中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040401

居然是「e」！

學校名稱：國立東石高級中學

作者：	指導老師：
高二 呂名祺	莊立帆
高二 林冠伶	莊立山
高三 吳雨靜	
高三 陳世勳	

關鍵詞：e、泰勒展開式、機率

居然是「e」！

壹、摘要

班上有42位同學進行交換禮物活動，每人提供一份禮物，抽到自己的禮物不需重抽，每人都抽一樣禮物，將禮物全部抽完。

我們定義：

1. 若 1 號同學抽到 5 號同學的禮物， 5 號同學抽到 1 號同學的禮物，則稱這兩位同學為一組。
2. 若 1 號同學抽到 5 號同學的禮物， 5 號同學抽到 7 號同學的禮物， 7 號同學抽到 1 號同學的禮物，則稱這三位同學為一組。
3. 若 1 號同學抽到 5 號同學的禮物， 5 號抽到 7 號， 7 號抽到 9 號， 9 號抽到 1 號，則稱這四位同學為一組。

以此類推。

問題一：全部同學都抽完禮物後，分成組數的期望值為何？

$$我們求得期望值 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{42}$$

問題二：全部同學都抽完禮物後，不出現兩位同學一組的機率為何？

$$我們求得機率 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times4}-\frac{1}{2\times4\times6}+\frac{1}{2\times4\times6\times8}\cdots\cdots-\frac{1}{2\times4\times6\times\ldots\times40\times42}$$

答案居然是 $e^{-1/2}$ 泰勒展開到的第21次項的結果！

貳、研究動機

班上一共有42位同學。在去年耶誕節，導師要大家準備個小禮物，進行交換禮物活動，結果很巧地，我和另一位同學剛好互抽禮物，同學們都大呼神奇，覺得我們太有緣了，我不是很服氣，我隱隱覺得，或許42人抽禮物，出現兩兩互抽的機率其實並不小。我觀察了一下其他同學的抽籤狀況後發現，有 3 位同學互抽禮物形成一組；有 7 位同學互抽禮物形成一組；其他的30位同學互抽禮物形成一組。全班在進行交換禮物後，分成了四組。

再仔細想想，其實全班42位同學互抽禮物，若要結合成一組，而不被分成兩組以上，機率是很小的。全班結合成一組的機率 $= \frac{41}{42}\times\frac{40}{41}\times\frac{39}{40}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{42}$

接著我想，那經過這個抽禮物的活動很多很多次之後，全班平均會被分成幾組呢？再者，我和另一位同學互抽禮物，這是一件很難得發生的情況？還是一個很容易發生的情況呢？我本以為這是個簡單的機率問題，下課十分鐘就可以解決，沒想到，居然是個不太容易處理的問題，我們幾個同學，加上老師，費了一番手腳，才陸續將答案求出，卻沒想到，解出答案之後，又引出了更多的問題。

參、研究目的

一、 n 位同學互抽禮物後，可以用抽禮物結果把 n 位同學分成 X 組。探討 X 的期望值。
二、 n 位同學互抽禮物後，都不出現兩人互抽禮物的機率為何？
三、 n 位同學互抽禮物後，都不出現 m 位同學形成一組的機率為何？

肆、研究設備與器材

一、主要器材：大腦　　　數顆

二、次要器材：筆　　　數支
紙　　　百餘張
計算器　　　一部

伍、研究過程與方法

說明：以下包含地區科展前的研究過程與方法，以及全國科展前的研究過程與方法。分別是

◎地區科展前的研究過程與方法：

一、問題一的研究過程與方法

二、問題二的研究過程與方法

三、觀察問題二的解答，我們發現幾個巧合。

四、計算「不出現一個人一組的機率」。

五、計算「不出現三人一組的機率」。

六、計算「不出現 m 人一組的機率」。

◎全國科展前的研究過程與方法：

七、探討問題二答案寫成泰勒展開式時，各次項所代表的意義。

內容：

一、問題一的研究過程與方法

(一)假設班上同學人數為 2 人、 3 人、 4 人……，計算出結果。觀察計算過程，看看能否找到規則，將人數推展至42人。

令班上有 n 人時，班上經抽禮物活動後，會被分成組數的期望值為E_n。我們算出全班分成 i 組的機率 P_i，再乘以 i 後加總，便可得E_n。

意即 $E_n = \sum_{i=1}^{n} i \times P_i$ 。經簡單計算可得

$$E_1 = 1 \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$E_2=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$E_3=1\times\frac{2}{6}+2\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$$

$$E_4=1\times\frac{6}{24}+2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{6}{24}+4\times\frac{1}{24}=\frac{25}{12}$$

$$E_5=1\times\frac{24}{120}+2\times\frac{50}{120}+3\times\frac{35}{120}+4\times\frac{10}{120}+5\times\frac{1}{120}=\frac{137}{60}$$

$$E_6=1\times\frac{120}{720}+2\times\frac{274}{720}+3\times\frac{225}{720}+4\times\frac{85}{720}+5\times\frac{15}{720}+6\times\frac{1}{720}=\frac{49}{20}$$

觀察處理過程，出現將 6 個人分成 3 組，將 6 個人分成 4 組這類的步驟，但老師告訴我們，這個步驟已確定只能一一將狀況列出求得答案，而無法簡單計算求得，因此這個方法明顯無法推展至42人。此方法宣告失敗。

(二)嘗試在已知 E_1、E_2、E_3、………、E_{n-1} 的情況下，是否能夠求得 E_n。因為多加入一個人，並不是指單獨影響一組同學，可能造成兩組的合併，情況十分複雜。我們無法用此方法將問題簡化，在努力了一陣子之後，此方法宣告失敗。

