

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040105

順轉逆轉大不同

學校名稱：國立新莊高級中學

作者： 高二 黃中駿 高二 簡立宇	指導老師： 張永昌 吳原旭
-------------------------	---------------------

關鍵詞：角動量、力矩、進動

順轉逆轉大不同

摘要：

本研究以硬質桿連結圓柱型鐵筒製成錐動擺，探討擺錘自旋對錐動擺角速度的影響，實驗發現同向轉動時角速度變快，反向時變慢。由「重力力矩造成角動

量變化」之理論推導出公轉角速度公式為 $\omega_{(公)} = \frac{\sqrt{I^2 \omega_{(自)}^2 + 4m^2 gl^3 \cos \theta} \pm I \omega_{(自)}}{2ml^2 \cos \theta}$ ，此

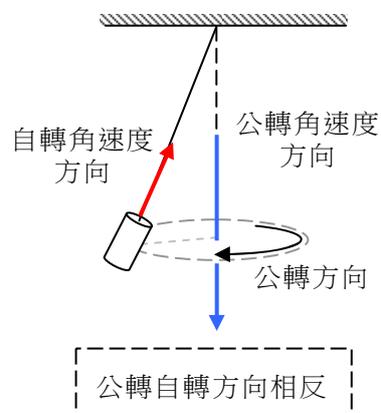
公式與測量值極為吻合。為了研究向心力的來源，將硬質桿改以硬繩取代，結果出現同向轉動時擺錘向內(內八)，反向時擺錘向外(外八)的現象。經錄影擷取畫面分析，證實了雖然錐動擺角速度與轉動方向有關，但仍滿足繩張力提供向心力的關係。至於內八、外八的原因也找到了進動公式 $\tau = \omega \times L$ 來解釋，與測量結果極為吻合。用以驗證硬質桿的實驗結果也很吻合(雖然無法直接測得施力方向)。

壹、研究動機

在高二的物理課程中，我們學到錐動擺及角動量的相關原理。某天突然想到家裡的吊扇，總是轉一轉就開始邊晃邊轉，且是有規律的晃，靈機一動之下想要把學到的兩個理論結合起來，解釋所看到的現象，拿了馬達跟鋼條設計實驗裝置，發現在邊轉動邊擺動時，擺錘的運動行為與單純的擺動似乎有些不太一樣，因此開啟了實驗、分析的念頭。

[說明]

在本研究中，公轉自轉的方向皆是由正上方往下看的觀察結果。為了稱呼上的方便，當公轉與自轉在鉛直方向上角速度方向相同，我們就稱『轉動方向相同』，若公轉與自轉在鉛直方向上角速度方向相反，我們就稱『轉動方向相反』。



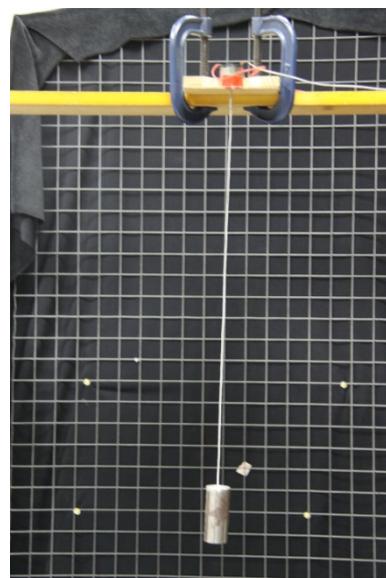
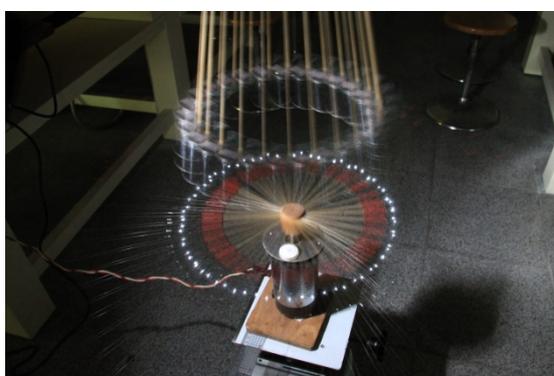
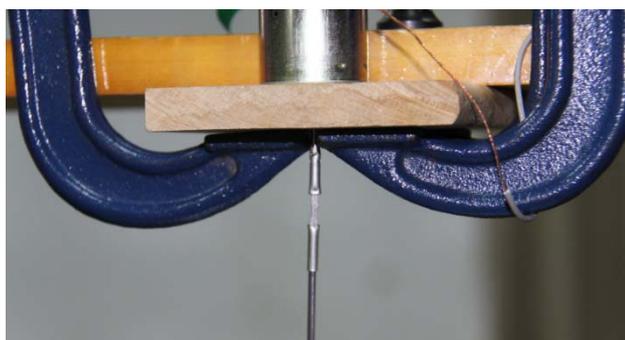
貳、研究目的

- 一、探討影響自旋錐動擺公轉角速度的原因，並推導公轉角速度的公式。
- 二、研究自旋錐動擺順轉、逆轉角速度不同的原因。
- 三、研究以硬質桿、硬繩為「擺繩」的自旋錐動擺其向心力的來源。

