中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040403

披 薩 西 瓜 怎 麼 切

學校名稱：國立彰化高級中學

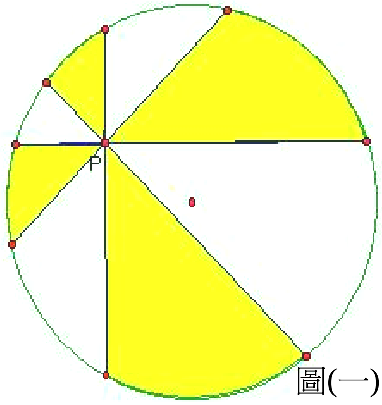
作者：	指導老師：
高二 洪辰維 高二 梁宇中 高二 魏靖霖 高二 蒲宜謙	龔詩尹

關鍵詞：披薩定律、超平面、祖氏原理

披薩 西瓜 怎麼切

摘要

圖(一)中，在半徑 r 的圓形披薩上選一個任意點 P，過此點畫四條線將披薩切成八份，要求這四條線中，任兩相鄰的線必須夾 45°，圖中四塊黃色披薩與四塊白色披薩的面積相等，這就是有名的披薩定理。



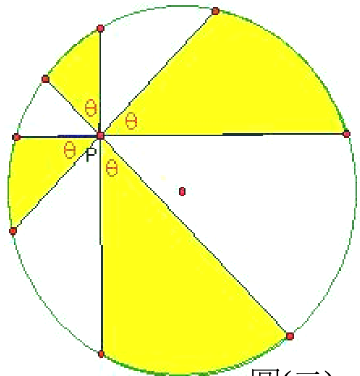
圖(一)

這是台灣師大數學系教授許志農在「龍騰數亦優」中所撰寫的，但其處理的手法涉及微積分，本文將以更初等的數學方法加以證明，並推廣出下列結果：

一、在圖(二)中，半徑 r 的圓形披薩內任一點 P，過此點畫四條直線，四塊黃色披薩的夾角皆爲θ，四塊白色披薩的夾角皆爲$90°-\theta$，則四塊黃色披薩的面積爲$r^2(2\theta)$

二、在橢圓形披薩，正2^n邊形的披薩及球體，我們亦有相似的結果

另一部份，我們將用組合的手法，證明並推廣一個古典問題：「一個西瓜切 n 刀最多可以切多少塊，其中有幾塊不含西瓜皮」。



圖(二)

壹、　研究動機

我們從台灣師範大學數學系教授許志農在「龍騰數亦優」中所撰寫的文章「披薩定理」發現切披薩、切西瓜竟然也是一門學問，其背後有某種數學結構，藉由這次科展的機會，得以展開深入的研究與探討。

貳、　研究目的

用初等的數學方法去推廣披薩定理，及一個古典問題：「一個西瓜切 n 刀最多可以切多少塊，其中有幾塊不含西瓜皮」，並將其推廣之。而切披薩、切西瓜的方法五花八門，我們就特定的幾種限制中，找出其規律性。

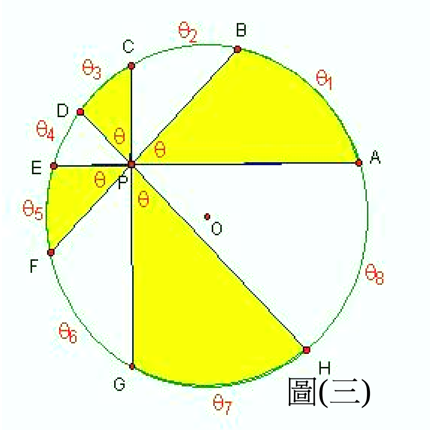
參、　研究設備及器材

紙	筆	電腦	GSP	Microsoft Word 2003

肆、　研究過程及方法

一、推廣披薩定理

我們先利用 GSP 的結果，在相同的圓內，發現面積總和竟與θ呈現線性關係。(所得數據詳見附件一)



圖(三)

θ	10°	15°	30°	40°	45°
黃色部分面積	2.02	3.02	6.05	8.06	9.07
白色部分面積	16.13	15.12	12.09	10.08	9.07

接下來，我們用初等的數學方法將披薩定理加以推廣證明。

設圓半徑為 r

如圖(三)，劣弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD},\overset{\frown}{DE},\overset{\frown}{EF},\overset{\frown}{FG},\overset{\frown}{GH},\overset{\frown}{HA}$的角度依序為$\theta_1,\theta_2\cdots\theta_8$，弦$\overline{AB}$與弧$\overset{\frown}{AB}$所圍弓形的面積為$=$扇形OAB的面積$-\Delta$OAB的面積$=\frac{1}{2}r^2\theta_1-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_1$，所以

$$\text{黃色部分面積}=\left(\frac{1}{2}\overline{PA}\,\overline{PB}\sin\theta+\frac{1}{2}r^2\theta_1-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_1\right)+\left(\frac{1}{2}\overline{PC}\,\overline{PD}\sin\theta+\frac{1}{2}r^2\theta_3-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_3\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\overline{PE}\,\overline{PF}\sin\theta+\frac{1}{2}r^2\theta_5-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_5\right)+\left(\frac{1}{2}\overline{PG}\,\overline{PH}\sin\theta+\frac{1}{2}r^2\theta_7-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_7\right)$$

$$\text{白色部分面積}=\left[\frac{1}{2}\overline{PB}\,\overline{PC}\sin(90^\circ-\theta)+\frac{1}{2}r^2\theta_2-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_2\right]+\left[\frac{1}{2}\overline{PD}\,\overline{PE}\sin(90^\circ-\theta)+\frac{1}{2}r^2\theta_4-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_4\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2}\overline{PF}\,\overline{PG}\sin(90^\circ-\theta)+\frac{1}{2}r^2\theta_6-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_6\right]+\left[\frac{1}{2}\overline{PH}\,\overline{PA}\sin(90^\circ-\theta)+\frac{1}{2}r^2\theta_8-\frac{1}{2}r^2\sin\theta_8\right]$$

