

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040113

螺旋彈簧

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者： 高二 黃楷傑	指導老師： 黃木全
---------------	--------------

關鍵詞：角速度、彈簧最終（平衡）長度、彈簧分布

作品名稱：螺旋彈簧

摘要

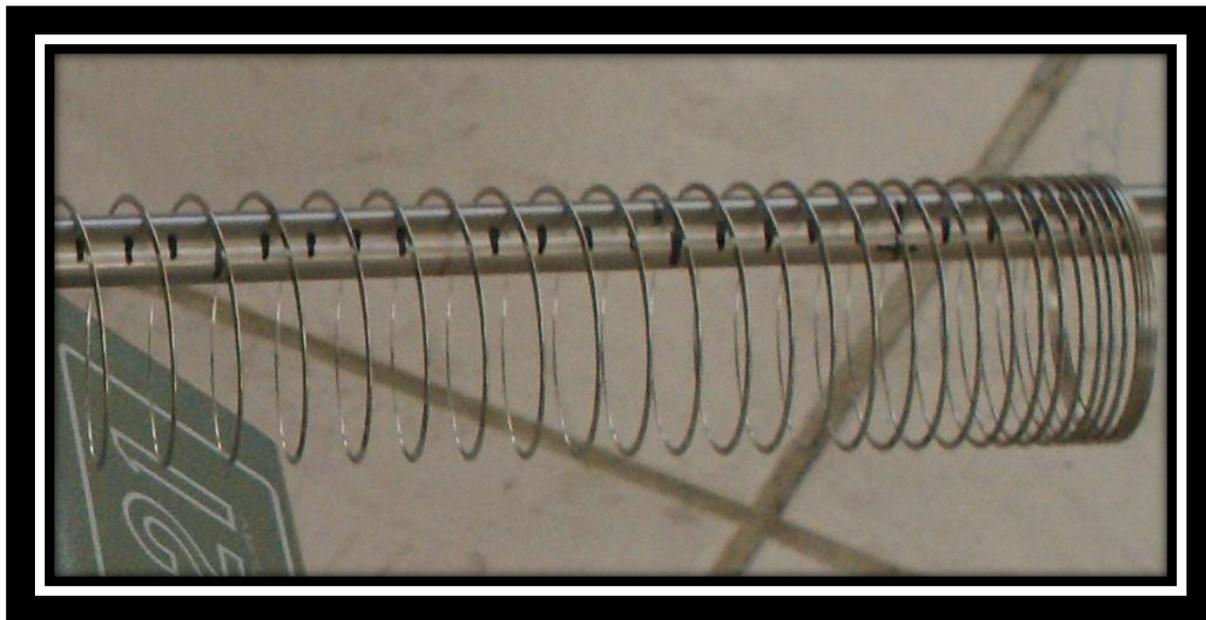
在物理實驗“彈簧的實驗”中可發現彈簧具有相當多有趣的性質。其中一性質為：當它被垂直掛吊時，會分布的疏密不均。本文將探討彈簧於水平面上，一端固定於旋轉中心，繞中心之垂直軸轉動時的彈簧伸長量及分布，找出相關的變因並觀察之。變因包括加於尾端的質量、彈簧性質、旋轉角速率…等等。

最後結論所提出的除了可以很直覺地預料的性質(如：轉速愈快，彈簧伸長量愈大)以外，本文歸納出彈簧之分布曲線之數學行式，更探討了彈簧之理論無限延伸條件、彈簧分布與各變因的關係等等不為人知的現象。



壹、 研究動機

在學校的實驗裡，有一種“彈簧的實驗”。我在實驗中發現，它具有相當多有趣的性質。除了可以用來示範橫波與縱波以外，當它被垂直掛吊時，會出現一種上疏下密的不均勻分布。而我在桌面上轉動它時，也有類似的情形發生。仔細想一想，好像又和只受重力的彈簧不大一樣，因為離我較遠的一端受的離心力較大，似乎不是一兩下就可以解決的問題。因此我設計了以下實驗，再加以理論推導，以更加了解此現象。



貳、 研究目的

1. 彈簧一端固定於旋轉中心，於水平面上繞其中心垂直軸旋轉，找出並觀察彈簧在不同狀況下的伸長量及分布狀態
2. 探討總伸長量及彈簧分布的相關因素
3. 找出彈簧之分布曲線及其相關變因

參、 研究設備及器材

一、 設備

1. 旋轉平台(轆轤)
2. 支架
甲、鋼管(直徑 1cm)
乙、半圓塑膠水管(直徑 10cm)
3. 馬錶
4. 直尺
5. 游標尺
6. 熱熔槍
7. 電鑽
8. 鋸子



二、 器材

1. 彈簧
2. 砝碼
3. 細線
4. 木板
5. 冰棒棍



肆、 研究過程及方法

一、 實驗裝置

(一) 鋼管支架

於旋轉平台(轆轤)上以熱熔膠黏上兩片鑽孔過之木板，以鐵棒穿之，再以熱熔膠固定。再將鋼管套上鐵棒，以熱熔膠固定之。中心處設二細棒以固定彈簧。鋼管上刻刻度，以利高速拍照時之彈簧長度測量。鋼管上油以降低摩擦力。鋼管終端加有一冰棒棍，防止彈簧過度延伸。

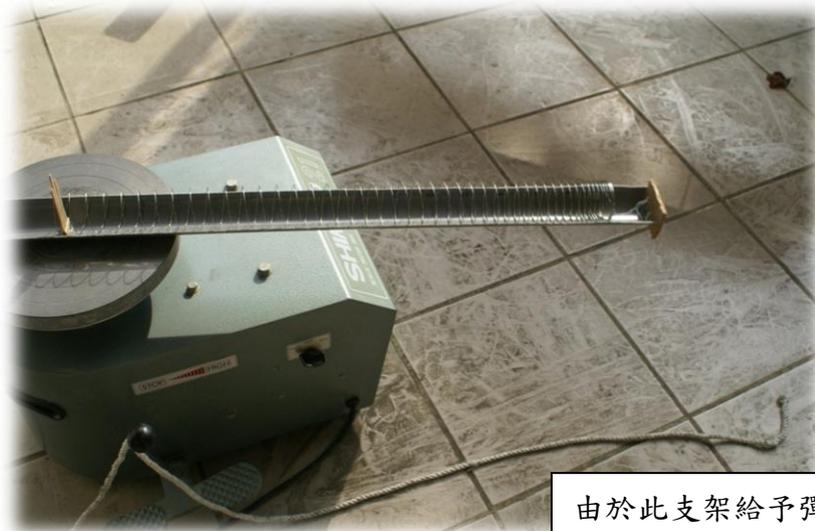
轉速控制器上繫童軍繩，以利於遠距離操控轉盤轉速。



(二) 半圓塑膠水管支架

取半圓塑膠水管，以熱熔膠固定於旋轉平台。於中央處以冰棒棍設一固定彈簧之軸。管之終端加有一木片檔版，防止彈簧過度延伸。水管上刻有刻度，以利高速拍照時之長度測量。

轉速控制器上繫童軍繩，以利於遠距離操控轉盤轉速。



由於此支架給予彈簧之摩擦力過大，使測量、計算困難，於此報告僅以鋼管支架之實驗結果進行探討。

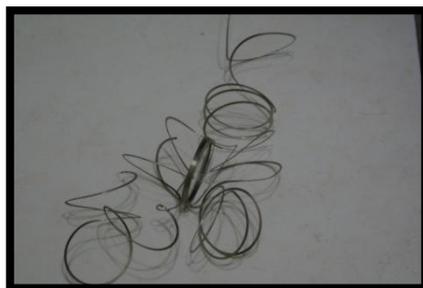
二、 實驗步驟

1. 將待測彈簧固定於轉盤中心上之固定器
2. (於彈簧尾端掛上砝碼)
3. 將細線繫於彈簧終端及支架(鋼管、水管)終端，以給予彈簧一較長之初始長度 *註一
4. 啟動轉盤，在遠處拉動童軍繩，加速轉盤
5. 使彈簧伸長約於 30~80cm 之範圍後，待其穩定
6. 測量其穩定狀態下若干轉所需之時間，換算成角速度
7. 在陽光照射下以高速快門(1/800~1/1000s)拍攝彈簧
8. 以電腦分析、判讀彈簧長度及分佈
9. 以不同之角速度、尾端質量、彈簧重複操作以上步驟

註一：由於摩擦力的存在，少了此步驟，彈簧將不易延伸，即使角速度已超過其可負荷之範圍

三、 實驗初步

第一次實驗時，尚未於支架尾端設阻擋物，導致實驗彈簧數度纏入旋轉盤台，導致彈簧損毀。



右圖為毀損之彈簧

因此，於支架終端設阻擋物加以避免。但吾人可由此經驗得知：在特定的情況下(如角速度過大)，如果支架夠長，可能造成彈簧超出彈性範圍，甚至對於理想彈簧的無限延伸。此外，當轉盤轉速達到彈簧開始伸展時，要使其長度落在 30~80cm 之間相當困難，任何一點的角速度變化即可對彈簧造成相當大程度的影響。這些問題皆相當值得討論。



轉速: 58.88s/50 轉(5.336rads/s)

長度:81.5cm



轉速:59.25s/50 轉(5.302rads/s)

長度:38.0cm

轉速只差 0.034rads/s(0.6%)，但長度卻差了 43.5cm(114%)