參、研究設備及器材

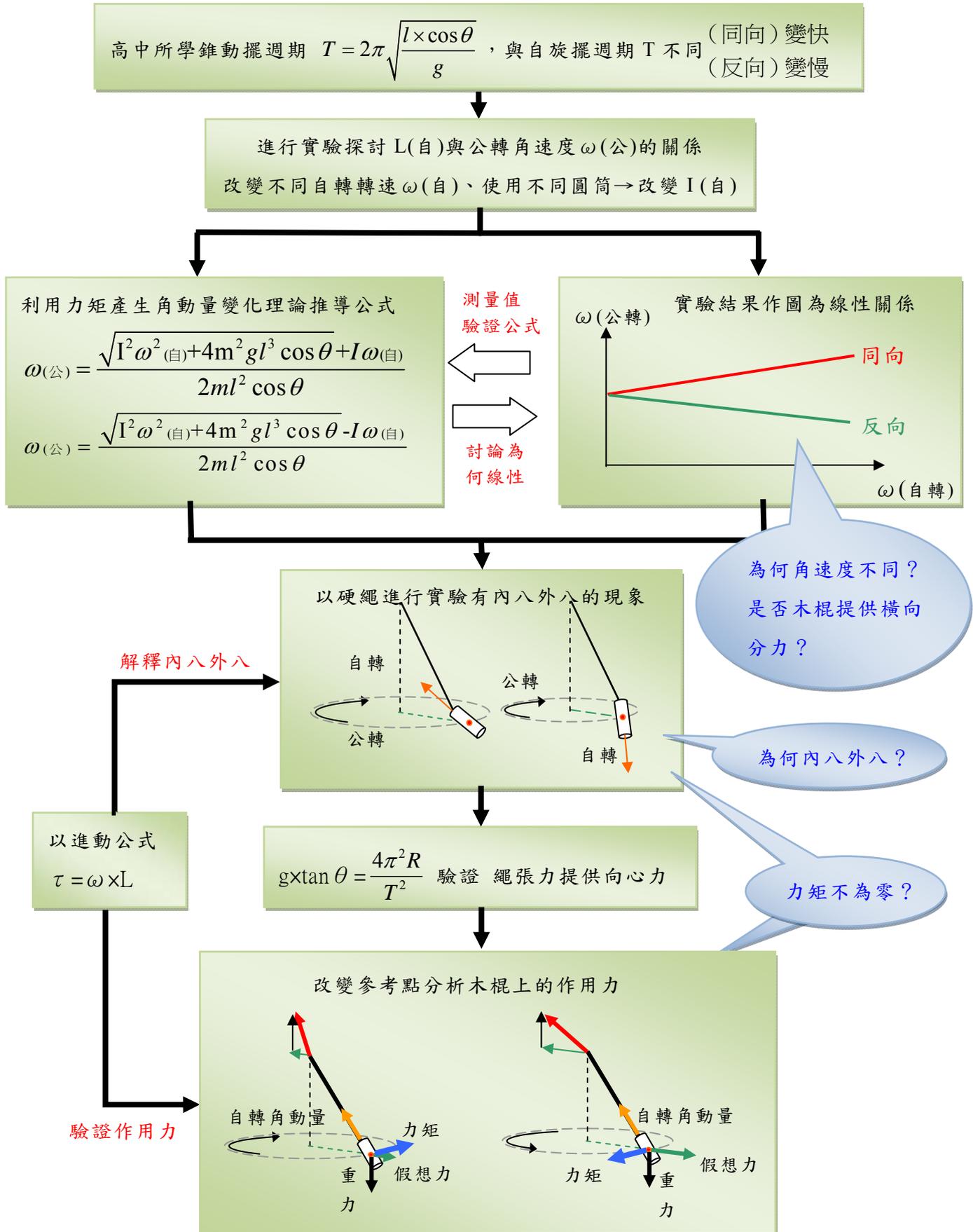
直流馬達	2 部
電源供應器	2 部
碼錶	1 個
輕木桿 (直徑 0.9cm,線密度 0.4g/cm)	數根
金屬圓筒 A (質量 356.0g,內半徑= 1.09cm,外半徑=1.75cm)	1 個
金屬圓筒 B (質量 405g,內半徑= 1.70cm,外半徑= 2.23cm)	1 個
金屬圓筒 C (質量 413.2g,內半徑= 2.19cm,外半徑= 2.74cm)	1 個
金屬圓筒 D (質量 422.8g,內半徑=2.74cm,外半徑=3.25cm)	1 個
金屬圓筒 E (質量 433.2g,內半徑=3.23cm,外半徑=3.75cm)	1 個
接頭 (鋁合金,連結木桿與馬達轉軸)	數個
硬繩 (將粗棉線沾速乾膠製成)	若干

利用速乾膠將綿繩固定於兩段金屬短管之間，使其成為可自由擺動，亦可使馬達轉軸、木桿、金屬圓筒一起同步自轉的連接裝置。



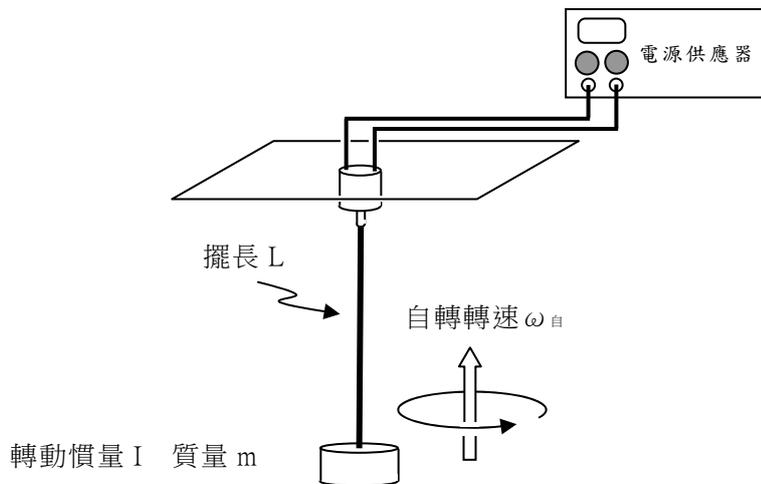
肆、研究過程與方法

研究過程流程圖



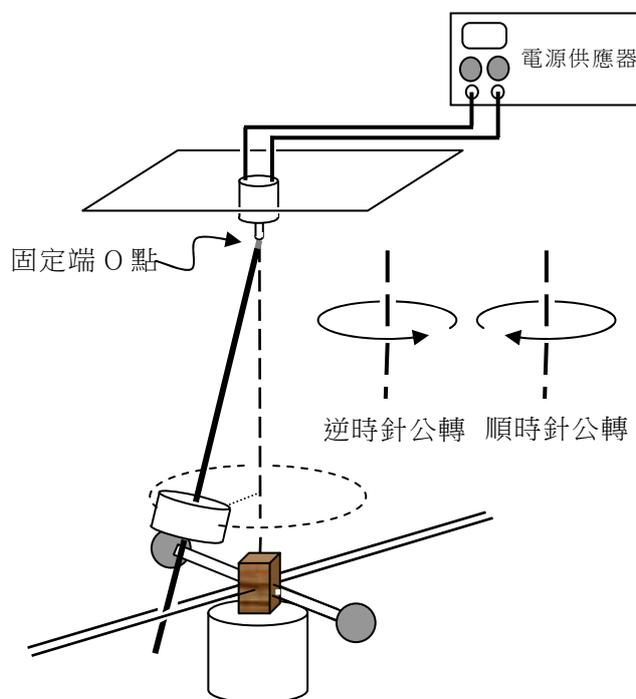
階段一 研究自旋擺的錐動擺運動(硬桿)

