中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

040404

關燈遊戲

學校名稱：國立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 謝忠益 高二 鍾育維 高二 黃瑞元	陳治明

關鍵詞：平移性、同餘

摘要

一、遊戲規則

（一）規則一：

下圖中每一個方框都是一個房間，每個房間亮暗雜然無序，現在有位管理員欲將所有的房間燈關掉，但每次改變一個開關，相鄰兩個房間的開關也會跟著改變，目的是將所有房間的燈關掉。（圖中黃色區域代表燈亮著，無色代表燈暗著）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 一 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 二 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 三 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 十 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

（二）規則二：

遊戲規則類似第一種規則，但此時若改變某個房間的開關，則只有相鄰的燈泡亮暗會改變，而本身的亮暗不變，目的同樣是將所有亮著的燈泡全部關掉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 一 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 二 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 三 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

點 第 十 個 開 關

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

壹、研究動機

小時候曾經玩過這樣的關燈遊戲，面對一整排亮暗雜然無序的開關，螢幕一旁顯示已點擊開關的次數，總是剛開始點時感覺快要成功了，卻又一直解不出，最後只能在一陣毫無機制的亂點下勉強才能解出，有時甚至拼了一會兒功夫依然無法完成，不時也淪落最後的抉擇——放棄。想著在眼前曾經出現的這若干個開關，這次我們要把這個遊戲研究出來，也當作是完成當初小小的夢想！

貳、研究目的

一、在一列相連且亮暗雜然無序的房間（如下圖，我們稱之為「直排」的情形），找出將所有燈關掉的方法，並將「必有解」、「不一定有解」、「必無解」的情形加以分類，然後再求出「不一定有解」其有解的條件。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

二、推廣到在一圈環狀排列的若干房間（我們稱之為「環排」的情形），找出將所有燈關掉的方法，並將「必有解」、「不一定有解」、「必無解」的情形加以分類，然後再求出「不一定有解」其有解的條件。

參、研究設備及器材

電腦、紙、筆。

肆、研究過程及方法

一、研究過程

（一）我們的定義如下：

有 N 個房間，每個房間各有一個開關。（N 為正整數）

1、以 R_1 表示第一個房間、以 R_2 表示第二個房間…以 R_N 表示第 N 個房間。

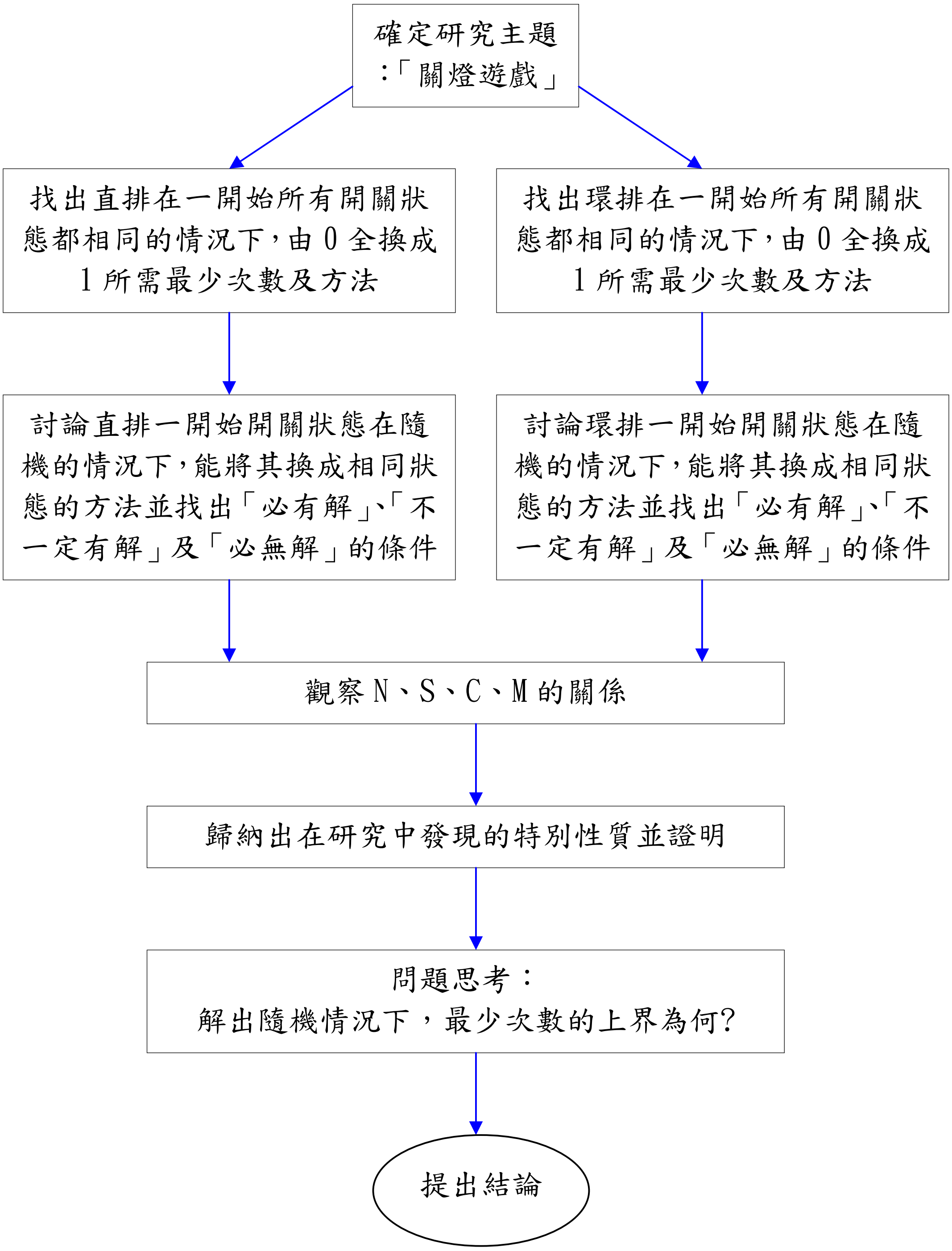
2、以 A_1 表示第一個房間的初始狀態、以 A_2 表示第二個房間的初始狀態…以 A_N 表示第 N 個房間的初始狀態。

