ 時 } & x^2 + (y + \beta x)^2 = 1 \text{ 為橢圓方程式，令為 } \Gamma_- \end{cases} \quad \text{且 } \Gamma_+ \text{ 與 } \Gamma_- \text{ 對稱於 } y \text{ 軸。}$$

以上各圖中單位圓 Γ 上的點一一對應 $f_\beta^{(n)}$ 圖上的點，我們證明如下三個定理：

定理四 $f_\beta^{(n)} : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^2$ 為連續函數。

證明 $f_\beta(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta, \beta|\sin\theta| - \cos\theta)$ 顯然為連續函數；

$f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta) = \underbrace{f_\beta \circ f_\beta \circ \dots \circ f_\beta}_{n \text{ 個 } f_\beta}(\cos\theta, \sin\theta)$ 合成，故 $f_\beta^{(n)} : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^2$ 為連續函數。

定理五 若 $f_{\beta}^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta) = f_{\beta}^{(n)}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ，則 $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ 。

證明 (1)先證：若 $f_{\beta}(a, b) = f_{\beta}(c, d)$ 時， $(a, b) = (c, d)$ 。

$$f_{\beta}(a, b) = f_{\beta}(c, d) \Rightarrow (b, \beta|b| - a) = (d, \beta|d| - c) \Rightarrow \begin{cases} b = d \\ \beta|b| - a = \beta|d| - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (c, d)$$

(2)以數學歸納法證明原命題。

① $n=1$ 時， $f_{\beta}(\cos\theta, \sin\theta) = f_{\beta}(\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow (\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ 。

② 設 $n=k$ 時， $f_{\beta}^{(k)}(\cos\theta, \sin\theta) = f_{\beta}^{(k)}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ，則 $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ ；

則 $n=k+1$ 時， $f_{\beta}^{(k+1)}(\cos\theta, \sin\theta) = f_{\beta}^{(k+1)}(\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow f_{\beta}(f_{\beta}^{(k)}(\cos\theta, \sin\theta)) = f_{\beta}(f_{\beta}^{(k)}(\cos\varphi, \sin\varphi))$
 $\Rightarrow f_{\beta}^{(k)}(\cos\theta, \sin\theta) = f_{\beta}^{(k)}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ，則 $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ 。

③ 由數學歸納法， $\forall n \in \mathbf{N}$ 原命題成立

定理六 若 $P_{n+1}^{\beta} = (a_{n+1}, a_{n+2}) = f_{\beta}^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ ，則 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ 值在 $\theta \in (t\pi, (t+1)\pi)$ 遞增， $t \in \mathbf{Z}$ 。

證明 ① $n=1$ 時， $P_2^{\beta} = (a_2, a_3) = f_{\beta}(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta, \beta|\sin\theta| - \cos\theta)$

$$\Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = \frac{\beta|\sin\theta| - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\beta|\sin\theta|}{\sin\theta} - \cot\theta = \begin{cases} \beta - \cot\theta & \theta \text{ 在第一、二象限} \\ -\beta - \cot\theta & \theta \text{ 在第三、四象限} \end{cases}$$

$\therefore \cot\theta$ 在 $\theta \in (t\pi, (t+1)\pi)$ 遞減， $t \in \mathbf{Z}$ $\therefore \frac{a_3}{a_2}$ 值在 $\theta \in (t\pi, (t+1)\pi)$ 遞增， $t \in \mathbf{Z}$ 。

② 設 $n=k$ 時， $P_{k+1}^{\beta} = (a_{k+1}, a_{k+2}) = f_{\beta}^{(k)}(\cos\theta, \sin\theta)$ ，則 $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}$ 值在 $\theta \in (t\pi, (t+1)\pi)$ 遞增， $t \in \mathbf{Z}$ 。

則 $n=k+1$ 時，

$$P_{k+2}^{\beta} = (a_{k+2}, a_{k+3}) = f_{\beta}^{(k+1)}(\cos\theta, \sin\theta) = (a_{k+2}, \beta|a_{k+2}| - a_{k+1})$$

$$\frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} = \frac{\beta|a_{k+2}| - a_{k+1}}{a_{k+2}} = \begin{cases} \beta - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} & (a_{k+1}, a_{k+2}) \text{ 在第一、二象限} \\ -\beta - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} & (a_{k+1}, a_{k+2}) \text{ 在第三、四象限} \end{cases}$$

$\therefore \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}$ 值在 $\theta \in (t\pi, (t+1)\pi)$ 遞增， $t \in \mathbf{Z}$ $\therefore \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}}$ 值在 $\theta \in (t\pi, (t+1)\pi)$ 遞增， $t \in \mathbf{Z}$ 。