(一)先討論黃色部分的面積

分項化簡如下：

1. $\frac{1}{2}r^2\theta_1+\frac{1}{2}r^2\theta_3+\frac{1}{2}r^2\theta_5+\frac{1}{2}r^2\theta_7=\frac{1}{2}r^2\left[(\theta_1+\theta_5)+(\theta_3+\theta_7)\right]=\frac{1}{2}r^2(2\theta+2\theta)=r^2 2\theta$

2. 利用 2 次餘弦定理可得：

$$\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-2\overline{PA}\overline{PB}\cos\theta=2r^2-2r^2\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow \overline{PA}\overline{PB}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2r^2-2r^2\cos\theta_1-\overline{PA}^2-\overline{PB}^2}{\cos\theta}\right)$$

同理可得：

$$\overline{PC}\overline{PD}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2r^2-2r^2\cos\theta_3-\overline{PC}^2-\overline{PD}^2}{\cos\theta}\right)，\overline{PE}\overline{PF}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2r^2-2r^2\cos\theta_5-\overline{PE}^2-\overline{PF}^2}{\cos\theta}\right)，$$

$$\overline{PG}\overline{PH}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2r^2-2r^2\cos\theta_7-\overline{PG}^2-\overline{PH}^2}{\cos\theta}\right)$$

3. 承 2.，整理可得：

$$\frac{1}{2}(\overline{PA}\overline{PB}\sin\theta-r^2\sin\theta_1)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{2r^2-2r^2\cos\theta_1-\overline{PA}^2-\overline{PB}^2}{\cos\theta}\right)\sin\theta-r^2\sin\theta_1\right]$$

$$=\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_1)}{2\cos\theta}+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2\right)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{PC}\overline{PD}\sin\theta-r^2\sin\theta_3)=\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_3)}{2\cos\theta}+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PC}^2+\overline{PD}^2\right)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{PE}\overline{PF}\sin\theta-r^2\sin\theta_5)=\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_5)}{2\cos\theta}+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PE}^2+\overline{PF}^2\right)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{PG}\overline{PH}\sin\theta-r^2\sin\theta_7)=\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_7)}{2\cos\theta}+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PG}^2+\overline{PH}^2\right)$$

黃色部分面積=以上 4 個式子相加+$r^2 2\theta$

(二)接著，討論白色部分的面積

同理

$$\frac{1}{2}\left[\overline{PB}\overline{PC}\sin(90^\circ-\theta)-r^2\sin\theta_2\right]$$

$$=\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_2)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{PD}\,\overline{PE}\sin(90^\circ-\theta)-r^2\sin\theta_4\right]$$

$$=\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_4)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PD}^2+\overline{PE}^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{PF}\,\overline{PG}\sin(90^\circ-\theta)-r^2\sin\theta_6\right]$$

$$=\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_6)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PF}^2+\overline{PG}^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{PH}\,\overline{PA}\sin(90^\circ-\theta)-r^2\sin\theta_8\right]$$

$$=\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_8)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PH}^2+\overline{PA}^2\right)$$

白色部分面積=以上 4 個式子相加+ $r^2(\pi-2\theta)$

(三)

黃色部分面積 $-$ 白色部分面積 $=$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{-1}{2}r^2\tan\theta+\frac{-1}{2}r^2\tan\theta\right)-\\ \left[\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)+\frac{-1}{2}r^2\tan(90^\circ-\theta)\right]\end{array}\right\}+$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{r^2\sin(\theta-\theta_1)}{2\cos\theta}+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_3)}{2\cos\theta}+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_5)}{2\cos\theta}+\frac{r^2\sin(\theta-\theta_7)}{2\cos\theta}\right]-\\ \left[\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_2)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_4)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_6)}{2\cos(90^\circ-\theta)}+\frac{r^2\sin(90^\circ-\theta-\theta_8)}{2\cos(90^\circ-\theta)}\right]\end{array}\right\}+$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2\right)+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PC}^2+\overline{PD}^2\right)+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PE}^2+\overline{PF}^2\right)+\frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PG}^2+\overline{PH}^2\right)\right]-\\ \left[\begin{array}{l}\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\right)+\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PD}^2+\overline{PE}^2\right)+\\ \frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PF}^2+\overline{PG}^2\right)+\frac{1}{4}\tan(90^\circ-\theta)\left(\overline{PH}^2+\overline{PA}^2\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$+\mathrm{r}^2(4\theta-\pi)$$

我們分項處理上式

1. 先處理第一個大括號

$$=-2r^2\tan\theta-\left(-2r^2\cot\theta\right)=r^2(2\cot\theta-2\tan\theta)=4r^2\cot 2\theta$$