3、每個開關狀態的種類都有 S 種，依改變順序分別為 0、1、2…S-1。（S 為正整數，若 S-1 再改變一次則會變成 0）

4、每點一次會改變 C 個開關，這裡只討論 C=2（即前面遊戲規則二）及 C=3（即前面遊戲規則一）。

5、最少需要點 M 次能使所有 0 全換成 1。

（二）流程如下：


確定研究主題
:「關燈遊戲」
找出直排在一開始所有開關狀態都相同的情況下，由 0 全換成 1 所需最少次數及方法
找出環排在一開始所有開關狀態都相同的情況下，由 0 全換成 1 所需最少次數及方法
討論直排一開始開關狀態在隨機的情況下，能將其換成相同狀態的方法並找出「必有解」、「不一定有解」及「必無解」的條件
討論環排一開始開關狀態在隨機的情況下，能將其換成相同狀態的方法並找出「必有解」、「不一定有解」及「必無解」的條件
觀察 N、S、C、M 的關係
歸納出在研究中發現的特別性質並證明
問題思考：
解出隨機情況下，最少次數的上界為何?
提出結論

二、直排（討論所有開關由 0 全換成 1）

（一）C=2 的各種情形：（x、t 為正整數）

註：為方便觀察，以下圖中的開關會用不同顏色，與該開關的狀態無關。

1、N=4t 必有解，說明如下：

（1）點所有第 4x-1 個開關，則改變所有第偶數個開關。

（2）點所有第 4x-2 個開關，則改變所有第奇數個開關。

A_1	A_2	A_3	A_4	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	…	…

2、N=4t-1 必有解，說明如下：

（1）點所有第 4x-1 或所有第 4x-3 個開關，則改變所有第偶數個開關。

（2）點所有第 4x-2 個開關，則改變所有第奇數個開關。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	…	…

3、N=4t-2 必有解，說明如下：

（1）點所有第 4x-3 個開關，則改變所有第偶數個開關。

（2）點所有第 4x-2 個開關，則改變所有第奇數個開關。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	…	…

4、N=4t-3 則無解，說明如下：

（1）點所有第 4x-1 或所有第 4x-3 個開關，則改變所有第偶數個開關。

（2）但第奇數個開關無法全部改變！證明如下：

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	…	…

證明：若要改變第奇數個開關則須點第偶數個開關，我們用反證法。

設 R_2 開關點 T_2 次、R_4 點 T_4 次、…、R_{4t-4} 點 T_{4t-4} 次可使所有第奇數個開關由 0→1，則：

$T_2 \equiv T_2+T_4 \equiv T_4+T_6 \equiv \cdots \equiv T_{4t-6}+T_{4t-4} \equiv T_{4t-4} \equiv R\ (\mathrm{mod} S)$，其中 $R \neq 0$

$\because T_2 \equiv T_2+T_4 \equiv R\ (\mathrm{mod} S)\ \therefore T_4 \equiv 0\ (\mathrm{mod} S)$

$\because T_2+T_4 \equiv T_4+T_6 \equiv R\ (\mathrm{mod} S)\ \therefore T_2 \equiv T_6 \equiv R\ (\mathrm{mod} S)$

同理，$T_2 \equiv T_6 \equiv T_{10} \equiv \cdots \equiv T_{4t-6} \equiv R\ (\mathrm{mod} S)$

$T_4 \equiv T_8 \equiv T_{12} \equiv \cdots \equiv T_{4t-4} \equiv 0\ (\mathrm{mod} S)$ …①

$\because A_1$ 和 A_{4t-3} 狀態相同

$\therefore T_2 \equiv T_{4t-4} \equiv R\ (\mathrm{mod} S)$ …②

由①、②矛盾知，原假設不成立。

A_1 改變 T_2 次	A_2 點 T_2 次	A_3 改變 T_2+T_4	A_4 點 T_4 次	A_5 改變 T_4 次

T_1 除以 S 餘 R　　　T_2 整除 S　→矛盾←　T_2 除以 S 餘 R

由上述可得：

1、N≠4t-3 必有解，且有最小次數 M=〔(N+2）÷4〕×2。

2、N=4t-3 則無解。

（二）C=3 的各種情形：(x、t 爲正整數）

註：爲方便觀察，以下用不同顏色配合各種情形的點法。

1、N=3t：點所有第 3x-1 個開關，則可改變所有開關。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	…	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	…	…	…

2、N=3t-1：點所有第 3x-1 或所有第 3x-2 個開關，則可改變所有開關。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	…	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}

3、N=3t-2：點所有第 3x-2 個開關，則可改變所有開關。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	…	…	…

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	…	…	…

由上述可得：C=3 必有解，且有最小次數 M=〔(N+2）÷3〕。

三、直排（將隨機狀態換成相同狀態的情形）

（一）平移性的發現：

1、C=2 的平移性：

一開始我們研究的時候就發現，欲使所有開關狀態相同，亂點是行不通的，經一番討論之後，發現在 C=2 的情況，其破解的關鍵在於 R_1 和 R_N，因爲只有點這兩個房間會只改變到一個開關，因此我們只要能使除了 R_2 和 R_{N-1} 其他所有的開關狀態都相同，就必有解！如下圖：C=2、S=5、N=10

只有 A_1 跟其他開關狀態都不一樣，因此我們點 R_2 四次使 A_1 變成 1，再點 R_4 使 A_3 變成 1，再點 R_6 使 A_5 變成 1……

2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

點 R_2 四次使 A_1 變成 1

1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

點 R_4 四次使 A_3 變成 1

1	1	1	1	2	1	1	1	1	1

點 R_6 四次使 A_5 變成 1

1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

點 R_8 四次使 A_7 變成 1

1	1	1	1	1	1	1	1	2	1

最後點 R_{10} 四次

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

然而我們卻也從這個例子觀察到，在我們進行「點 R_2 改變 A_1、點 R_4 改變 A_3」的過程中，其中的狀態就像是一個搬移的過程，即從原本 $A_1=2$ 搬到 $A_5=2$ 再變成 $A_9=2$，於是我們再進一步推究其原因，就發現下表這個原理，我們稱之爲「平移性」：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
R_1 點 S-y 次	+（S-y）		+（S-y）		
	A_1-y	A_2	A_3-y	A_4	A_5
R_4 點 x 次			+y		+y
總結	A_1-y	A_2	A_3	A_4	A_5+y