伍、 研究結果

取各彈簧進行以下實驗，使其與轉盤作加速轉動，直到彈簧伸長至可測量的總長(最終長度，範圍 30~90cm)，測量該條件下角速度與最終長度的關係。

實驗一、

(一)實驗操作

控制變因：

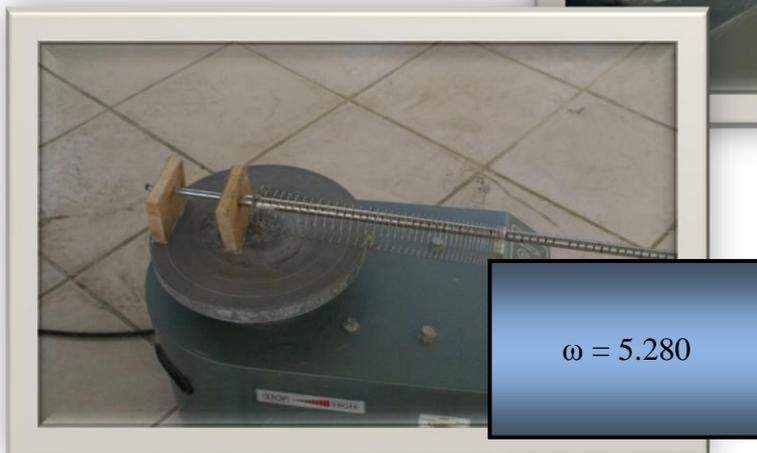
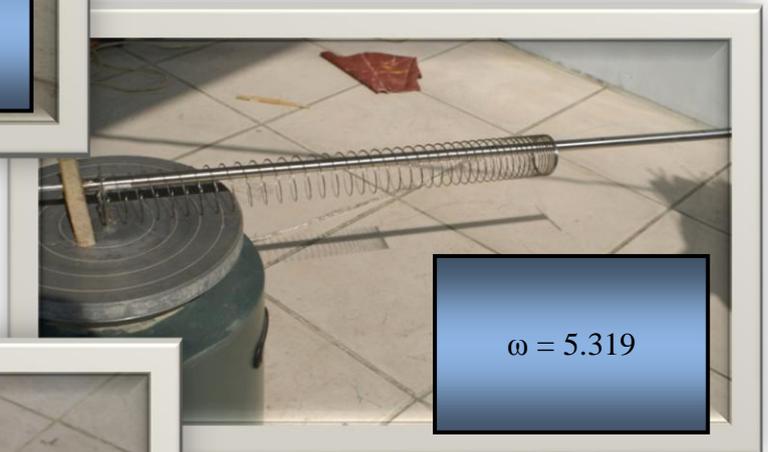
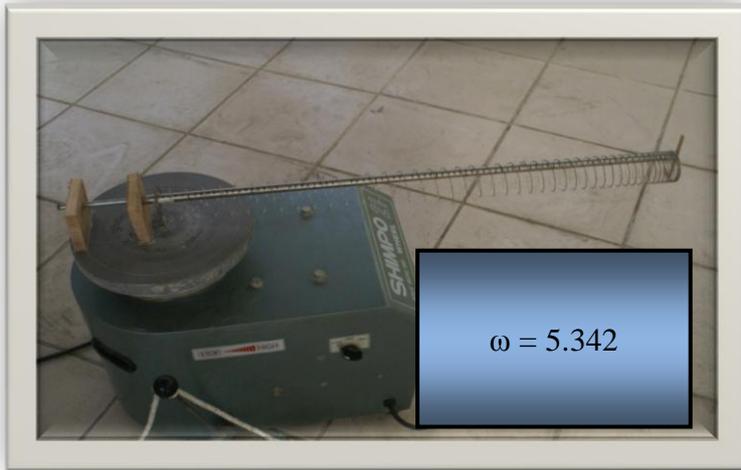
彈簧原長(ℓ_0):	0.028	(m)
彈力常數(k):	0.852	(N/m)
彈簧質量(M):	0.072	(kg)
尾端質量(M')	0	(kg)

操縱變因：

角速度(angular velocity ω)

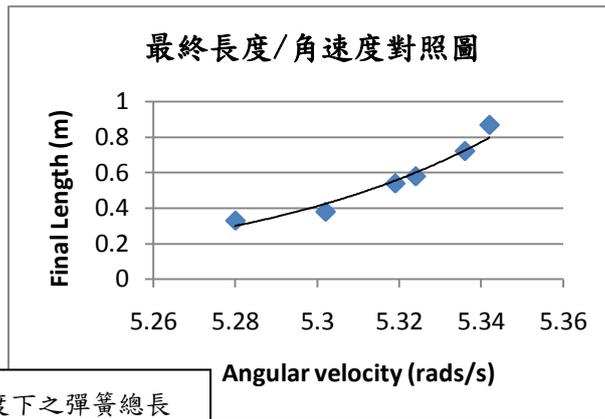
應變變因：

最終(平衡)長度(final length ℓ_f)



(二)實驗結果

1. 最終長度/角速度對照



最終長度：該角速度下之彈簧總長

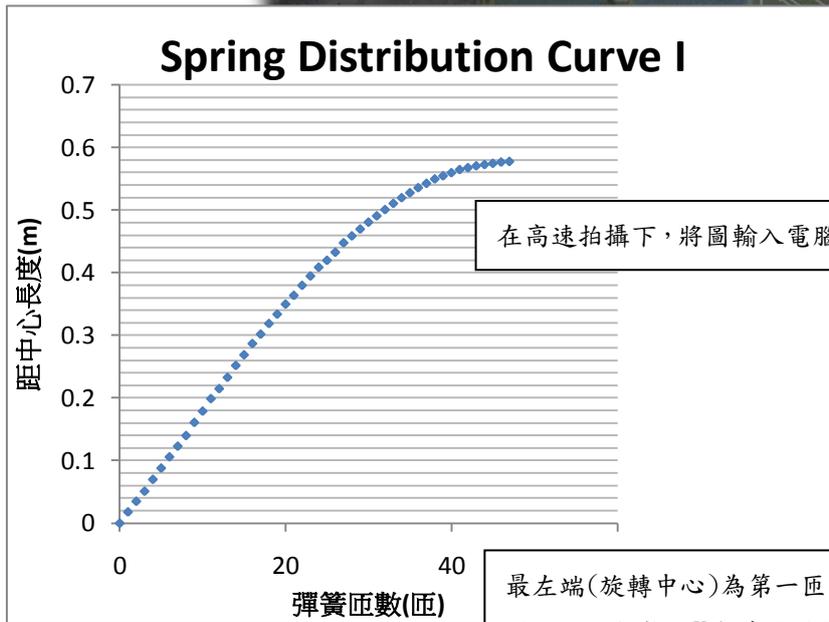
Number	Angular velocity (ω) (rads/s)	Final length (l_f) (m)
1	5.28	0.33
2	5.302	0.38
3	5.319	0.54
4	5.324	0.58
5	5.336	0.72
6	5.342	0.87

2. 彈簧分布曲線

取上面其中一組作分布分析

角速度 (ω) : 5.324 (rads/s)

彈簧總匝數 : 47 (匝)



在高速拍攝下，將圖輸入電腦進行分析所得之分布圖

最左端(旋轉中心)為第一匝，向右為第二匝，以此類推。Y軸表示該匝距中心之長度

實驗二、

以較前者為短之彈簧重複操作，進行觀察。

(一)實驗操作

控制變因：

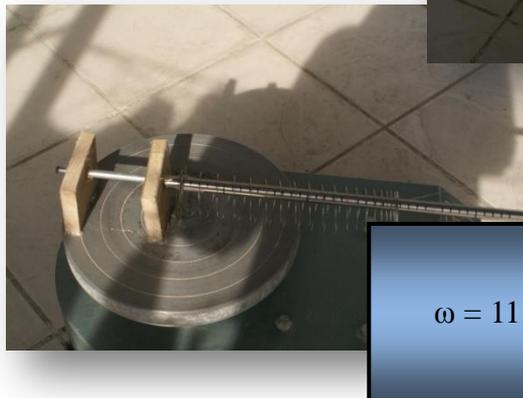
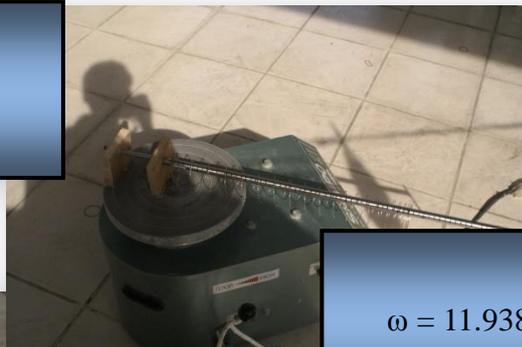
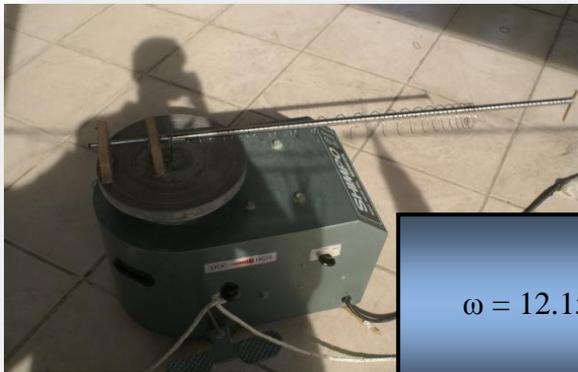
彈簧原長(ℓ_0): 0.012 (m)
彈力常數(k): 1.897 (N/m)
彈簧質量(M): 0.031 (kg)
尾端質量(M'): 0 (kg)

操縱變因：

角速度(angular velocity ω)

應變變因：

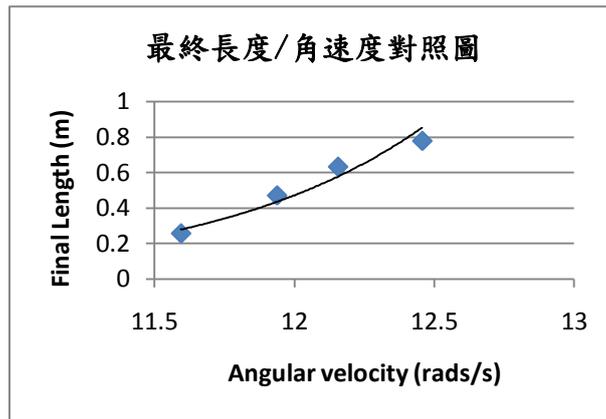
最終(平衡)長度(final length ℓ_f)



以達到相同的最終長度，角速度有所增加

(二) 實驗結果

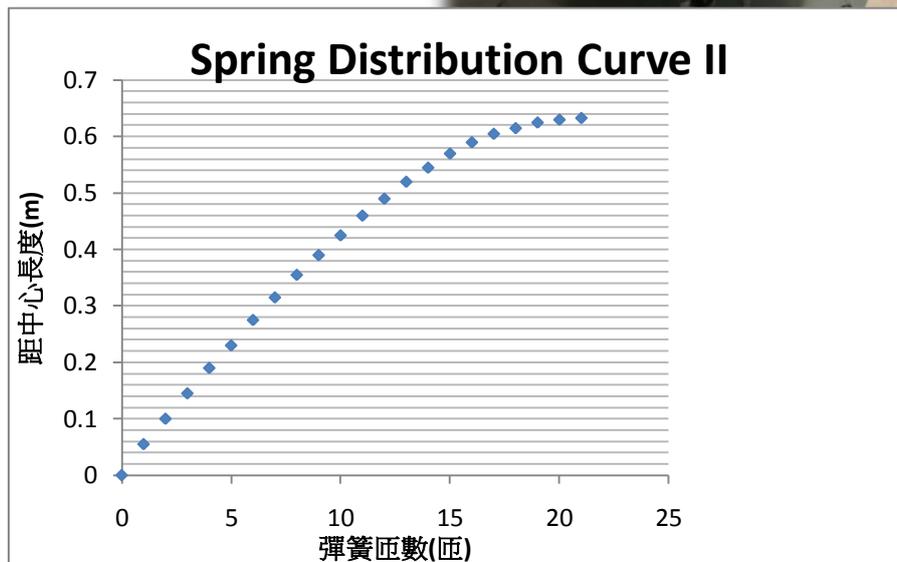
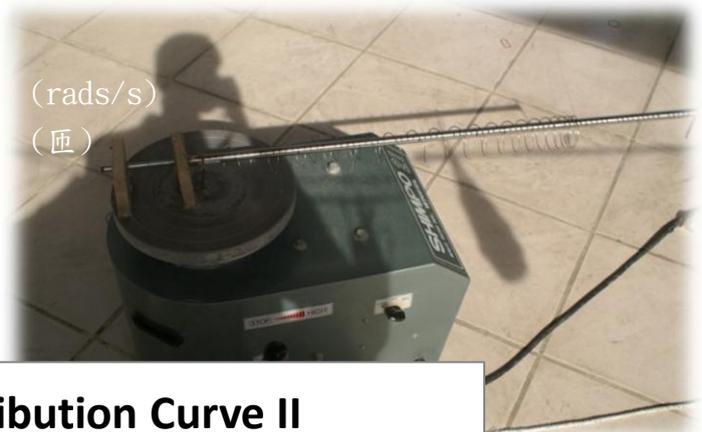
1. 最終長度/角速度對照