2. 利用和差化積公式化簡及 $2\theta = \theta_1 + \theta_5 = \theta_3 + \theta_7$, $180° - 2\theta = \theta_2 + \theta_6 = \theta_4 + \theta_8$ 的特性處理第二個大括號

$$= \left[\frac{r^2 \sin(\theta - \theta_1)}{2\cos\theta} + \frac{r^2 \sin(\theta - \theta_5)}{2\cos\theta} + \frac{r^2 \sin(\theta - \theta_3)}{2\cos\theta} + \frac{r^2 \sin(\theta - \theta_7)}{2\cos\theta}\right] -$$

$$\left[\frac{r^2 \sin(90° - \theta - \theta_2)}{2\cos(90° - \theta)} + \frac{r^2 \sin(90° - \theta - \theta_6)}{2\cos(90° - \theta)} + \frac{r^2 \sin(90° - \theta - \theta_4)}{2\cos(90° - \theta)} + \frac{r^2 \sin(90° - \theta - \theta_8)}{2\cos(90° - \theta)}\right]$$

$$= 0$$

3. 處理第三個大括號

$$\left(\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2\right) + \left(\overline{PE}^2 + \overline{PG}^2\right) = \overline{AC}^2 + \overline{GE}^2 = \left[2r^2 - 2r^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\right] + \left[2r^2 - 2r^2 \cos(\theta_5 + \theta_6)\right] = 4r^2$$

同理 $\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PH}^2 = 4r^2$

利用此性質，第三個括號可化簡成

$$= \frac{1}{4}\tan\theta\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PG}^2 + \overline{PH}^2\right) -$$

$$\frac{1}{4}\cot\theta\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PG}^2 + \overline{PH}^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\tan\theta - \cot\theta)\left[\left(\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PG}^2\right) + \left(\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PH}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-2\cot 2\theta)(8r^2) = -4r^2 \cot 2\theta$$

4. 結果

最後

黃色部分面積 − 白色部分面積 $= r^2(4\theta - \pi)$

又 黃色部分面積 + 白色部分面積 = 圓面積 $= \pi r^2$

$\therefore$ 黃色部分面積 $= r^2(2\theta)$

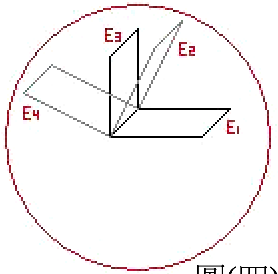
白色部分面積 $= r^2(\pi - 2\theta)$

我們發現，即使是任意角度，仍可推出兩區塊面積之和的關係式。

此與我們用 GSP 跑的結果相同。

二、球體西瓜

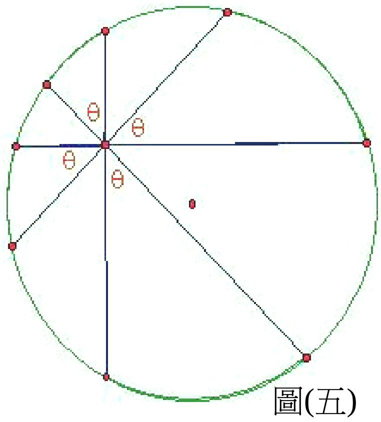
直線 L 交一球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 於 A,B 兩點，包含直線 L 的四個平面 E_1,E_2,E_3,E_4 將此球體切成 8 塊，E_1 與 E_2 的夾角 θ，E_3 與 E_4 的夾角 θ，$E_1\perp E_3$ 且 $E_2\perp E_4$ (如圖(四))，將四塊夾角 θ 的區域體積總和為 $\frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)=\frac{8r^3\theta}{3}$



圖(四)

證明：

每一個橫截圓皆如右圖(五)，夾角 θ 區域面積總和與夾角 $(90°-\theta)$ 區域面積總和比為 $(2\theta):(\pi-2\theta)$，由積分的概念(祖氏定理)可得體積比亦為 $(2\theta):(\pi-2\theta)$，故得證。



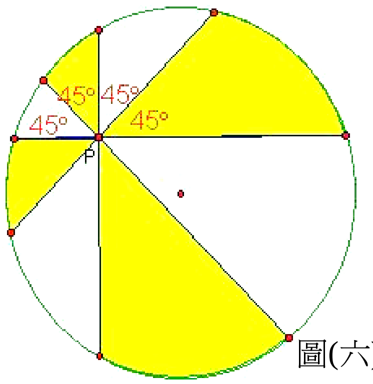
圖(五)

三、橢圓形披薩

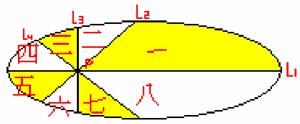
橢圓形內任選一點 P，過此點畫 4 條直線將其切成 8 份，並要求此 4 條直線任兩相鄰的直線必須夾角45°，我們透過 GSP 發現，並非所有的黃色與白色面積皆相等，今退而求其次尋找特例。

橢圓內任一點 P，我們可以找到過 P 的四條直線L_1, L_2, L_3, L_4將橢圓分成八個區域：區域一,三,五,七的面積和會等於區域二,四,六,八的面積和。

方法：



圖(六)



圖(七)

將圓盤$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$內的每一點到 x 軸的距離壓縮為原來的$\dfrac{b}{a}$ $\left(\dfrac{b}{a}<1\right)$，其區域將變成$\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，而圖(六)則變成圖(七)，由積分的概念可知壓縮後區域面積是原來的$\dfrac{b}{a}$倍，所以黃色區域面積等於白色區域面積，因其方法是可逆的，故得證。