定理七 若 $P_{n+1}^\beta = (a_{n+1}, a_{n+2}) = f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ 且 $P_1^\beta = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, $P'_{n+1}^\beta = f_\beta^{(n)}(\cos\theta, \sin\theta)$ 且 $P'_1^\beta = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$, 且 $360^\circ > \theta_1 > \theta_2 \geq 0^\circ$, 則 P_{n+1}^β 必在 P'_1^β 的逆時針方向。

證明 $\because \theta_1 > \theta_2$, 故 P_1^β 必在 P'_1^β 的逆時針方向, 此時考慮 $n=1$

① P_2^β 和 P'_2^β 的 $\frac{x}{y}$ 值(cot)存在, 此時利用**定理六**證明 ① 即可說明敘述成立。

② P_2^β 和 P'_2^β 的 $\frac{x}{y}$ 值(cot)皆不存在, 此時 P_2^β 和 P'_2^β 只可能在 $r(1, 0)$ 或 $r(-1, 0)$ 處, 可推知 P_1^β 和 P'_1^β 為 $r(\beta, 1)$ 或 $r(\beta, -1)$, 又 $\theta_1 > \theta_2$, 故 $P_1^\beta = r(\beta, -1)$, $P'_1^\beta = r(\beta, 1)$, $P_2^\beta = r(-1, 0)$, $P'_2^\beta = r(1, 0)$, 可知敘述成立。

③ P_2^β 和 P'_2^β 恰有一個 $\frac{x}{y}$ 值(cot)不存在,

(i) P_2^β 的 $\frac{x}{y}$ 值不存在, 此時因為 $\theta_1 > 0 \Rightarrow P_2^\beta = r(-1, 0) \Rightarrow P_1^\beta = r(\beta, -1)$

令 $P'_1^\beta = r(a, b)$, $P'_2^\beta = r(b, \beta|b| - a)$

1° P'_1^β 在第三象限, 即 $0 > b > -1$, $-1 < a < \beta \Rightarrow -1 < b < 0$, $\beta|b| - a < 0$

P'_2^β 在第二象限 \Rightarrow 敘述成立。

2° P'_1^β 在第二象限, 即 $0 < b < 1$, $-1 < a < 0 \Rightarrow \beta|b| - a > 0$

P'_2^β 在第一象限 \Rightarrow 敘述成立。

(ii) P'_2^β 的 $\frac{x}{y}$ 值不存在, 此時仿照(i), 即可證明敘述成立。

綜合①②③可知: $n=1$ 時, 敘述亦成立, 即 $f_\beta(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ 必在 $f_\beta(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ 之逆時針方向。

令 $n=k$ 時, 敘述成立, 即 $P_{k+1}^\beta = f_\beta^{(k)}(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ 在 $P'_{k+1}^\beta = f_\beta^{(k)}(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ 之逆時針方向。

令 P_{k+1}^β 與 x 軸正向夾角 θ_{k1} 與 P'_{k+1}^β 與 x 軸正向夾角 θ_{k2}

則當 $n=k+1$ 時, $P_{k+2}^\beta = f_\beta^{(k+1)}(\cos\theta_1, \sin\theta_1) = f_\beta(f_\beta^{(k)}(\cos\theta_1, \sin\theta_1)) = f_\beta(r(\cos\theta_{k1}, \sin\theta_{k1}))$

$P'_{k+2}^\beta = f_\beta^{(k+1)}(\cos\theta_2, \sin\theta_2) = f_\beta(f_\beta^{(k)}(\cos\theta_2, \sin\theta_2)) = f_\beta(r(\cos\theta_{k2}, \sin\theta_{k2}))$

又 r 不影響角度, 故敘述依然成立。

根據數學歸納法, 敘述成立。

說明 參考圖(五)、(六)、(七)、(八), 當 n 為定值正整數時,

定理五 證明單位圓 Γ 上的點一對一於 $f_\beta^{(n)}$ 圖上的點, 再由**定理四** 可得 $f_\beta^{(n)}$ 為封閉連續圖形;

定理六、七 表示單位圓 Γ 上的點逆時針旋轉時, 其對應於 $f_\beta^{(n)}$ 圖上的點也是逆時針旋轉。

四、 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 遞迴圖形的形成

(一) 由函數 f_β 產生遞迴圖形

如果選定初始值 $P_1^\beta = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ ，如何由函數 $f_\beta: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^2$ 來產生 $P_n^\beta, n \geq 2$ 呢？