註：我們後來發現，這個方法還是行得通的，只是當時並未想到而已。但這個方法沒有方法（四）簡單。

(三)退而求其次，寫程式用電腦求解。

由於「研究方法一、(一)」中，我們採取的是一種有規律的計算方式，後來因為計算量太龐大而未能推廣至42人，因此我們嘗試用撰寫程式的方法，讓電腦來從事這些繁雜的運算，在撰寫程式的同時，另一位組員想到了方法(四)，因為方法(四)可以直接求解，因此，用電腦輔助求解的工作隨之終止。

(四)直接求解。

1.設班上有 n 個人，第一個抽籤的人為甲，甲有 $\frac{1}{n}$ 的機率會抽中自己，$\frac{n-1}{n}$ 的機率會抽中其他人，若甲抽中自己則會形成一組（自己一組），若抽中其他人，則未能完成一組。所以第一個人抽籤後完成一組的機率為 $\frac{1}{n}$ 。

2.討論第二人完成一組的機率。

(1)若甲抽中自己，則第二人抽籤時，狀況和甲抽籤時的狀況完全相同，只是總人數從 n 人降成 n-1 人。所以第二個人抽籤時，有 $\frac{1}{n-1}$ 的機會會完成一組，有 $\frac{n-2}{n-1}$ 的機會未能完成一組，所以第一人抽中自己時，第二個人抽籤後完成一組的機率為 $\frac{1}{n-1}$ 。

(2)若甲未能抽中自己，而是抽中其他人，我們令被抽中的人為乙，並讓乙成為第二個抽籤的人。則乙有 $\frac{1}{n-1}$ 的機會會抽中甲，並完成一組（甲乙兩人一組）；乙有 $\frac{n-2}{n-1}$ 的機會會抽中其他人，而無法完成一組。所以第一人未抽中自己時，第二個人抽籤後完成一組的機率為 $\frac{1}{n-1}$ 。

(3)綜合以上兩狀況可知，無論第一人抽籤結果如何，第二人抽籤後，會再完成一組的機率為 $\frac{1}{n-1}$ 。

3.同理，第 3 個人抽籤後會再完成一組的機率必為 $\frac{1}{n-2}$ 。

同理，第 4 個人抽籤後會再完成一組的機率必為 $\frac{1}{n-3}$ 。

以此類推，第 m 個人抽籤後會再完成一組的機率必為 $\frac{1}{n+1-m}$ 。

4.綜合以上 1. 2. 3. 所得，42人抽籤後，可以形成組數的期望值為

$$\frac{1}{42}+\frac{1}{41}+\frac{1}{40}+\frac{1}{39}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

5.觀察在4.中所得的結果，和「方法一、(一)」中所求得的E_1到E_6全都符合。

$$E_1 = 1 = \frac{1}{1}$$

$$E_2 = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

$$E_3 = \frac{11}{6} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

$$E_4 = \frac{25}{12} = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

$$E_5 = \frac{137}{60} = \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

$$E_6 = \frac{49}{20} = \frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$$

二、問題二的研究過程與方法

(一)我們假設班上同學人數為 2 人、 3 人、 4 人……，計算出結果。觀察計算過程，看看會不會出現規則，是不是可以把規則推展至42人。

令班上有 n 人時，班上經抽禮物活動後，未出現兩兩互抽形成一組的機率為P_n。經簡單的計算可得

居然是「e」！

$P_1 = 1$

$P_2 = \frac{1}{2\times1} = \frac{1}{2}$　　(有 1-1 一種情況)

$P_3 = \frac{2+1}{3\times2\times1} = \frac{1}{2}$　　(有 3 和 1-1-1 兩種情況)

$P_4 = \frac{6+8+1}{4\times3\times2\times1} = \frac{5}{8}$　(有 4 和 3-1 和 1-1-1-1 三種情況)

$P_5 = \frac{24+30+20+1}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{5}{8}$　(有 5 和 4-1 和3-1-1-1和1-1-1-1-1四種情況)

$P_6 = \frac{120+144+90+40+40+1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{29}{48}$

$P_7 = \frac{720+840+504+420+210+280++70+1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{29}{48}$

$P_8 = \frac{5040+5760+3360+2688+1344+1260+3360+420+1120+112+1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$P_9 = P_8 = \frac{233}{384}$

算到P_9之後，我們有了幾個發現：

1. 我們發現，$P_2 = P_3$、$P_4 = P_5$、$P_6 = P_7$……這個結果令我們感到驚奇，班上多了一個人，機率居然會不變！

2. 我們發現，$P_1 > P_2 = P_3$，但 $P_3 < P_4 = P_5$。數列 $\langle P_n \rangle$竟然不是單純的遞增或遞減，而似乎是以＜＝＞＝＜＝＞＝＜………做上下震盪，這實在是太怪了！

3. 最後，我們發現，

$$P_2 - P_1 = -\frac{1}{2}$$
$$P_4 - P_3 = +\frac{1}{8} = +\frac{1}{2\times4}$$
$$P_6 - P_5 = -\frac{1}{48} = -\frac{1}{2\times4\times6}$$
$$P_8 - P_7 = +\frac{1}{384} = +\frac{1}{2\times4\times6\times8}$$

我們似乎找到了數列 $\langle P_n \rangle$的規律了！但是我們不知道這會不會只是前八項的巧合？因此我們決定狠下心來一口氣算到P_{12}，12個同學互抽禮物，共有35大類情況不會發生兩個人互抽，其中有泰半的都是 7 位數以上的可能情況，就當我們其中一位心算七段的組員，花了一個半小時將P_{12}算出，確定這個規律可以沿用到P_{12}時，另一組員也在同一時間推導出$\langle P_n \rangle$的通式並寫下P_{12}，兩位組員所寫下的P_{12}是相同的，這讓我們十分振奮。而就在我們寫下$\langle P_n \rangle$的通式後，一連串不可思議的結果就隨之一一出現了！

