中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040402

圓舞曲

學校名稱：國立羅東高級中學

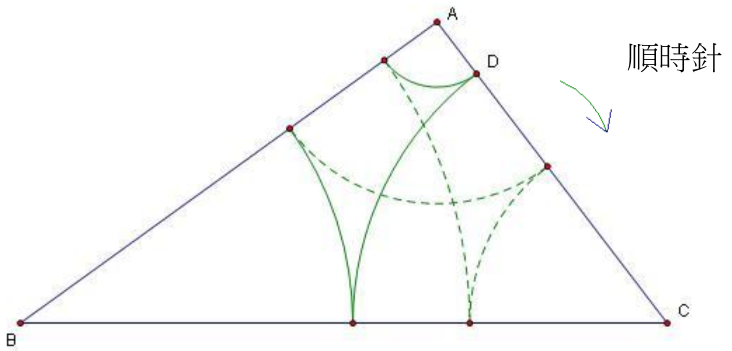
作者：	指導老師：
高二 林志賢 高二 吳禮揚 高二 楊璿縉 高二 李易哲	潘冠群

關鍵詞：六點共圓、內切圓、回歸

圓舞曲

摘要

在ΔABC邊上，以一頂點A為圓心任意邊長為半徑畫弧，再以順時針(或逆時針)的方式選定下一個頂點C，以之為圓心$\overline{CD}$為半徑畫弧，依此法繼續做圖，直到軌跡交於起始點，此為以下探討之基本作圖。



一、 在三角形中，依此作圖法會有：

(一) 在第一輪回到起始點：

初始以A點為圓心，半徑$=\dfrac{b+c-a}{2}$作圖。

(二) 在第二輪回到起始點：

初始以A點為圓心，半徑$\neq\dfrac{b+c-a}{2}$作圖，且中途無超出三角形。可與各邊各交兩點，分別與內心連線，可得三個全等的等腰三角形。

二、 任意n邊形有內切圓，則：

(一) 若n為偶數，則必能一輪回歸。

(二) 若n為奇數，則有必能一輪或兩輪回歸。

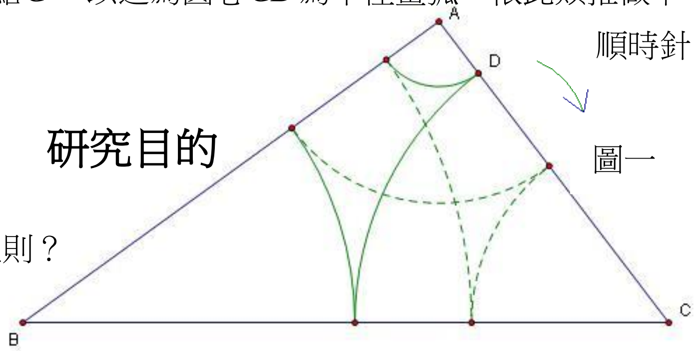
三、 任意n邊形之一般條件，則：

(一) 若n為偶數，且隔邊邊長和相等則必定一輪回歸。

(二) 若n為奇數，則有必能一輪或兩輪回歸。

壹、　研究動機

在高一的數學課時，老師提到了在ΔABC邊上，以一頂點A為圓心任意邊長為半徑畫弧，再以順時針(或逆時針)的方式選定下一個頂點C，以之為圓心$\overline{CD}$為半徑畫弧，依此類推做下去，如圖一。



圖一

貳、　研究目的

一、　畫弧的次數是否有一定的規則？

二、　所構成的圖形有何特性？

參、　研究設備及器材

電腦、GSP(動態幾何繪圖程式)、紙、筆

肆、　研究過程或方法

一、　三角形

首先用三角形來嘗試，我們以完成一次綠色軌跡為第一輪，綠虛線為第二輪(圖一)，發現在三角形中，只會有三種狀況：

(一)　在第一輪即回到起始點

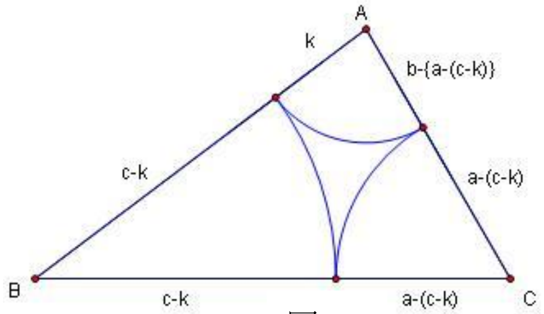
如圖二，要形成此狀況，會因為起始的點不同而影響初始半徑，但一個三角形僅會有一種可能，只要給定三角形的三邊長及初始半徑，即可利用以下公式求出半徑。

研究1　ΔABC三邊長a、b、c，若以A為起始點逆時針方向，半徑等於$\dfrac{b+c-a}{2}$時，可一輪回歸。

由右圖可得

$k=b-\{a-(c-k)\}$

$\Rightarrow k=\dfrac{b+c-a}{2}$



圖二

(二)　在第二輪才回到起始點

若以任一長度為半徑，多半不會一輪回歸。下列表格為依據不同初始圓心，依序畫弧時所用的半徑。

逆時針	A(以 A 為頂點畫弧)	B(以 B 為頂點畫弧)	C(以 C 為頂點畫弧)
第一輪	K	c-K	a-c+K
第二輪	b-a+c-K	a-b+k	b-K
第三輪	K	c-K	a-c+K

順時針	A	C	B	逆時針	B	C	A
第一輪	K	b-K	a-b+K	第一輪	K	a-K	b-a+K
第二輪	c-a+b-K	a-c+K	c-K	第二輪	c-b+a-K	b-c+K	b-K
第三輪	K	b-K	a-b+K	第三輪	K	a-K	b-a+K

順時針	B	A	C	順時針	C	B	A
第一輪	K	c-K	b-c+K	第一輪	K	a-K	b-a+K
第二輪	a-b+c-K	b-a+k	a-K	第二輪	c-b+a-K	c-b+k	b-K
第三輪	K	c-K	b-c+K	第三輪	K	a-K	b-a+K

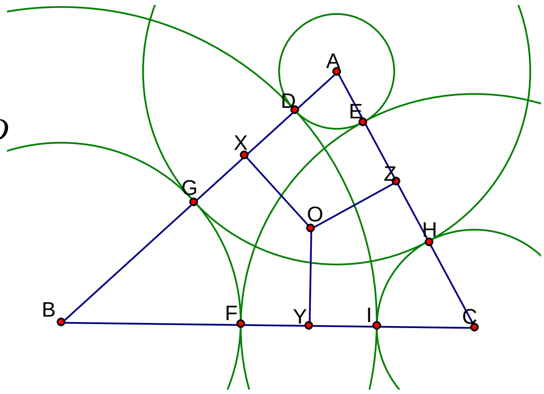
逆時針	C	A	B
第一輪	K	b-K	c-b+K
第二輪	a-c+b-K	c-a+K	a-K
第三輪	K	b-K	c-b+K

由上表可以觀察出：

1. 同一初始圓心,同一初始半徑,所畫出的圖形相同
2. 不論如何取,第三輪的半徑與第一輪相同,所以 2 次輪迴一定會回到原本之出發點

以下證明此圖形的些許性質。

研究2 已知 D,E,F,G,H,I 為貳輪回歸的交點，O 為三角形之內心(圖三)。證明內心到 2 輪回歸的 6 個點等距離。



1.先做 o 到三邊垂線交於 x,y,z

2.因為 $\overline{OA}=\overline{OA}$, $\overline{AD}=\overline{AE}$, $\angle DAO=\angle EAO$

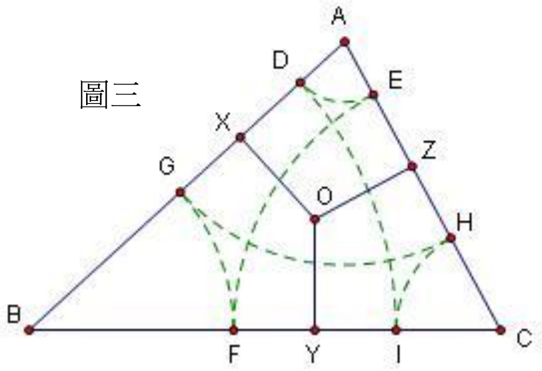
所以 $\Delta ADO\cong\Delta AEO$ (SAS 全等)

所以 $\overline{OD}=\overline{OE}$ 同理 $\overline{OG}=\overline{OF}$, $\overline{OI}=\overline{OH}$

3.因為 $\overline{OX}=\overline{OZ}$, $\angle OXD=\angle OZE=90°$

所以 $\Delta OXD\cong\Delta OZE$

所以 $\overline{XD}=\overline{ZE}$ 同理 $\overline{XG}=\overline{YF}$, $\overline{YI}=\overline{ZH}$



圖三

4. 因為 $\overline{XD}=\overline{ZE}$, $\overline{XG}=\overline{YF}$, $\overline{YI}=\overline{ZH}$

$\overline{DG}=\overline{IF}=$半徑差,又 $\overline{IF}=\overline{HE}=$半徑差

$\Rightarrow \overline{DG}=\overline{FI}=\overline{HE}$
$\Rightarrow \overline{XD}+\overline{XG}=\overline{YF}+\overline{YI}=\overline{ZE}+\overline{ZH}$

所以 $\overline{XD}=\overline{ZE}=\overline{XG}=\overline{YF}=\overline{YI}=\overline{ZH}=\overline{ZE}$

5.因為 $\overline{DX}=\overline{XG}$, $\overline{XO}=\overline{XO}$, $\angle GXO=\angle DXO$

所以 $\Delta GXO\cong\Delta DXO$

所以 $\overline{OG}=\overline{OD}$,同理 $\overline{OE}=\overline{OH}$, $\overline{OF}=\overline{OI}$

6.由此可得 $\overline{OB}=\overline{OG}=\overline{OE}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OF}$