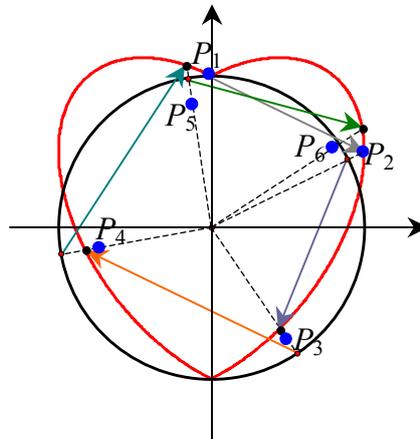
我們再一次利用伸縮的想法：

$$P_2^\beta = (\sin\theta_1, \beta|\sin\theta_1| - \cos\theta_1) = f_\beta(\cos\theta_1, \sin\theta_1), \quad \text{令} \begin{cases} r_2 = |f_\beta(\cos\theta_1, \sin\theta_1)| \\ \theta_2 : f_\beta(\cos\theta_1, \sin\theta_1) \text{與 } x \text{ 軸正向夾角} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_2^\beta = r_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2) \quad \therefore P_3^\beta = r_2 f_\beta(\cos\theta_2, \sin\theta_2), \quad \text{令} \begin{cases} r_3 = |f_\beta(\cos\theta_2, \sin\theta_2)| \\ \theta_3 : f_\beta(\cos\theta_2, \sin\theta_2) \text{與 } x \text{ 軸正向夾角} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_3^\beta = r_2 r_3(\cos\theta_3, \sin\theta_3) \quad \therefore P_4^\beta = r_2 r_3 f_\beta(\cos\theta_3, \sin\theta_3) \dots \dots \dots \text{以此類推。}$$

比如說：初始值 $P_1^{0.5} = (0, 1) \rightarrow P_2^{0.5} = (1, 0.5) \rightarrow P_3^{0.5} = (0.5, -0.75) \rightarrow P_4^{0.5} = (-0.75, -0.125) \rightarrow P_5^{0.5} = (-0.125, 0.8125) \rightarrow P_6^{0.5} = (0.8125, 0.53125) \dots \dots \dots$ ，參考下圖。

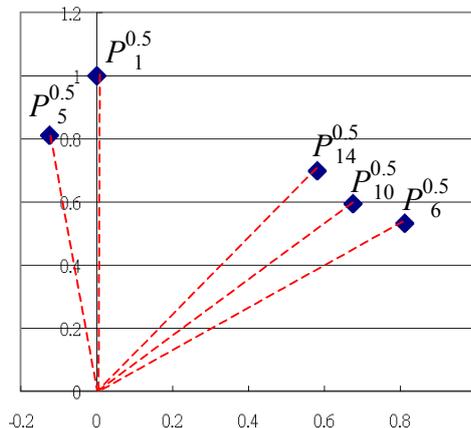


由於單位圓 Γ 上的點一對一於 f_β 圖上的點，且單位圓 Γ 上的點逆時針旋轉時，其對應於 f_β 圖上的點也是逆時針旋轉，可以推論出遞迴圖形點出現的位置。

參考下圖， $P_5^{0.5}$ 與 $P_6^{0.5}$ 為 $P_1^{0.5}$ 的兩個異側點，在**角度上應當保持次序不變**

$$\Rightarrow P_5^{0.5} - P_1^{0.5} - P_6^{0.5} \Rightarrow P_6^{0.5} - P_2^{0.5} - P_7^{0.5} \Rightarrow P_7^{0.5} - P_3^{0.5} - P_8^{0.5} \Rightarrow P_8^{0.5} - P_4^{0.5} - P_9^{0.5} \Rightarrow P_9^{0.5} - P_5^{0.5} - P_{10}^{0.5}$$

$\Rightarrow P_{10}^{0.5} - P_6^{0.5} - P_{11}^{0.5}$ ， $P_{10}^{0.5}$ 落於 $P_5^{0.5}$ 與 $P_6^{0.5}$ 之間，但是 $P_{10}^{0.5}$ 究竟落於 $P_5^{0.5}$ 與 $P_1^{0.5}$ 之間或者是落於 $P_1^{0.5}$ 與 $P_6^{0.5}$ 之間呢？必須實際計算才能得知 $P_1^{0.5} - P_{10}^{0.5} - P_6^{0.5}$ 亦即 $P_5^{0.5} - P_1^{0.5} - P_{10}^{0.5}$ ，再繼續推論得 $P_5^{0.5} - P_{14}^{0.5} - P_{10}^{0.5}$ ，利用這樣的概念得到以下定理。