(二)我們設法將P_n用P_{n-1}、P_{n-2}……等等結果表示，把P_{n-1}用P_{n-2}、P_{n-3}……等等結果表示，再將此兩式聯立，試圖找出$\langle P_n \rangle$數列中，各項的變化。我們依然稱第一個抽籤的同學為甲，甲若抽中某一位同學（不是甲）所提供的禮物，則稱此同學為乙，乙並且成為第二位抽禮物的同學。以此類推。

1.我們將P_n拆開成四種情況討論。分別是

狀況一　甲抽到自己。
狀況二　甲抽到乙，乙抽到甲。
狀況三　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到甲。
狀況四　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到丁。

「發生這四種狀況的機率」及
「發生這四種狀況後，仍不會出現兩人互抽的機率」列表如下所示：

表 I	狀況一	狀況二	狀況三	狀況四
狀況發生機率	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}$	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}$
仍不會出現兩人互抽的機率	P_{n-1}	0	P_{n-3}	?

我們將上表中的？設為 X ，如此一來，便可將P_n表示為

$$P_n=\boxed{\frac{1}{n}\times P_{n-1}}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times 0}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times P_{n-3}}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times X} \qquad \text{I 式}$$

2.我們將 P_{n-1} 拆開成三種情況討論。分別是

狀況一　甲抽到自己。
狀況二　甲抽到乙，乙抽到甲。
狀況三　甲抽到乙，乙抽到丙。

「發生這三種狀況的機率」及
「發生這三種狀況後，還不會出現兩兩成對的機率」列表如下所示：

表 II	狀況一	狀況二	狀況三
狀況發生機率	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}$	$\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}$
仍不會出現兩人互抽的機率	P_{n-2}	0	?

表 II 中的？和表 I 中的？所代表的情況完全相同，因此我們將P_{n-1} 表示為

$$P_{n-1}=\boxed{\frac{1}{n-1}\times P_{n-2}}+\boxed{\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times 0}+\boxed{\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times X} \qquad \text{II 式}$$

3.我們將「二、(二) 1. 中的 I 式」及「二、(二) 2. 中的 II 式」，兩方程式聯立，並消掉 X 後，可求出，

$$P_n = P_{n-1} + \frac{P_{n-3} - P_{n-2}}{n}$$

為了看出數列<P_n>中，ΔP的變化，再將上式改寫為

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{P_{n-2} - P_{n-3}}{n}$$ （一增一減，變化量為前一次變化量的 $\frac{-1}{n}$ ）

已知 $P_1 = 1$ 、 $P_2 = \frac{1}{2}$ 、 $P_3 = \frac{1}{2}$

所以可以寫出

$$P_4 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - 1) \times \frac{-1}{4} = \frac{1}{2} + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})$$

$$P_5 = \frac{1}{2} + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4}) + 0 \times \frac{1}{5} = P_4$$

$$P_6 = \frac{1}{2} + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4}) + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})(\frac{-1}{6})$$

$$P_7 = \frac{1}{2} + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4}) + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})(\frac{-1}{6}) + \frac{0}{7} = P_6$$

$$P_8 = \frac{1}{2} + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4}) + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})(\frac{-1}{6}) + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})(\frac{-1}{6})(\frac{-1}{8})$$

以此類推，當班上有42人時，不發生兩兩互抽的機率為

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times4} - \frac{1}{2\times4\times6} + \frac{1}{2\times4\times6\times8} \cdots\cdots - \frac{1}{2\times4\times6\times\ldots\ldots\times40\times42}}$$

三、觀察問題二的解答，我們發現幾個巧合。

(一)問題二中，若班上有 n 位同學，不發生兩兩互抽的機率

$$P_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times4} - \frac{1}{2\times4\times6} \cdots + (-1)^m \frac{1}{2\times4\times6\ldots\times(2k)}$$ （ k 為 n 除以 2 的商）

$$= 1 + \frac{1}{1!}(\frac{-1}{2})^1 + \frac{1}{2!}(\frac{-1}{2})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{-1}{2})^3 + \frac{1}{4!}(\frac{-1}{2})^4 \cdots\cdots + \frac{1}{k!}(\frac{-1}{2})^n$$

$= e^{-\frac{1}{2}}$ 做泰勒展開到第 k 次項的結果！！！（ k 為 n 除以 2 的商）

(二)在問題二中，處理的是交換禮物時，不發生兩個人互抽的機率，而所求的結果是P_2和P_3相同、P_4和P_5相同，兩個兩個相同。而兩項兩項合併後所形成的新數列，居然是 $e^{-1/2}$ 做泰勒展開，到第一次項、第二次項、第三次項……的結果。

兩人互抽、兩兩相同、負二分之一次方。這三個「 2 」究竟有沒有關係呢？出現三個 2 是巧合，還是三者之間有密切相關？我們感到十分好奇。於是我們打算著手計算「不出現三人一組的機率」，看看會不會是三個三個相同？看看會不會出現 e 的負三分之一次方？

而在計算「不出現三人一組的機率」之前，我們先很快地計算「不出現一個人一組的機率」，因為如果「不出現三人一組的機率」和 $e^{-1/3}$ 的泰勒展開式有關，那「不出現一個人一組的機率」就極可能和 e^{-1}的泰勒展開有關。

四、計算「不出現一個人一組的機率」。

(一)令班上有 n 人時，班上經抽禮物活動後，未出現自己抽自己的機率為P_n。經簡單的計算可得

$P_1 = 0$

$P_2 = \frac{1}{2\times1} = \frac{1}{2}$

$P_3 = \frac{2}{3\times2\times1} = \frac{1}{3}$ （有 3 人互抽一種情況）

$P_4 = \frac{6+3}{4\times3\times2\times1} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ （有 4 和 2-2 兩種情況）