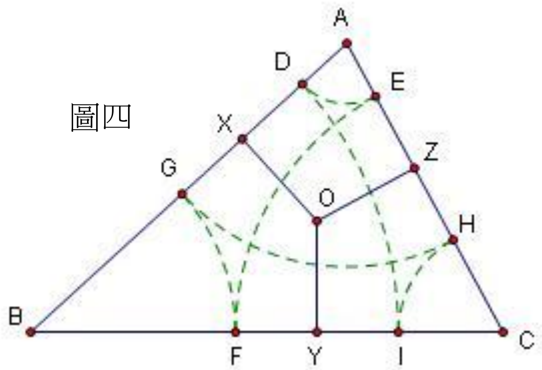
得證

研究3　已知$\overline{OX}$為$\overline{GD}$之中垂線，$\overline{OY}$為$\overline{FI}$之中垂線，$\overline{OZ}$為$\overline{EH}$中垂線(圖四)。試證 O 為三角形 ABC 之內心

1.因為$\overline{OY}$,$\overline{OZ}$分別為$\overline{FI}$,$\overline{EH}$之中垂線

所以$\overline{YF}=\overline{YI}$,$\overline{ZH}=\overline{ZE}$又$\overline{FI}=\overline{EH}$ (因$\overline{CE}=\overline{CF}$ ，$\overline{CH}=\overline{CI}$,半徑差)

所以$\overline{YI}=\overline{ZH}$



圖四

2.因為$\overline{CI}=\overline{CH}$,$\overline{YI}=\overline{ZH}$

所以$\overline{CI}+\overline{YI}=\overline{CH}+\overline{ZH}$

所以$\overline{YC}=\overline{ZC}$

又因$\overline{OY}$垂直於$\overline{BC}$,$\overline{OZ}$垂直於$\overline{AC}$

$\overline{OC}=\overline{OC}$
所以$\Delta OYC \cong \Delta OZC$ [RHS 全等]
所以$\angle OCY=\angle OCZ$

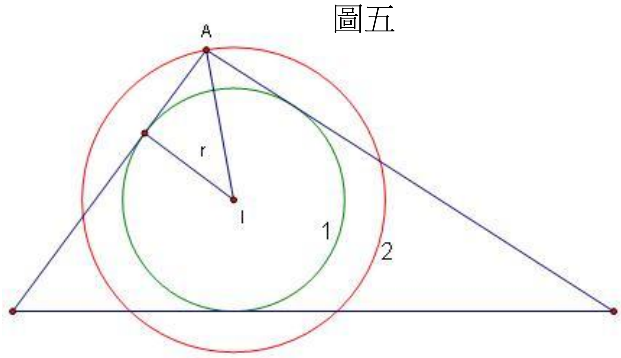
所以$\overline{OC}$為$\angle YCZ$之角平分線

同理$\overline{OA}$為$\angle XAZ$之角平分線

$\overline{OB}$為$\angle XBY$之角平分線

固得證 O 為ΔABC之內心

圖五



由上述證明可發現一現象:
由三角形之內心以任意半徑交於三邊 6 點

條件：1.半徑不可超過內心到頂點的最小距離$\overline{IA}$

2.不可小於內切圓半徑 r,如圖五

即為我們所討論的 2 輪回歸的 6 個點,將其半徑逐漸縮小,6 點則會往垂點靠近,當同邊 2 點互相靠近疊合於垂點時,當時的 3 點為我們所討論的一輪回歸的點

結論：以 A 為圓心，起始半徑 k、b+c-a-k 皆可得到ΔABC邊上六點。

研究4　依兩輪回歸的畫法，於邊上可各得兩點，各邊上的兩點分別與內心連線，可得三個全等等腰三角形，且內心與內切圓切點連線皆平分等腰三角形之底。

在 ΔBEI 、 ΔBDI 中　　$\overline{BE}=\overline{BD}$ 、 $\angle IBE=\angle IBD$ 、 $\overline{BI}=\overline{BI}$

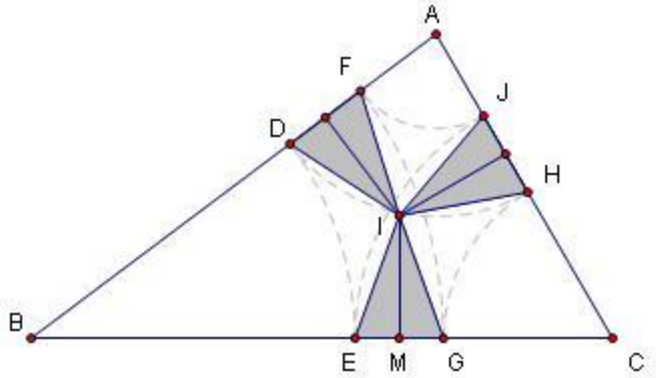
$\Rightarrow \Delta BEI \cong \Delta BDI(SAS)$

$\therefore \overline{IE}=\overline{ID}$ 、 $\angle IEG=\angle IDF$

$\Rightarrow \Delta IEG \cong \Delta IDF(SAS)$

依此類推，可證得三個三角形全等。

$\therefore \overline{IF}=\overline{IG}$ ，同理 $\overline{ID}=\overline{IH}$



在 ΔIEG 、 ΔIDF 中

$\overline{IE}=\overline{ID}$ 、 $\angle IEG=\angle IDF$ 、 $\overline{EG}=\overline{BG}-\overline{BE}=\overline{BF}-\overline{BD}=\overline{DF}$

在 ΔIEG 、ΔIDF 中，$\overline{IE}=\overline{ID}$。而在 ΔIFD 、 ΔIJH 中，$\overline{ID}=\overline{IH}$ 。又在 ΔIHJ 、 ΔIGE 中， $\overline{IH}=\overline{IG}$ 。整理過後，可得 $\overline{IE}=\overline{IG}$ ，可知 ΔIEG 為等腰三角形。

在 $\overline{EG}$ 上取一點 M 使 $\overline{IM}\perp\overline{EG}$。在 ΔIEM 、 ΔIGM 中，$\overline{IE}=\overline{IG}$ 、 $\overline{IM}=\overline{IM}$ 、 $\angle IME=\angle IMG=90°$ ，$\Rightarrow \Delta IEM \cong \Delta IGM(RHS)$ ，$\therefore \overline{EM}=\overline{GM}$ 。

研究5　ΔABC 依二輪循環作圖，以 A 為起點，初始值為 k，於各邊上可得兩點。此兩點相當於以 I 為圓心 $\overline{IX}$ 為半徑畫圓，於各邊所割之兩點。則

$\overline{IX}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)+s(s-a-k)^2}{s}}$ ，ΔIXY 的面積為

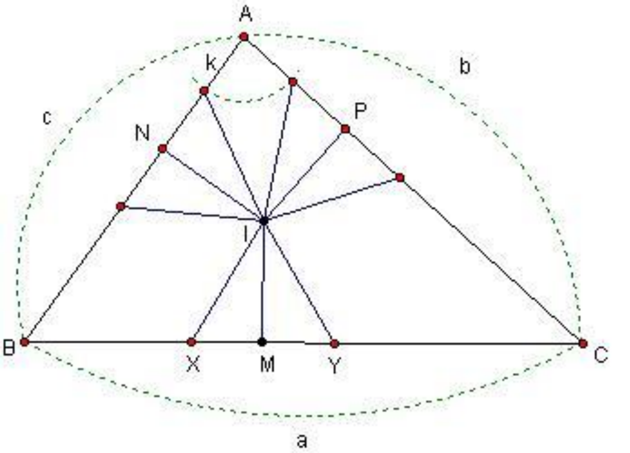
$\dfrac{(s-a-k)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$ ，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

$\overline{IM}\times s=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\overline{IM}=\dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

由圖六可知

圖六



$k = b - a + c - k - \overline{XY}$

$\overline{XY} = -a + b + c - 2k$

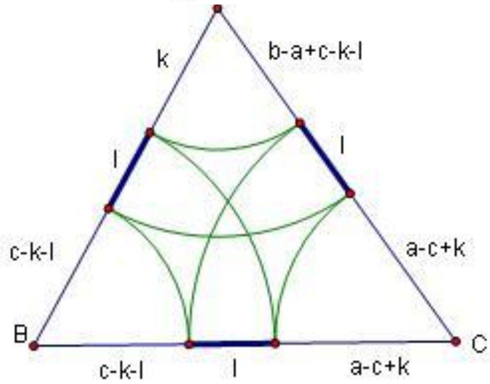
$= 2s - 2a - 2k$

由 $\overline{IM}$ 、 $\overline{XY}$ 可得

$$\overline{IX} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} + (s-a-k)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c) + s(s-a-k)^2}{s}}$$

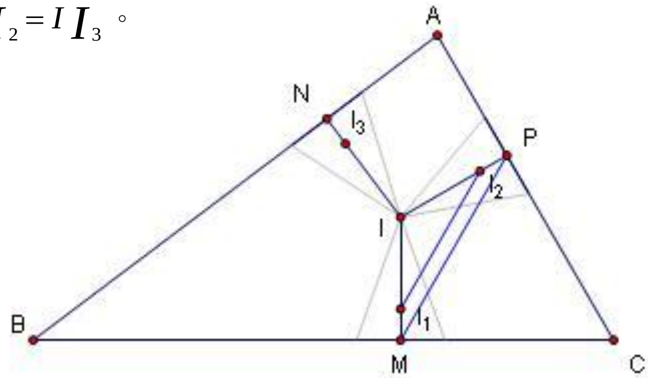
而 $a\Delta IXY = \dfrac{(s-a-k)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$