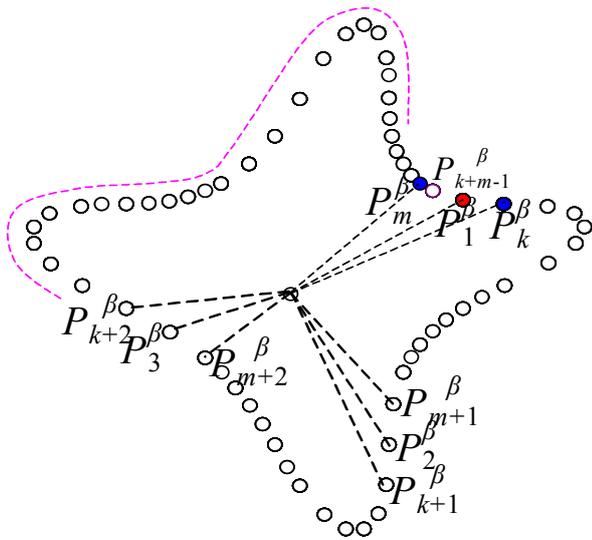


定理八 若初始值 $P_1^\beta = (\cos\theta, \sin\theta)$ 不使 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 產生循環，則 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 的遞迴圖形在角度上必稠密。

證明 假設 P_m^β 與 P_k^β 為 P_1^β 的兩個異側點，如圖，因為單位圓 Γ 上的點一對一於 f_β 圖上的點，且單位圓 Γ 上的點逆時針旋轉時，其對應於 f_β 圖上的點也是逆時針旋轉，

所以 $P_m^\beta - P_1^\beta - P_k^\beta$ 在**角度上應當保持次序不變** $\Rightarrow P_{m+1}^\beta - P_2^\beta - P_{k+1}^\beta \Rightarrow P_{m+2}^\beta - P_3^\beta - P_{k+2}^\beta \Rightarrow \dots$
 $\Rightarrow P_{2m-1}^\beta - P_m^\beta - P_{k+m-1}^\beta \dots \Rightarrow P_{k+m-1}^\beta - P_k^\beta - P_{2k-1}^\beta$

$\therefore P_m^\beta - P_{k+m-1}^\beta - P_k^\beta$ 表示 P_{k+m-1}^β 點的角度落在 P_m^β 與 P_1^β 之間或 P_1^β 與 P_k^β 之間。



① 若 $P_m^\beta - P_{k+m-1}^\beta - P_1^\beta$ ，則接下來只需證明 $P_1^\beta - P_k^\beta$ 間存在一點！

首先， $\forall \theta \in \mathbf{R}$ ， $P_1^\beta = (\cos\theta, \sin\theta)$ 與 P_k^β 夾角必存在最小值 $\alpha \neq 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbf{N}$ ， P_{m+tk-t}^β 與 $P_{m+(t+1)k-(t+1)}^\beta$ 夾角大於或等於 α

因此， $P_{k+m-1}^\beta - P_1^\beta - P_k^\beta \Rightarrow P_{k+m-1}^\beta - P_{m+2k-2}^\beta - P_k^\beta$ ，依此類推：

$P_m^\beta - P_{k+m-1}^\beta - P_{m+2k-2}^\beta - P_{m+3k-3}^\beta - P_{m+4k-4}^\beta - \dots - P_1^\beta - P_k^\beta$

必存在 $t \in \mathbf{N}$ 使得 P_{m+tk-t}^β 跨越 P_1^β ，而造成 $P_1^\beta - P_{m+tk-t}^\beta - P_k^\beta$

② 若 $P_1^\beta - P_{k+m-1}^\beta - P_k^\beta$ ，則仿 ① 作法可得：存在 $t \in \mathbf{N}$ 使得 $P_m^\beta - P_{k+tm-t}^\beta - P_1^\beta$ 。

由於初始值 $P_1^\beta = (\cos\theta, \sin\theta)$ 可任意給定，因此遞迴圖形上的任何一點皆可當作初始值，做同樣遞迴式，便可產生稠密性，所以遞迴圖形在角度上必稠密。