在 R_2 上點（S-y）次，在 R_4 上點 y 次，即可將 A_1 減去的 y 加在 A_5 上，同理，我們可以再從 A_5 平移至 A_9 甚至其他第 4x-1 個開關，而不影響其結果。（其他第 4x、4x-2、4x-3 個開關之間也都有平移性）

2、C=3 的平移性：

找出 C=2 的平移性後，我們接者再看看 C=3 是否也有類似的情形，結果如下：（其中 y 爲任意整數）

	A_1	A_2	A_3	A_4
R_1點 S-y 次	+（S-y）	+（S-y）	+（S-y）	
	A_1-y	A_2-y	A_3-y	A_4
R_3點 y 次		+y	+y	+y
總結	A_1-y	A_2	A_3	A_4+y

一樣可以將 A_1 減去 y，並在 A_4 或其他任意第 3x-2 個開關上加上相同數字，而不影響其結果。（其他第 3x、3x-1 個開關之間也都有平移性）

由平移性這樣的方式來看，我們爲了實際操作時的方便計算，習慣將原本狀態都不相同的開關，使他們的狀態全變成 0，而非其他狀態 1、2、3……。如此一來，在平移的時候，平移的數字即被減去的開關的狀態，例如將 A_1 平移至 R_5，其平移的數字就是 A_1，此時 R_1 的狀態變成 0，而 R_5 的狀態變成 A_1+A_5。

（二）C=2 的各種情形：

在直排 C=2 的各種情形中，其解開的關鍵在於最左邊和最右邊的兩個開關，由於點這兩個開關只會改變其唯一相鄰的開關一次，因此，只要藉由「隨機的平移性」將其他開關的狀態平移至此相鄰的開關，然後再點最左邊和最右邊的開關即可。

然而開關數 N 的不同，會決定其是否有解或條件有解，以下就 N 為奇數及 N 為偶數分別說明：（註：為了方便說明，以下我們說「將某些開關的狀態平移至第某個開關」即表示利用「平移性」使這些開關的狀態歸零，而只剩第某個開關的狀態不一定為零）

1、N=4t 必有解，說明如下：

（1）將所有第 4x-3 個開關的狀態平移至 R_{4t-3}。

（2）將所有第 4x-1 個開關的狀態平移至 R_{4t-1}。

（3）將所有第 4x-2 個開關的狀態平移至 R_2。

（4）將所有第 4x 個開關的狀態平移至 R_4。

（5）點 R_{4t-2} 使 R_{4t-3} 歸零。

（6）點 R_{4t} 使 R_{4t-1} 歸零。

（7）點 R_3 使 R_4 歸零。

（8）點 R_1 使 R_2 歸零。

例：N=8，S=3，C=2，依序為 2、0、1、2、2、2、1、2 如下：

2	0	1	2	2	2	1	2

利用平移性

2-2	0+2	1-1	2+2	2+2	2-2	1+1	2-2

可變更狀態如下

0	2	0	1	1	0	2	0

點 R_6 兩次使 R_5 歸 0

0	2	0	1	0	0	1	0

點 R_8 一次使 R_7 歸 0

0	2	0	1	0	0	0	0

點 R_3 兩次使 R_4 歸 0

0	1	0	0	0	0	0	0

點 R_1 兩次使 R_2 歸 0

0	0	0	0	0	0	0	0

2、N=4t-2 必有解，說明如下：

（1）將所有第 4x-3 個開關的狀態平移至 R_{4t-3}。

（2）將所有第 4x-1 個開關的狀態平移至 R_{4t-1}。

（3）將所有第 4x-2 個開關的狀態平移至 R_2。

（4）將所有第 4x 個開關的狀態平移至 R_4。

（5）點 R_{4t-4} 使 R_{4t-5} 歸零。

（6）點 R_{4t-2} 使 R_{4t-3} 歸零。

（7）點 R_3 使 R_4 歸零。

（8）點 R_1 使 R_2 歸零。

例：N=10，S=4，C=2，依序爲 1、0、1、3、3、1、1、2、1、3 如下：

1	0	1	3	3	1	1	2	1	3

利用平移性

1-1	0+4	1-1	3+2	3-3	1-1	1+1	2-2	1+4	3-3

可變更狀態如下

0	0	0	1	0	0	2	0	1	0

點 R_8 兩次使 R_7 歸 0

0	0	0	1	0	0	0	0	3	0

點 R_{10} 一次使 R_9 歸 0

0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

點 R_3 三次使 R_4 歸 0

0	3	0	0	0	0	0	0	0	0

點 R_1 一次使 R_2 歸 0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3、N=4t-3 必有解，說明如下：

（1）將所有第 4x-3 個開關的狀態平移至 R_{4t-3}。

（2）將所有第 4x-1 個開關的狀態平移至 R_{4t-1}。

（3）將所有第 4x-2 個開關的狀態平移至 R_2。

（4）將所有第 4x 個開關的狀態平移至 R_4。

（5）點 R_3 使 R_4 歸零。

（6）點 R_1 使 R_2 歸零。

（7）點 R_{4t-4} 使 R_{4t-5} 歸零。

（8）點所有第 4x-1、4x-2 個開關各 n 次，使前面所有開關與 R_{4t-3} 相同。

例：N=9，S=4，C=2，依序爲 1、2、3、0、2、1、0、2、3 如下：

1	2	3	0	2	1	0	2	3

利用平移性

1-1	2+1	3-3	0+2	2-2	1-1	0+3	2-2	3+3

可變更狀態如下

0	3	0	2	0	0	3	0	2

點 A_3 兩次使 A_4 歸 0

0	1	0	0	0	0	3	0	2

點 A_1 三次使 A_2 歸 0

0	0	0	0	0	0	3	0	2

點 A_8 一次使 A_7 歸 0

0	0	0	0	0	0	0	0	1

點 A_2、A_3、A_6、A_7 各一次使 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8 變成 1