GSP 作圖中，我們發現 3 個與 ΔIXY 全等的三角形內心連線，所成的三角形與 ΔMNP 相似。證明如下：

研究6 依兩輪回歸的畫法所得之三個三角形，其內心 I_1、I_2、I_3 連線，與 ΔNMP 相似。

由於三個三角形皆全等，故 $\overline{II_1} = \overline{II_2} = \overline{II_3}$ 。



又 $\overline{IM} = \overline{IP} = \overline{IN}$

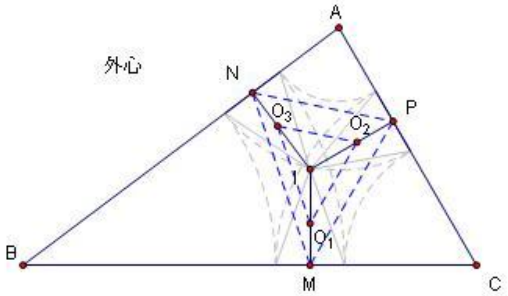
$$\therefore \frac{\overline{IM}}{\overline{II_1}} = \frac{\overline{IP}}{\overline{II_2}} = \frac{\overline{IN}}{\overline{II_3}}$$

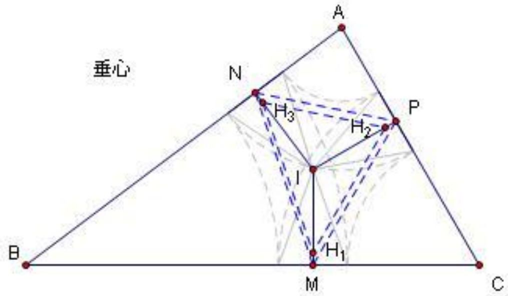
在 ΔIMP 中

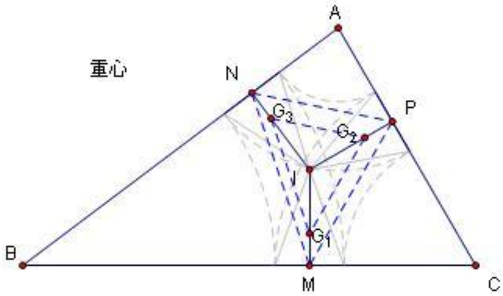
由於 $\dfrac{\overline{IM}}{\overline{II_1}} = \dfrac{\overline{IP}}{\overline{II_2}}$ ，故 $\overline{I_1I_2} // \overline{MP}$ 。

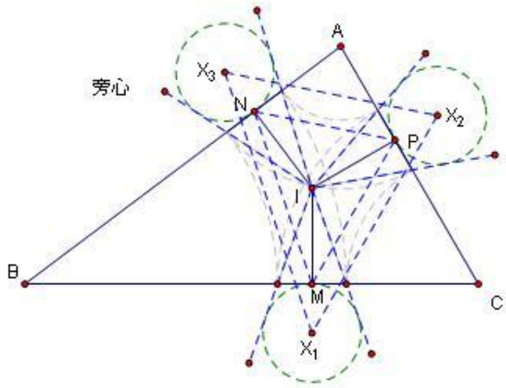
同理可證 $\overline{I_1I_3} // \overline{MN}$ 、 $\overline{I_2I_3} // \overline{PN}$ 。

即可知 $\Delta I_1I_2I_3 \approx \Delta MPN$ (SSS 相似)。









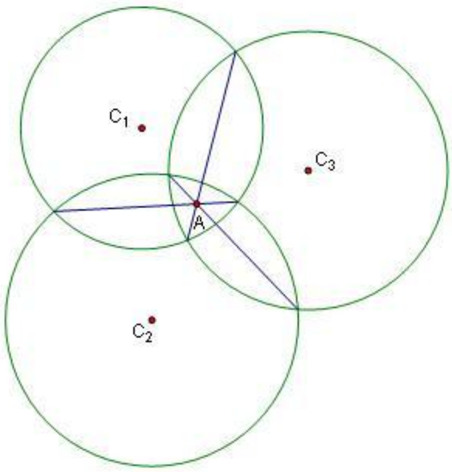
同理可證，其外心、重心、垂心、旁心(所得之旁心圓切底邊的那一個)亦皆有同樣的性質。

研究7　　三相割之圓 C_1 、 C_2 、 C_3 ，其三根軸必交於一點 A。

令 C_1 ： $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$

C_2 ： $x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$

C_3 ： $x^2+y^2+a_3x+b_3y+c_3=0$



其三根軸直線方程式：

$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0\cdots(1)$

$(a_1-a_3)x+(b_1-b_3)y+(c_1-c_3)=0\cdots(2)$

$(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y+(c_2-c_3)=0\cdots(3)$

$(2)-(1)$　$(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y+(c_2-c_3)=0$ ，恰可得(3)

以線族的概念，可將所有通過(1)、(2)交點 A 的線表示為

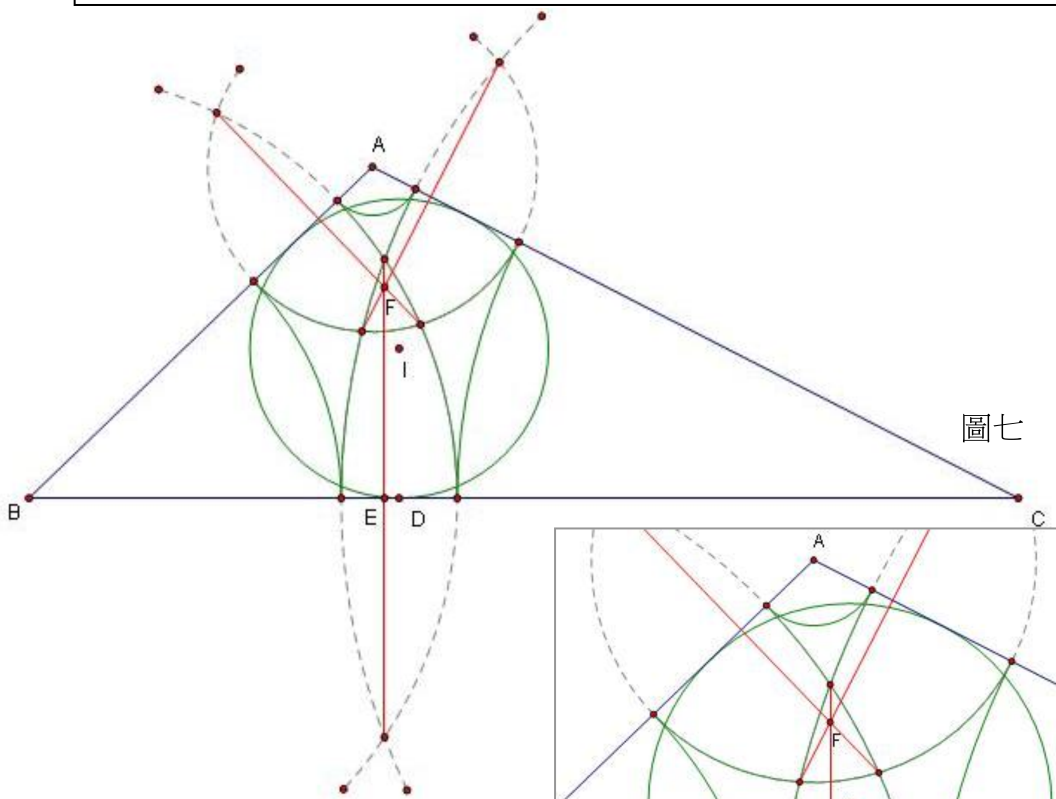
$$m\{(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)\}+n\{(a_1-a_3)x+(b_1-b_3)y+(c_1-c_3)\}=0\text{ ，}$$

m、$n\in R$

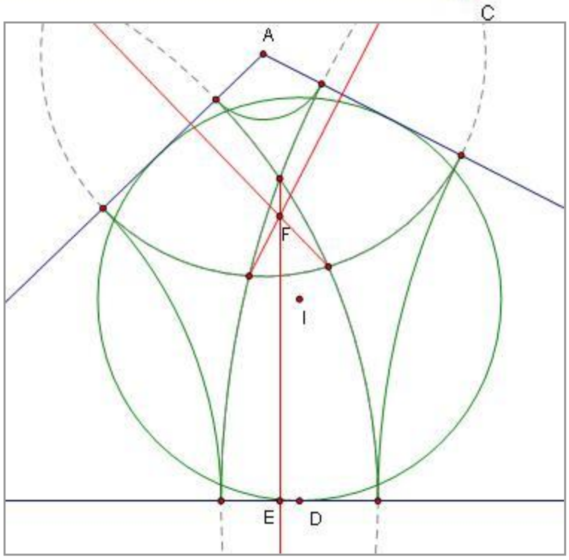
當 m=-1、n=1 時，恰可得(3)

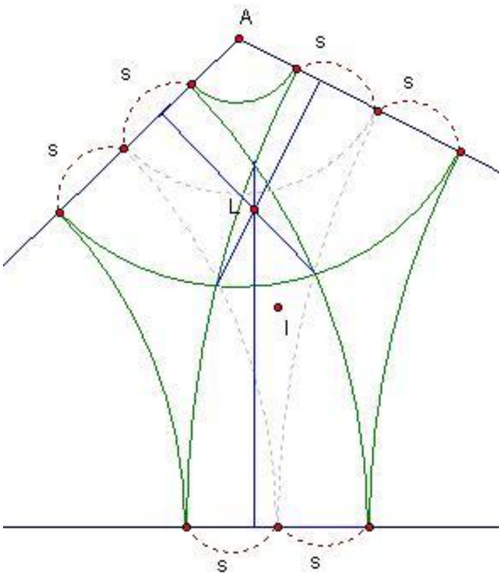
故(3)必過(1)、(2)交點 A

研究8　將部份的弧延伸，可得三段根軸(紅色線段)，其交點 F，過 F 作 $\overline{BC}$ 垂線交於 E，內切圓 I 於 $\overline{BC}$ 交 D 點，當三角形固定不變，改變其初始半徑，則 $\dfrac{\overline{FI}}{\overline{DE}}=k$，k 為大於 0 的實數。