$P_5 = \frac{24+20}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$ （有 5 和 3-2 兩種情況）

隨著算出P_1、P_2、P_3、P_4，一直到P_5，我們越來越興奮，因為P_1到P_5都符合$\langle P_n\rangle$會是e^{-1}泰勒展開到第 n 次項的猜想。

(二)和處理問題二時的方法相同，我們設法將P_n用 P_{n-1} 、 P_{n-2} ……等等結果表示，把 P_{n-1} 用 P_{n-2} 、 P_{n-3} ……等等結果表示，再將此兩式聯立，然後找出$\langle P_n\rangle$數列中，各項的變化。我們依然稱第一個抽籤的同學為甲，甲若抽中其他同學所提供的禮物，則稱此被甲抽中的同學為乙，乙並且成為第二位抽禮物的同學。以此類推。

1.我們將P_n拆開成三種情況討論。分別是

狀況一　甲抽到自己。
狀況二　甲抽到乙，乙抽到甲。
狀況三　甲抽到乙，乙抽到丙。

「發生這三種狀況的機率」及
「發生這三種狀況後，還不會出現自己抽到自己的機率」列表如下所示：

表Ⅲ	狀況一	狀況二	狀況三
狀況發生機率	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}$
仍不會出現抽中自己的機率	0	P_{n-2}	?

我們將上表中的？設為 X，如此一來，便可將P_n表示為

$$P_n=\boxed{\frac{1}{n}\times 0}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times P_{n-2}}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times X} \qquad \text{Ⅲ式}$$

2.我們將 P_{n-1} 拆開成兩種情況討論。分別是

狀況一　甲抽到自己。

狀況二　甲抽到乙。

「發生這兩種狀況的機率」及

「發生這兩種狀況後，還不會出現自己抽到自己的機率」列表如下所示：

表Ⅳ	狀況一	狀況二
狀況發生機率	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$
仍不會出現抽中自己的機率	0	?

表Ⅳ中的？和表Ⅲ中的？所代表的情況完全相同，因此我們將P_{n-1} 表示為

$$P_{n-1}=\boxed{\frac{1}{n-1}\times 0}+\boxed{\frac{n-2}{n-1}\times X} \qquad \text{Ⅳ式}$$

3.我們將「Ⅲ式」及「Ⅳ式」兩方程式聯立，並消掉 X 後，可以得到

$$P_n=P_{n-1}+\frac{P_{n-2}-P_{n-1}}{n}$$

為了看出數列<P_n>中，ΔP的變化，再將上式改寫為

$$P_n-P_{n-1}=-\frac{P_{n-1}-P_{n-2}}{n} \qquad \text{（一增一減，變化量為前一次變化量的 } \frac{-1}{n} \text{）}$$

已知 $P_1=0$ 、 $P_2=\frac{1}{2}$

所以可以寫出

$$P_3=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-0)\times\frac{-1}{3}=\frac{1}{2}+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{3})$$

$$P_4=\frac{1}{2}+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{3})+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{3})(\frac{-1}{4})$$

$$P_5=\frac{1}{2}+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{3})+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{3})(\frac{-1}{4})+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{3})(\frac{-1}{4})(\frac{-1}{5})$$

以此類推，當班上有 n 人時，不發生「自己抽自己」的機率為

$$P_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{2\times3\times4\times5}\ldots\ldots+(-1)^n\frac{1}{2\times3\times4\times\ldots\ldots\times n}$$

$$=\boxed{1-\frac{1}{1}+}\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{2\times3\times4\times5}\ldots\ldots+(-1)^n\frac{1}{2\times3\times4\times\ldots\ldots\times n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}(-1)^1+\frac{1}{2!}(-1)^2+\frac{1}{3!}(-1)^3+\frac{1}{4!}(-1)^4\ldots\ldots+\frac{1}{n!}(-1)^n$$

$=e^{-1}$做泰勒展開到第 n 次項的結果。

居然是「e」！

這結果令人欣喜，我們迫不及待地處理「不出現三人互抽的機率」，希望會出現 $e^{-1/3}$ ，以及班上人數為3k、3k+1、3k+2人時，機率相同的結果。

五、計算「不出現三人一組的機率」。

(一)令班上有 n 人時，班上經抽禮物活動後，未出現三人一組的機率為P_n。經簡單的計算可得

$P_1=1$ 、 $P_2=1$

$P_3=\dfrac{3+1}{3\times2\times1}=\dfrac{2}{3}$ (有 2-1 和 1-1-1 兩種情況)

$P_4=\dfrac{6+3+6+1}{4\times3\times2\times1}=\dfrac{2}{3}$ (有 4 和 2-2 和 2-1-1 和 1-1-1-1 四種情況)

$P_5=\dfrac{24+30+15+10+1}{5\times4\times3\times2\times1}=\dfrac{2}{3}$ (有 5 和 4-1 和 2-2-1 和 2-1-1-1 和 1-1-1-1-1 五種情況)

$P_6=\dfrac{120+144+90+90+15+45+15+1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\dfrac{13}{18}$ (有 6 和 5-1 和 4-2 和 4-1-1 和 2-2-2 或 2-2-1-1 或 2-1-1-1-1 或 1-1-1-1-1-1 八種情況)

算到P_6之後，我們的信心大增：

因為 $P_3=P_4=P_5$ ，而且 $P_6=\dfrac{13}{18}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times6}$