1	1	1	1	1	1	1	1	1

4、N=4t-1 有解的充要條件爲：

$$\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1} \ (\mathrm{mod}S)$$

（1）證明 N=4t-1 時，若符合 $\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$（modS），則必有解：

A、由於當 N=4t-1 時，最左邊和最右邊的開關都是第奇數個開關，因此藉由點第偶數個開關來改變第奇數個開關時，必同時改變第 4x-1 個開關和第 4x-3 個開關，故若一開始符合上述條件，則無論怎麼點都依然會符合。

B、利用「隨機的平移性」將所有第 4x-1 個開關和所有第 4x-3 個開關平移至第 4t-1 個開關和第 4t-3 個開關，由 A 得知，若一開始符合上述條件，則此時必符合 $A_{4t-1}=A_{4t-3}$，即再點第 4t-2 個開關就能將所有第奇數個開關歸零。

C、改變第偶數個開關的方法類似當 N 爲偶數時的方法。

例：N=7，S=4，C=2，依序爲 3、0、2、1、0、2、1 如下：

3+0≡2+1（mod4）

3	0	2	1	0	2	1

利用平移性

3-3	0	2-2	1	0+3	2	1+2

可變更狀態如下

0	0	0	1	3	2	3

點 R_6 一次使 A_5、A_7 歸 0

0	0	0	1	0	2	0

利用平移性

0	0+2	0	1	0	2-2	0

可變更狀態如下

0	2	0	1	0	0	0

點 R_3 三次使 A_4 歸 0

0	1	0	0	0	0	0

點 R_1 三次使 A_2 歸 0

0	0	0	0	0	0	0

（2）證明當 N=4t-1，若有解，則必符合 $\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$（modS）：

設 A_2 開關點 T_2 次、A_4 點 T_4 次…A_{4t-2} 點 T_{4t-2} 次可使所有第奇數個開關都變成相同狀態而有解，則：

$A_1+T_2 \equiv A_3+T_2+T_4 \equiv A_5+T_4+T_6 \equiv \cdots \equiv A_{4t-3}+T_{4t-4}+T_{4t-2} \equiv A_{4t-1}+T_{4t-2} \equiv R$（modS），$R \neq 0$

$A_1+T_2 \equiv R$（modS）…①

$A_3+T_2+T_4 \equiv R$（modS）…②

$A_5+T_4+T_6 \equiv R$（modS）…③

②-①⇨〔$T_4+(A_3)-(A_1)$〕$\equiv 0$（modS）…❶

③-❶⇨〔$T_6+(A_1+A_5)-(A_3)$〕$\equiv R$（modS）

以此類推可得⇨〔$(A_3+A_7+A_{11}+\cdots+A_{4t-1})-(A_1+A_5+A_9+\cdots+A_{4t-3})$〕$\equiv 0$

∵〔$(A_3+A_7+A_{11}+\cdots+A_{4t-1})-(A_1+A_5+A_9+\cdots+A_{4t-3})$〕$\equiv 0$

∴ $(A_3+A_7+A_{11}+\cdots+A_{4t-1}) \equiv (A_1+A_5+A_9+\cdots+A_{4t-3})$（modS）

⇨ $\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$（modS）

由（1）、（2）得知：

N=4t-1 有解的充要條件為：$\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$（modS）

（三）C=3 的各種情形：

1、N=3t 必有解，說明如下：

（1）將所有第 3x-2 個開關的狀態平移至 R_{3t-2}。

（2）將所有第 3x-1 個開關的狀態平移至 R_{3t-1}。

（3）將所有第 3x 個開關的狀態平移至 R_{3t}。

（4）點 R_{3t-1} 使 R_{3t-2} 歸零。

（5）點 R_{3t} 使 R_{3t-1} 歸零。

（6）點所有第 3x-2 個開關各 n 次，使前面所有開關與 R_{3t} 相同。

例：N=9，S=4，C=3，依序爲 3、1、2、2、0、3、1、2、3 如下：

3	1	2	2	0	3	1	2	3

利用平移性

3-3	1-1	2-2	2-2	0	3-3	1+5	2+1	3+5

可變更狀態如下

0	0	0	0	0	0	2	3	0

點 A_8 兩次使 A_7 變成 0

0	0	0	0	0	0	0	1	2

點 A_9 三次使 A_8 變成 0

0	0	0	0	0	0	0	0	1

點 R_1、R_4、R_7 一次使 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8 變成 1

1	1	1	1	1	1	1	1	1

2、N=3t-2 必有解，說明如下：

（1）將所有第 3x-2 個開關的狀態平移至 R_{3t-2}。

（2）將所有第 3x-1 個開關的狀態平移至 R_{3t-4}。

（3）將所有第 3x 個開關的狀態平移至 R_{3t-3}。

（4）點 R_{3t-3} 使 R_{3t-4} 歸零。

（5）點 R_{3t-2} 使 R_{3t-3} 歸零。

（6）點所有第 3x-1 個開關各 n 次，使前面所有開關與 R_{3t-2} 相同。

例：N=7，S=5，C=3，依序爲 1、3、4、1、4、2、1 如下：

1	3	4	1	4	2	1

利用平移性

1-1	3-3	4-4	1-1	4+3	2+4	1+2

可變更狀態如下

0	0	0	0	2	1	3

點 A_6 三次使 A_5 變成 0

0	0	0	0	0	4	1

點 A_7 一次使 A_6 變成 0

0	0	0	0	0	0	2

點 A_2、A_5 兩次使 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 變成 2

2	2	2	2	2	2	2

3、N=3t-1 有解的充要條件爲：

$$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1} \pmod{S}$$

（1）證明 N=3t-1 時，若符合 $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$（modS），則必有解：

A_1	A_2	A_3	…	A_{3t-2}	A_{3t-2}	A_{3t-1}

利用平移性，可變更狀態如下

0	0	0	…	$\sum_{x=1}^{[\frac{N}{3}]} A_{3x}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$