圖七

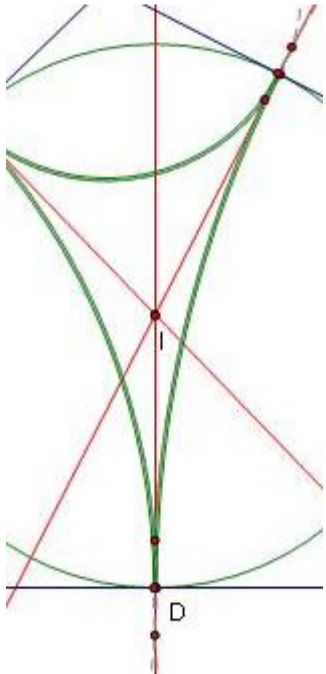




圖八

令此三圓為(一輪回歸之作圖，如圖九)

圖九



C_1 ： $(x+a_1)^2+(y+b_1)^2=r_1^{\ 2}$

C_2 ： $(x+a_2)^2+(y+b_2)^2=r_2^{\ 2}$

C_3 ： $(x+a_3)^2+(y+b_3)^2=r_3^{\ 2}$

可知三根軸分別為(其中 I 為三根軸交點)

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y=r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2}-a_1^{\ 2}-b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}$$

$$2(a_2-a_3)x+2(b_2-b_3)y=r_2^{\ 2}-r_3^{\ 2}-a_2^{\ 2}-b_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+b_3^{\ 2}$$

$$2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y=r_3^{\ 2}-r_1^{\ 2}-a_3^{\ 2}-b_3^{\ 2}+a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}$$

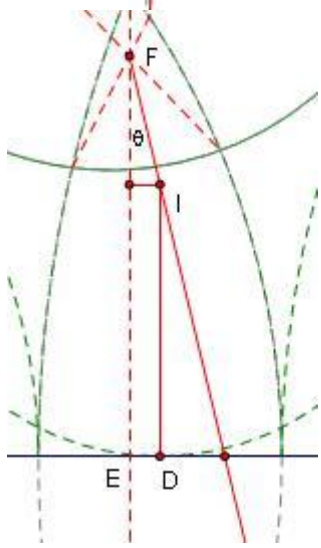
改變其初始半徑，畫出第二組圖形，令三圓為(如圖八)

$C_1^{\ '}$ ： $(x+a_1)^2+(y+b_1)^2=(r_1+s)^2$

$C_2^{\ '}$ ： $(x+a_2)^2+(y+b_2)^2=(r_2+s)^2$

$C_3^{\ '}$ ： $(x+a_3)^2+(y+b_3)^2=(r_3+s)^2$

圖十



其根軸分別為(其中 L 為三根軸交點) (如圖八)

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y=(r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2}-a_1^{\ 2}-b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2})+2r_1s-2r_2s=k_1+2s(r_1-r_2)$$

$$2(a_2-a_3)x+2(b_2-b_3)y=(r_2^{\ 2}-r_3^{\ 2}-a_2^{\ 2}-b_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+b_3^{\ 2})+2r_2s-2r_3s=k_2+2s(r_2-r_3)$$

$$2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y=(r_3^{\ 2}-r_1^{\ 2}-a_3^{\ 2}-b_3^{\ 2}+a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2})+2r_3s-2r_1s=k_3+2s(r_3-r_1)$$

求初始半徑改變前後之斜率：

設第一組根軸交點(內心)為 (x_0,y_0)

$$\begin{cases} 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y=k_1 \ldots\ldots(1) \\ 2(a_2-a_3)x+2(b_2-b_3)y=k_2 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

解 x、y

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & 2(b_1-b_2) \\ k_2 & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2(a_2-a_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}} \text{、} y_0=\frac{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & k_1 \\ 2(a_2-a_3) & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2(a_2-a_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}$$

第二組根軸交點為 (x_1,y_1)

$$\begin{cases} 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y=k_1+2s(r_1-r_2) \ldots\ldots(1) \\ 2(a_2-a_3)x+2(b_2-b_3)y=k_2+2s(r_2-r_3) \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

解 x、y

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} k_1+2s(r_1-r_2) & 2(b_1-b_2) \\ k_2+2s(r_2-r_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2(a_2-a_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & 2(b_1-b_2) \\ k_2 & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2s(r_1-r_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2s(r_2-r_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2(a_2-a_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}$$

$$x_1=x_0+\frac{4s\begin{vmatrix} r_1-r_2 & b_1-b_2 \\ r_2-r_3 & b_2-b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2(a_2-a_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}$$

同理 $y_1=y_0+\dfrac{4s\begin{vmatrix} a_1-a_2 & r_1-r_2 \\ a_2-a_3 & r_2-r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1-a_2) & 2(b_1-b_2) \\ 2(a_2-a_3) & 2(b_2-b_3) \end{vmatrix}}$

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} a_1-a_2 & r_1-r_2 \\ a_2-a_3 & r_2-r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1-r_2 & b_1-b_2 \\ r_2-r_3 & b_2-b_3 \end{vmatrix}}=\text{定值}$$

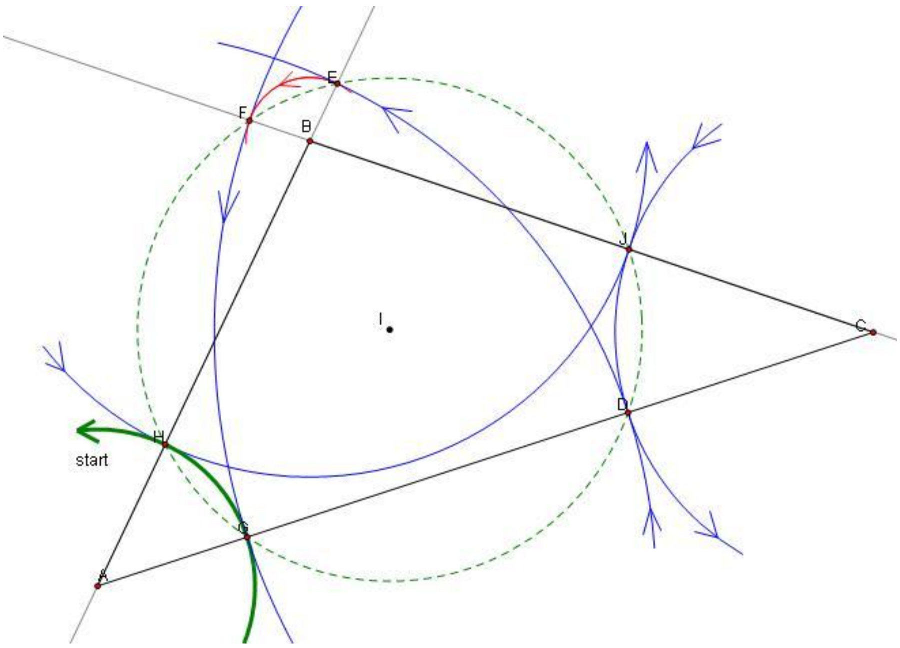
故可知交點軌跡為一直線。

又當圖形趨近於一輪回歸時，可發現其軌跡通過內心(如圖九)。

由於軌跡通過內心，故 θ 不改變，因此 $\dfrac{\overline{FI}}{\overline{DE}}=\sin\theta$=定值(如圖十)。

(三)　在第一輪或第二輪時即超出三角形

在此狀況時，如右圖紅色部分，當超出時，繼續按照頂點順序當圓心畫弧，但改交在原本應交之線段延長線上。



雖然超出三角形，但仍可發現交點皆在內心所放大的圓上，與前面所得相同。

二、　n 邊形

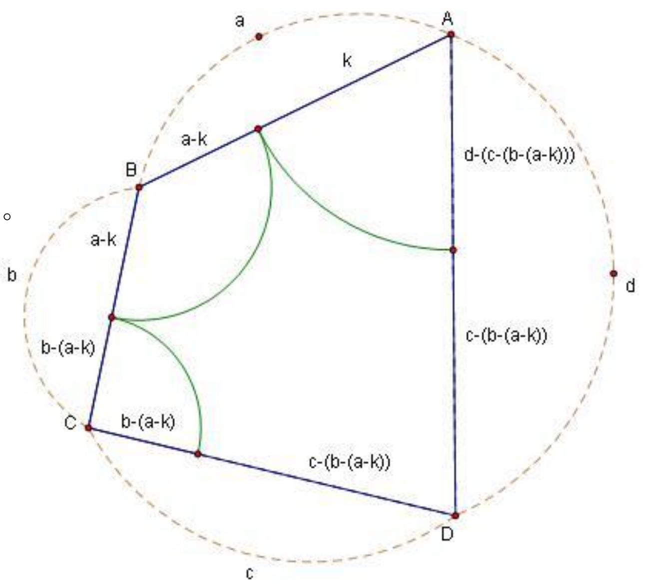
研究9　在四邊形內若有內切圓，則可一輪回歸。

由右圖可知

$k=d-(c-(b-(a-k)))$

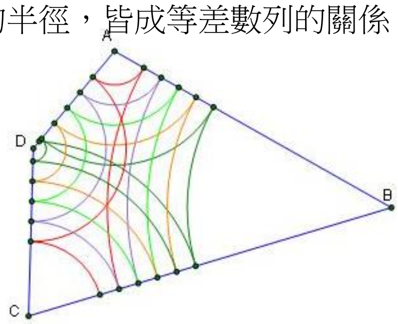
$\Rightarrow a+c=b+d$

故可知有內切圓時，可一輪回歸。



而當我們以 GSP 試著在無內切圓之四邊形內繪圖，發現無論如何皆無法回歸。

以下是依照上面圖形繼續計算所畫弧的邊長，若無內切圓，則會一直循環。由下表可看出，同一頂點所畫出弧的半徑，皆成等差數列的關係，一直畫下去，直到其中一弧超出線段。



順時針	A 點	B 點	C 點	D 點
第一輪	k	a-k	b-a+k	c-b+a-k
第二輪	d-c+b-a+k	2a-d+c-b-k	2b-2a+d-c+k	2c-2b+2a-d-k
第三輪	2d-2c+2b-2a+k	3a-2d+2c-2b-k	3b-3a+2d-2c+k	3c-3b+3a-2d-k
第四輪	3d-3c+3b-3a+k	4a-3d+3c-3b-k	4b-4a+3d-3c+k	4c-4b+4a-3d-k