一、研究方法



(一)架設裝置如上圖，調整電源供應器的電壓及電流，使馬達及金屬圓筒穩定旋轉。利用高速閃光燈，測量圓筒的轉速 $\omega_{\text{(自)}}$ 及方向。

(二)利用如下圖裝置，使圓筒做小角度的錐動擺運動(順時針)，待其穩定後，測量錐動擺運動的公轉週期 $T_{\text{(順)}}$ 。在同轉速下，再次使圓筒做小角度的錐動擺運動(逆時針)，並測量穩定狀態下的公轉週期 $T_{\text{(逆)}}$ 。



(三)改變不同的自轉轉速 $\omega_{\text{(自)}}$ ，紀錄公轉週期 $T_{\text{(順)}}$ 、 $T_{\text{(逆)}}$ 。比較觀察 $T_{\text{(順)}}$ 、 $T_{\text{(逆)}}$ 與馬達不轉時錐動擺週期 T_0 的關係。

(四)改變不同的金屬圓筒(質量相同、但轉動慣量 I 不同)，重覆上面步驟一、二。

(五)使用金屬圓筒 D，以固定的角速度 1250rpm 逆時針自轉，改變金屬圓筒質心到固定端點 O 的長度 l，重覆步驟一、二、三。

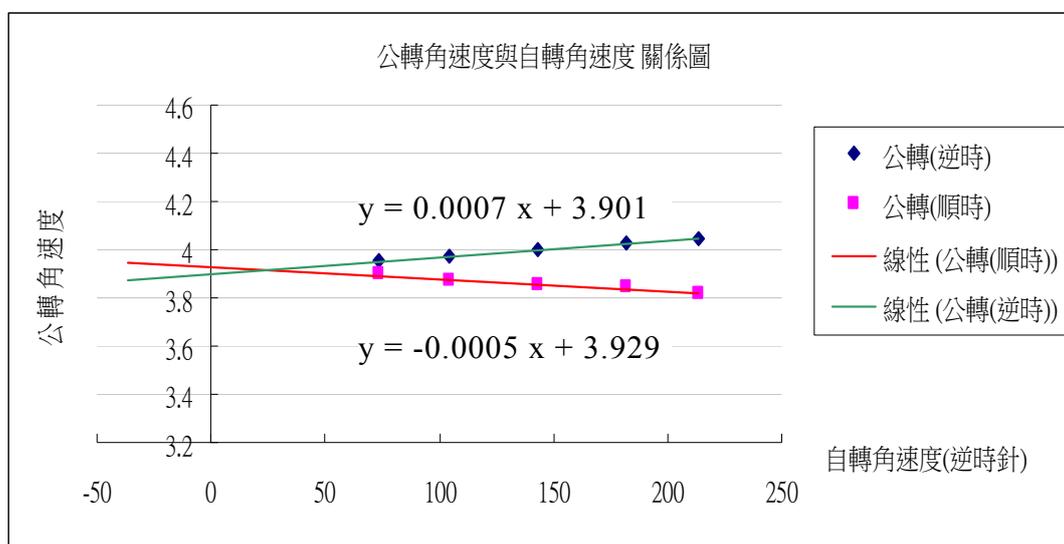
二、測量結果與分析：(圓筒到固定點處以硬質木棍連結)

(一)測量結果：

(平均：公轉 10 圈的平均時間(s)； σ ：10 週期之標準差； ω ：平均角速度(rad/s))