Ex1：橢圓$\Gamma:\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\,0<b<a\right\}$內一點$P(x_1,y_1)$，今將橢圓內的每一點到 x 軸的距離伸長為原來的$\dfrac{a}{b}$，其區域變成圓$\Gamma':\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1,\,a>0\right\}$及內一點$P'\left(x_1,\dfrac{ay_1}{b}\right)$，過$P'$的 4 條直線$L_1':y=\dfrac{ay_1}{b}$，$L_2':y-\dfrac{ay_1}{b}=x-x_1$，$L_3':x=x_1$，$L_4':y-\dfrac{ay_1}{b}=-(x-x_1)$，符合披薩定理；今再壓縮回來，過$P(x_1,y_1)$的 4 直線

$L_1:y=y_1$，$L_2:y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$，$L_3:x=x_1$，$L_4:y-y_1=-\dfrac{b}{a}(x-x_1)$為所求。

四、正 2^n 邊形披薩

正 2^n 邊形內任選一點 P，過此點畫 4 條直線將其切成 8 份，並要求此 4 條直線任兩相鄰的直線必須夾角 45°，我們透過 GSP 發現，並非所有的黃色與白色面積皆相等，今退而求其次尋找特例。

正 2^n 邊形 $(n \geq 2)$ 內任選一點，我們可找到過此點的四條線，要求直線中任兩條相鄰的線必須夾角 45°，此四條直線將正 2^n 邊形分成 8 個區域，依序塗上黃色、白色間隔，則四塊黃色區域面積與四塊白色區域面積相等。

(一)n=2 時，即正方形

我們將證明

$$\text{四邊形}PHCL + \text{四邊形}PEBI + \Delta PGK + \Delta PFJ = \Delta PLE + \Delta PIG + \text{四邊形}PKAF + \text{四邊形}PJDH$$

由於下列面積恆等式是容易得到的

$\Delta PNI = \Delta PNO$

$\Delta PSO = \Delta PSU$

$\Delta PTU = \Delta PTK$

$\Delta PGK = \Delta PGI$

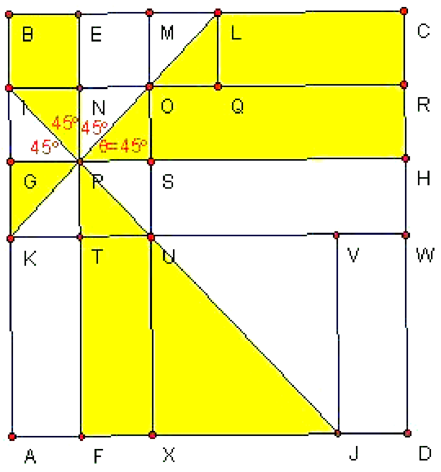
四邊形$IBEN$ = 四邊形$NEMO$

四邊形$FTUX$ = 四邊形$AKTF$

$\Delta LQO = \Delta LMO$

四邊形$SORH$ = 四邊形$SHWU$

$\Delta UJX = \Delta UJV$



圖(八)

我們只需處理四邊形$LCRQ$ = 四邊形$VWDJ$ 即可

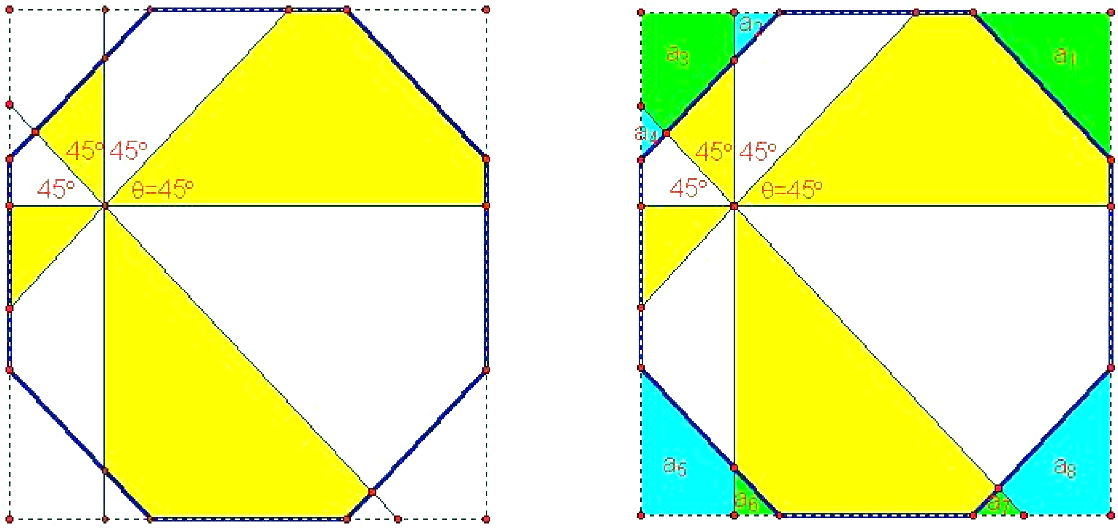
正方形邊長 $\overline{AB} = 1$，設 $\overline{NI} = x$, $\overline{EN} = y$

四邊形$LCRQ = y \cdot (1 - 2x - y)$

四邊形$VWDJ = (1 - 2x - y) \cdot [1 - (2x + 1 - 2x - y)] = (1 - 2x - y) \cdot y$　　故得證

所以，在正方形當中，也可得到同一性質。

(二)n=3 時，即正 8 邊形



圖(九)

由上一點可知，在正方形內以 45 度角切割出 8 個區域，分割面積和會相等，所以，若要證明正 8 邊形，我們可利用上述性質，如此一來，只需針對正方形與正 8 邊形所夾區域的面積進行討論即可，即 $a_1+a_3+a_6+a_7=a_2+a_4+a_5+a_8$