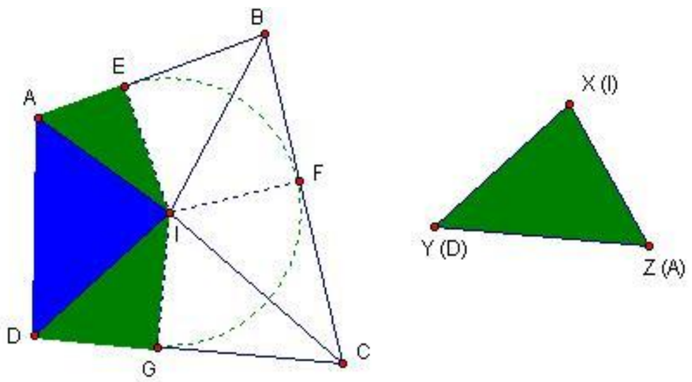
研究10　證明對邊相等之四邊形必有內切圓。

作 $\angle GCF$ 和 $\angle EBF$ 之角平分線交於 I 點

$\because \overline{IC}$ 為角平分線 $\therefore \overline{GC}=\overline{FC}$ 同理 $\overline{EB}=\overline{FB}$

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC} \Rightarrow (\overline{AB}-\overline{EB})+(\overline{CD}-\overline{GC})=\overline{AD}+(\overline{BC}-\overline{BF}-\overline{FC})$

$\Rightarrow \overline{AE}+\overline{DG}=\overline{AD}$



將 $\Delta IAE, \Delta IDG$ 合併為一

ΔXYZ ($\overline{IG},\overline{IE}$ 重合)

ΔIAD 與 ΔXYZ 中

$\overline{XY}=\overline{ID}$, $\overline{XZ}=\overline{IA}$, $\overline{YZ}=\overline{DA}$

$\Rightarrow \Delta IAD \cong \Delta XYZ(SSS)$

$\angle IDA=\angle XYZ \Rightarrow \overline{ID}$為角平分線，$\angle IAD=\angle XZY \Rightarrow \overline{IA}$為角平分線

得証 I 為內切圓圓心。

研究11　證明：一有內切圓的四邊形 ABCD，自內心 I 畫圓交四邊於八點 E,F,G,H,M,J,K,L，則 $\overline{LG}$ $\overline{KH}$ $\overline{EJ}$ $\overline{FM}$ 構成之四邊形 $A'B'C'D'$ 為平行四邊形。

證明：在 ΔIGH 中

$\because \overline{IY}=\overline{IY}$ $\angle IYG=\angle IYH=90°$ $\overline{IG}=\overline{IH}$

$\therefore \Delta IYG \cong \Delta IYH(RHS)$

$\therefore \overline{YG}=\overline{YH}$ 同理 $\overline{XL}=\overline{XK}$

又在 ΔIGY 與 ΔIKX 中

$\because \overline{IY}=\overline{IX}$ =內切圓半徑, $\overline{IG}=\overline{IK}$, $\angle IYG=\angle IXK=90°$, $\therefore \Delta IYG \cong \Delta IXK(RHS)$

$\therefore \overline{YG}=\overline{XK}$ $\therefore \overline{GH}=\overline{YG}+\overline{YH}=\overline{XK}+\overline{XL}=\overline{KL}$ 同理 $\overline{EF}=\overline{JM}$

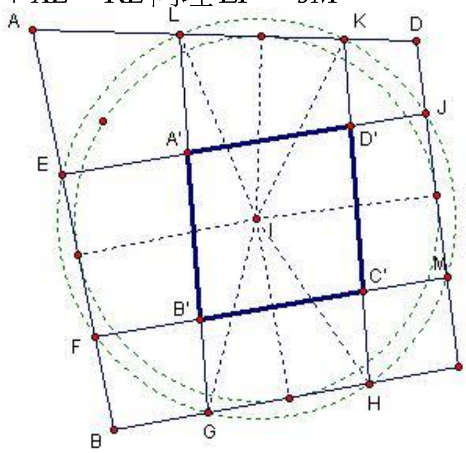
$\because$ 等弦截等弧

又做 $\overline{KG}$ 則等弧對等圓周角

$\therefore \angle LGK=\angle GKH$ $\overline{LG}//\overline{KH}$

同理 $\overline{EF}=\overline{JM}$

$\therefore A'B'C'D'$ 為平行四邊形



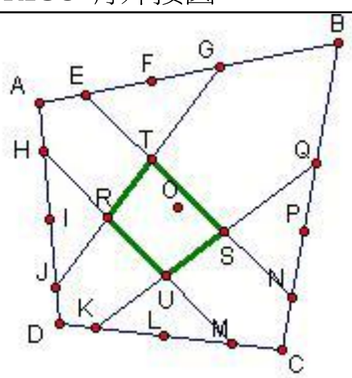
研究12　證明：一有內切圓的四邊形 ABCD，自內心 I 畫圓交四邊於八點 E,G,Q,N,M,K,J,H，則 $\overline{EN}$ $\overline{HM}$ $\overline{GJ}$ $\overline{KQ}$ 構成之四邊形 $RTSU$ 有外接圓。

ΔAEH, ΔAFI, ΔAGJ 中，依照前面定義

$\overline{AE}=\overline{AH}$

$\overline{AF}=\overline{AI}$

$\overline{AG}=\overline{AJ}$



$\angle A = \angle A$

$\Rightarrow \Delta AEH \approx \Delta AFI \approx \Delta AGJ(SAS)$

$\therefore \angle AHE = \angle AIF = \angle AJG = \angle AEH = \angle AFI = \angle AGJ$

$\therefore \overline{EH} // \overline{FI} // \overline{GJ}$

同理$\therefore \overline{JK} // \overline{IL} // \overline{HM}$

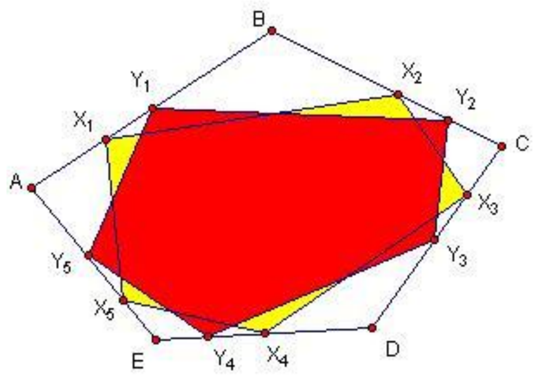
故$\angle FIL = \angle GRM = \angle GRM = \alpha$

同理$\angle EPL = \angle ESK = \beta$

又$\alpha + \beta = 180$

$\therefore$四邊形 RTSU 必有外接圓

研究13　五邊形兩次回歸的點，隔一點連線可得兩面積相等之五邊形。



五邊形$X_1X_2X_3X_4X_5$

$=$五邊形$ABCDE - \Delta AX_1X_5 - \Delta BX_1X_2 - \Delta CX_2X_3 - \Delta DX_3X_4 - \Delta EX_4X_5$

五邊形$Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5$

$=$五邊形$ABCDE - \Delta AY_1Y_5 - \Delta BY_1Y_2 - \Delta CY_2Y_3 - \Delta DY_3Y_4 - \Delta EY_4Y_5$

又$\Delta AX_1X_5 = \frac{1}{2}\overline{AX_1} \times \overline{AX_5} \sin A = \frac{1}{2}\overline{AY_5} \times \overline{AY_1} \sin A = \Delta AY_1Y_5$

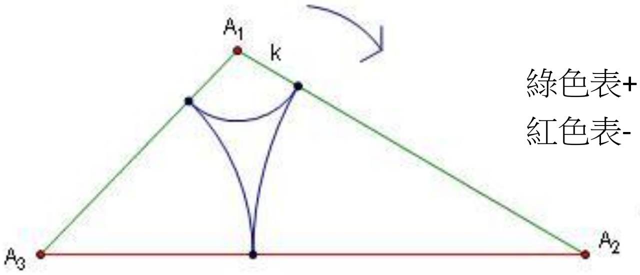
同理$\Delta BX_1X_2 = \Delta BY_1Y_2$，$\Delta CX_2X_3 = \Delta CY_2Y_3$，$\Delta DX_3X_4 = \Delta DY_3Y_4$, $\Delta EX_4X_5 = \Delta EY_4Y_5$

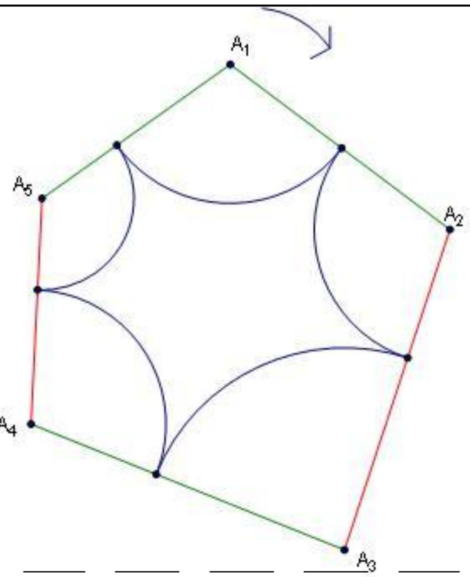
$\therefore$五邊形$X_1X_2X_3X_4X_5$面積=五邊形$Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5$面積

研究14 n 邊形($n \in N$ 且 n 為奇數)自 A_1 點以 k 為長開始順時針畫出一輪回歸的圖形，其 $k = \dfrac{\overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} - \overline{A_4A_5} \ldots + \overline{A_nA_1}}{2}$ 。

由研究 1 可得三角形之

$$k = \overline{A_3A_1} - (\overline{A_2A_3} - (\overline{A_1A_2} - k))$$
$$= \frac{\overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_1}}{2}$$





綠色表+
紅色表-

而五邊形之

$$k = \overline{A_5A_1} - (\overline{A_4A_5} - (\overline{A_3A_4} - (\overline{A_2A_3} - (\overline{A_1A_2} - k)))) = \frac{\overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} - \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_1}}{2}$$