(二)和處理問題二時相同，我們設法將P_n用 P_{n-1} 、 P_{n-2} ……等結果表示，把 P_{n-1} 用 P_{n-2} 、 P_{n-3} ……等等結果表示，試圖找出$\langle P_n\rangle$數列中，各項的變化。我們依然稱第一個抽籤的同學為甲，甲若抽中其他同學所提供的禮物，則稱此同學為乙，乙並且成為第二位抽禮物的同學。以此類推。

1.我們將P_n拆開成五種情況討論。分別是

狀況一　甲抽到自己。
狀況二　甲抽到乙，乙抽到甲。
狀況三　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到甲。
狀況四　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到丁，丁抽到甲。
狀況五　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到丁，丁抽到戊。

「發生這五種狀況的機率」及
「發生這五種狀況後，仍不會出現三人一組的機率」列表如下所示：

表V	狀況發生機率	仍不會出現三人形成一組的機率
狀況一	$\dfrac{1}{n}$	P_{n-1}

居然是「e」！

狀況二	$\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$	P_{n-2}
狀況三	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}$	0
狀況四	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{1}{n-3}$	P_{n-4}
狀況五	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{n-4}{n-3}$	?

我們將上表中的？設為 X ，如此一來，便可將P_n表示為

$$P_n=\boxed{\frac{1}{n}\times P_{n-1}}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times P_{n-2}}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times 0}$$
$$+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{1}{n-3}\times P_{n-4}}+\boxed{\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{n-4}{n-3}\times X} \quad \text{V式}$$

2.我們將 P_{n-1} 拆開成四種情況討論。分別是

狀況一　甲抽到自己。
狀況二　甲抽到乙，乙抽到甲。
狀況三　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到甲。
狀況四　甲抽到乙，乙抽到丙，丙抽到丁。

「發生這四種狀況的機率」及
「發生這四種狀況後，仍不會出現三人一組的機率」列表如下所示：

表VI	狀況發生機率	仍不會出現三人形成一組的機率
狀況一	$\frac{1}{n-1}$	P_{n-2}
狀況二	$\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}$	P_{n-3}
狀況三	$\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{1}{n-3}$	0
狀況四	$\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{n-4}{n-3}$	?

表VI中的？和表V中的？所代表的情況是完全相同的，因此 P_{n-1} 可表示為

$$P_{n-1}=\boxed{\frac{1}{n-1}\times P_{n-2}}+\boxed{\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times P_{n-3}}+\boxed{\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{1}{n-3}\times 0}$$
$$+\boxed{\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{n-4}{n-3}\times X} \quad \text{VI式}$$

3.我們將「V式」及「VI式」兩方程式聯立，並消掉 X 後，可以得到

$$P_n=P_{n-1}+\frac{P_{n-4}-P_{n-3}}{n}$$

為了看出數列<P_n>中，ΔP的變化，再將上式改寫為

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{P_{n-3} - P_{n-4}}{n} \qquad \text{（一增一減，變化量為前一次變化量的 } \frac{-1}{n} \text{ ）}$$

已知 $P_1 = P_2 = 1$ 、 $P_3 = P_4 = \frac{2}{3}$

所以可以寫出

$$P_5 = \frac{2}{3} + (1-1)(\frac{-1}{5}) = \frac{2}{3}$$

$$P_6 = \frac{2}{3} + (\frac{2}{3}-1)(\frac{-1}{6}) = \frac{2}{3} + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{6}) = \frac{13}{18}$$

$$P_7 = \frac{2}{3} + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{6}) + \frac{0}{7} = \frac{13}{18}$$

$$P_8 = \frac{2}{3} + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{6}) + \frac{0}{8} = \frac{13}{18}$$

$$P_9 = \frac{2}{3} + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{6}) + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{6})(\frac{-1}{9}) = \frac{116}{162}$$

以此類推，當班上有 n 人時，不發生「三人一組」的機率一一依依一一依依

$$P_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times6} - \frac{1}{3\times6\times9} \cdots + (-1)^k \frac{1}{3\times6\times9\ldots3k} \quad \text{（ k 為 n 除以 3 的商）}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}(\frac{-1}{3})^1 + \frac{1}{2!}(\frac{-1}{3})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{-1}{3})^3 + \frac{1}{4!}(\frac{-1}{3})^4 \cdots\cdots + \frac{1}{k!}(\frac{-1}{3})^k$$

$= e^{-\frac{1}{3}}$ 做泰勒展開到第 k 次項的結果（ k 為 n 除以 3 的商）

我們得到的結果和原本胡亂猜想的答案完全相同，這個問題的答案居然剛好和 $e^{-1/3}$ 做泰勒展開一一對應，這真是太神奇了！

六、計算「不出現 m 人一組的機率」。

(一)大膽地猜想：

算出「不出現自己抽中自己的機率」、「不出現兩人互抽形成一組的機率」、「不出現三人形成一組的機率」後，我們大膽地猜想「不出現 m 人一組的機率」，其算式的形式會和「不出現一人一組」、「不出現兩人一組」，以及「不出現三人一組」的結果相同。我們大膽地猜：

班上有 n 個同學互抽禮物，取後不放回，不出現 m 人形成一組的機率P_n為

$$P_n = 1 + \frac{1}{1!}(\frac{-1}{m})^1 + \frac{1}{2!}(\frac{-1}{m})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{-1}{m})^3 \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{k!}(\frac{-1}{m})^k$$