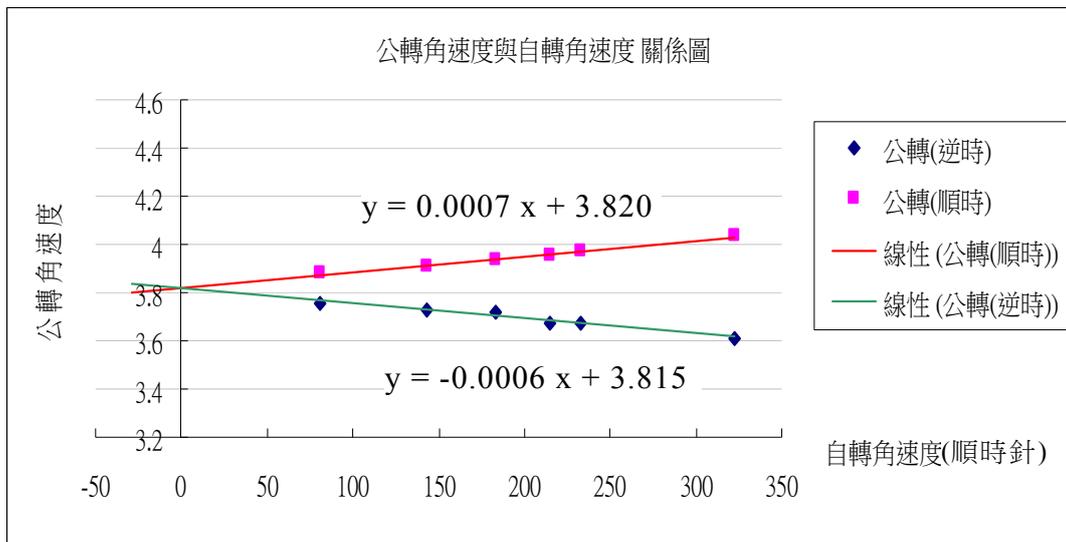
※圓筒 B：

	自轉速度(單位：rpm 方向：逆時針)											
	0		700		1000		1370		1740		2040	
公轉方向	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時
公轉十圈的 時間(s)	15.94	15.91	15.82	16.05	15.87	16.20	15.66	16.34	15.56	16.24	15.54	16.38
	15.88	15.93	15.9	16.10	15.82	16.16	15.71	16.20	15.55	16.26	15.49	16.39
	15.99	15.96	15.85	16.13	15.81	16.32	15.76	16.37	15.54	16.37	15.58	16.47
	15.99	15.97	15.91	16.07	15.8	16.30	15.72	16.29	15.61	16.34	15.48	16.45
	15.98	16.01	15.89	16.07	15.77	16.14	15.69	16.27	15.57	16.24	15.45	16.52
	15.99	15.91	15.85	16.12	15.81	16.26	15.78	16.31	15.58	16.46	15.49	16.40
	16.02	15.98	15.94	16.12	15.87	16.35	15.75	16.26	15.6	16.31	15.57	16.41
	15.92	15.95	15.89	16.18	15.83	16.11	15.68	16.33	15.62	16.31	15.50	16.44
	15.95	16.06	15.88	16.13	15.72	16.19	15.76	16.32	15.62	16.40	15.53	16.50
	15.98	16.12	15.89	16.11	15.78	16.28	15.63	16.38	15.59	16.39	15.45	16.47
平均	15.96	15.98	15.88	16.11	15.81	16.23	15.71	16.31	15.58	16.33	15.51	16.44
σ	0.04	0.07	0.03	0.04	0.05	0.08	0.05	0.05	0.03	0.07	0.05	0.05
ω	3.936	3.932	3.956	3.901	3.975	3.871	3.998	3.853	4.032	3.847	4.052	3.821



※ 圓筒 C :

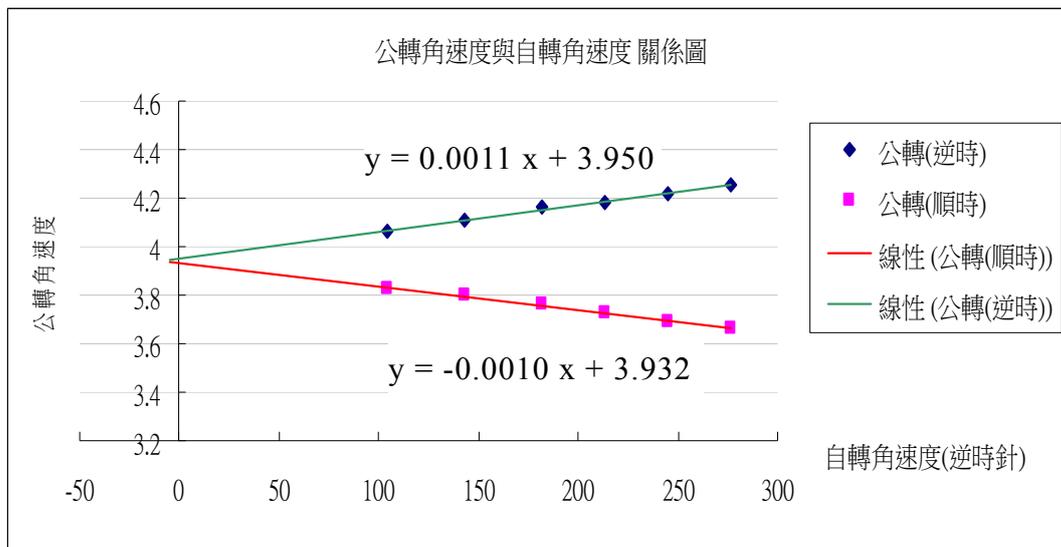
		自轉速度(單位：rpm 方向：順時針)													
		0		770		1370		1748		2054		2230		3080	
公轉方向		逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時
公轉十圈的時間(s)		16.37	17.36	16.75	16.23	16.83	16.01	16.92	16.01	17.11	15.90	17.09	15.75	17.36	15.52
		16.31	17.35	16.71	16.22	16.79	16.10	16.86	15.99	17.12	15.94	17.16	15.82	17.35	15.49
		16.36	17.38	16.73	16.11	16.83	16.00	16.88	15.89	17.12	15.88	17.10	15.88	17.38	15.50
		16.26	17.40	16.70	16.28	16.87	16.06	16.93	15.93	17.05	15.94	17.12	15.80	17.40	15.51
		16.29	17.39	16.71	16.17	16.87	16.10	16.93	15.94	17.02	15.99	17.13	15.80	17.39	15.59
		16.24	17.30	16.56	16.18	16.81	16.07	16.84	15.91	17.13	15.90	17.08	15.81	17.36	15.71
		16.34	17.38	16.81	16.23	16.88	16.01	16.95	15.98	17.08	15.79	17.08	15.86	17.38	15.53
		16.31	17.44	16.70	16.11	16.91	16.06	16.86	15.93	17.14	15.86	17.10	15.87	17.44	15.54
		16.40	17.37	16.70	16.22	16.78	16.20	16.99	15.87	17.12	15.86	17.09	15.79	17.37	15.62
	16.38	17.42	16.73	16.18	16.87	16.07	16.94	15.91	17.14	15.80	17.22	15.83	17.42	15.62	
平均		16.33	17.38	16.71	16.19	16.84	16.07	16.91	15.94	17.10	15.89	17.12	15.82	17.39	15.56
σ		0.05	0.04	0.06	0.05	0.04	0.06	0.05	0.05	0.04	0.06	0.04	0.04	0.03	0.07
ω		3.849	3.615	3.760	3.880	3.730	3.910	3.716	3.943	3.674	3.955	3.671	3.971	3.614	4.037



※圓筒 D :