依此類推，可得 n 邊形(n 為奇數) 自 A_1 點以 k 為長開始順時針畫出一輪回歸的圖形，其 $k = \dfrac{\overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} - \overline{A_4A_5} \ldots + \overline{A_nA_1}}{2}$ 。

研究15 A_1、A_2 為內切圓切點。將圓放大少許，可交各邊兩點。證任意 n 邊形可找出內切圓，則 $\overline{A_1x_1} = \overline{A_2y_2}$ 、$\overline{A_1x_2} = \overline{A_2y_1}$ 。

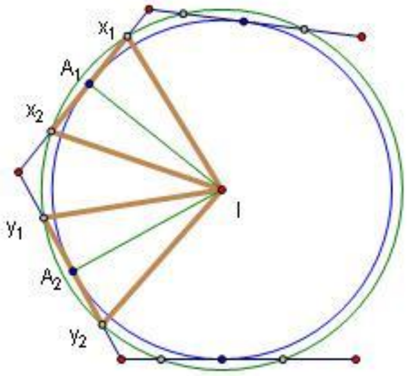
在 ΔIA_1x_2 、 ΔIA_2y_1 中

$\overline{Ix_2} = \overline{Iy_1}$ 、 $\overline{IA_1} = \overline{IA_2}$ 、 $\angle IA_1x_2 = \angle IA_2y_1 = 90°$

$\Rightarrow \Delta IA_1x \cong \Delta IA_2y_1$

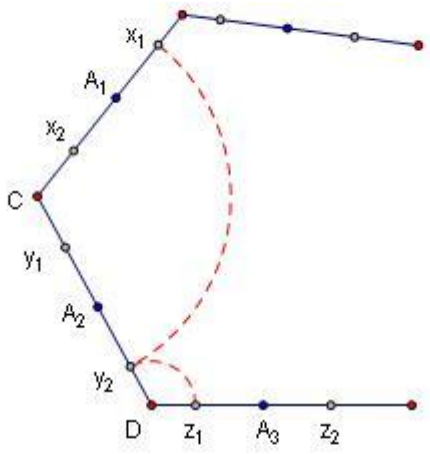
$\therefore \overline{A_1x_2} = \overline{A_2y_1}$ 得證

依此類推，可證得 $\overline{A_1x_1} = \overline{A_2y_2}$



研究16　A_1、A_2、A_3為內切圓切點。將圓放大少許，可交各邊二點。

證若任意 n 邊形可找出內切圓，則 n 為奇數可二輪回歸、n 為偶數只會有一輪回歸的狀況。



以 C 為圓心，自 x_1 開始

由於 A_1、A_2 為切點 $\Rightarrow \overline{CA_1}=\overline{CA_2}$

$\overline{A_1x_1}=\overline{A_2y_2}$

$\therefore \overline{Cx_1}=\overline{CA_1}+\overline{A_1x_1}=\overline{CA_2}+\overline{A_2y_2}=\overline{Cy_2}$

以 D 為圓心，自 y_2 繼續

由於 A_2、A_3 為切點 $\Rightarrow \overline{DA_2}=\overline{DA_3}$

$\overline{A_2y_2}=\overline{A_3z_1}$

$\therefore \overline{Dy_2}=\overline{DA_2}-\overline{A_2y_2}=\overline{DA_3}-\overline{A_3z_1}=\overline{Dz_1}$

依此類推，如此畫弧，只要保持一大一小成對出現，即可繞回，最終交於起始的 x_1。

有兩種狀況，n 為偶數時，角數亦為偶數，一角一弧，且弧須成對，n 可被 2 整除所以必一輪回歸。若 n 為奇數時，則可二輪回歸(因 2n 才可被 2 整除)。

從上述結果中，發現偶數邊形有內切圓即可，而可從有內切圓推出對邊和相等，我們推測是否有可能只須對邊和相等即可回歸，因此我們回到最原始的定義，以代數求其邊長，以下介紹所發現之情形。

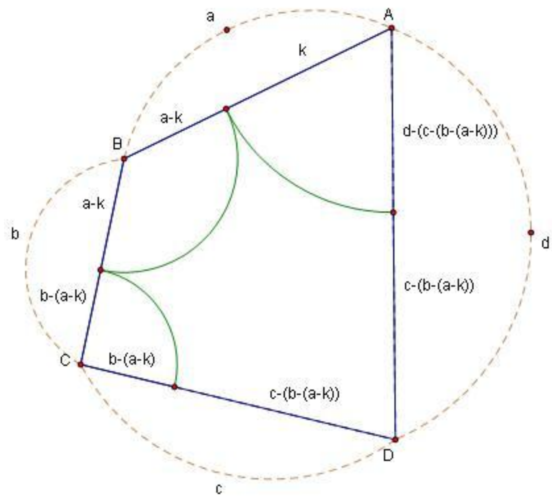
研究17　n 邊形 n 為偶數之回歸形式

四邊形當一輪回歸時，由右圖可知

$k = d-(c-(b-(a-k)))$

$\Rightarrow a+c=b+d$

我們推測間隔邊長加總相等時可一輪回歸



以下是依照上面圖形繼續計算所畫弧的邊長。若第一輪半徑等於第二輪半徑可得一輪回歸的條件。依此類推，結果發現無論是第幾輪回歸其條件皆與一輪回歸之條件相同。故只能一輪回歸。

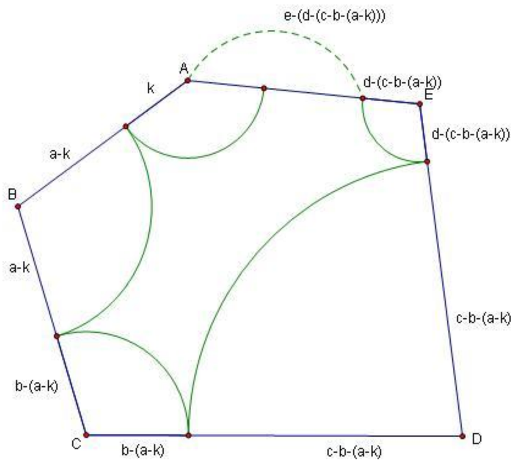
而當第一輪半徑不等於第二輪半徑，則同一頂點所畫出弧的半徑，皆成等差級數的關係，一直畫下去，直到其中一弧超出線段。

而當 n 為偶數時，可能也會有類似性質。故我們推測 n 邊形(邊以 $A_1\ A_2 \ldots A_n$ 表示)，n 為偶數時：

1. 一輪回歸之條件：k= A_n - A_{n-1} + A_{n-2} ...+k$\Rightarrow A_1 + A_3 + \ldots A_{n-1} = A_2 + A_4 + \ldots A_n$

順時針	A 點	B 點	C 點	D 點
第一輪	k	a-k	b-a+k	c-b+a-k
第二輪	d-c+b-a+k	2a-d+c-b-k	2b-2a+d-c+k	2c-2b+2a-d-k
第三輪	2(d-c+b-a)+k	3a-2d+2c-2b-k	3b-3a+2d-2c+k	3c-3b+3a-2d-k
第四輪	3(d-c+b-a) +k	4a-3d+3c-3b-k	4b-4a+3d-3c+k	4c-4b+4a-3d-k

研究18 n 邊形 n 為奇數之回歸形式



由五邊形推起，利用代數推出每次的半徑長，參照下面表格，若在 A 點之半徑第一輪等於第二輪，則可得一輪回歸之條件。依此類推，發現五邊形只有可能是一輪回歸或兩輪回歸。

利用此概念推 n 邊形 n 為奇數時，可知 n 邊形(邊以 $A_1\ A_2 \ldots A_n$

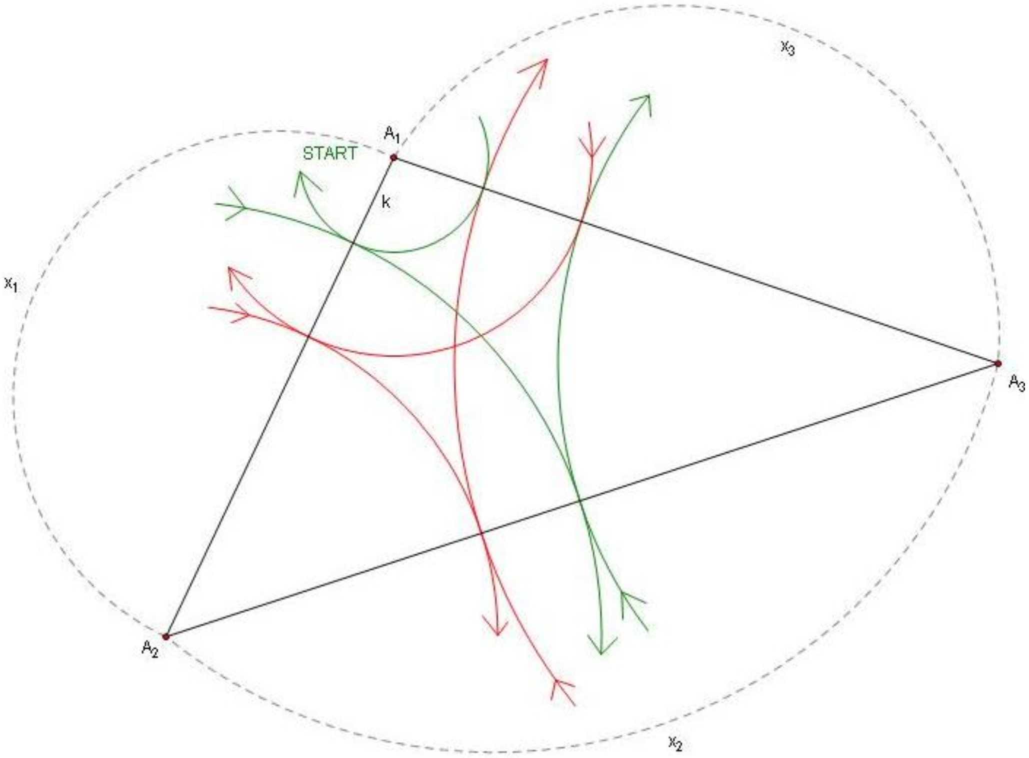
表示)：

1　一輪回歸之條件：k= A_n - $A_{n-1}+A_{n-2}$…-k$\Rightarrow k=\dfrac{A_n-A_{n-1}\ldots+A_1}{2}$