Number	Angular velocity (ω) (rads/s)	Final length (l_f) (m)
1	12.457	0.78
2	12.156	0.63
3	11.938	0.47
4	11.595	0.26

2. 彈簧分布曲線

角速度 (ω) : 12.156 (rads/s)
 彈簧總匝數 : 21 (匝)



此結果與實驗一之結果相似

實驗三、

初始狀況同於實驗一，只是彈簧之尾端加一砝碼，觀察其變化。

(一)實驗操作

控制變因：

彈簧原長(ℓ_0): 0.028 (m)
彈力常數(k): 0.852 (N/m)
彈簧質量(M): 0.072 (kg)
尾端質量(M'): 0.110 (kg)

操縱變因：

角速度(angular velocity ω)

應變變因：

最終(平衡)長度(final length ℓ_f)



$\omega = 2.128$

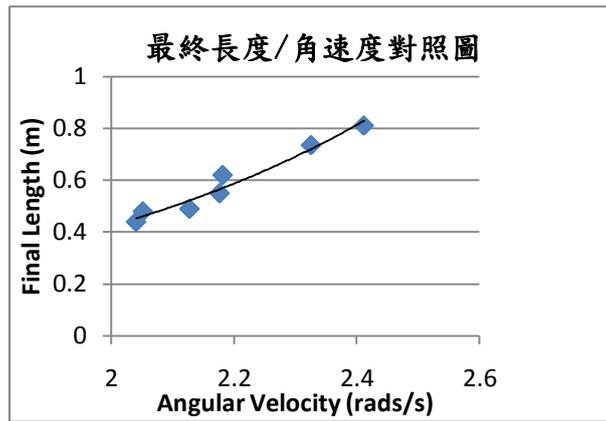


$\omega = 2.412$

所需之角速度變小

(二)實驗結果

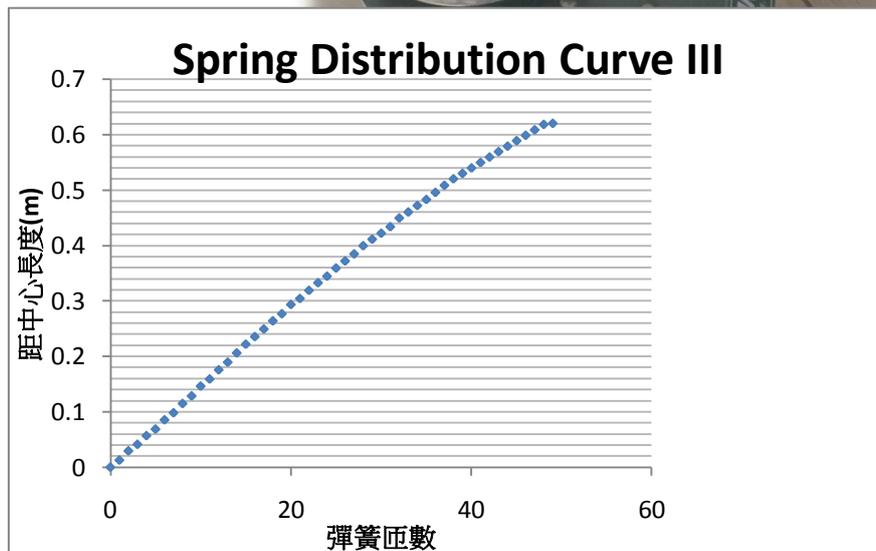
1. 最終長度/角速度對照



Number	Angular velocity (ω) (rads/s)	Final length (l) (m)
1	2.412	0.81
2	2.326	0.735
3	2.182	0.62
4	2.177	0.55
5	2.128	0.49
6	2.052	0.48
7	2.041	0.44

2. 彈簧分布曲線

角速度 (ω) : 2.182 (rads/s)
 彈簧總匝數 : 47 (匝)



分布趨於平均，分布曲線較值

陸、 討論

一、 實驗結果

1. 由角速度與最終長度的關係圖可知，其關係為正相關，但非線性
2. 長彈簧與短彈簧(材料相同)達相同的最終長度所需之角速度為前者較小
3. 彈簧的分佈為內疏外密。但確切分佈關係有待釐清
4. 當質量加於彈簧尾端，且角速度下降時，彈簧分佈趨向平均

為精確了解分布狀況，基於以下假設，進行理論推算。

二、 理論計算

(一) 指定代數

彈簧彈力常數	k
彈簧質量	M
彈簧原長	l_0
尾端質量	M'
尾端質量之質量中心與彈簧的間距	D
旋轉角速度	ω
最終(平衡)長度	l_f

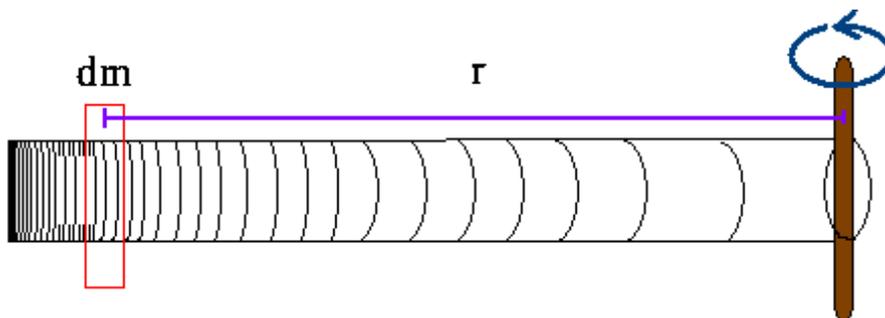
註：由於最終長度僅與初始條件相關，故可視其為(已知)常數進行計算

(二) 原理探討

當彈簧旋轉時，彈簧會以特定的方式伸長。取一小段質量 dm 的彈簧片段來討論，其所受的離心力為

$$dF_M = dm \cdot r\omega^2$$

dF_M 為此小段所受之離心力， r 為此片段與旋轉中心的距離， ω 為旋轉角速度



當彈簧達到平衡時，彈簧上各點的向內、向外拉力平衡。由於靠中心之彈簧必須提供其

外部所有彈簧的向心力，內部彈簧所受之張力大於外部之彈簧，造成外密內疏的現象。因此，要精確計算彈簧上各點張力，必須將各彈簧片段 dm 所受之離心力由外向內積分

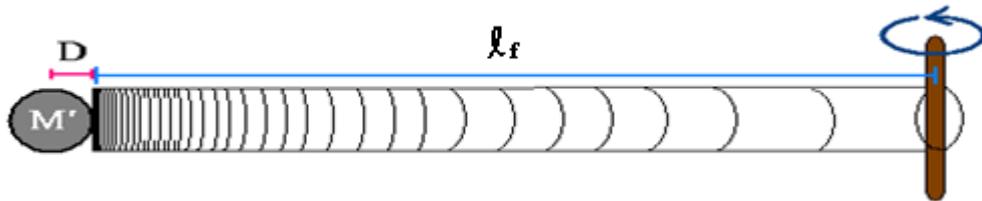
$$F_M = \int_0^m r\omega^2 dm$$

F_M 為彈簧上某點之受力

若再加砝碼(質量 M')於尾端，此質量將對整條彈簧施予一平均張力

$$F_{M'} = M'(\ell_f + D)\omega^2$$

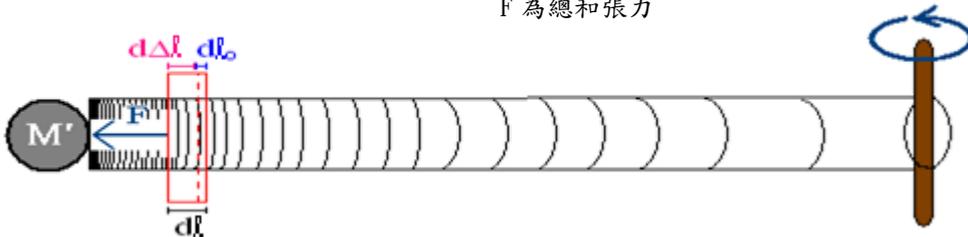
$F_{M'}$ 為尾端質量所受之離心力， ℓ_f 為彈簧之最終(平衡)長度， D 為尾端質量之質量中心與彈簧的間距



因此，彈簧上各點的張力為

$$F = F_M + F_{M'}$$

F 為總和張力



若小片段 dm 之原長為 $d\ell_0$ 、彈力常數 k' ，則可由虎克定律得

$$d\Delta\ell = \frac{F}{k'}$$

$d\Delta\ell$ 為彈簧片段之伸長量

小片段伸長後之總長

$$d\ell = d\ell_0 + d\Delta\ell$$

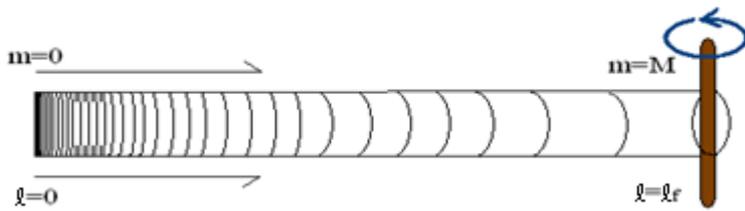
$d\ell$ 為旋轉時片段 dm 之長度

欲求長度可由外側將長度向內積分，即可得長度

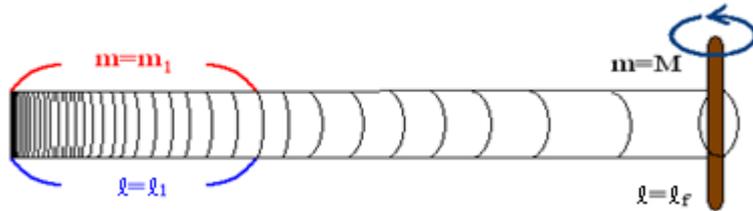
$$\ell = \int_0^{\ell} d\ell$$

ℓ 為由彈簧尾端向內計算之長度

(三) 長度(ℓ)與質量(m)的關係



m 為由左(外)端累加到彈簧上某點的質量, ℓ 為 m 的對應長度。左(外)端, $m=0$ 、 $\ell=0$, 在右(中心)端 m 為彈簧總質量 M , ℓ 為最終長度 ℓ_f