		自轉速度(單位：rpm 方向：逆時針)													
		0		1000		1370		1730		2040		2340		2640	
公轉方向		逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時
公轉十圈的時間(s)		15.82	15.98	15.44	16.57	15.37	16.51	15.01	16.56	14.92	16.86	14.88	16.97	14.75	17.18
		15.87	15.91	15.38	16.50	15.24	16.44	15.02	16.64	15.04	16.85	14.99	16.82	14.80	17.24
		15.90	15.82	15.49	16.31	15.23	16.36	15.11	16.71	14.99	16.92	14.86	17.07	14.85	17.16

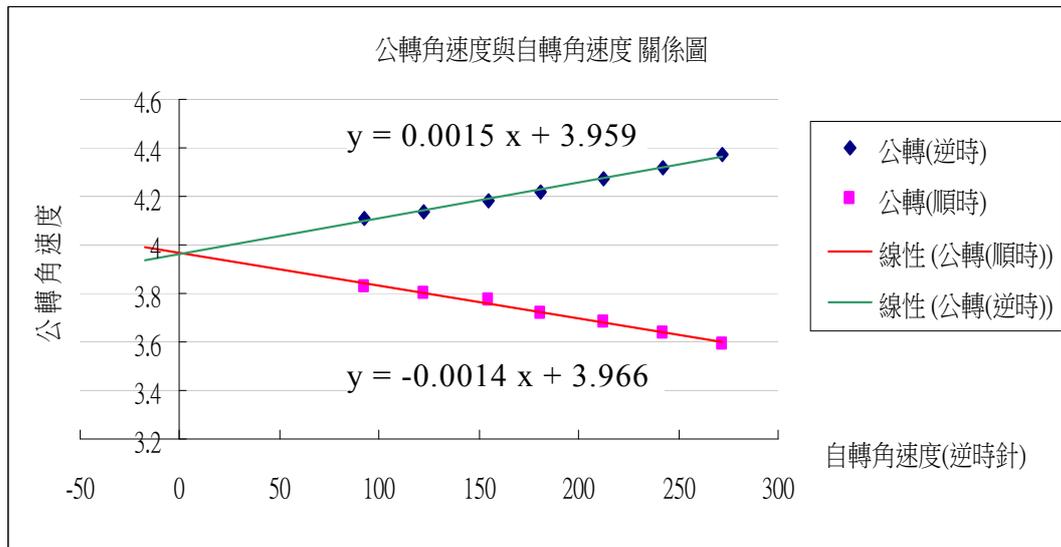
	15.87	16.06	15.54	16.41	15.24	16.51	15.06	16.68	15.06	16.92	14.90	17.18	14.73	17.16
	15.89	15.95	15.45	16.50	15.27	16.69	15.15	16.71	14.95	16.87	14.91	17.2	14.73	17.12
	15.98	15.96	15.45	16.54	15.32	16.59	15.07	16.71	15.11	16.81	14.90	17.23	14.72	17.10
	15.89	15.89	15.51	16.47	15.32	16.73	15.06	16.72	14.99	16.78	14.9	16.76	14.75	17.13
	15.84	15.87	15.45	16.32	15.33	16.64	15.07	16.75	15.02	16.94	14.89	16.94	14.73	17.07
	15.94	15.88	15.45	16.27	15.31	16.37	15.04	16.67	15.06	16.74	14.83	16.84	14.77	17.11
	15.94	15.82	15.43	16.38	15.31	16.48	15.08	16.8	15.04	16.78	14.74	17.04	14.77	17.23
平均	15.89	15.91	15.46	16.43	15.29	16.53	15.07	16.70	15.02	16.85	14.88	17.01	14.76	17.15
σ	0.05	0.07	0.04	0.10	0.05	0.13	0.04	0.06	0.06	0.07	0.06	0.17	0.04	0.06
ω	3.953	3.948	4.064	3.825	4.108	3.801	4.170	3.764	4.184	3.730	4.223	3.695	4.257	3.664



※圓筒 E :

		自轉速度(單位 : rpm 方向 : 逆時針)															
		0		881		1170		1480		1730		2030		2315		2600	
公轉方向		逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時	逆時	順時
公轉十圈的時間(s)		15.83	15.80	15.31	16.33	15.24	16.48	15.02	16.56	14.93	17.00	14.80	16.98	14.50	17.23	14.41	17.50
		15.86	15.92	15.25	16.36	15.21	16.53	15.04	16.56	14.91	17.02	14.67	16.98	14.59	17.22	14.41	17.48
		15.89	15.82	15.30	16.41	15.12	16.54	14.96	16.63	14.85	16.88	14.68	17.10	14.56	17.24	14.34	17.57
		15.91	15.87	15.31	16.35	15.15	16.49	15.07	16.63	14.85	16.89	14.77	17.11	14.52	17.27	14.35	17.49
		15.85	15.85	15.20	16.44	15.14	16.43	15.00	16.66	14.88	16.89	14.70	17.06	14.55	17.16	14.36	17.44
		15.88	15.87	15.27	16.49	15.18	16.45	15.00	16.75	14.89	16.89	14.71	17.06	14.57	17.26	14.43	17.52
		15.82	15.84	15.26	16.44	15.25	16.53	15.08	16.69	14.87	16.91	14.68	17.05	14.52	17.29	14.29	17.49
		15.91	15.88	15.20	16.27	15.24	16.58	15.06	16.70	14.86	16.82	14.67	17.13	14.54	17.31	14.33	17.41
		15.86	15.89	15.34	16.42	15.25	16.47	14.98	16.65	14.83	16.91	14.72	17.08	14.55	17.34	14.36	17.45
		15.86	15.87	15.26	16.45	15.21	16.53	15.08	16.69	14.87	16.82	14.71	17.06	14.52	17.25	14.37	17.52
平均		15.87	15.86	15.27	16.40	15.20	16.50	15.03	16.65	14.87	16.90	14.71	17.06	14.54	17.26	14.37	17.49

σ	0.03	0.03	0.05	0.07	0.05	0.05	0.04	0.06	0.03	0.06	0.04	0.05	0.03	0.05	0.04	0.05
ω	3.960	3.961	4.115	3.832	4.134	3.807	4.181	3.773	4.224	3.717	4.271	3.683	4.321	3.641	4.374	3.593