點 A_{3t-2} n 次使 A_{3t-2} 歸 0

0	0	0	…	0	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2}$+n	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$+n

$$\because \sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1} \pmod{S}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} + n \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1} + n \pmod{S}$$

點 A_{3t-1} n_1 次，可使 A_{3t-1}、A_{3t-2} 同時歸 0

0	0	0	…	0	0	0

（2）證明當 N=3t-1，若有解，則必符合 $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$（modS）：

設 A_1 開關點 T_1 次、A_2 點 T_2 次…A_{3t-1} 點 T_{3t-1} 次可使所有開關都變成相同狀態而有解，則：

$A_1+T_1+T_2 \equiv A_2+T_1+T_2+T_3$（$\equiv A_3+T_2+T_3+T_4$）$\equiv A_4+T_3+T_4+T_5 \equiv \cdots \equiv$
$A_{3t-2}+T_{3t-3}+T_{3t-2}+T_{3t-1} \equiv A_{3t-1}+T_{3t-2}+T_{3t-1} \equiv R$（modS），$R \neq 0$

$A_1+T_1+T_2 \equiv R$（modS）…①

$A_2+T_1+T_2+T_3 \equiv R$（modS）…②

$A_4+T_3+T_4+T_5 \equiv R$（modS）…③

②-①⇨〔$T_3+(A_2)-(A_1)$〕$\equiv 0$（modS）…❶

③-❶⇨〔$T_4+T_5+(A_1+A_4)-(A_2)$〕$\equiv R$（modS）

以此類推可得⇨〔$(A_1+A_4+A_7+\cdots+A_{3t-2})-(A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3t-1})$〕$\equiv 0$

∵〔$(A_1+A_4+A_7+\cdots+A_{3t-2})-(A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3t-1})$〕$\equiv 0$

∴ $(A_1+A_4+A_7+\cdots+A_{3t-2}) \equiv (A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3t-1})$（modS）

⇨ $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$（modS）

由（1）、（2）得知：

N=3t-1 有解的充要條件為：$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$（modS）

四、環排（討論所有開關由 0 全換成 1）

（一）C=2 的各種情形：

1、N=4t 必有解，且有最小次數 M=N÷2，說明如下：

（1）點所有第 4x-1 或所有第 4x-3 個開關，則改變所有第偶數個開關。

（2）點所有第 4x-2 或所有第 4x 個開關，則改變所有第奇數個開關。

2、N=4t-1、4t-2、4t-3，說明如下：

（1）S=2u-1 必有解，且有最小次數 M=u×N=〔（S+1）÷2〕×N

點所有開關（S+1）÷2 次，則可改變所有開關（S+1）次。

因為有 N 個開關，所以總共需要點〔（S+1）÷2〕×N 次。

（2）S=2u 則無解。

a.證明 N=4t-1、4t-3 無解：

設總共點 M 次能使所有開關由 0→1，且 A_n 改變 $S\times k_n+1$ 次，由於點一次會改變 2 個開關，故總共會改變 2M 個開關，又

$2M\neq(2\times S\times k_1+1)+(2\times S\times k_2+1)+\cdots+(2\times S\times k_N+1)$

$=2S(k_1+k_2+\cdots+k_N)+4t-1$

∵偶≠奇∴矛盾。

（n=1、2、3、…、N，k_n表示各開關被改變的循環次數）

b.證明 N=4t-2 無解：

設在 $A_{(2x-1)}$ 上總共點 M 次能使所有 $A_{(2x)}$ 由 0→1，且 A_n 改變 $S\times k_n+1$ 次，由於點一次會改變 2 個開關，故總共會改變 2M 個開關，又

$2M\neq(2\times S\times k_2+1)+(2\times S\times k_4+1)+\cdots+(2\times S\times k_{4t-2}+1)$

$=2S(k_2+k_4+\cdots+k_N)+2t-1$

∵偶≠奇∴矛盾。

（n=1、2、3、…、N，k_n表示各開關被改變的循環次數）

（二）C=3 的各種情形：

1、N=3t 必有解，且有最小次數 M=N÷3，說明如下：

點所有第 3x 或所有第 3x-1 或所有第 3x-2 個開關，則改變所有開關。

2、N=3t-1、3t-2，說明如下：

（1）S=3u-1 必有解，且有最小次數 M=u×N=〔（S+1）÷3〕×N

點所有開關〔（S+1）÷3〕次，則可改變所有開關（S+1）次。

因為有 N 個開關，所以總共需要點〔（S+1）÷3〕×N 次。

（2）S=3u 則無解。

證明：

設總共點 M 次能使所有開關由 0→1，且 A_n 改變 $S\times k_n+1$ 次，由於點一次會改變 3 個開關，故總共會改變 3M 個開關，又 $3M\neq(3\times S\times k_1+1)+(3\times S\times k_2+1)+\cdots+(3\times S\times k_N+1)=3S(k_1+k_2+\cdots+k_N)+N$（N=3t-1、3t-2）

∴矛盾。

（n=1、2、3、…、N，k_n 表示各開關被改變的循環次數）

（3）S=3u+1 必有解，且有最小次數 M=（2u+1）×N=〔（2S+1）÷3〕×N

點所有開關〔（2S+1）÷3〕次，則可改變所有開關（S+1）次。

因為有 N 個開關，所以總共需要點〔（2S+1）÷3〕×N 次。

五、環排（將隨機狀態換成相同狀態的情形）

（一）C=2 的各種情形：

1、N=4t 有解的充要條件為：

$$\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1} \text{（modS）且} \sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{4}]} A_{4x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N}{4}]} A_{4x} \text{（modS）}$$

（1）證明當 N=4t，若有解則必同餘：

設 A_1 開關點 M_1 次、A_2 點 M_2 次…A_{4t} 點 M_{4t} 次可使所有開關都變成相同狀態而有解，則：

$A_1+M_2+M_{4t} \equiv A_3+M_2+M_4 \equiv A_5+M_4+M_6 \equiv \cdots \equiv A_{4t-3}+M_{4t-4}+M_{4t-2} \equiv A_{4t-1}+M_{4t-2}+M_{4t} \equiv R$（modS），$R \neq 0$