週期點存在與否？目前尚未確定！但是遞迴圖形之所以近似連續的可能原因在於：

① 週期點在 n 足夠大時才產生，那麼遞迴圖形早就被足夠多的點串連起來，循環所造成的空隙就不明顯了。

② 沒有週期點的遞迴式，**定理八**證明了遞迴圖形在角度上的稠密性，圖形當然近似連續。

(二) $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 遞迴圖形與初始值無關

$0 < \beta < 1$ 為定值時，無論選定哪一個初始值 $P_1^\beta = (a_1, a_2)$ ，遞迴圖形皆相似，原因何在？

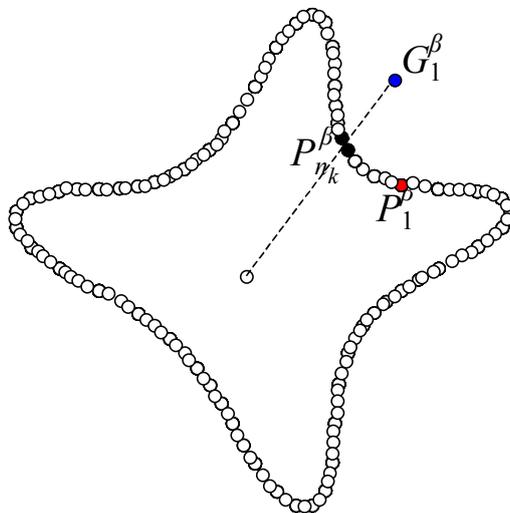
定理九 若初始值 $P_1^\beta = (a_1, a_2)$ 不使 $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 產生循環且令其遞迴圖形為 Γ_β ，則初始值 $G_1^\beta = (a_1', a_2')$ 時， $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 遞迴圖形必與 Γ_β 相似。

證明 由定理八： $a_{n+2} = \beta|a_{n+1}| - a_n$ 遞迴圖形在角度上必稠密，

所以對於 $G_1^\beta = (a_1', a_2')$ 必存在 $P_{n_k}^\beta$ 使得 $r \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k}^\beta = G_1^\beta, r > 0$

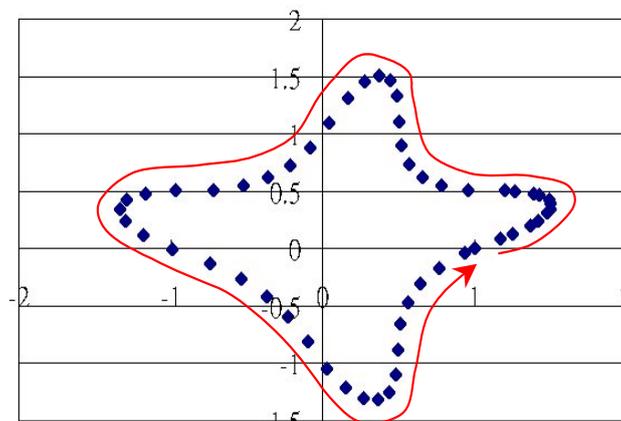
$\forall n_k \in \mathbb{N}$ ，令初始值為 $P_{n_k}^\beta$ ，則其所產生遞迴圖形仍為 Γ_β ，所以初始值 $r \cdot P_{n_k}^\beta$ 所產生遞迴圖形必以原點為中心，將 Γ_β 伸縮 r 倍的圖形 $\Gamma_{\beta'}$ 。

因為 f_β 連續且一對一函數，所以 G_1^β 所產生遞迴圖形為 $\Gamma_{\beta'}$ 。



(三) 子集所構成的遞迴圖形

給定 $P_1^{0.5} = (1, 0)$ ，作 40 項數列點 (a_{4n-3}, a_{4n-2}) ，得圖(九)，它已經是圖(一)的雛形了。



圖(九)

更一般來說，集合 $\{(a_{1+k(n-1)}, a_{2+k(n-1)}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 構成遞迴圖形令為 $\Gamma_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 圖形 Γ_k 必相等。

定理十 遞迴式 $a_{n+2}=\beta|a_{n+1}|-a_n$ ，令 $\{(a_{1+k(n-1)}, a_{2+k(n-1)}) \mid n \in \mathbf{N}\}$ 構成遞迴圖形 Γ_k ，則 $\forall k \in \mathbf{N}$ 圖形 Γ_k 必相等。

證明 $\forall k \in \mathbf{N}$ ， $(a_{1+k(n-1)}, a_{2+k(n-1)}) \in \Gamma_1$ ($a_{n+2}=\beta|a_{n+1}|-a_n$ 的遞迴圖形)，所以 $\Gamma_k \subset \Gamma_1$

由**定理四、五、六、七** $f_\beta^{(k)}$ 與 f_β 的函數特性完全相同，再仿照**定理八**得 $\{f_\beta^{(k(n))}\}$ 的遞迴圖形在角度上必稠密，所以圖形 Γ_k 相等於 Γ_1 。

伍、研究結果與討論

一、若 $x \in \mathbf{R}$ ，函數 $f_1(x)=1$ 、 $f_2(x)=x$ ，且 $f_{n+2}(x)=|f_{n+1}(x)|-f_n(x)$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ ，