其中 k 為 n 除以 m 後，所得的商。

(二)設法證明：

設班上有 n 個同學互抽禮物，抽中自己的禮物不重抽，不出現 m 人一組互抽的機率為 P_n

1.計算出 P_1、P_2、…………P_m、 P_{m+1}

(1) $P_1=P_2=\cdots\cdots=P_{m-1}=1$（總人數少於 m 人時不可能出現 m 個人互抽）

(2) $P_m=1-\dfrac{(m-1)!}{m!}=1-\dfrac{1}{m}$

(3) $P_{m+1}=1-\dfrac{(m+1)(m-1)!}{(m+1)!}=1-\dfrac{1}{m}$

2.計算出P_n 、 P_{n-1} 、 P_{n-m+1} 、 P_{n-m} 之間的關係。

我們在計算過「不出現自己抽中自己」、「不出現兩人互抽」、「不出現三人互抽」的機率後，將原本的寫法稍加修改，使計算過程更加簡單明瞭，我們不再將P_n 拆開成 m+2 種情況討論，而是拆成 n 種情況討論！分別是

狀況 1　甲抽到自己。
狀況 2　甲抽乙，乙抽甲。
狀況 3　甲抽乙，乙抽丙，丙抽甲。
⋮
狀況 n-2　甲抽乙，乙抽丙……第 n-3 人抽第 n-2 人，第 n-2 人抽甲。
狀況 n-1　甲抽乙，乙抽丙……第 n-2 人抽第 n-1 人，第 n-1 人抽甲。
狀況 n　甲抽乙，乙抽丙……第 n-1 人抽第 n 人，第 n 人抽甲。

「發生這 n 種狀況的機率」及
「發生這些狀況後，仍不出現 m 人形成一組的機率」
列表如下所示：

表V	狀況發生機率	仍不會出現 m 人形成一組的機率
狀況 1	$\frac{1}{n}$	P_{n-1}
狀況 2	$\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$	P_{n-2}
狀況 3	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}$	P_{n-3}
⋮	⋮	⋮
狀況 m	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\cdots\times\frac{n-m+1}{n-m+2}\times\frac{1}{n-m+1}$	0

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
狀況 n-2	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\ldots\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$	P_2
狀況 n-1	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\ldots\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$	P_1
狀況 n	$\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\ldots\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}$	P_0

我們很快就發現這 n 種狀況出現的機率都是 1/n ，而在這 n 狀況下，仍不出現 m 個人形成一組互抽的機率，分別是 P_{n-1} 一直到 P_0，中間缺了 P_{n-m} ，因此我們可以寫下

$$P_n=\boxed{\frac{P_{n-1}}{n}}+\boxed{\frac{P_{n-2}}{n}}+\boxed{\frac{P_{n-3}}{n}}+\cdots+\boxed{\frac{P_{n-m+1}}{n}}+\boxed{\frac{0}{n}}+\boxed{\frac{P_{n-m-1}}{n}}+\cdots+\boxed{\frac{P_2}{n}}+\boxed{\frac{P_1}{n}}+\boxed{\frac{P_0}{n}} \qquad \text{V式}$$

同理，我們可以寫下

$$P_{n-1}=\boxed{\frac{P_{n-2}}{n-1}}+\boxed{\frac{P_{n-3}}{n-1}}+\cdots+\boxed{\frac{P_{n-m}}{n-1}}+\boxed{\frac{0}{n-1}}+\boxed{\frac{P_{n-m-2}}{n-1}}+\cdots+\boxed{\frac{P_2}{n-1}}+\boxed{\frac{P_1}{n-1}}+\boxed{\frac{P_0}{n-1}} \qquad \text{VI式}$$

將V式和VI式聯立，化簡後可得

$$P_n=P_{n-1}+\frac{P_{n-m-1}-P_{n-m}}{n}$$

為了看出數列 $\langle P_n\rangle$ 中，ΔP的變化，再將上式改寫為

$$P_n-P_{n-1}=-\frac{P_{n-m}-P_{n-m-1}}{n}$$ （一增一減，變化量為前一次變化量的 $\frac{-1}{n}$ ）

3.由1.和2.的結果寫出 $\langle P_n\rangle$。

$$\begin{aligned}
P_1 &=1\\
P_2 &=1\\
\vdots\quad & \quad\vdots\\
P_{m-1} &=1\\
P_m &=1-\frac{1}{m}=1+(\frac{-1}{m})\\
P_{m+1} &=1-\frac{1}{m}=1+(\frac{-1}{m})\\
P_{m+2} &=P_{m+1}+(-\frac{P_2-P_1}{m+2})=1+(\frac{-1}{m})+\frac{0}{m+2}=1+(\frac{-1}{m})\\
P_{m+3} &=P_{m+2}+(-\frac{P_3-P_2}{m+3})=1+(\frac{-1}{m})+\frac{0}{m+3}=1+(\frac{-1}{m})\\
\vdots\quad & \quad\vdots\\
P_{2m-2} &=P_{2m-3}+(-\frac{P_{m-2}-P_{m-1}}{2m-2})=1+(\frac{-1}{m})+\frac{0}{2m-2}=1+(\frac{-1}{m})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{2m-1} &= P_{2m-2}+(-\frac{P_{m-1}-P_{m-2}}{2m-1})=1+(\frac{-1}{m})+\frac{0}{2m-1}=1+(\frac{-1}{m}) \\
P_{2m} &= P_{2m-1}+(-\frac{P_{m}-P_{m-1}}{2m})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m}) \\
P_{2m+1} &= P_{2m}+(-\frac{P_{m+1}-P_{m}}{2m+1})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+\frac{0}{2m+1} \\
P_{2m+2} &= P_{2m+1}+(-\frac{P_{m+2}-P_{m+1}}{2m+2})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+\frac{0}{2m+2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
P_{3m-2} &= P_{3m-3}+(-\frac{P_{2m-2}-P_{2m-3}}{3m-2})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+\frac{0}{3m-2} \\
P_{3m-1} &= P_{3m-2}+(-\frac{P_{2m-1}-P_{2m-2}}{3m-1})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+\frac{0}{3m-1} \\
P_{3m} &= P_{3m-1}+(-\frac{P_{2m}-P_{2m-1}}{3m})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m}) \\
P_{3m+1} &= P_{3m}+(-\frac{P_{2m+1}-P_{2m}}{3m+1})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m})+\frac{0}{3m+1} \\
P_{3m+2} &= P_{3m+1}+(-\frac{P_{2m+2}-P_{2m+1}}{3m+2})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m})+\frac{0}{3m+2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
P_{4m-2} &= P_{4m-3}+(-\frac{P_{3m-2}-P_{3m-3}}{4m-2})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m})+\frac{0}{4m-2} \\
P_{4m-1} &= P_{3m-2}+(-\frac{P_{2m-1}-P_{2m-2}}{4m-1})=1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m})+\frac{0}{4m-1} \\
P_{4m} &= P_{4m-1}+(-\frac{P_{3m}-P_{3m-1}}{4m}) \\
&= 1+(\frac{-1}{m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m})+(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{2m})(\frac{-1}{3m})(\frac{-1}{4m}) \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