由(二)原理探討中得知,

$$F_M = \int_0^m r \omega^2 dm, F_{M'} = M'(\ell_f + D)\omega^2 \text{ 其中 } r = \ell_f - \ell$$

$$F = F_M + F_{M'} \Rightarrow F = \int_0^m (\ell_f - \ell)\omega^2 dm + M'(\ell_f + D)\omega^2$$

$$\therefore k' = \frac{k}{\frac{dm}{M}} = \frac{kM}{dm} \text{ (彈簧等分割為 } \frac{M}{dm} \text{ 段)}$$

$$d\ell_0 = \frac{dm}{M} \times \ell_0 \text{ (彈簧片段長)}$$

$$d\ell = d\ell_0 + d\Delta\ell \text{ 又 } d\Delta\ell = \frac{F}{k'}$$

$$\therefore d\ell = d\ell_0 + d\Delta\ell = d\ell_0 + \frac{F}{k'} = \frac{dm}{M}\ell_0 + \frac{F}{kM} dm = \frac{k\ell_0 + F}{kM} dm$$

$$\Rightarrow \ell = \int_0^m d\ell = \int_0^m \frac{k\ell_0 + F}{kM} dm \quad \boxed{\text{式 1}}$$

$$\ell(m) = \int_0^m \frac{k\ell_0 + F}{kM} dm \quad \boxed{\text{式 2}}$$

將 F 待換掉，可得

$$\begin{aligned}\ell(m) &= \int_0^m \frac{k\ell_0 + \int_0^m (\ell_f - \ell)\omega^2 dm + M'(\ell_f + D)\omega^2}{kM} dm \\ &= \int_0^m \frac{k\ell_0 + \ell_f\omega^2 m - \omega^2 \int_0^m \ell dm + M'(\ell_f + D)\omega^2}{kM} dm \\ &= \frac{\ell_f\omega^2}{2kM} m^2 + \frac{k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2}{kM} m - \frac{\omega^2}{kM} \iint_0^m \ell dm^2\end{aligned}$$

將上式微分

$$\ell'(m) = \frac{\ell_f\omega^2}{kM} m + \frac{k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2}{kM} - \frac{\omega^2}{kM} \int_0^m \ell dm$$

再微分

$$\ell''(m) = \frac{\ell_f\omega^2}{kM} - \frac{\omega^2}{kM} \ell$$

得非齊次微分方程：

$$\ell'' + \frac{\omega^2}{kM} \ell = \frac{\ell_f\omega^2}{kM}$$

只要解出此方程式，即可知道 $\ell(m)$ 是如何的方程式

設

$$\ell = e^{\lambda m}, \ell' = \lambda e^{\lambda m}, \ell'' = \lambda^2 e^{\lambda m}$$

將其帶入微分方程

$$\ell'' + \frac{\omega^2}{kM} \ell = \frac{\ell_f\omega^2}{kM}$$

可得

$$\lambda^2 e^{\lambda m} + \frac{\omega^2}{kM} e^{\lambda m} = \frac{\ell_f\omega^2}{kM}$$

1. 求齊次解

2. 求特解

$$\lambda^2 e^{\lambda m} + \frac{\omega^2}{kM} e^{\lambda m} = 0$$

$$\text{由於 } \ell'' + \frac{\omega^2}{kM} \ell = \frac{\ell_f\omega^2}{kM}$$

$$\lambda^2 + \frac{\omega^2}{kM} = 0$$

令特解為 A(常數)

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} i$$

$$\text{帶入式子得 } A'' + \frac{\omega^2}{kM} A = \frac{\ell_f\omega^2}{kM}$$

$$\ell = n_1 e^{\sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} im} + n_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} im}$$

$$\frac{\omega^2}{kM} A = \frac{\ell_f\omega^2}{kM} \Rightarrow A = \ell_f$$

將齊次解與特解相加得通解

$$\therefore \ell(m) = n_1 e^{\sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}im} + n_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}im} + \ell_f$$

$$\text{令之} = c_1 \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}m + c_2 \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}m + \ell_f$$

代入適當初始條件以求未知係數

由於彈簧質量 m 為 0 時，長度亦為 0，得條件一

$$\ell(0)=0$$

由 式 1 $d\ell = \frac{k\ell_0 + F}{kM} dm$ ，將 dm 移項得 $\ell'(m)$

$$\frac{d\ell}{dm} = \ell'(m) = \frac{k\ell_0 + F}{kM} = \frac{k\ell_0 + F_M + F_{M'}}{kM}$$

由於彈簧質量 m 為 0 時，彈簧所累積之離心力 F_M 亦為 0

$F_M = 0$ 、 $F_{M'} = M'(\ell_f + D)\omega^2$ 代入上式得第二條件

$$\ell'(0) = \frac{k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2}{kM}$$

$F_M = \int_0^m (\ell_f - \ell)\omega^2 dm$ $F_{M'} = M'(\ell_f + D)\omega^2$

二個方程式二個未知數，可得解

$$c_1 = -\ell_f, \quad c_2 = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega}$$

由左(外)端累加到彈簧上某點的質量(m)，與其的對應長度(ℓ)之關係式

$$\ell(m) = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega} \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}m - \ell_f \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}m + \ell_f$$

式 3

(四) 求解最終(平衡)長度 l_f

得到了式 3 即可用以求出先前設為常數的最終(平衡)長度 l_f 與初始值之關係

已知由彈簧最外端累加到最內端之質量(m)為彈簧總質量 M，此時 l 代表整個彈簧的長度，即 $l(M) = l_f$ 。將 M 代入式 3 可得

$$\begin{aligned}l_f = l(M) &= \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega} \sin \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - \ell_f \cos \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} + \ell_f \\ \Rightarrow \ell_f \left(\cos \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - \frac{M'\omega^2 \sqrt{kM}}{kM\omega} \sin \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} \right) &= \frac{(k\ell_0 + M'D\omega^2)\sqrt{kM}}{kM\omega} \sin \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} \\ \ell_f &= \frac{(k\ell_0 + M'D\omega^2)\sqrt{kM} \sin \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}}}{kM\omega \cos \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2 \sqrt{kM} \sin \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}}} \\ &= \frac{k\ell_0 + M'D\omega^2}{\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2}\end{aligned}$$

最終長度方程式

$$l_f = \frac{k\ell_0 + M'D\omega^2}{\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2} \quad \boxed{\text{式 4}}$$

雖然至此只需將 l_f 帶入式 3，即可得到完整的 $l(m)$ 關係方程式，但此關係式十分複雜，因此進行下述化簡。

$$(五) \quad \text{化簡 } \ell(m) = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega} \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m - \ell_f \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m + \ell_f$$

由於此處出現 sin 及 cos 二種三角函數，使式子可理解性不高，因此將其合併

令

$$\theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m \text{ (與 } m \text{ 相關的變數)}, a = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega} \text{ (與初始值相關的常數)}$$

$$\sin \phi = \frac{\ell_f}{\sqrt{a^2 + \ell_f^2}}, \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \ell_f^2}} \text{ (此處無變數 } m \text{，因此 } \phi \text{ 為與初始值相關的常數)}$$

由正、餘弦疊合進行合併

$$\begin{aligned} \ell(m) &= \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega} \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m - \ell_f \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m + \ell_f \\ &= \sqrt{a^2 + \ell_f^2} (\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) + \ell_f \\ &= \ell_f - \sqrt{a^2 + \ell_f^2} \sin(\phi - \theta) \end{aligned}$$

再求 ϕ 值

$$\because \ell(M) = \ell_f$$

$$\ell(M) = \ell_f - \sqrt{a^2 + \ell_f^2} \sin \left(\phi - \sqrt{\frac{M\omega^2}{k}} \right) = \ell_f$$

$$\therefore \text{取 } \phi = \sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}$$

由外側向內累之積彈簧質量與長度之(化簡)關係式

$$\ell(m) = \ell_f - \sqrt{a^2 + \ell_f^2} \sin(\phi - \theta) \quad \boxed{\text{式5}}$$

$$\ell_f, a, \phi \text{ 皆為常數, } \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m$$

三、 實驗/理論比對與理論延展

理論假設為系統無摩擦力，因此理論結果難與實驗結果對照，因此對公式進行摩擦力的增修。假設摩擦力與該點正向力成正比，彈簧與支架之摩擦係數為 μ_1 、尾端質量與支架之摩擦係數為 μ_2

得最終長度修正式：

$$\ell_f = \frac{k\ell_0 + M'D\omega^2 - 9.8\mu_2 M'}{\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k} - M'\omega^2}} + 9.8\mu_1(\cos\phi - 1) \quad \text{式 6}$$

長度(ℓ)與質量(m)關係式：

$$\ell(m) = \ell_f - \sqrt{a'^2 + \ell_f^2} \sin(\phi - \theta) \quad \text{式 7}$$

其中 $a' = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2 - 9.8\mu_2 M']\sqrt{kM}}{kM\omega}$