則(1) $f_5(1-x)=f_6(x)$ 。(2) $f_n(1-x)=f_{11-n}(x)$ ， $1 \leq n \leq 5$ 。(3) $f_{n+9}(x)=f_n(x)$ ， $n \in \mathbf{N}$ 。

若 $f_1(x)=-1$ 其他條件不變，結果相同。

二、給定任意初始值 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ ，遞迴式 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ ，則 $a_{n+9}=a_n$ ， $n \in \mathbf{N}$

三、 $f_\beta(\cos\theta, \sin\theta)$ 為一連續且一對一函數， θ 角遞增時， $f_\beta(\cos\theta, \sin\theta)$ 與 x 軸正向夾角亦遞增。

四、遞迴式 $a_{n+2}=\beta|a_{n+1}|-a_n$ ， $0 < \beta < 1$ ，在沒有週期點的條件下，點 (a_n, a_{n+1}) 在角度上稠密。

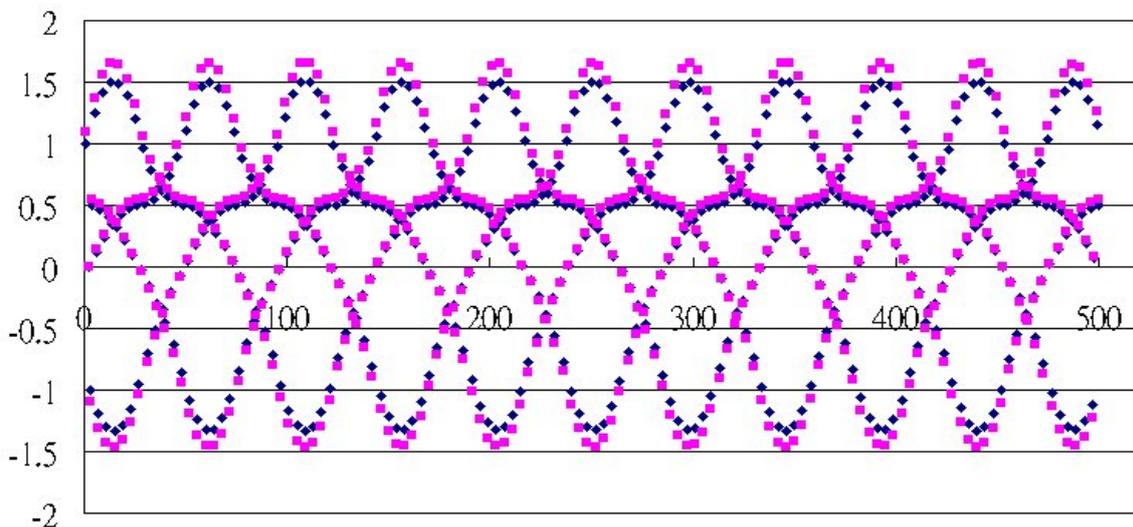
五、 β 固定時，改變初始值不會影響遞迴圖形的形狀，只有伸縮改變而已。

六、遞迴式 $a_{n+2}=\beta|a_{n+1}|-a_n$ 中， $\forall k \in \mathbf{N}$ ， $\{(a_{1+k(n-1)}, a_{2+k(n-1)}) \mid n \in \mathbf{N}\}$ 構成的圖形與原遞迴圖形相同。