$A_1+M_2+M_{4t} \equiv R$（modS）…①$A_3+M_2+M_4 \equiv R$（modS）…②

$A_5+M_4+M_6 \equiv R$（modS）…③

②-①⇨〔$M_4-M_{4t}+(A_3)-(A_1)$〕$\equiv 0$（modS）…❶

③-❶⇨〔$M_6+M_{4t}+(A_1+A_5)-(A_3)$〕$\equiv R$（modS）

以此類推可得⇨〔$(A_3+A_7+A_{11}+\cdots+A_{4t-1})-(A_1+A_5+A_9+\cdots+A_{4t-3})$〕$\equiv 0$

∵〔$(A_4+A_8+A_{12}+\cdots+A_{4t})-(A_2+A_6+A_{10}+\cdots+A_{4t-2})$〕$\equiv 0$

∴ $(A_4+A_8+A_{12}+\cdots+A_{4t}) \equiv (A_2+A_6+A_{10}+\cdots+A_{4t-2})$（modS）

$$⇨ \sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1} \text{（modS）}$$

同理可得⇨ $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{4}]} A_{4x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N}{4}]} A_{4x}$（modS）

（2）證明當 N=4t，若同餘則必有解：

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	…	A_{4t-3}	A_{4t-2}	A_{4t-1}	A_{4t}

利用平移性可變更狀態如下

0	0	0	0	0	0	…	0	$\sum_{x=1}^{[\frac{N}{4}]} A_{4x}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{4}]} A_{4x-2}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N}{4}]} A_{4x}$

點 R_{4t-2} 項 k_1 次使 R_{4t-3}、R_{4t-1} 變成 0

0	0	0	0	0	0	…	0	0	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{4}]} A_{4x-2}$	0	$\sum_{x=1}^{[\frac{N}{4}]} A_{4x}$

點 R_{4t-3} 項 k_2 次使第 R_{4t-2}、R_{4t} 變成 0

0	0	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0

2、N=4t-1 必有解。

解法：

在 R_1、R_4、R_5、R_8、R_9、…、R_{4t-5}、R_{4t-4} 項點 A_1 次

在 R_2、R_5、R_6、R_9、R_{10}、…、R_{4t-4}、R_{4t-3} 項點 A_2 次

在 R_3、R_6、R_7、R_{11}、R_{12}、…、R_{4t-3}、R_1 項點 A_3 次

…

在 R_{4t-3}、R_1、R_4、R_5、R_7、…、R_{4t-8}、R_{4t-7} 項點 A_{4t-3} 次

在 R_1、R_2、R_5、R_6、R_7、…、R_{4t-7}、R_{4t-6} 項點 A_{4t-2} 次

在 R_2、R_3、R_6、R_7、R_7、…、R_{4t-6}、R_{4t-5} 項點 A_{4t-1} 次

則可使所有開關狀態皆變爲 $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-3}$

舉例：N=7

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1			A_1	A_1		
	A_2			A_2	A_2	
		A_3			A_3	A_3
A_4			A_4			A_4
A_5	A_5			A_5		
	A_6	A_6			A_6	
		A_7	A_7			A_7

點擊的位置及次數

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_2		A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_3	A_3		A_3	A_3	A_3	A_3
A_4	A_4	A_4		A_4	A_4	A_4
A_5	A_5	A_5	A_5		A_5	A_5
A_6	A_6	A_6	A_6	A_6		A_6
A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	

點完後的狀態皆爲 $A_1+A_2+A_3\cdots+A_7$

3、N=4t-2

（1）S=2u-1：則必有解。

解法：

A、使所有奇數開關狀態和所有偶數開關狀態分別相同。

在 R_4、R_8、…、R_{4t-8}、R_{4t-4} 項點 A_1 次

在 R_5、R_9、…、R_{4t-7}、R_{4t-3} 項點 A_2 次

…

在 R_2、R_6、…、R_{4t-8}、R_{4t-6} 項點 A_{4t-3} 次

在 R_3、R_7、…、R_{4t-9}、R_{4t-5} 項點 A_{4t-2} 次

則可使所有奇數開關狀態皆變為 $A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{4t-5}+A_{4t-3}$

則可使所有偶數開關狀態皆變為 $A_2+A_4+A_6+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-2}$

舉例：N=6

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			A_1		
				A_2	
					A_3
A_4					
	A_5				
		A_6			

點擊的位置及次數

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
		A_1		A_1	
			A_2		A_2
A_3				A_3	
	A_4				A_4
A_5		A_5			
	A_6		A_6		

點完後的狀態奇數皆為 $A_1+A_3+A_5$

偶數皆為 $A_2+A_4+A_6$

B、使奇數開關狀態和偶數開關狀態相同。

為了使奇數開關狀態和偶數開關狀態相同，但又要使所有奇數開關和偶數開關各分別維持相同的狀態，因此我們會點所有奇數房間（或所有偶數房間也可以）各若干次，假設我們點所有奇數房間各 L 次，則每個偶數開關都會被改變 2L 次，又因為 S 為奇數，所以一定找的到 L 使（$A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{4t-5}+A_{4t-3}$）$+2L\equiv$（$A_2+A_4+A_6+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-2}$）（modS）

說明：

若在步驟一中，點完後奇數開關的狀態與偶數開關的狀態同為奇數或偶數，例如奇數開關的狀態為 3 而偶數開關的狀態為 1 時，此時 L=1，即再點所有奇數房間各 1 次，偶數開關的狀態就會由 1 變成 3，所有的開關狀態就會相同了。若點完後奇數開關的狀態與偶數開關的狀態一奇一偶，例如當 S=5（S 為奇數）且完成步驟一後奇數開關的狀態為 4（偶數）而偶數開關的狀態為 3（奇數）時，則 L=2，但此時如果 S 為偶數，無論 L 為多少次，都無法使奇數開關的狀態（原本為 4）由偶數變成奇數。

（2）S=2u：有解的充要條件爲：$\sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} A_{2x-1} \equiv \sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} A_{2x}$（mod2）

解法同上，但因爲 S 爲偶數所以不一定找的到 L 使

（$A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{4t-5}+A_{4t-3}$）+2L≡（$A_2+A_4+A_6+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-2}$）(modS）