修正後的基本型態差異不大

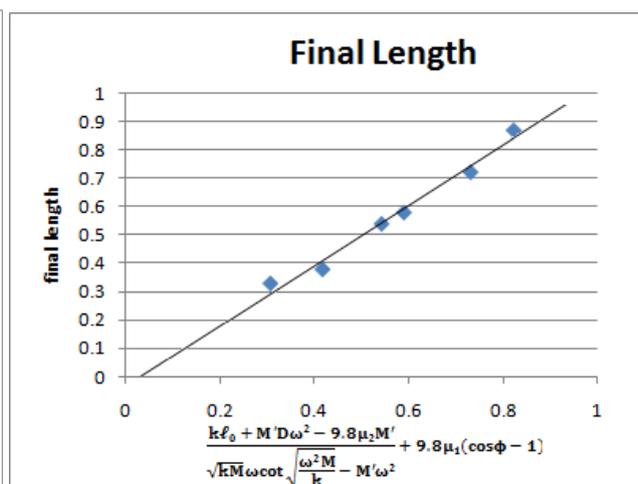
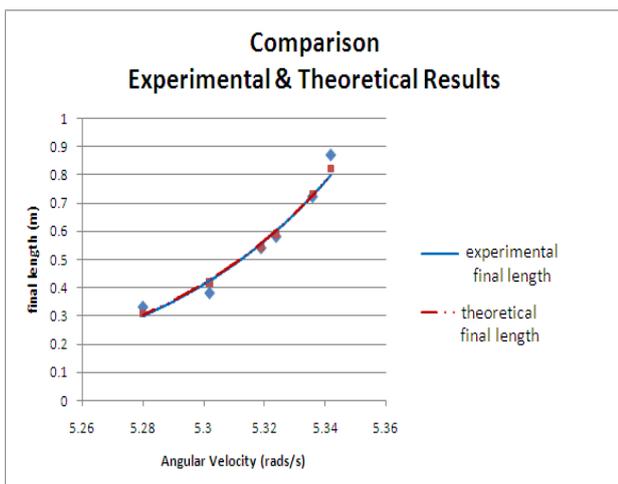
(一) 最終長度

1. 最終長度之比對

測量彈簧之彈力常數，以及摩擦係數等初始值後，將各初始值代入式 6 所得之理論最終長度，與先前實驗結果作比對。

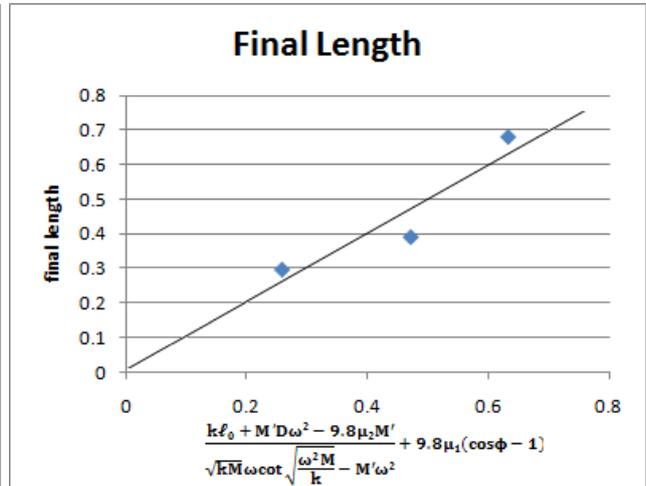
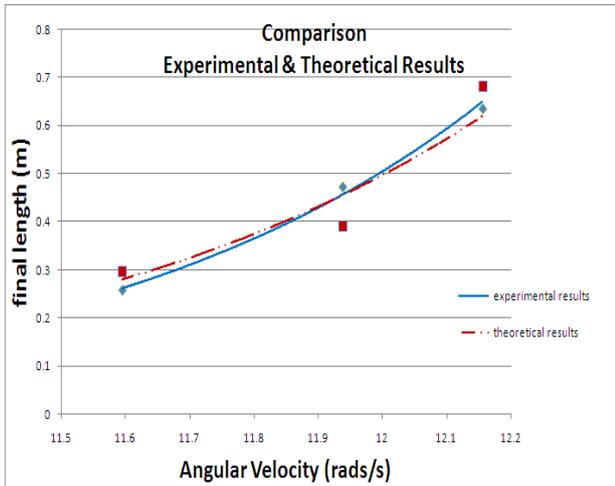
比對一

與實驗一之結果做比對



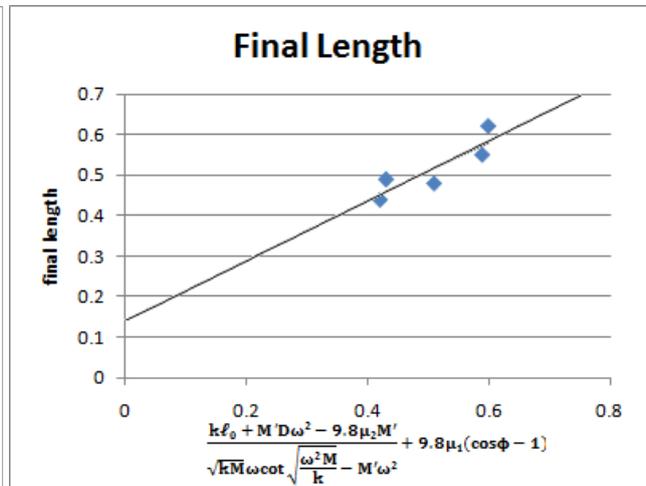
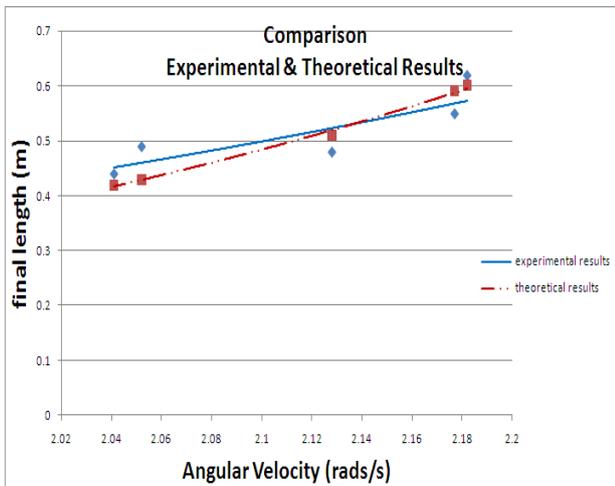
比對二

與實驗二之結果做比對



比對三

與實驗三之結果做比對



由此看出，各實驗中最終長度與理論值吻合度相當高。

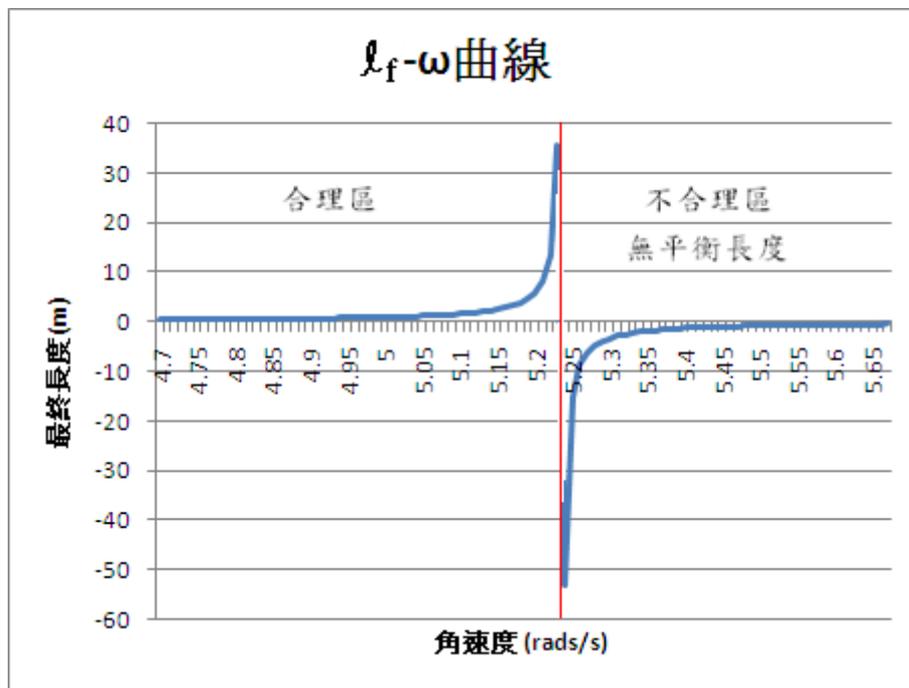
2. 最終長度之理論延展與探討

由於有摩擦修正的式子與無摩擦的式子型態相似，為求簡略僅以無摩擦式討論。

由[二、理論計算/ 4. 求解最終(平衡)長度 l_f /式 4] 得

$$l_f = \frac{k l_0 + M' D \omega^2}{\sqrt{k M} \omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M' \omega^2}$$

我們先前猜測彈簧可能會過度，甚至理論上的無限延伸。由此即可看出，當此式分母趨近於 0 時會出現無限長的最終長度。因此，當實驗由 $\omega = 0$ 開始，逐漸加速時 l_f 由 l_0 開始延伸，直到分母 $\sqrt{k M} \omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M' \omega^2 \rightarrow 0$ (此時分子 $k l_0 + M' D \omega^2$ 之 $k l_0$ 項不趨近於 0)，所以此時 $l_f \rightarrow \infty$ 。



典型 角速度/最終長度 數學理論關係圖

超過此限度(紅線右側)，彈簧拉力無法與離心力形成平衡，理想彈簧將無限度地向外延伸，而真實彈簧則出軌或超出彈性範圍，使 k 值變大，再達平衡。

因此， $\sqrt{k M} \omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M' \omega^2 > 0$ 。又 $M' \omega^2 > 0$ ， $\sqrt{k M} \omega > 0$ ，所以 $\cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} > 0$ 即

$$0 \leq \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} < \frac{\pi}{2}$$