<pf>:

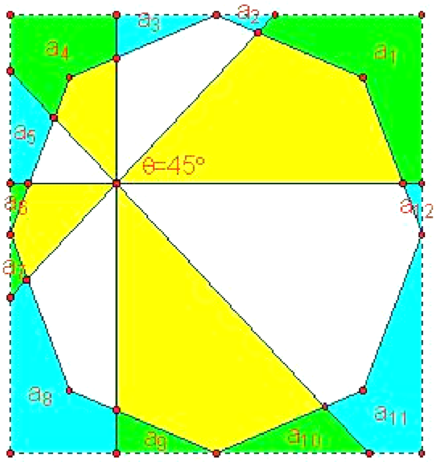
如圖(九)，將正 8 邊形以正方形與之外接，又已知正方形以 45 度角切成 8 塊，此式子成立，所以證明外部面積相等即可。

正方形與正 8 邊形所夾出的 4 個三角形區塊，面積相等
(a_k 表示其區域的面積)利用三角形全等性質(AAS)可得 $a_2=a_6$; $a_4=a_7$

又 $(a_1)+(a_2+a_3+a_4)=(a_5+a_6)+(a_7+a_8)$ 我們可推得
$\Rightarrow a_1+a_6+a_3+a_7=a_5+a_2+a_4+a_8$

得證

若外接的正方形不與正 8 邊形任一邊互相平行(如圖(十))，我們也可得到相同的結果。



圖(十)

<pf>:
同理，

將正 8 邊形以正方形與之外接,又已知正方形以 45 度角切成 8 塊，此式子成立，所以證明外部面積相等即可。

正方形與正 8 邊形所夾出的 4 個凹 4 邊形區塊，面積相等

利用三角形全等性質(RHS 或 ASA) 可得

$a_2 = a_7(ASA)$; $a_3 = a_9(RHS)$; $a_6 = a_{12}(RHS)$; $a_5 + a_6 = a_{10}(ASA)$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_{10} + a_{11} \Rightarrow a_4 + a_9 = a_{11}$$
$$a_5 + a_6 = a_{10} \Rightarrow a_5 + a_{12} = a_{10}$$
$$a_7 + a_8 + a_9 = a_1 + a_2 + a_{12} \Rightarrow a_8 + a_9 = a_1 + a_{12}$$

$$\text{綠色部分面積} = a_1 + a_4 + a_6 + a_7 + a_9 + a_{10} = a_1 + a_4 + a_{10} + (a_2 + a_3 + a_{12})$$
$$= a_8 + a_9 - a_{12} + a_{11} - a_9 + a_5 + a_{12} + (a_2 + a_3 + a_{12})$$
$$= a_2 + a_3 + a_5 + a_8 + a_{11} + a_{12} = \text{藍色部分面積}$$

得證

利用相同對稱的手法也可證明正 2^n 邊形。

五、古典問題的推廣

接下來我們將用新手法處理一道舊題目：

(一)在同一直線上，n 個相異點最多可將該直線分割成 $C_0^n + C_1^n$ 個線段

(二)在同一平面中，n 條直線最多可將該平面分割成 $C_0^n + C_1^n + C_2^n$ 個區塊

原始手法：
設 n 條直線最多可將該平面分割成a_n塊區域，

可得遞迴關係$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$，可得$a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$

新手法：

原本是一個區域：C_0^n

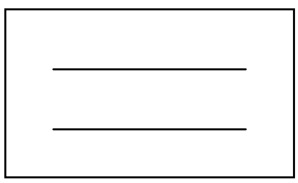
每多 1 條直線，就多 1 個區塊，

所以 n 條平行直線，就切出$C_0^n + C_1^n$個區塊。

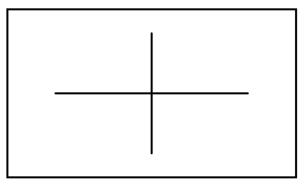
接下來我們觀察兩平行直線及兩相交直線的情形，
發現每多 1 個交點，就多 1 個區塊，
若要分割出最多區域，則任 2 條直線要有 1 個交點，

所以 n 條直線，最多有C_2^n個交點，最多就切出$C_0^n + C_1^n + C_2^n$個區塊。

1 個區域

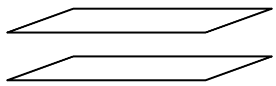


3 個區域

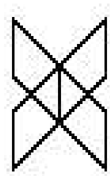


4 個區域

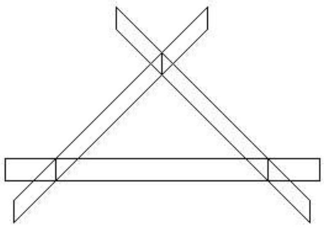
(三)在同一空間中，n 個平行平面最多可將空間分割成 n+1 個區域；2 個平行平面可將空間分割成 3 個區域，但若 2 平面相交於一直線，可多隔出 1 個區域，所以要隔出最多區域，要求任 2 個平面相交於一直線；今觀察 3 平面相交情形，若任兩平面相交於一直線，且 3 直線相交於一點（即 3 平面相交於一點時），又可多隔出一個區域，故要求任 3 個平面相交於一點，所以 n 個平面最多有 C_2^n 條交線、C_3^n 個交點，故最多可將該空間分割成 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n$ 個區塊