4.可以將3.的結果合併寫成，令 n 除以 m 的商為 k 。

$$P_n = 1+\frac{1}{1!}(\frac{-1}{m})^1+\frac{1}{2!}(\frac{-1}{m})^2+\frac{1}{3!}(\frac{-1}{m})^3 \ldots\ldots\ldots+\frac{1}{k!}(\frac{-1}{m})^k$$

而這就是 $e^{-\frac{1}{m}}$ 做泰勒展開到第 k 次項的結果，當 $n\to\infty$時，$P_n = e^{-\frac{1}{m}}$ 。

七、探討問題二答案寫成泰勒展開式時，各次項所代表的意義。

（全國科展前的研究過程與方法）

我們用解方程式的方法求出，「班上有42個人互抽禮物，不出現 2 人一組」的機率，結果發現，答案恰好等於 $e^{-1/2}$ 做泰勒展開到第21次項的值。我們覺得，答案既然這麼漂亮，那展開式中的每一項可能都具有特別的意義，我們在地區科展前未能完成這項工作，在地區科展後，我們終於找到了每一項的意義，沒想到，每一項所代表的意義平淡無奇，並不有趣。

(一)新名詞－「團」的定義

在往後的討論中，為了簡化敘述，我們要定義一個抽象的新名詞－「團」。我們定義「團」為幾個「 m 人互抽形成一組」的組所形成。例如：全班42人互抽禮物後，結果

1 號抽 2 號、 2 號抽 3 號、 3 號抽 1 號，三人形成一組，稱為 A 組。
4 號抽 5 號、 5 號抽 6 號、 6 號抽 4 號，三人形成一組，稱為 B 組。
7 號抽 8 號、 8 號抽 9 號、 9 號抽 7 號，三人形成一組，稱為 C 組。
其他33人互抽形成一組，稱為 D 組。

我們可以說，抽籤後全班被分成四組，其中 3 人互抽形成一組的有 A 、 B 、 C 三組；33人互抽形成一組的有一組。

接著，我們稱數個組構成一個「團」。例如： A 組和 B 組可稱為一個團；為「由兩個三人一組所構成的團」。在上述的抽籤結果中，一共有三個「由兩個三人一組所構成的團」，分別是 A 組 B 組構成一個團、 B 組 C 組構成一團、 C 組 A 組構成一團。

同理， A 、 B 、 C 三組的集合，為一個「由三個三人一組所構成的團」。在上述的抽籤結果中，「由三個三人一組所構成的團」只有一個。

(二)從「不出現三人一組」開始思考

在尋找各次項所代表的意義時，我們選擇思考不出現「三人一組」的機率來推敲，我們選擇「三人一組」的原因，是因為「一人一組」和「兩人一組」的情況太簡單，反而不容易觀察，而「四人一組」以上的計算量又太大，因此，我們選擇觀察「三人一組」的結果。

班上有 n 個人，不出現「三人一組」的機率為

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times6}-\frac{1}{3\times6\times9}+\cdots\cdots\frac{1}{3\times6\times9\times\ldots\times3k}$$ （ k 為 n 除以 3 的商）

(三)第一次項「-1/3」中，「 1/3 」的意義

我們經過了一些嘗試之後，發現「 1/3 」所代表的意義可以解釋為「 n 個人進行交換禮物，出現三人一組，組數的期望值」。換句話說，只要 n 大於等於 3 ，互抽禮物後，平均會出現 1/3 個「三人一組」，這個結果很容易證明。

E ＝（ n 人中任取 3 人的方法數）×（此 3 人恰形成一組的機率）

$$=\left(\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3!}\right)\times\left(\frac{2}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\right)=\frac{1}{3}$$

接著，我們很快地計算了一下，不出現「四人一組」中的「 1/4 」，不出現「五人一組」中的「 1/5 」，以致於不出現「 n 人一組」中的「 1/n 」，通

通和「三人一組」中的「 1/3 」具有相同的意義。

(四)第二次項「 $\frac{1}{3\times 6}$ 」的意義

將第一次項的「 1/3 」視為「出現三人一組，組數的期望值」之後。立刻猜 $\frac{1}{3\times 6}$ 所代表的意義是出現「兩個三人一組構成一團」，團數的期望值。簡單計算可得，兩組構成一團，團數期望值