不等式 1

另外，此圖顯示大部分的彈簧伸長集中在極限點附近。此解釋了為何在實驗中，當彈簧開始延伸時，微小的角速度變化即可造成極大的長度變化。

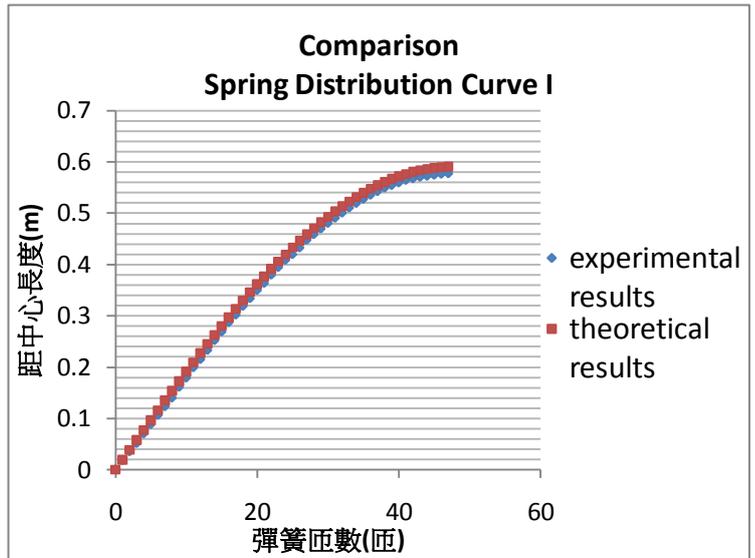
(二) 分布曲線

將以相關初始值代入式 7 所得之分布曲線，與先前實驗結果作比對。

1. 分布曲線之比對

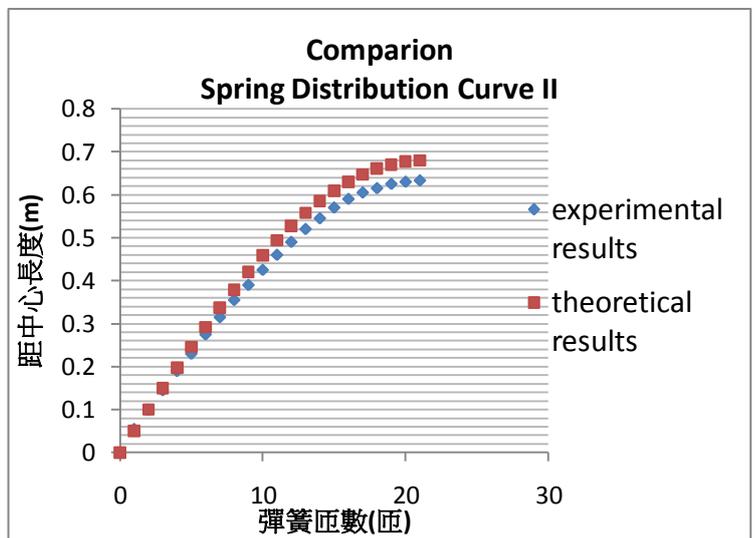
實驗一之代表曲線之初始條件

- 彈簧原長(l_0): 0.028 (m)
- 彈力常數(k): 0.852 (N/m)
- 彈簧質量(M): 0.072 (kg)
- 尾端質量(M'): 0 (kg)
- 角速度 (ω): 5.324 (rads/s)
- 彈簧總匝數: 47 (匝)



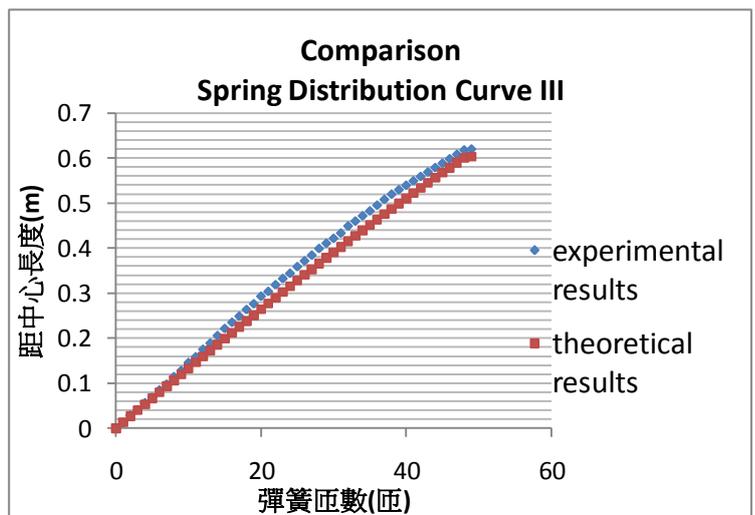
實驗二之代表曲線之初始條件

- 彈簧原長(l_0): 0.012 (m)
- 彈力常數(k): 1.897 (N/m)
- 彈簧質量(M): 0.031 (kg)
- 尾端質量(M'): 0 (kg)
- 角速度 (ω): 12.156 (rads/s)
- 彈簧總匝數: 21 (匝)



實驗三之代表曲線之初始條件

- 彈簧原長(l_0): 0.028 (m)
- 彈力常數(k): 0.852 (N/m)
- 彈簧質量(M): 0.072 (kg)
- 尾端質量(M'): 0.110 (kg)
- 角速度 (ω): 2.182 (rads/s)
- 彈簧總匝數: 47 (匝)
- 尾端質量之質量中心與彈簧的間距(D): 0.03 (m)



分布曲線吻合度亦相當高

2. 彈簧分布 $l(m)$ 之理論延展與探討

同樣地由於有摩擦修正的式子與無摩擦的式子型態相似，為求簡略僅以無摩擦式討論。

由式 5

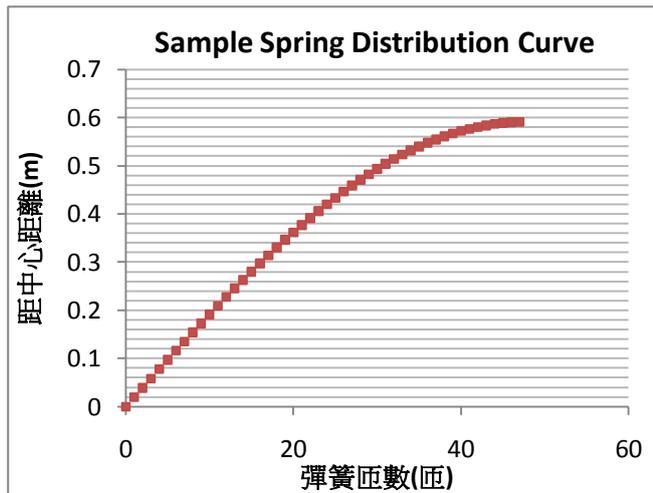
$$l(m) = l_f - \sqrt{a^2 + l_f^2} \sin(\phi - \theta)$$

其中 $\phi = \sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}$ 、 $\theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}}m$ ，又不等式 1: $0 \leq \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} < \frac{\pi}{2}$

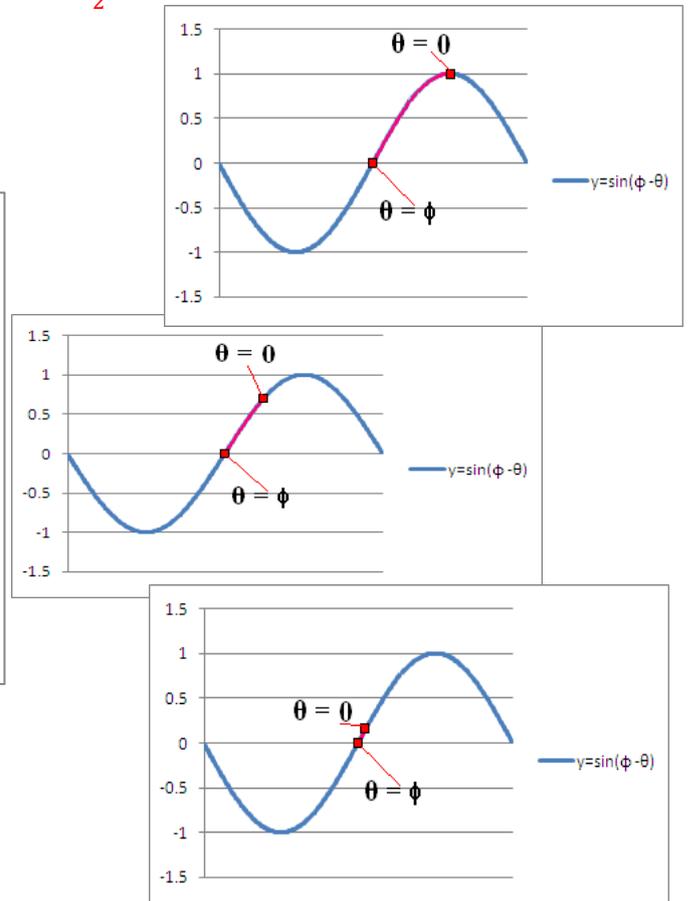
$$\therefore 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$$

又 $0 \leq m \leq M \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \phi$

由此得知， $l(m)$ 分布曲線為 \sin 函數波由 $\sin 0$ 到 $\sin \frac{\pi}{2}$ 以前之片段乘上某係數



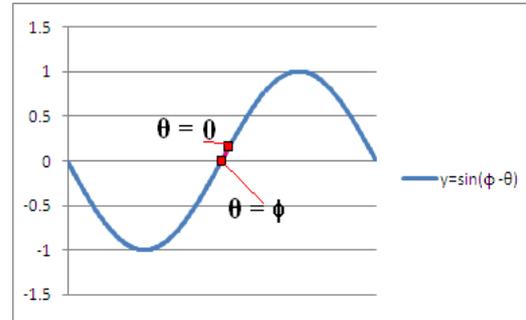
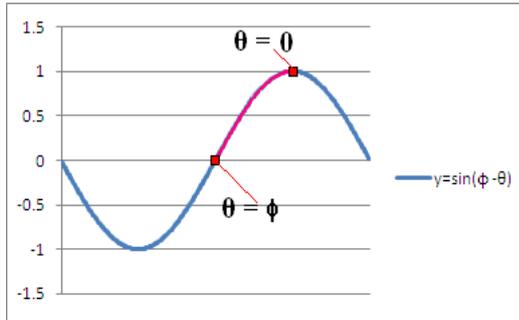
此圖與所測量到的實驗結果極為相似