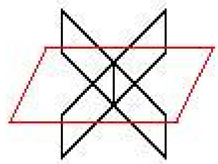
2 個平面隔出 3 個空間



若 2 平面有一交線，
可多隔出一個區域



3 平面隔出 7 個區域



3 平面相交於一點，可
多隔出一個區域

原始手法：設 n 個平面最多可將空間分割成塊區域，

可得遞迴關係 $\begin{cases} b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \\ b_1 = 2 \end{cases}, a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$，其中 a_n 為 n 條直線最多可將平面分割的區域數，可得 $b_n = \dfrac{n^3+5n+6}{6}$

例：

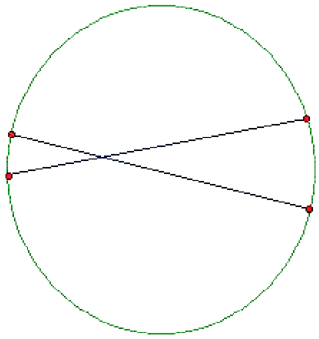
空間中四平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 可將空間分割出 $C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 = 15$ 個區塊，表列如下：(1)表示聯立不等式 $x>0, y>0, z>0, x+y+z-1<0$ 所形成的區域，大於 0 用「+」表示，小於 0 用「-」表示。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
x	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-
y	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
x+y+z-1	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+

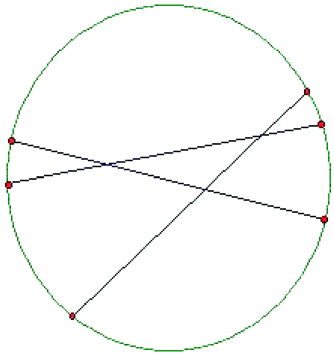
(16)不合

六、接下來我們再考慮一個更深入的問題

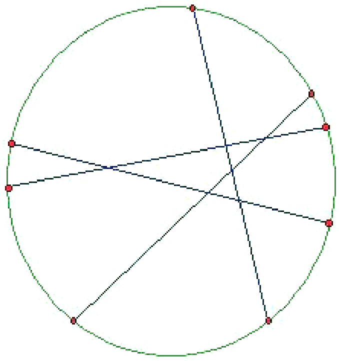
(一)一個披薩切 n 刀，最多可以切 $C_0^n + C_1^n + C_2^n$ 片，其中有幾塊不含披薩的邊？觀察如下：



切 4 塊
不含邊的有 0 塊



切 7 塊
不含邊的有 1 塊



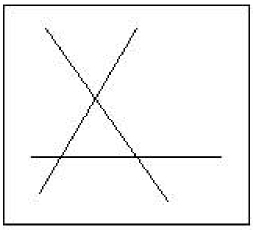
切 11 塊
不含邊的有 3 塊

切 n 刀時，刀痕恰與披薩有 2n 個交點，此時含邊的披薩有 2n 塊，不含邊的披薩有

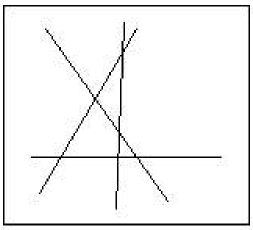
$$C_0^n + C_1^n + C_2^n - 2n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_2^{n-1} \text{塊}$$

(二)一個西瓜切 n 刀，最多可以切 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n$ 塊，其中有幾塊不含西瓜皮？觀察如下：

$n = 1,2,3$ 時，不含西瓜皮的塊數爲 0



$n = 4$ 時，前 3 個平面與第 4 個平面的交線在第 4 個平面上最多分割出 $C_0^3 + C_1^3 + C_2^3$ 區域，其中有 C_2^2 塊封閉區域，所以有 C_2^2 塊不含西瓜皮的區域



$n = 5$ 時，前 4 個平面與第 5 個平面的交線在第 5 個平面上最多分割出 $C_0^4 + C_1^4 + C_2^4$ 區域，其中有 C_2^3 塊封閉區域，所以多了 C_2^3 塊不含西瓜皮的區域，共有 $C_2^2 + C_2^3$ 塊不含西瓜皮

依此想法，切 n 刀共有

$$C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{n-2} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = C_3^{n-1} \text{塊不含西瓜皮}$$

七、歸納

R^k 空間中的 n 個 R^{k-1} 維超平面，最多可將 R^k 空間分成 $C_0^n+C_1^n+\cdots+C_k^n$ 個部份，其中有界區域有 C_k^{n-1} 塊。

想法：n 個 R^{k-1} 維超平面，最多交出 C_2^n 個 R^{k-2} 維超平面、C_3^n 個 R^{k-3} 維超平面、……、C_k^n 個交點，所以最多分割出 $C_0^n+C_1^n+\cdots+C_k^n$ 個部份。用第六部份相同的手法亦可得到：其中有界區域有 C_k^{n-1} 塊。

伍、 研究結果

一、在圖(二)中，半徑 r 的圓形內任一點 P，過此點畫四條直線，四塊黃色披薩的夾角皆為θ，四塊白色披薩的夾角皆為$90°-\theta$，則四塊黃色披薩的面積為$r^2(2\theta)$

二、直線 L 交一球面$x^2+y^2+z^2=r^2$於 A,B 兩點，包含直線 L 的四個平面$E_1\ E_2\ E_3\ E_4$將此球體切成 8 塊，E_1與E_2的夾角θ，E_3與E_4的夾角θ，$E_1\perp E_3$且$E_2\perp E_4$(如圖(四))，將四塊夾角θ的區域體積總和為$\dfrac{8r^3\theta}{3}$