若（$A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{4t-5}+A_{4t-3}$）≡（$A_2+A_4+A_6+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-2}$）(mod2）則有解。

4、N=4t-3 必有解。

解法：

在 R_3、R_4、R_7、R_8、…、R_{4t-5}、R_{4t-4} 項點 A_1 次

在 R_4、R_5、R_8、R_9、…、R_{4t-4}、R_{4t-3} 項點 A_2 次

在 R_5、R_6、R_9、R_{10}、…、R_{4t-3}、R_1 項點 A_3 次

…

在 R_{4t-3}、R_1、R_4、R_5、…、R_{4t-8}、R_{4t-7} 項點 A_{4t-5} 次

在 R_1、R_2、R_5、R_6、…、R_{4t-7}、R_{4t-6} 項點 A_{4t-4} 次

在 R_2、R_3、R_6、R_7、…、R_{4t-6}、R_{4t-5} 項點 A_{4t-3} 次

則可使所有開關狀態皆變爲 $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-3}$

舉例：N=9

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
		A_1	A_1			A_1	A_1	
			A_2	A_2			A_2	A_2
A_3				A_3	A_3			A_3
A_4	A_4				A_4	A_4		
	A_5	A_5				A_5	A_5	
		A_6	A_6				A_6	A_6
A_7			A_7	A_7				A_7
A_8	A_8			A_8	A_8			
	A_9	A_9			A_9	A_9		

點擊的位置及次數

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_2		A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_3	A_3		A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3
A_4	A_4	A_4		A_4	A_4	A_4	A_4	A_4
A_5	A_5	A_5	A_5		A_5	A_5	A_5	A_5
A_6	A_6	A_6	A_6	A_6		A_6	A_6	A_6
A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7		A_7	A_7
A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8		A_8
A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	

點完後的狀態皆爲 $A_1+A_2+A_3\cdots+A_9$

（二）C=3 的各種情形：

1、N=3t 有解的充要條件爲： $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N}{3}]} A_{3x}$ （modS）

（1）證明當 N=3t，若有解則必同餘：

設 A_1 開關點 M_1 次、A_2 點 M_2 次…A_{3t} 點 M_{3t} 次可使所有開關都變成相同狀態而有解，則：

$A_1+M_1+M_2+M_{3t} \equiv A_2+M_1+M_2+M_3$（$\equiv A_3+M_2+M_3+M_4$）$\equiv \cdots \equiv A_{3t-1}M_{3t-2}+M_{3t-1}+M_{3t} \equiv$ $A_{3t}+M_1+M_{3t-1}+M_{3t} \equiv R$（modS），$R \neq 0$

$A_1+M_1+M_2+M_{3t} \equiv R$（modS）…①

$A_2+M_1+M_2+M_3 \equiv R$（modS）…②

$A_4+M_3+M_4+M_5 \equiv R$（modS）…③

②-①⇨〔$M_3-M_{3t}+$（A_2）-（A_1）〕$\equiv 0$（modS）…❶

③-❶⇨〔$M_4+M_5+M_{3t}+$（A_1+A_4）-（A_2）〕$\equiv R$（modS）

以此類推可得⇨〔（$A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3t-1}$）-（$A_1+A_4+A_7+\cdots+A_{3t-2}$）〕$\equiv 0$

∵〔（$A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3t-1}$）-（$A_1+A_4+A_7+\cdots+A_{3t-2}$）〕$\equiv 0$

∴（$A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3t-1}$）$\equiv$（$A_1+A_4+A_7+\cdots+A_{3t-2}$）（modS）

⇨ $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$ （modS）

同理可得⇨ $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N}{3}]} A_{3x}$ （modS）

（2）證明當 N=3t，若同餘則必有解：

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7		…	A_{3t-2}	A_{3t-1}	A_{3t}

利用平移性可變更狀態如下

0	0	0	0	0	0	0	…	0	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$	$\sum_{x=1}^{[\frac{N}{3}]} A_{3x}$

點 A_{3t-1} 項 k_1 次使第 A_{3t-2}、A_{3t-1}、A_{3t} 項變成 0

0	0	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0

2、N=3t-1、N=3t-2 必有解。

（1）N=3t-1

解法：

在 A_1、A_3、A_4、A_6、A_7、…、A_{3t-3}、A_{3t-2} 項點 A_1 次

在 A_2、A_4、A_5、A_7、A_8、…、A_{3t-2}、A_{3t-1} 項點 A_2 次

在 A_3、A_5、A_6、A_8、A_9、…、A_{3t-1}、A_1 項點 A_3 次

…

在 A_{3t-3}、A_{3t-1}、A_1、A_3、A_4、…、A_{3t-6}、A_{3t-5} 項點 A_{4t-5} 次

在 A_{3t-2}、A_1、A_2、A_4、A_5、…、A_{3t-5}、A_{3t-4} 項點 A_{4t-4} 次

在 A_{3t-1}、A_2、A_3、A_5、A_6、…、A_{3t-4}、A_{3t-3} 項點 A_{4t-3} 次

則可使所有開關狀態皆變為 $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-3}$

舉例：N=8

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1		A_1	A_1		A_1	A_1	
	A_2		A_2	A_2		A_2	A_2
A_3		A_3		A_3	A_3		A_3
A_4	A_4		A_4		A_4	A_4	
	A_5	A_5		A_5		A_5	A_5
A_6		A_6	A_6		A_6		A_6
A_7	A_7		A_7	A_7		A_7	
	A_8	A_8		A_8	A_8		A_8

點擊的位置及次數

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$
$2A_2$	A_2	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$
$2A_3$	$2A_3$	A_3	$2A_3$	$2A_3$	$2A_3$	$2A_3$	$2A_3$
$2A_4$	$2A_4$	$2A_4$	A_4	$2A_4$	$2A_4$	$2A_4$	$2A_4$
$2A_5$	$2A_5$	$2A_5$	$2A_5$	A_5	$2A_5$	$2A_5$	$2A_5$
$2A_6$	$2A_6$	$2A_6$	$2A_6$	$2A_6$	A_6	$2A_6$	$2A_6$
$2A_7$	$2A_7$	$2A_7$	$2A_7$	$2A_7$	$2A_7$	A_7	$2A_7$
$2A_8$	$2A_8$	$2A_8$	$2A_8$	$2A_8$	$2A_8$	$2A_8$	A_8