(二)分析與討論：

1、從以上實驗結果可以歸納出以下關係

- (1) 當自轉角速度 $\omega_{(自)}$ 增加，同向公轉角速度 $\omega_{(同向)}$ 跟著線性增加，反向公轉角速度 $\omega_{(反向)}$ 跟著線性減少。

每一個圓筒均可寫成：

$$\omega_{(同向)} = A_{(同向)} \times \omega_{(自轉)} + B$$

$$\omega_{(反向)} = -A_{(反向)} \times \omega_{(自轉)} + B$$

$A_{(同向)}$ 與 $-A_{(反向)}$ 代表圖形斜率，兩者大小很接近， $A_{(同向)}$ 略大於 $A_{(反向)}$ ，且 A 值隨著自轉轉動慣量增加而增加。

- (2) 常數 B 約等於沒有自轉時的公轉角速度(設為 ω_0)

2、由重力力矩造成角動量改變的關係，

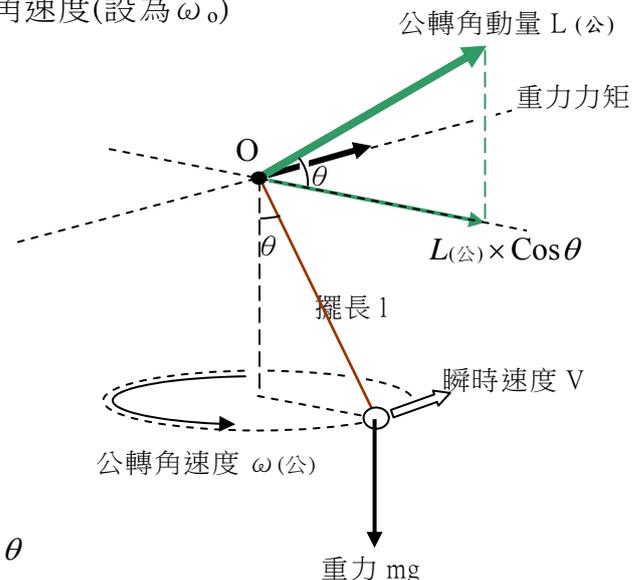
無自旋時錐動擺公轉角速度：

設公轉角速度為 $\omega_{(公)}$ ，擺繩長度 l ，擺角 θ ，以固定點 O 為參考點，則公轉角動量

$$L_{(公)} = |\vec{r} \times \vec{P}| = ml^2 \omega_{(自)} \times \sin \theta$$

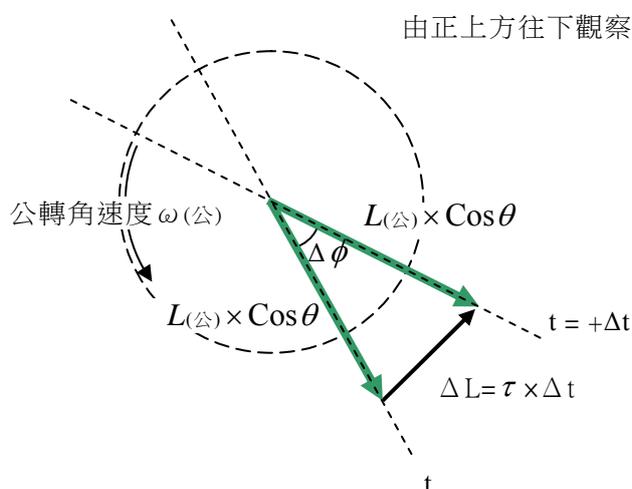
其向量落在擺繩與鉛垂線所在的平面上 (稱為擺繩平面)。

重力產生的力矩 $\tau = |\vec{r} \times m\vec{g}| = mgl \sin \theta$



當擺錘作等速率圓周運動時，力矩方向垂直擺繩平面。重力矩在極短時間 Δt 內產生的角動量變化 $\Delta L = mgl \sin \theta \times \Delta t$ (垂直於角動量方向)。

當擺錘作等速率圓周運動時，角動量也以相同的週期改變方向且量值不變。



設角動量的水平投影每 Δt 時間內的角度變化量為 $\Delta \phi$ (極小)

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L_{(公)} \times \cos \theta} = \frac{mgl \sin \theta \times \Delta t}{ml^2 \omega_{(自)} \sin \theta \times \cos \theta} = \frac{g \times \Delta t}{l \omega_{(自)} \times \cos \theta}$$

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \omega_{(公)} = \frac{g}{l \omega_{(公)} \times \cos \theta}$$

$$\rightarrow \omega_{(公)}^2 = \frac{g}{l \times \cos \theta}$$

$$\rightarrow \omega_{(公)} = \sqrt{\frac{g}{l \times \cos \theta}} \dots \dots \dots (1)$$

3、由重力力矩造成角動量改變，推導當擺錘自旋時，以固定點 O 為參考點，錐動擺的公轉角速度

設擺錘自轉角速度為 $\omega_{(自)}$ ，則自轉角動量 $L_{(自)} = I \times \omega_{(自)}$

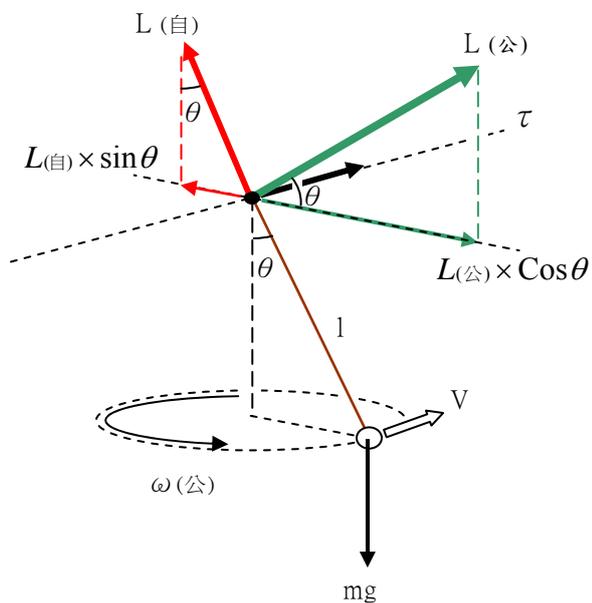
設擺錘的公轉角速度為 $\omega_{(公)}$ ，則公轉角動量

$$L_{(公)} = |\vec{r} \times \vec{P}| = l \times mv = ml^2 \omega_{(公)} \sin \theta$$