三、在橢圓形披薩，正2^n邊形的披薩及球體，我們亦有相似的結果

(一)直線上的 n 個點，最多可將直線分成$C_0^n+C_1^n$個部份

(二)平面上的 n 個直線，最多可將平面分成$C_0^n+C_1^n+C_2^n$個部份，其中有界區域(不含邊的披薩)有$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=C_2^{n-1}$塊

(三)空間中的 n 個平面，最多可將空間分成$C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n$個部份，其中有界區域(不含西瓜皮)有$\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}=C_3^{n-1}$塊

(四)R^k空間中的 n 個R^{k-1}維超平面，最多可將R^k空間分成$C_0^n+C_1^n+\cdots+C_k^n$個部份，其中有界區域有C_k^{n-1}塊

陸、　討論

在披薩定理的推廣中，若只有一組垂直線，另一組不垂直，這將是非常有趣的問題，而對於正多邊形、一般凸多邊形及正多面體是否有類似有趣結論將是我們下一步研究的重點。

柒、　結論

我們用純三角函數推廣了披薩定理，用組合解決了古典切西瓜的問題，但這是否是最基礎的手法呢？或許在不久的將來又會有更巧妙、更精緻的討論方法，我們努力也期待著。

捌、　參考資料及其他

龍騰數亦優。第 9 刊。

高中數學。第 1~4 冊。泰宇出版社。

曹亮吉。**祖氏定理**。http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_17_10_1/index.html。

<附件一>所得數據由 GSP 求出：

當$\theta = 10°$時：

$\triangle PAB$的面積 = 0.96 公分^2

$\widehat{AB}$的面積 = 0.01 公分^2

$\triangle PCD$的面積 = 0.15 公分^2

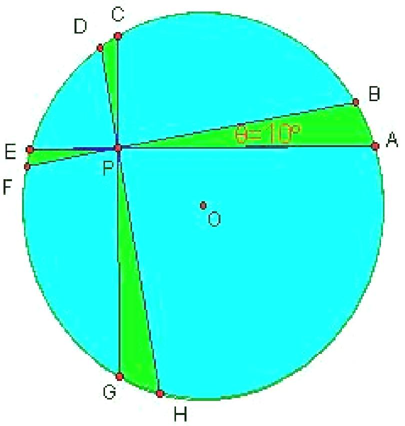
$\widehat{CD}$的面積 = 0.00 公分^2

$\triangle PEF$的面積 = 0.12 公分^2

$\widehat{EF}$的面積 = 0.00 公分^2

$\triangle PGH$的面積 = 0.76 公分^2

$\widehat{GH}$的面積 = 0.01 公分^2



$\triangle PBC$的面積 = 2.21 公分^2

$\widehat{BC}$的面積 = 1.45 公分^2

$\triangle PDE$的面積 = 0.73 公分^2

$\widehat{DE}$的面積 = 0.14 公分^2

$\triangle PFG$的面積 = 1.72 公分^2

$\widehat{FG}$的面積 = 0.96 公分^2

$\triangle PHA$的面積 = 5.23 公分^2

$\widehat{HA}$的面積 = 3.69 公分^2

($\triangle PAB$的面積+($\widehat{AB}$的面積)+($\triangle PCD$的面積+($\widehat{CD}$的面積)+($\triangle PEF$的面積)+($\widehat{EF}$的面積)+($\triangle PGH$的面積)+($\widehat{GH}$的面積) = 2.02 公分^2

($\triangle PBC$的面積+($\widehat{BC}$的面積)+($\triangle PDE$的面積+($\widehat{DE}$的面積)+($\triangle PFG$的面積)+($\widehat{FG}$的面積)+($\triangle PHA$的面積)+($\widehat{HA}$的面積) = 16.13 公分^2

當$\theta = 15°$時；

$\triangle PBA$的面積 = 1.37 公分^2

$\widehat{AB}$的面積 = 0.03 公分^2

$\triangle PDC$的面積 = 0.22 公分^2

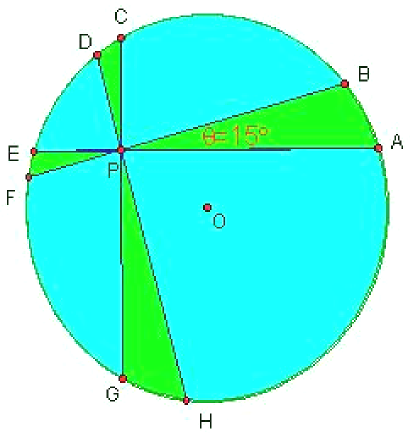
$\widehat{CD}$的面積 = 0.00 公分^2

$\triangle PEF$的面積 = 0.19 公分^2

$\widehat{EF}$的面積 = 0.00 公分^2

$\triangle PGH$的面積 = 1.18 公分^2

$\widehat{GH}$的面積 = 0.02 公分^2



$\triangle CPB$的面積 = 2.09 公分^2

$\widehat{BC}$的面積 = 1.14 公分^2

$\triangle PED$的面積 = 0.69 公分^2

$\widehat{DE}$的面積 = 0.11 公分^2

$\triangle PFG$的面積 = 1.75 公分^2

$\widehat{FG}$的面積 = 0.85 公分^2

$\triangle PHA$的面積 = 5.33 公分^2

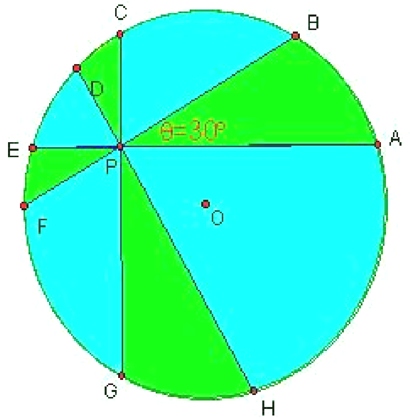
$\widehat{HA}$的面積 = 3.16 公分^2

($\triangle PBA$的面積+($\widehat{AB}$的面積)+($\triangle PDC$的面積+($\widehat{CD}$的面積)+($\triangle PEF$的面積)+($\widehat{EF}$的面積)+($\triangle PGH$的面積)+($\widehat{GH}$的面積) = 3.02 公分^2