＝（ n 人中取 6 人的取法）×（此 6 人恰形成兩個三人一組的機率）

$$=\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}\right)\times\left(\frac{5}{n}\times\frac{4}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times\frac{2}{n-3}\times\frac{1}{n-4}\times\frac{1}{n-5}\right)$$

$$=\frac{1}{3\times 6}$$

(五)第三、四……次項的意義

猜出第一、二次項的意義後，第三、四……等次項的意義馬上就知道了。第三次項的 $\frac{1}{3\times 6\times 9}$ 是「出現三個三人一組形成一團」，團數的期望值；第四次項的 $\frac{1}{3\times 6\times 9\times 12}$ 是「出現四個三人一組形成一團」，團數的期望值；第 k 次項的 $\frac{1}{3\times 6\times 9\times \ldots\ldots 3k}$ 是「出現 k 個三人一組形成一團」，團數的期望值。

（礙於7000字規定，證明略。）

(六)最終的答案會＝團數期望值一加一減的總和。

由上述的猜想可知， n 個人互抽禮物，不出現「三人一組」的機率
＝＋ 1
－出現 1 個三人一組構成一團，團數的期望值
＋出現 2 個三人一組構成一團，團數的期望值
－出現 3 個三人一組構成一團，團數的期望值
＋出現 4 個三人一組構成一團，團數的期望值
－出現 5 個三人一組構成一團，團數的期望值
……………

為何要一加一減？這個道理頗簡單，這是我們數學課堂上，面對排列組合問題，常用的技巧。因為不管抽籤的結果出現幾個三人一組，都只能扣掉一次，我們要扣除的是「出現三人一組的機率」，而不是「出現三人一組組數的期望值」。因此，我們要把多算的次數扣掉，才能讓「期望值」變成「機率」。舉例來說，若抽籤結果出現三個三人一組，在第一次項中，會被扣除了三次，

因此要再加回來，最終只能扣掉一次。

我們假設某一種抽籤的方式中，出現 k 組「三人一組」，我們只能扣除一次，不能扣 k 次。又，我們知道 $1 = C_1^k - C_2^k + C_3^k - C_4^k + \ldots\ldots\ldots C_k^k$ 。

而 C_r^k 所代表的就是共有 k 個三人一組時，由 r 個三人一組構成一個團的團個數。

因此，透過這樣一加一減的計算，我們便可得到不出現三人一組的機率！

(七)證明班上有 n 個同學互抽禮物，取後不放回，不出現 m 人形成一組的機率

$P_n = 1 + \frac{1}{1!}(\frac{-1}{m})^1 + \frac{1}{2!}(\frac{-1}{m})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{-1}{m})^3 \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{k!}(\frac{-1}{m})^k$ 中，

第 k 次項所代表的意義可以是「出現 k 組『 m 個人互抽形成一組』構成的團，團數的期望值」。

（礙於大會7000字規定，故略）

陸、研究結果

一、班上有 n 位同學進行交換禮物活動，抽到自己的禮物不需重抽。當全班同學都抽完禮物後，可以用抽禮物的結果將班上分成數組，分成組數的期望值為

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

二、班上有 n 位同學進行交換禮物活動，抽到自己的禮物不需重抽。當全班同學都抽完禮物後，不出現 m 個同學互抽形成一組的機率 P_n 為

$$P_n = 1 + \frac{1}{1!}(\frac{-1}{m})^1 + \frac{1}{2!}(\frac{-1}{m})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{-1}{m})^3 \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{k!}(\frac{-1}{m})^k$$

其中 k 為 n 除以 m 的商。

P_n 恰為 $e^{-\frac{1}{m}}$ 做泰勒展開到第 k 次項的結果，當 $n \to \infty$ 時，$P_n = e^{-\frac{1}{m}}$ 。

三、問題二的答案中

$$P_n = 1 + \frac{1}{1!}(\frac{-1}{m})^1 + \frac{1}{2!}(\frac{-1}{m})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{-1}{m})^3 \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{k!}(\frac{-1}{m})^k$$

第 k 次項 $\frac{1}{k!}(\frac{1}{m})^k$ 所代表的意義是 n 個人互抽禮物，出現 k 組「 m 個人一組」構成一團，團數的期望值！

柒、討論

一、我們後來發現所謂的 n 個人進行交換禮物活動，不抽到自己的問題，就是著名的「秘書將 n 封信裝進 n 個信封全部裝錯」問題。當 n 趨近於無限大時，全裝錯的機率會 = e^{-1}。而我們將此問題推廣到，不出現兩兩互裝的機率為 $e^{-1/2}$ 的泰勒展開；不出

現三封一組裝錯的機率為 $e^{-1/3}$ 的泰勒展開等等。

二、對於 n 個人玩交換禮物遊戲，「不出現 m 人形成一組的機率」，恰巧對應 $e^{-1/m}$ 的泰勒展開式。我們感到十分意外，在區賽科展前，我們未能明白 $e^{-1/m}$ 的泰勒展開式中，每一次項在這個機率問題中，是否都有相對應的意義。我們在區賽科展後，總算找到了每一項所代表的意義。為了解釋這些項的意義，我們定義了「團」這個名詞，但是對於「團」的文字敘述，我們自覺說明得不好，但又想不到更好的方式來描述方式。

三、我們目前已知問題二中，泰勒展開式每一項所代表的意義，但是未能將這個問題和自然對數的底「 e 」做出直接連結，對此，我們感到有些許遺憾，希望未來能繼續努力，設法把這個問題直接和 e 的定義，做出直接的連結。

捌、參考資料

國立編譯館　理科下冊　第一章第二節　泰勒展開式

【評語】040401

此作品從交換禮品遊戲，發現班上有 n 人時經抽禮物活動後，未抽成兩兩互抽形成一組機率 Pn，不出現一個人一組的機率，或不出現三人一組的機率，及不出現 n 人一組的機率，此一作品發現其機率和指數函數 ex 之泰勒展開式有密切關係。此作品從數學遊戲發現數學觀念，極富教育意義，但無參考資料且創新性稍不足。