擺錘角動量合 $\vec{L}_{(合成)} = \vec{L}_{(公)} + \vec{L}_{(自)}$

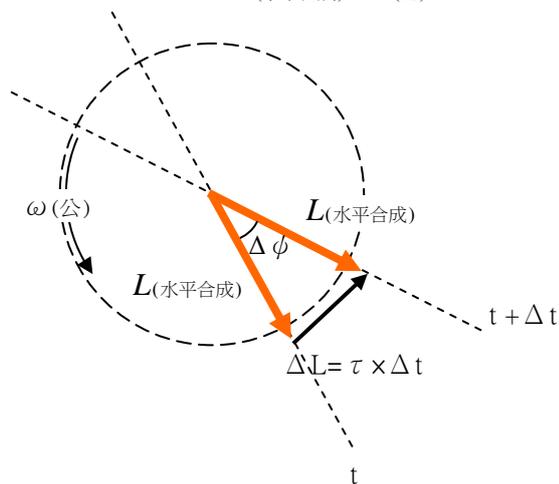
水平分量 $\vec{L}_{(水平合成)} = \vec{L}_{(公)} \times \cos \theta + \vec{L}_{(自)} \times \sin \theta$

自轉逆時針、公轉逆時針 (同向)

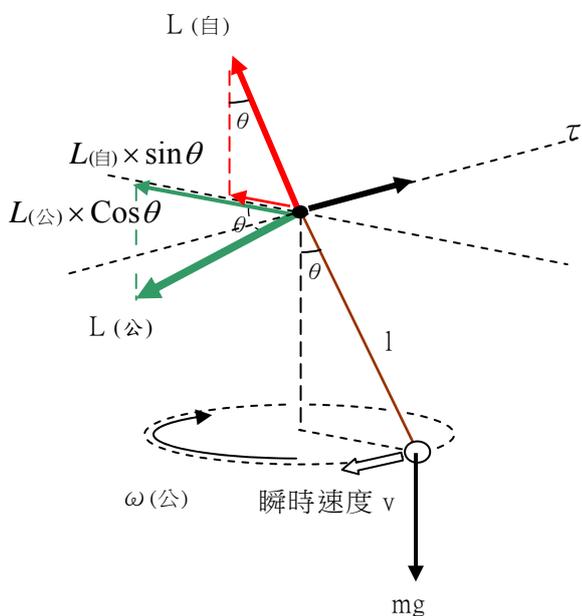


由正上方往下觀察

$$L_{(\text{水平合成})} = L_{(\text{公})} \times \cos \theta - L_{(\text{自})} \times \sin \theta$$

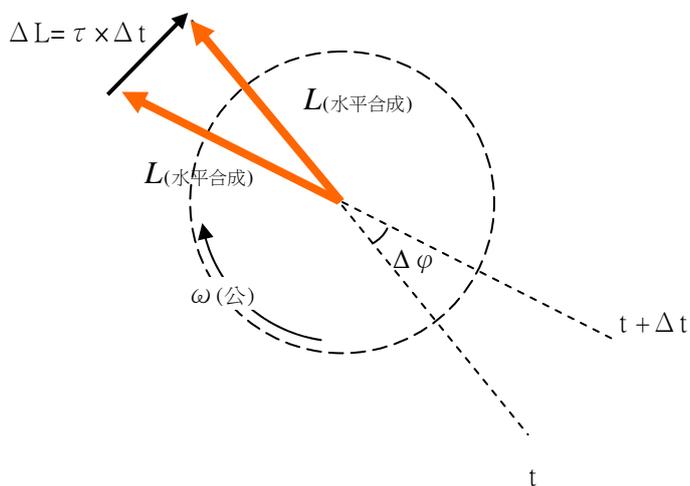


自轉逆時針、公轉順時針 (反向)



由正上方往下觀察

$$L_{(\text{水平合成})} = L_{(\text{公})} \times \cos \theta + L_{(\text{自})} \times \sin \theta$$



由以上分析可得

$$L_{(\text{水平合成})} = L_{(\text{公})} \times \cos \theta \pm L_{(\text{自})} \times \sin \theta$$

$$= ml^2 \omega_{(\text{公})} \sin \theta \times \cos \theta \pm I \omega_{(\text{自})} \times \sin \theta$$

$$\text{力矩 } \tau = |\vec{r} \times m\vec{g}| = mgl \sin \theta$$

自轉與公轉
同方向時為 -
反方向時為 +

在極短時間 Δt 內產生的角動量變化 $\Delta L = mgl \sin \theta \times \Delta t$

設角動量的水平投影 Δt 時間內的角度變化量為 $\Delta\phi$ (極小)

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L_{(\text{水平合成})}} = \frac{mgl \sin \theta \times \Delta t}{ml^2 \omega_{(\text{公})} \sin \theta \times \cos \theta \pm I \omega_{(\text{自})} \times \sin \theta}$$

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega_{(\text{公})} = \frac{mgl}{ml^2 \omega_{(\text{公})} \cos \theta \pm I \omega_{(\text{自})}}$$

整理後可得一方程式 $ml^2 \cos \theta \times \omega_{(\text{公})}^2 \pm I \omega_{(\text{自})} \times \omega_{(\text{公})} - mgl = 0$