($\triangle CPB$的面積+($\widehat{BC}$的面積)+($\triangle PED$的面積+($\widehat{DE}$的面積)+($\triangle PFG$的面積)+($\widehat{FG}$的面積)+($\triangle PHA$的面積)+($\widehat{HA}$的面積) = 15.12 公分^2

當$\theta = 30°$時 ：

$\triangle BPA$的面積 = 2.32公分^2
$\overset{\frown}{AB}$的面積 = 0.19公分^2
$\triangle DPC$的面積 = 0.39公分^2
$\overset{\frown}{CD}$的面積 = 0.01公分^2
$\triangle PEF$的面積 = 0.42公分^2
$\overset{\frown}{EF}$的面積 = 0.01公分^2
$\triangle PGH$的面積 = 2.50公分^2
$\overset{\frown}{GH}$的面積 = 0.20公分^2



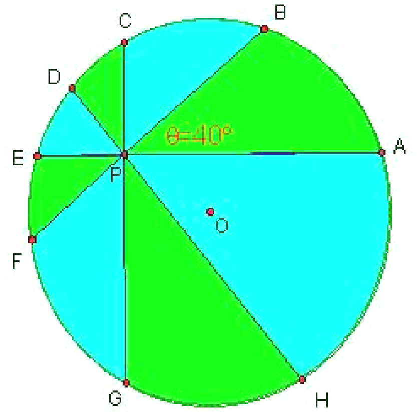
$\triangle CPB$的面積 = 1.63公分^2
$\overset{\frown}{BC}$的面積 = 0.48公分^2
$\triangle PED$的面積 = 0.56公分^2
$\overset{\frown}{DE}$的面積 = 0.05公分^2
$\triangle PFG$的面積 = 1.80公分^2
$\overset{\frown}{FG}$的面積 = 0.56公分^2
$\triangle PAH$的面積 = 5.22公分^2
$\overset{\frown}{HA}$的面積 = 1.78公分^2

($\triangle BPA$的面積+($\overset{\frown}{AB}$的面積)+($\triangle DPC$的面積+($\overset{\frown}{CD}$的面積)+($\triangle PEF$的面積+($\overset{\frown}{EF}$的面積)+($\triangle PGH$的面積)+($\overset{\frown}{GH}$的面積) = 6.05公分^2

($\triangle CPB$的面積+($\overset{\frown}{BC}$的面積)+($\triangle PED$的面積+($\overset{\frown}{DE}$的面積)+($\triangle PFG$的面積)+($\overset{\frown}{FG}$的面積)+($\triangle PAH$的面積)+($\overset{\frown}{HA}$的面積) = 12.09公分^2

當$\theta = 40°$時 ：

$\triangle PAB$的面積 = 2.68公分^2
$\overset{\frown}{AB}$的面積 = 0.40公分^2
$\triangle PCD$的面積 = 0.49公分^2
$\overset{\frown}{CD}$的面積 = 0.03公分^2
$\triangle PEF$的面積 = 0.60公分^2
$\overset{\frown}{EF}$的面積 = 0.04公分^2
$\triangle PGH$的面積 = 3.34公分^2
$\overset{\frown}{GH}$的面積 = 0.49公分^2



$\triangle PBC$的面積 = 1.30公分^2
$\overset{\frown}{BC}$的面積 = 0.24公分^2
$\triangle PDE$的面積 = 0.48公分^2
$\overset{\frown}{DE}$的面積 = 0.03公分^2
$\triangle PFG$的面積 = 1.77公分^2
$\overset{\frown}{FG}$的面積 = 0.39公分^2
$\triangle PHA$的面積 = 4.80公分^2
$\overset{\frown}{HA}$的面積 = 1.08公分^2

($\triangle PAB$的面積+($\overset{\frown}{AB}$的面積)+($\triangle PCD$的面積+($\overset{\frown}{CD}$的面積)+($\triangle PEF$的面積+($\overset{\frown}{EF}$的面積)+($\triangle PGH$的面積)+($\overset{\frown}{GH}$的面積) = 8.06公分^2

($\triangle PBC$的面積+($\overset{\frown}{BC}$的面積)+($\triangle PDE$的面積+($\overset{\frown}{DE}$的面積)+($\triangle PFG$的面積)+($\overset{\frown}{FG}$的面積)+($\triangle PHA$的面積)+($\overset{\frown}{HA}$的面積) = 10.08公分^2

【評語】040403

1. 參考資料有待加強。

2. 本作品的前、後兩部分採用不同的數學方法，缺乏邏輯關係，似乎該分成兩個科展作品來進行。

3. 前部分(切西瓜問題)的結果頗具推廣性，應進行進一步的研究。

4. 數學表達能力與科展品質有密切關係，請加強數學作文訓練。