2　二輪回歸之條件：當 k$\neq$ A_n - $A_{n-1}+A_{n-2}$…-k 時，才有可能繼續畫下去，得到二輪回歸的圖。

	A	B	C	D	E
第一輪	K	a-k	b-a+k	c-b+a-k	d-c+b-a+k
第二輪	e-d+c-b+a-k	-e+d-c+b+k	e-d+c-k	-e+d+k	e-k
第三輪	K	a-k	b-a+k	c-b+a-k	d-c+b-a+k

研究19　證明：n 邊形當 n 為奇數時，任意條件皆可回歸，特定條件下，可提早回歸。



先以三邊形為例，以 A_1、A_2、A_3 表頂點，以 x_1、x_2、x_3 表邊長，以 k 為初始半徑，列出分別以 A_1、A_2、A_3 為圓心第一輪畫弧之半徑：

k、x_1-k、x_2-x_1+k

再繼續依序推第二輪畫弧半徑：

$x_3-x_2+x_1-k$、$x_1-x_3+x_2-x_1+k \quad (=-x_3+x_2+k)$、

$x_2-x_1+x_3-x_2+x_1-k \quad (=x_3-k)$

再依序推第三輪畫弧半徑：

$x_3-x_2+x_1-x_3+x_2-x_1+k \quad (=k)$、…

可發現經過兩輪，邊長均會依序消去，同頂點的畫弧半徑與第一輪重複。

假設 n 邊形 n 為奇數時成立，以下列表第一輪依序畫弧之半徑：

k、$b_2-k \dots b_n+k$

在(n+2)邊形時，第一輪依序畫弧之半徑為：

k 、 $b_2-k\cdots b_n+k$ 、 x_n-b_n-k 、 $x_{n+1}-x_n+b_n+k$

第二輪時：

$x_{n+2}-x_{n+1}+x_n-b_n-k$ 、 $b_2-x_{n+2}+x_{n+1}-x_n+b_n+k\cdots b_n+x_{n+2}-x_{n+1}+x_n-b_n-k$ 、

$x_n-x_{n+2}+x_{n+1}-x_n+k$ 、 $x_{n+1}+x_{n+2}-x_{n+1}-k$

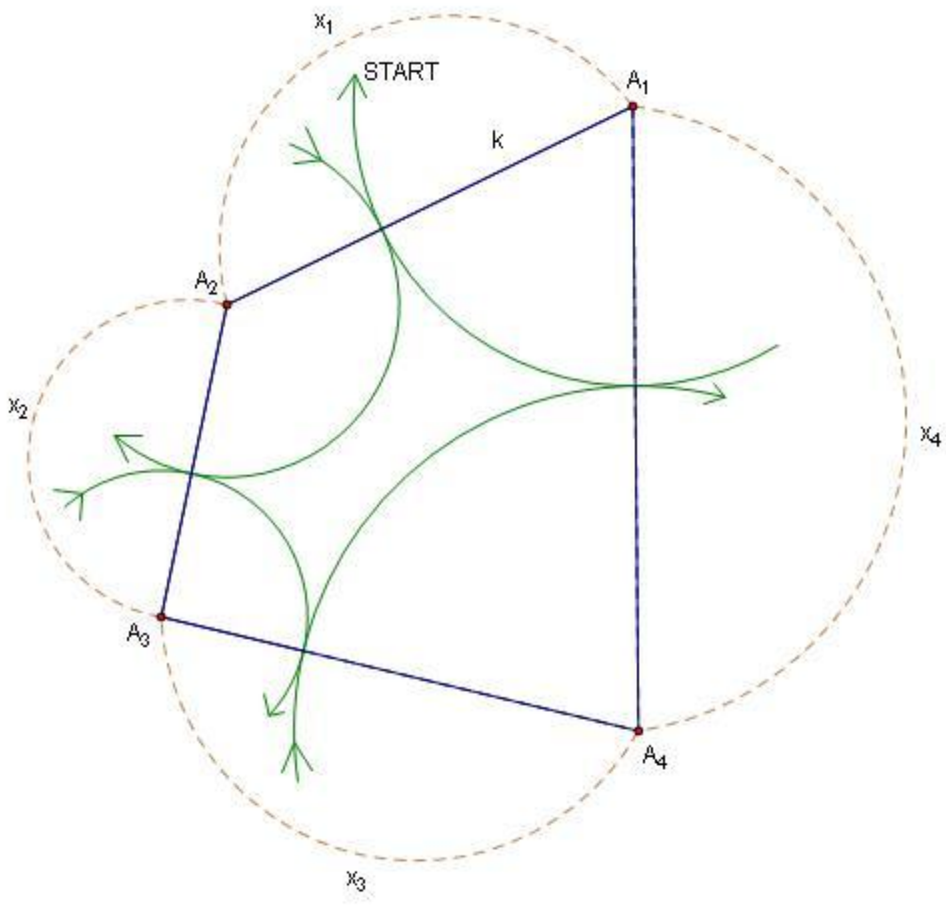
第三輪時：

$x_{n+2}-x_{n+2}+k \quad (=k)\cdots$

故任意條件皆可在兩輪後回歸。

而當同一頂點，第一輪之半徑恰等於第二輪之半徑時，可提早回歸。

研究20 證明：n 邊形當 n 為偶數時，特定條件下可回歸。



先以四邊形為例，以 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 表頂點，以 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 表邊長，以 k 為初始半徑，列出分別以 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 為圓心第一輪畫弧之半徑：

k 、 x_1-k 、 x_2-x_1+k 、 $x_3-x_2+x_1-k$

再繼續依序推第二輪畫弧半徑：

$x_4-x_3+x_2-x_1+k$ 、 $x_1-x_4+x_3-x_2+x_1-k \quad (=2x_1-x_4+x_3-x_2-k)$ 、

$x_2-x_1+x_4-x_3+x_2-x_1+k \quad (=-2x_1+x_4-x_3+2x_2+k)$ 、

$x_3-x_2+x_1-x_4+x_3-x_2+x_1-k \quad (=2x_1-x_4+2x_3-2x_2-k)$

再依序推第三輪畫弧半徑：

$x_4-x_3+x_2-x_1+x_4-x_3+x_2-x_1+k \quad (=-2x_1+2x_4-2x_3+2x_2+k)\ldots$

可發現第二輪以後，同頂點之畫弧半徑成一等差數列。

假設 n 邊形 n 為偶數時成立，以下列表第一輪依序畫弧之半徑：

k 、 $b_2-k \ldots b_n-k$

在(n+2)邊形時，第一輪依序畫弧之半徑為：

k 、 $b_2-k \ldots b_n-k$ 、 x_n-b_n+k 、 $x_{n+1}-x_n+b_n-k$

第二輪時：

$x_{n+2}-x_{n+1}+x_n-b_n+k$ 、 $b_2-x_{n+2}+x_{n+1}-x_n+b_n-k \ldots b_n-x_{n+2}+x_{n+1}-x_n+b_n-k$ 、

$x_n+x_{n+2}-x_{n+1}+x_n-2b_n+k$ 、 $x_{n+1}-x_{n+2}+x_{n+1}-2x_n+2b_n-k$

第三輪時：

$x_{n+2}+x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n-2b_n+k \quad (=2x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n-2b_n+k)\ldots$

得證第二輪後，同頂點之畫弧半徑成等差數列。故當同頂點第一輪之畫弧半徑等於第二輪時，可得回歸之條件－隔邊邊長和相等。

研究21 證明: 有內切圓的五邊形中 可得五邊形 $X_1X_3X_5X_7X_9 \cong$ 五邊形 $X_2X_4X_6X_8X_{10}$ 。

依定義可得 $\overline{AX_1}=\overline{AX_{10}}, \overline{AX_9}=\overline{AX_2}$

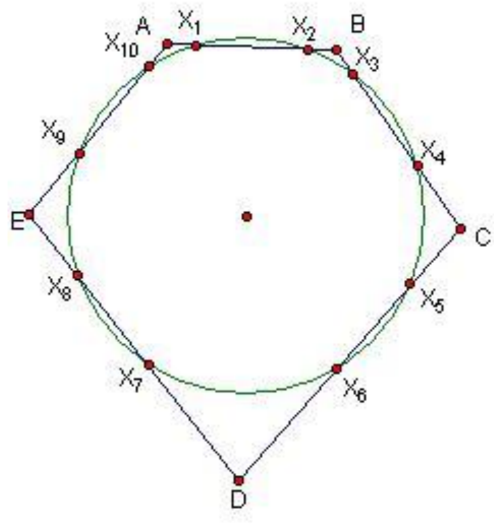
$\therefore\ \overline{AX_1}:\overline{AX_2}=\overline{AX_{10}}:\overline{AX_9} \quad \therefore\ \overline{X_2X_9}\,//\,\overline{X_1X_{10}}$

$\because\ \overline{X_2X_9}\,//\,\overline{X_1X_{10}}$ AND $\overline{X_{10}X_9}=\overline{X_1X_2}$

$\therefore$ 四邊形 $X_1X_2X_9X_{10}$ 為一等腰梯形

$\therefore\ \overline{X_1X_9}=\overline{X_2X_{10}}$ 同理 $\overline{X_1X_3}=\overline{X_2X_4}$

$\overline{X_3X_5}=\overline{X_4X_6}$ $\overline{X_5X_7}=\overline{X_6X_8}$ $\overline{X_7X_9}=\overline{X_8X_{10}}$