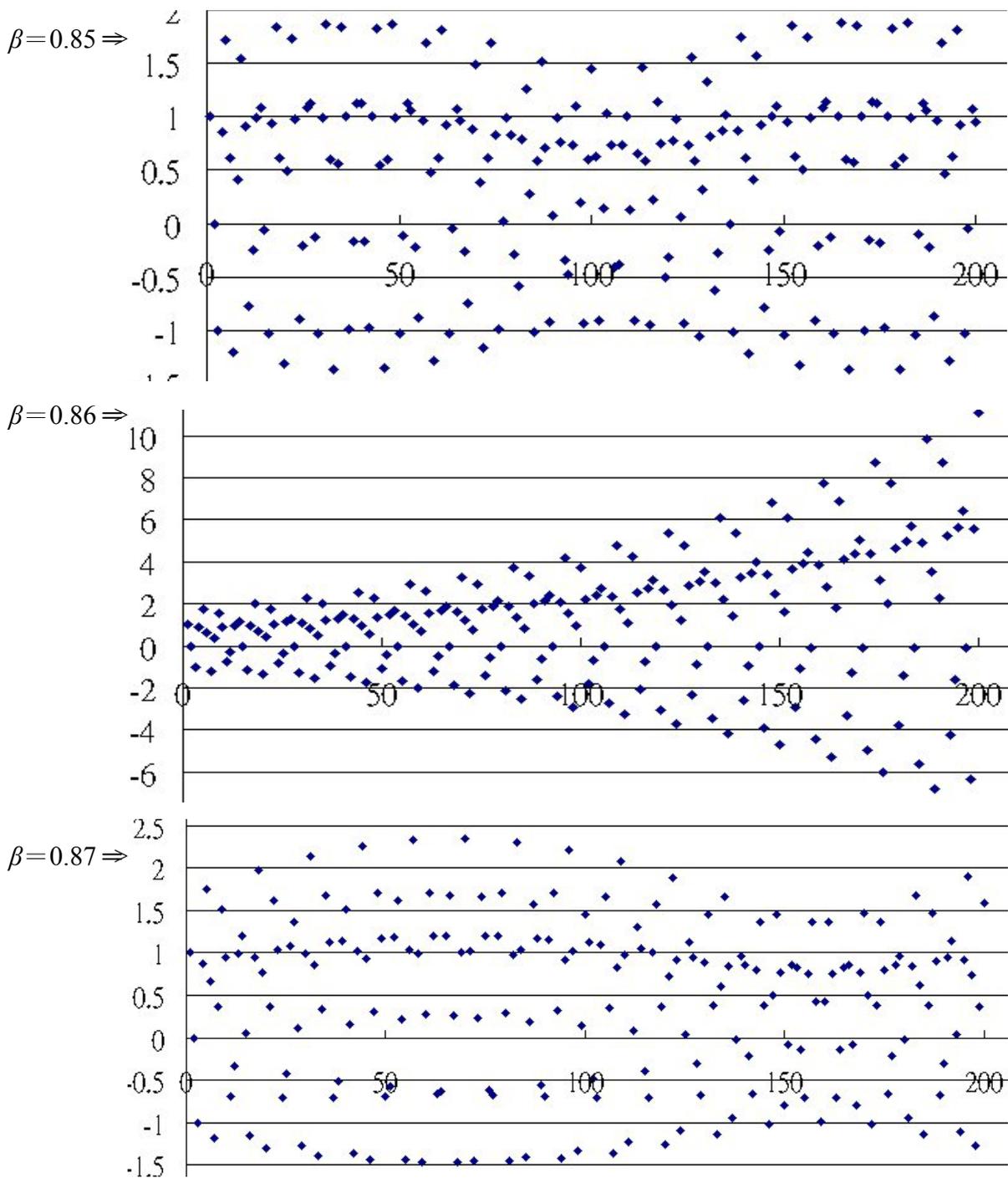
陸、結論與應用

$a_{n+2}=\beta|a_{n+1}|-a_n$ 的遞迴和混沌與函數迭代有點相關，容易出現沒有辦法掌握的現象。

一、取 $\beta=0.5$ ， $a_1=1$ 、 $a_2=0$ 與 $a_1'=1.1$ 、 $a_2'=0$ 兩種初始值作500項數列，得到下圖，可知此遞迴數列並不產生混沌現象。



二、進一步的探討 β 值對此遞迴數列的影響，發現眾多 β 值幾乎產生類似的數列分佈，但是 $\beta = 0.86$ 時，卻有著極大差異的數列值，下圖分別為 $\beta = 0.85$ 、 0.86 與 0.87 的200項數列值。



三、在 $0.7 \leq \beta < 1$ 的時候，所產生的遞迴圖形變化有著極大的差異。幾乎所有的 β 值都有其類似的特性，只有在 $\beta = 0.86$ 時，會形成發散的圖形（參考附錄），因此本文才沒有去考慮 P_n^β 在距離上的稠密性。

以上三點都是值得未來再去加強的研究方向！而本文討論遞迴圖形的方法，都是獨創且經過長時間思考的成果，相信也提供了相關問題的一種研究方法。

柒、參考文獻

高中數學康熙版第一冊第二章、第二冊第二章、第三章

念家興。碎形與動態系統。數學傳播季刊，第二十五卷第一期，

取自：http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d251/25102.pdf

Peter Lax。數學與計算(Mathematics and Computing)。數學傳播季刊，第二十六卷第四期，

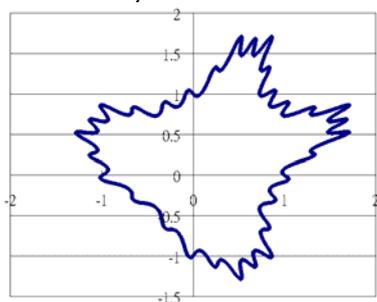
取自：http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d264/26401.pdf