點完後的狀態皆為 2（$A_1+A_2+\cdots+A_8$）

（2）N=3t-2

解法：

在 A_3、A_6、A_9、…、A_{3t-6}、A_{3t-3} 項點 A_1 次

在 A_4、A_7、A_{10}、…、A_{3t-5}、A_{3t-2} 項點 A_2 次

在 A_5、A_8、A_{11}、…、A_{3t-4}、A_1 項點 A_3 次

…

在 A_{3t-2}、A_3、A_6、…、A_{3t-9}、A_{3t-6} 項點 A_{3t-4} 次

在 A_1、A_4、A_7、…、A_{3t-8}、A_{3t-5} 項點 A_{3t-3} 次

在 A_2、A_5、A_8、…、A_{3t-7}、A_{3t-4} 項點 A_{3t-2} 次

則可使所有開關狀態皆變爲 $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{4t-4}+A_{4t-3}$

舉例：N=7

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
		A_1			A_1	
			A_2			A_2
A_3				A_3		
	A_4				A_4	
		A_5				A_5
A_6			A_6			
	A_7			A_7		

點擊的位置及次數

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_2		A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_3	A_3		A_3	A_3	A_3	A_3
A_4	A_4	A_4		A_4	A_4	A_4
A_5	A_5	A_5	A_5		A_5	A_5
A_6	A_6	A_6	A_6	A_6		A_6
A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	

點完後的狀態皆爲 $A_1+A_2+A_3\cdots+A_7$

伍、研究結果

其中〔x〕爲高斯符號，C 爲每點一次改變的開關個數，S 爲開關狀態數，N 爲開關總數，M 爲點選次數的最小值（u、t∈N）

<table>
<tr><td rowspan="4">直排</td><td rowspan="2">0
↓
1</td><td>C=2</td><td>N≠4t-3 必有解，且有最小次數 M=〔（N+2）÷4〕×2。
N=4t-3 則無解。</td></tr>
<tr><td>C=3</td><td>必有解，且有最小次數 M=〔（N+2）÷3〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">隨機</td><td>C=2</td><td>N=2t、4t-3 必有解。
N=4t-1 有解的充要條件爲：$\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$（modS）</td></tr>
<tr><td>C=3</td><td>N=3t、N=3t-2 必有解。
N=3t-1 有解的充要條件爲：$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1}$（modS）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">環排</td><td rowspan="2">0
↓
1</td><td>C=2</td><td>N=4t 必有解，且有最小次數 M=N÷2
N=4t-1、4t-2、4t-3：
（1）S=2u 則無解。
（2）S=2u-1 必有解，且有最小次數 M=u×N=N×（S+1）÷2</td></tr>
<tr><td>C=3</td><td>N=3t 必有解，且有最小次數 M=N÷3
N=3t-1、3t-2：
（1）S=3u-1 必有解，且有最小次數 M=u×N=N×（S+1）÷3
（2）S=3u 則無解。
（3）S=3u+1 必有解，且有最小次數 M=（2u+1）×N=N×（2S+1）÷3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">隨機</td><td>C=2</td><td>N=4t-1、4t-3 必有解。
N=4t-2
（1）S=2u-1：則必有解。
（2）S=2u：有解的充要條件爲：$\sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} A_{2x-1} \equiv \sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} A_{2x}$（mod2）
N=4t 有解的充要條件爲：
$\sum_{x=1}^{[\frac{N+3}{4}]} A_{4x-3} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{4}]} A_{4x-1}$（modS）且 $\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{4}]} A_{4x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N}{4}]} A_{4x}$（modS）</td></tr>
<tr><td>C=3</td><td>N=3t-1、3t-2 必有解。
N=3t 有解的充要條件爲：$\sum_{x=1}^{[\frac{N+2}{3}]} A_{3x-2} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N+1}{3}]} A_{3x-1} \equiv \sum_{x=1}^{[\frac{N}{3}]} A_{3x}$（modS）</td></tr>
</table>

陸、未來展望

一、透過我們現在的研究，希望未來能進一步求出各種情形最小次數的上界。
二、再推廣到其它圖形，例如：方格、正三角形、正六邊形……等情形。

柒、結論

一、直排

（一）在「討論所有開關由 0 全換成 1」中，除了 N=4t-1 無解外，其餘必有解。

（二）在「將隨機狀態換成相同狀態」中：

1、若 C=2，其破解的關鍵是利用平移性將狀態集中在第二個及倒數第二個開關，再分別點第一個及最後一個開關使之歸零。

2、若 C=3，其破解的關鍵是利用平移性將狀態集中在最後一個開關，再把其他開關換成和最後一個開關相同的狀態。

3、若無法用 1、2 解者，須在某些開關狀態符合除以 S 同餘的條件下才有解。

二、環排

（一）在「討論所有開關由 0 全換成 1」中，只有當 N 不為 C 的倍數且 S 為 C 的倍數時無解，其餘必有解。

（二）在「將隨機狀態換成相同狀態」中：

1、C=2 、C=3 皆藉由「一個不變其他都變一次」或「一個變一次其他都變兩次」的方式解之。

2、若無法用 1 解者，須在某些開關狀態符合除以 S 同餘的條件下才有解。

【評語】040404

本篇論文主要在研究如何將直排或環排的燈，由其原始狀態，經由一連串的的開關轉換，改變為最後狀態。

本文最可稱道之處在於，處裡一般 S 的情況，而文獻中可以查到的大部分結果限於 S=2 的明暗兩種狀況的關燈研究。

本文解出來的有 0→1 的情況，以及一般狀態是否可以轉為全同狀態的解答。整體說來，有其可以稱道之處。惟比較正確的問題似乎應該說是，由一任意的狀態開始，轉換成另一個任意狀態的解法。

本文還可以加強的是，增加參考文獻，多瞭解其他相關的工作。