$\because\ \overline{AX_9}=\overline{AX_2}$ $\overline{AX_{10}}=\overline{AX_1}$

$\therefore\ \overline{X_9X_{10}}=\overline{X_1X_2}$ 同理 $\overline{X_1X_2}=\overline{X_3X_4}=\overline{X_5X_6}=\overline{X_7X_8}=\overline{X_9X_{10}}$

$\angle X_9X_1X_3=\dfrac{360-弧X_9X_1X_3}{2}$ $\angle X_{10}X_2X_4=\dfrac{360-弧X_{10}X_2X_4}{2}$

弧 $X_9X_1X_3$-弧 $X_{10}X_2X_4$=弧 X_9X_{10}-弧 X_3X_4 =0 ($\because\ \overline{X_9X_{10}}=\overline{X_3X_4}$)

$\therefore$ 弧 $X_9X_1X_3$=弧 $X_{10}X_2X_4$

$\therefore\ \angle X_9X_1X_3=\dfrac{360-弧X_9X_1X_3}{2}=\dfrac{360-弧X_{10}X_2X_4}{2}=\angle X_{10}X_2X_4$

同理 $\angle X_1X_3X_5=\angle X_2X_4X_6$ $\angle X_3X_5X_7=\angle X_4X_6X_8$ $\angle X_5X_7X_9=\angle X_6X_8X_{10}$ $\angle X_7X_9X_1=\angle X_8X_{10}X_2$

故得證:五邊形 $X_1X_3X_5X_7X_9\cong$ 五邊形 $X_2X_4X_6X_8X_{10}$

研究22 證明: 任意 n 邊形時，n 為奇數，n 邊形 $X_1X_3X_5\ldots X_{2n-1}$ 面積= n 邊形 $X_2X_4X_6\ldots X_{2n}$ 面積。

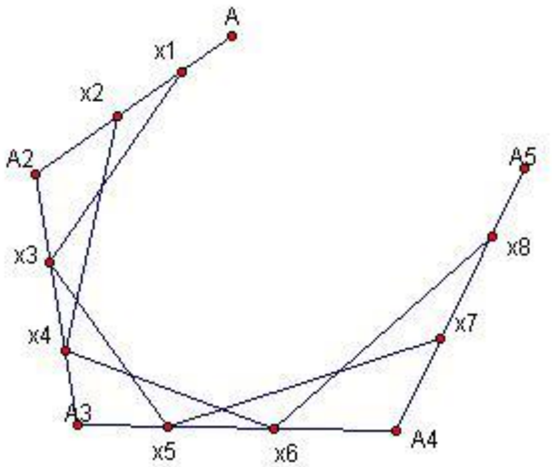
設原始 n 邊形的各個頂點為 $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$

n 邊形 $X_1X_3X_5\ldots X_{2n-1}$ 面積=n 邊形 $A_1\ A_2\ A_3\ldots A_n-\Delta A_1X_{2n-1}X_1-\Delta A_2X_1X_3$

$-\Delta A_3X_3X_5-\ldots-\Delta A_nX_{2n-3}X_{2n-1}$

n 邊形 $X_2X_4X_6\ldots X_{2n}$ 面積=n 邊形 $A_1\ A_2\ A_3\ldots A_n-\Delta A_1X_{2n}X_2-\Delta A_2X_2X_4$

$-\Delta A_3X_4X_6-\ldots-\Delta A_nX_{2n-2}X_{2n}$



$\because\ \overline{A_1X_{2n-1}}=\overline{A_1X_2}$, $\overline{A_1X_1}=\overline{A_1X_{2n}}$

$\angle A_nA_1A_2=\angle A_nA_1A_2$

$\therefore \Delta A_1X_{2n-1}X_1\cong\Delta A_1X_{2n}X_2$

同理 $\Delta A_2X_1X_3\cong\Delta A_2X_2X_4$， $\Delta A_3X_3X_5\cong\Delta A_3X_4X_6\ldots\Delta A_nX_{2n-3}X_{2n-1}\cong\Delta A_nX_{2n-2}X_{2n}$

$\Rightarrow$ n 邊形 $X_1X_3X_5\ldots X_{2n-1}$ 與 n 邊形 $X_2X_4X_6\ldots X_{2n}$ 為等面積且對應邊相等

研究23 證明: 有內切圓之 n 邊形，n 邊形 $X_1X_3X_5 \dots X_{2n-1} \cong$ n 邊形 $X_2X_4X_6 \dots X_{2n}$

$\because \overline{A_1X_1} = \overline{A_1X_{2n}}$, $\overline{A_1X_2} = \overline{A_1X_{2n-1}}$ $\therefore \overline{X_1X_{2n}} // \overline{X_2X_{2n-1}}$

又 $\overline{X_{2n}X_{2n-1}} = \overline{X_1X_2}$

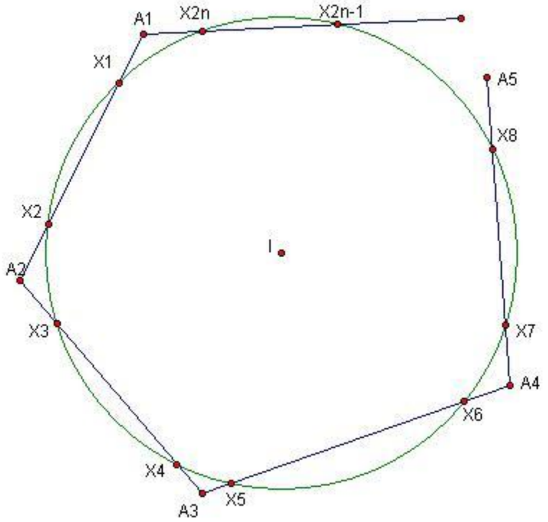
$\therefore \overline{X_1X_{2n-1}} = \overline{X_2X_{2n}}$ (等腰梯形對角線等長)

同理 $\overline{X_1X_3} = \overline{X_2X_4}$, $\overline{X_3X_5} = \overline{X_4X_6}$ ....

$\overline{X_{2n-3}X_{2n-1}} = \overline{X_{2n-2}X_{2n}}$

$\angle X_3X_1X_{2n-1} = \dfrac{360 - X_3X_1X_{2n-1}}{2}$

$\angle X_4X_2X_{2n} = \dfrac{360 - X_4X_2X_{2n}}{2}$



弧度 $X_3X_1X_{2n-1}$-弧度 $X_4X_2X_{2n}$=弧度 $X_{2n-1}X_{2n}$-弧度 X_3X_4=0 ($\because X_{2n-1}X_{2n} = X_3X_4$ 等弦對等弧)

$\therefore \dfrac{360 - X_3X_1X_{2n-1}}{2} = \dfrac{360 - X_4X_2X_{2n}}{2} \Rightarrow \angle X_3X_1X_{2n-1} = \angle X_4X_2X_{2n}$

同理 $\angle X_1X_3X_5 = \angle X_2X_4X_6$, $\angle X_3X_5X_7 = \angle X_4X_6X_8 \dots \angle X_{2n-3}X_{2n-1}X_1 = \angle X_{2n-2}X_{2n}X_2$

同理可歸納 $X_1X_2X_3 \dots X_{2n-1} \cong$ n 邊形 $X_2X_4X_6 \dots X_{2n}$ 得證

伍、 結論

一、 在三角形中，依此作圖法會有：

(一)在第一輪回到起始點 初始以 A 點為圓心，半徑 $= \dfrac{b+c-a}{2}$ 作圖

(二)在第二輪回到起始點

初始以 A 點為圓心，半徑 $\neq \dfrac{b+c-a}{2}$ 作圖，且中途無超出三角形。

可與各邊各交兩點，三邊上共六點共一圓，分別與原三角形內心連線，可得三個全等的等腰三角形。

此三個三角形的內心連線，所構成的三角形會與原三角形內切圓三切點構成的三角形相似。而其外心、重心、垂心、旁心(所得之旁心圓切底邊的那一個)亦皆有同樣性質。

(三)在第一或第二輪時即超出三角形

繼續按照頂點順序當圓心畫弧，但改交在原本應交之線段延長線上。

二、 三角形中，任意初始半徑，$\dfrac{\text{三根軸交點與內心的距離}}{\text{一邊上內切點與該邊上根軸交點距離}}$ **=**定值

三、 四邊形若有內切圓，必一輪回歸，若無內切圓，則永不回歸。

四、 一有內切圓的四邊形 **ABCD**，自內心 **I** 畫圓交四邊於八點 **E,F,G,H,M,J,K,L**，則$\overline{LG}$ $\overline{KH}$ $\overline{EJ}$ $\overline{FM}$ 構成之四邊形$A'B'C'D'$為平行四邊形。

五、 一有內切圓的四邊形 **ABCD**，自內心 **I** 畫圓交四邊於八點 **E,G,Q,N,M,K,J,H**，則$\overline{EN}$ $\overline{HM}$ $\overline{GJ}$ $\overline{KQ}$ 構成之四邊形$RTSU$有外接圓。

六、 任意 **n** 邊形有內切圓，則

(一)若 **n** 為偶數，則必能一輪回歸。

(二)若 **n** 為奇數，則必能一輪或兩輪回歸。

五、 任意 **n** 邊形之一般條件

(一)若 **n** 為偶數，兩隔邊邊長和相等則必能一輪回歸。

(二)若 **n** 為奇數，則必能一輪或兩輪回歸。

六、 任意 **n** 邊形 **n** 為奇數作圖，每邊各得兩點，隔點連線可得兩面積相等之 **n** 邊形。

七、 有內切圓之 **n** 邊形作圖，每邊各得兩點，隔點連線可得兩全等之 **n** 邊形。

陸、 參考資料及其他

一、 中文部分

【一本書】 許志農（民 95）。動手玩數學。網路。

【評語】040402

1. 本問題的基本架構設若延伸為平面上兩兩相交的三條直線，或許會比目前探討的三角形架構更為自然。

2. 類似本作品的回歸現象出現於許多場合，值得進行有系統的探討。

3. 進一步的探討：這類現象在球面上也成立嗎？