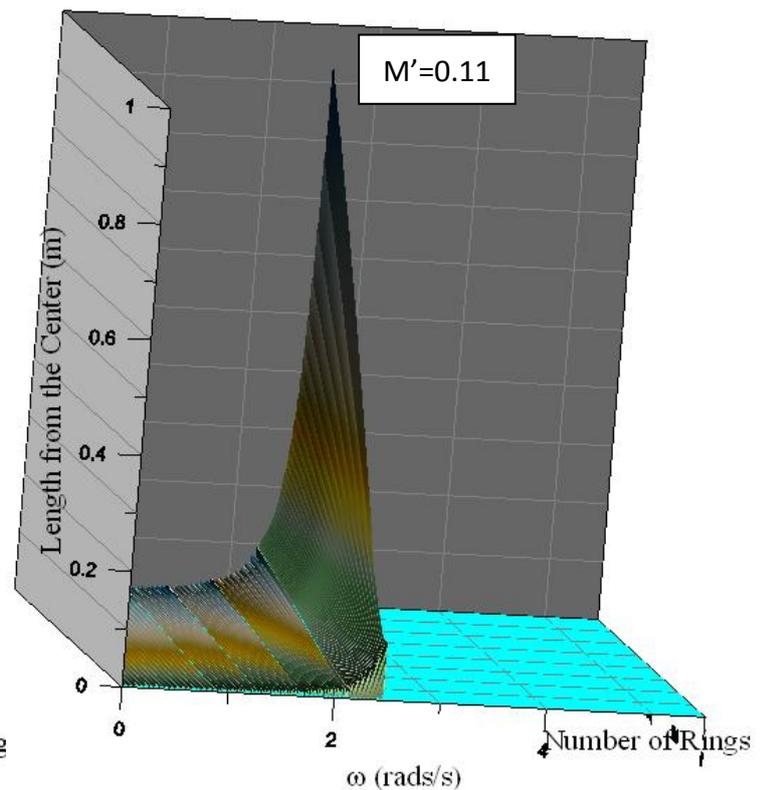
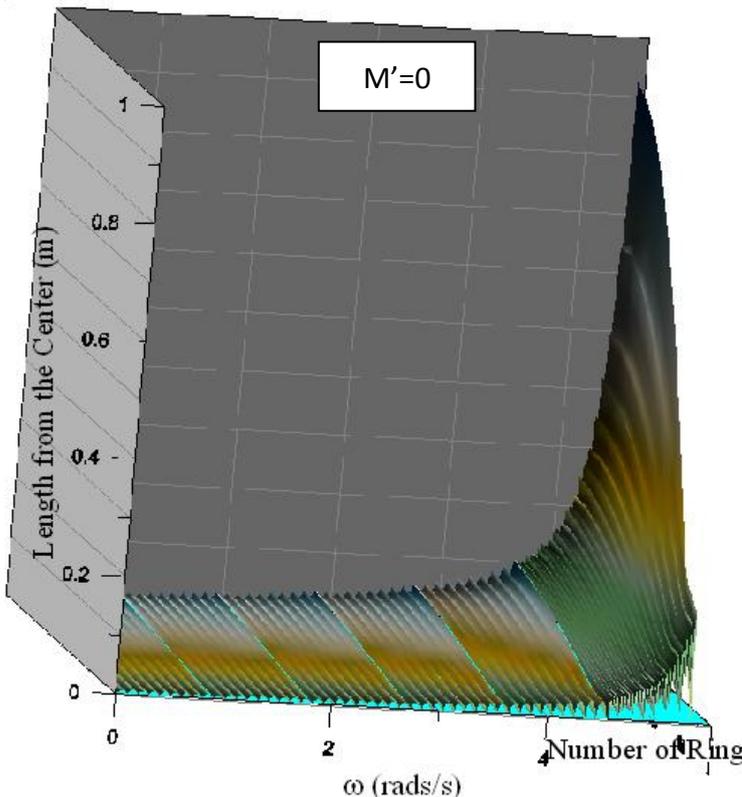
因為 $\phi = \sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}$ ，當 M 或 ω 減小、 k 增大時， ϕ 值減小，造成在 \sin 函數波上所取的範圍縮小，導致曲線變直，亦即彈簧分佈更加平均。因此，

實驗中彈簧尾端加重時的彈簧平均分配現象乃是 ω 減小所致，而非質量本身所致

質量只是使低轉速下的彈簧伸長量增加，以便觀察。此言乃謂，當 M 、 ω 、 k 值均不變的情況下，不論尾端質量，所表現的 \sin 函數波的片段不相異，唯最終長度有所相異。

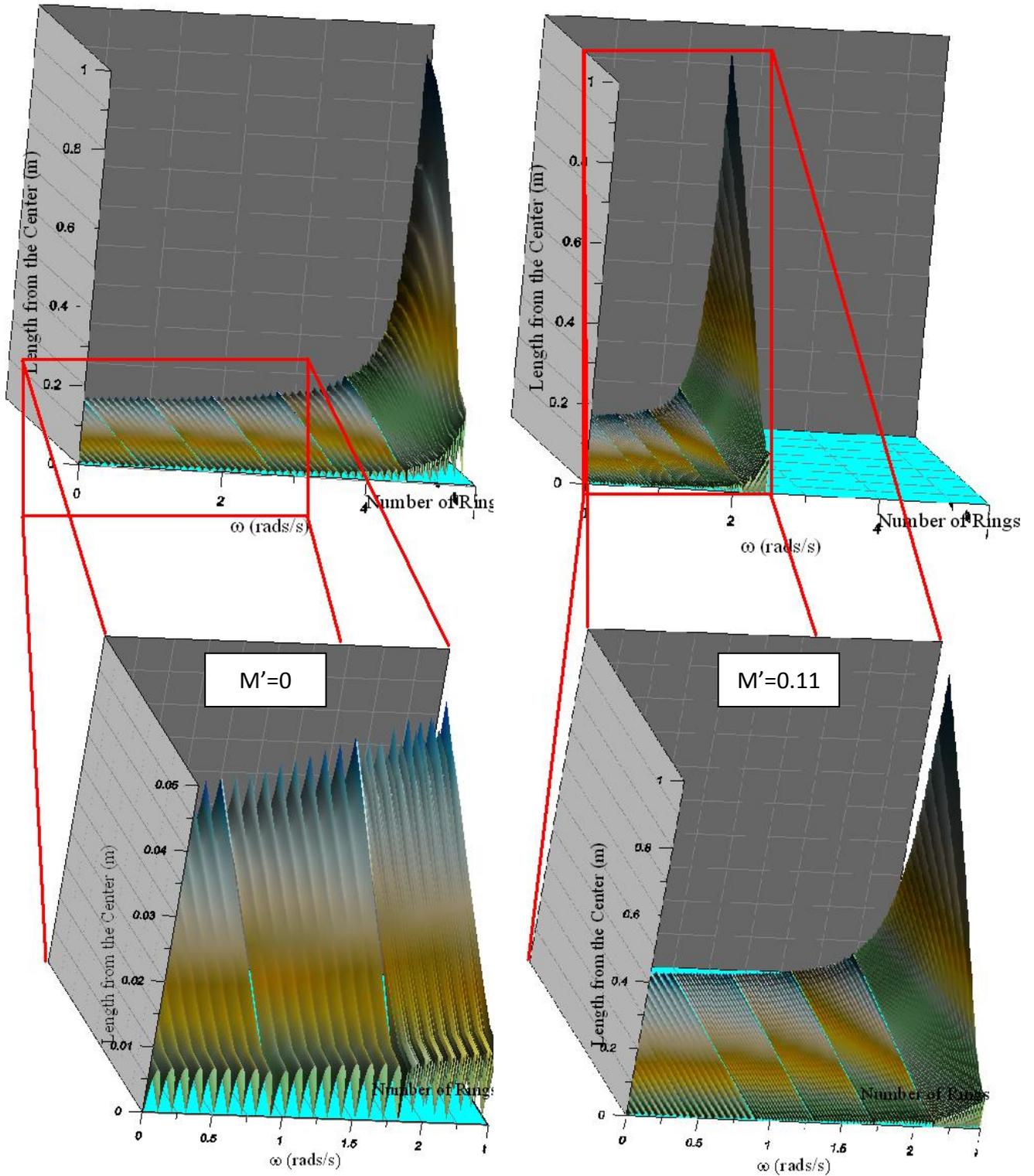


然而，由於 $\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2 > 0$ ，當尾端質量增加，會壓迫到 ϕ 的範圍，因此尾端質量 M' 可以限制 ϕ ，進而間接影響 \sin 函數波的片段的選取。



此二圖以角速度(由左向右遞增)及彈簧匝數(由前向後遞增)為 x, y 軸，高度(z 軸)為各匝距旋轉中心的距離，以實驗一、三之初始條件繪成。左圖初始條件中的尾端長度(M')設為零，右圖之尾端質量(M')則設為零點一公斤。(由於繪圖軟體的關係，圖有些微失真，且曲面不平滑。但此二圖仍能表示大致上的趨勢。)

觀察左($M'=0$)右($M'=0.11$)兩圖可看出彈簧快速延伸的區域位於極限點附近。左圖於極限點附近之分布曲線彎曲(\sin 函數波)，右圖則呈直線。



左下、右下兩圖分別為左上、右上兩圖角速度介於 0~0.24(rads/s) 區塊的放大。(左下右下兩圖高度尺度不同)

由上面的左圖($M'=0$)可看出，愈靠右邊(角速度 ω 大)其分布曲線愈彎曲。比較下面的兩圖可發現，右圖($M'=0.11$)角速度只到 2 點多即達極限點，其極限點附近之分布曲線不彎曲，與左圖($M'=0$)於角速度約 2 點多時的分布曲線同樣偏直線狀。

(三) 尾端質量

按照所得理論公式可推得改變尾端質量可有以下性質

a. 最終長度

由 $\ell_f = \frac{k\ell_0 + M'D\omega^2}{\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k} - M'\omega^2}}$ 知，當其他條件不變下加上尾端質量時，最終長度將增加。

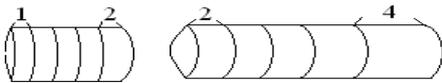
b. 單位質量長度 $\frac{d\ell}{dm}$

將式 5 $\ell(m) = \ell_f - \sqrt{a^2 + \ell_f^2} \sin(\phi - \theta)$ 對 m 微分

$$\Rightarrow \frac{d\ell}{dm} = \sqrt{a^2 + \ell_f^2} \times \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} \cos(\theta - \phi) \quad \text{式 8}$$

當尾端質量增加時， $a = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega}$ 、 $\ell_f = \frac{k\ell_0 + M'D\omega^2}{\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k} - M'\omega^2}}$ 均增大，其他不變。

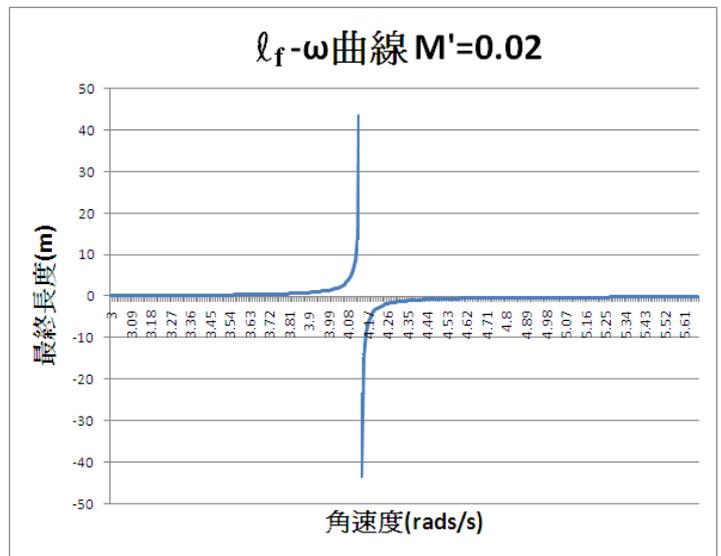
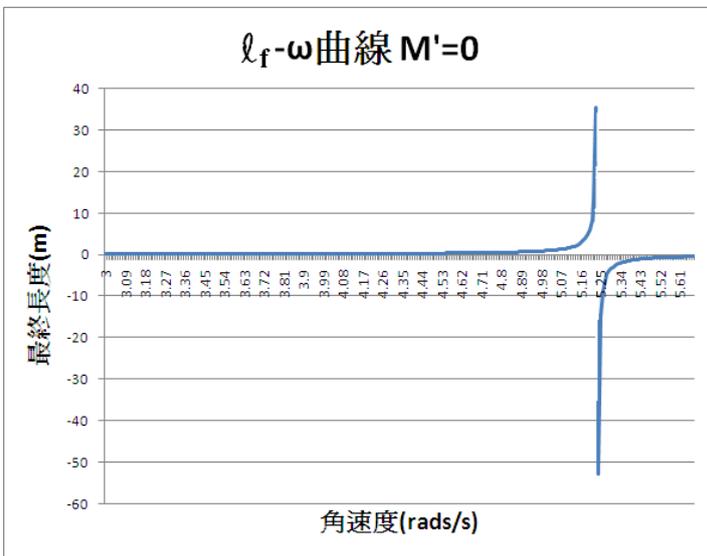
此表示當尾端質量增加時，係數 $\sqrt{a^2 + \ell_f^2}$ 增大，亦即彈簧各點之單位質量長度 $\frac{d\ell}{dm}$ 將以同比例增加。