吳志揚。淺談固定點定理及其應用。數學傳播季刊，第二十卷第二期。

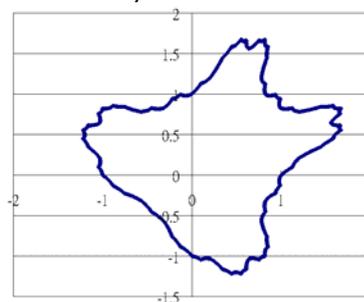
James Cleick，混沌—不測風雲的背後(*CHAOS, Making a New Science*)，天下文化，1991。

捌、附錄

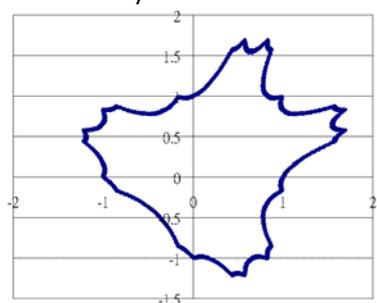
$\beta=0.81$



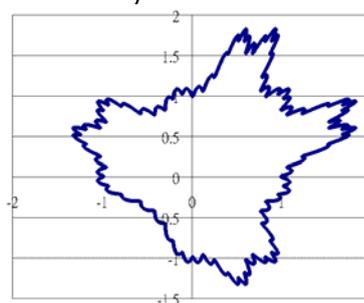
$\beta=0.82$



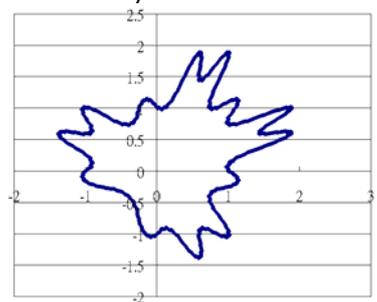
$\beta=0.83$



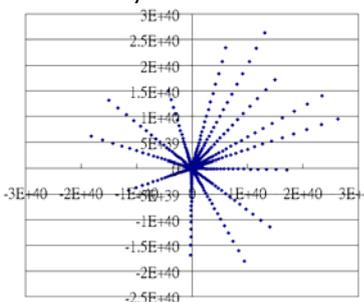
$\beta=0.84$



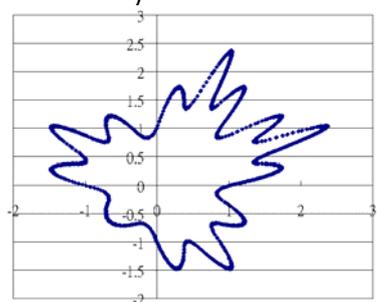
$\beta=0.85$



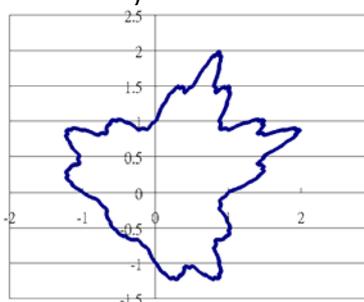
$\beta=0.86$



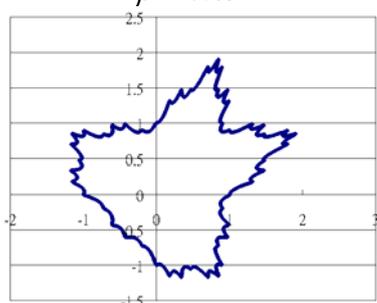
$\beta=0.87$



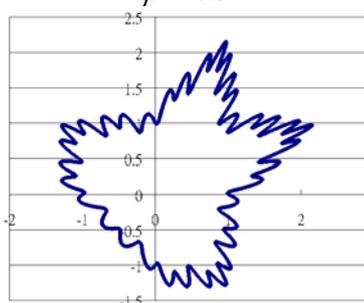
$\beta=0.88$



$\beta=0.89$



$\beta=0.9$



【評語】 040405

本作品討論某類遞迴式是否具有定點或遞迴循環的性質。作者群除以數學方法驗證其中一類具有九連環，也引進二維離散映射概念，來討論其他類型，確實具有創意。事實上，單層的二維迭代映射對單位圖上的點雖具有連續及一對一的性質，然而迭代所產生的離散點是否能構成連續且封閉的曲線仍得釐清。或許可再就一維迭代數列中前後項間比值之極限行為進行研究，來釐清上述問題。

再者，本作品中若干名詞之似有語意不清或不符數學語詞用法等情形，宜加以訂正。