(此示意圖之增加比例為 2)

c. $\ell_f - \omega$ 曲線

當加上尾端質量時， $\ell_f - \omega$ 曲極限點左移，其他大致相同



(假想條件: $k=0.8$ $M=0.072$ $\ell_0=0.1$ $D=0.03$)

柒、 結論

彈簧於水平面上繞垂直軸旋轉時的伸長量及分布狀態，由實驗結果及理論延伸，有以下特性

一、 最終長度方程式

$$\ell_f = \frac{k\ell_0 + M'D\omega^2}{\sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2}$$

二、 彈簧分布方程式

$$\ell(m) = \ell_f - \sqrt{a^2 + \ell_f^2} \sin(\phi - \theta)$$

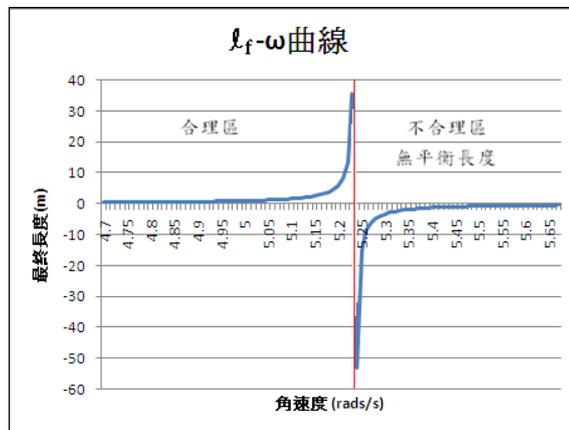
$$\theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{kM}} m, \phi = \sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}, a = \frac{[k\ell_0 + M'(\ell_f + D)\omega^2]\sqrt{kM}}{kM\omega}$$

三、 當彈簧質量 M 、彈簧原長 ℓ_0 、尾端質量 M' 、尾端質量之質量中心與彈簧的間距 D 、旋轉角速度 ω 增加，或彈簧彈力常數 k 值減小時，最終長度 ℓ_f 增大

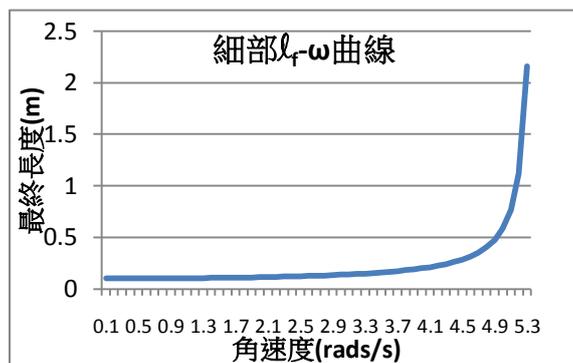
四、 彈簧之極限延伸條件

$$\text{當 } \sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \ell_f \rightarrow \infty$$

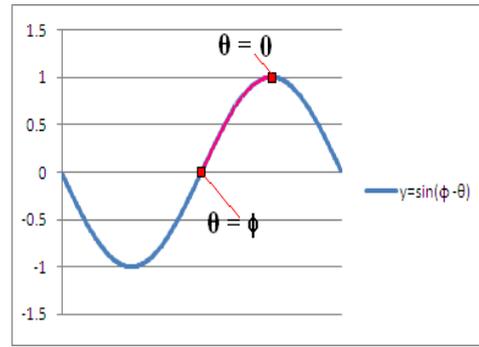
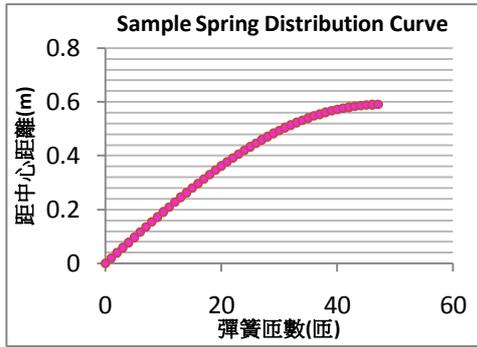
$$\text{當 } \sqrt{kM}\omega \cot \sqrt{\frac{\omega^2 M}{k}} - M'\omega^2 < 0 \Rightarrow \text{理想彈簧無限加速延伸}$$



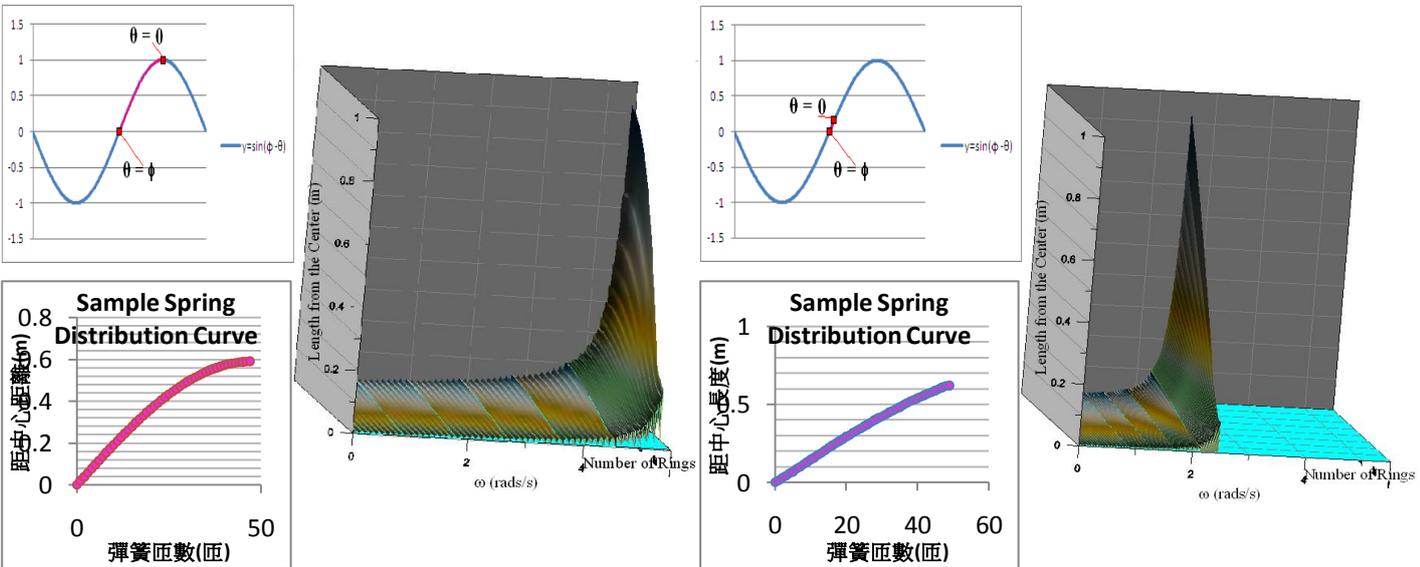
五、 彈簧之主要延伸發生於極限點附近



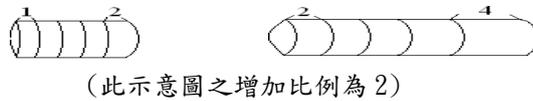
六、 長度 l 與質量 m 之關係曲線為 \sin 波由 $\sin 0$ 到 $\sin \frac{\pi}{2}$ 以前之片段乘上某係數



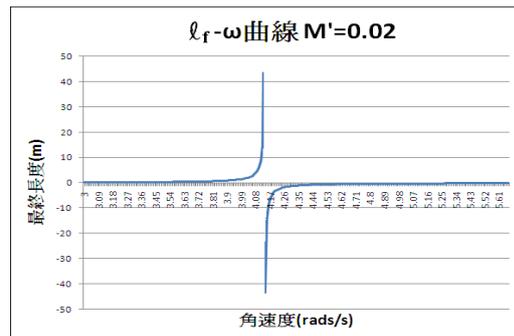
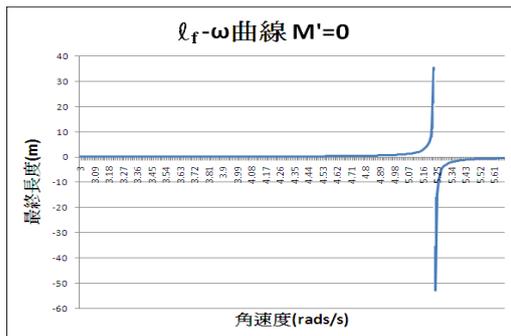
七、 $\phi = \sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}$ ，當 M 或 ω 減小、 k 增大時， ϕ 值減小，造成在 \sin 函數波上所取的範圍縮小，導致曲線變直，亦即彈簧分佈更加平均。實驗中彈簧尾端加重時的彈簧平均分配現象乃是 ω 減小所致，而非質量本身所致



八、 當尾端質量增加時，彈簧各點之單位質量長度 $\frac{dl}{dm}$ 將以同比例增加。



九、 當加上尾端質量時， $l_f - \omega$ 曲線高峰(極限點)左移



捌、 參考資料

林明瑞、張仁昌、劉國棟、劉怡君 (民 93)高級中學－物質科學物理篇。

李福海(民 98)。完全記入式 高中數學第二冊

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker (2008). Fundamentals of Physics ·Extended.

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker (2005). Fundamentals of Physics/7th Edition.

Swokowski, Earl William(2006). Calculus.

Colin Adams, Joel Hass, Abigail Thompso，師明睿 譯(2003)。微積分屠龍寶刀(How To Ace Calculus : The Streetwise Guide)

Peter V. O'Neil 蘇全佳 譯。高等工程數學下冊

【評語】 040113

本作品運算完整，然而內容不易激發讀者好奇心。在技術上，對質量均勻分佈與不均勻分佈的情形亦未考慮周嚴。