解得公轉角速率：

$$\omega_{(\text{公})} = \frac{-I \omega_{(\text{自})} + \sqrt{I^2 \omega_{(\text{自})}^2 + 4m^2 gl^3 \cos \theta}}{2ml^2 \cos \theta} \quad (\text{反向}) \cdots \cdots (2)$$

$$\text{或 } \omega_{(\text{公})} = \frac{+I \omega_{(\text{自})} + \sqrt{I^2 \omega_{(\text{自})}^2 + 4m^2 gl^3 \cos \theta}}{2ml^2 \cos \theta} \quad (\text{同向}) \cdots \cdots (3)$$

4、驗證公式(2)(3)

(1) 當圓筒不自轉 ($\omega_{(\text{自})} = 0$) 時，公轉角速度 $\omega_{(\text{公})} = \frac{\sqrt{4m^2 gl^3 \cos \theta}}{2ml^2 \cos \theta} = \sqrt{\frac{g}{l \times \cos \theta}}$

恰好等於單純錐動擺的角速度，公式(1)。

(2) 將各圓筒規格及 $\omega_{(\text{自})}$ 等帶入公式(2)、(3)，計算出 $\omega_{(\text{公})}$ 理論值，並與 $\omega_{(\text{公})}$ 測量值比較，如下：

(表1) B圓筒 測量值與理論值比較 (單位：rad/s)

自轉角速度	公轉角速度理論值		公轉角速度測量值		百分誤差	
	反向	同向	反向	同向	反向	同向
0	3.938	3.938	3.932	3.936	-0.2%	-0.1%
73	3.903	3.974	3.901	3.956	0.0%	-0.5%
105	3.887	3.990	3.871	3.975	-0.4%	-0.4%
143	3.869	4.009	3.853	3.998	-0.4%	-0.3%
182	3.850	4.029	3.847	4.032	-0.1%	0.1%

(表2) C圓筒 測量值與理論值比較 (單位：rad/s)

自轉角速度	公轉角速度理論值		公轉角速度測量值		百分誤差	
	反向	同向	反向	同向	反向	同向
0	3.938	3.938	3.849	3.615	-2.3%	-8.2%
81	3.877	4.001	3.760	3.880	-3.0%	-3.0%
143	3.830	4.050	3.730	3.910	-2.6%	-3.5%
183	3.801	4.081	3.716	3.943	-2.2%	-3.4%
215	3.777	4.107	3.674	3.955	-2.7%	-3.7%
234	3.763	4.121	3.671	3.971	-2.5%	-3.7%
323	3.699	4.193	3.614	4.037	-2.3%	-3.7%

(表3) D圓筒 測量值與理論值比較 (單位：rad/s)

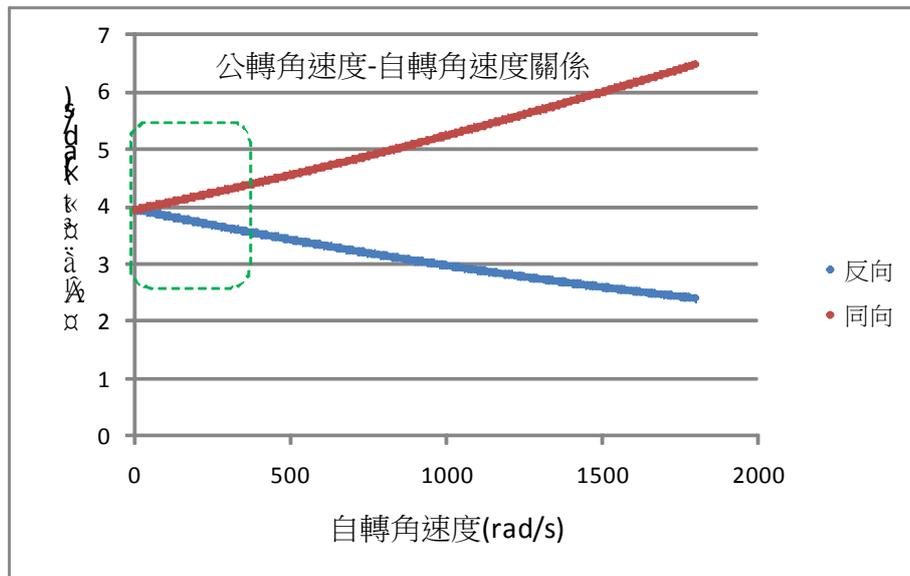
自轉角速度	公轉角速度理論值		公轉角速度測量值		百分誤差	
	反向	同向	反向	同向	反向	同向
0	3.938	3.938	3.948	3.953	0.2%	0.4%
105	3.822	4.058	3.825	4.064	0.1%	0.1%
143	3.780	4.103	3.801	4.108	0.6%	0.1%
181	3.739	4.148	3.764	4.170	0.7%	0.5%
214	3.705	4.187	3.730	4.184	0.7%	-0.1%
245	3.672	4.224	3.695	4.223	0.6%	0.0%
276	3.639	4.262	3.664	4.257	0.7%	-0.1%

(表4) E圓筒 測量值與理論值比較 (單位：rad/s)

自轉角速度	公轉角速度理論值		公轉角速度測量值		百分誤差	
	反向	同向	反向	同向	反向	同向
0	3.938	3.938	3.961	3.960	0.6%	0.5%
92	3.800	4.081	3.832	4.115	0.8%	0.8%
123	3.756	4.130	3.807	4.134	1.4%	0.1%
155	3.709	4.182	3.773	4.181	1.7%	0.0%
181	3.672	4.224	3.717	4.224	1.2%	0.0%
213	3.628	4.276	3.683	4.271	1.5%	-0.1%
242	3.586	4.325	3.641	4.321	1.5%	-0.1%
272	3.545	4.375	3.593	4.374	1.4%	0.0%

各圓筒公轉角速度之測量值與理論值都非常接近，可見所推導出來的公式(2)(3)確實適用於本研究，同時可證明本研究所設計的裝置測量結果準確度與精密度都很高(僅 C 圓筒誤差稍大)。

- (3) 以 EXCEL 模擬較大範圍的數值帶入公式(2)、(3)並作 $\omega_{(公)} - \omega_{(自)}$ 關係圖以比較實際測量結果之圖形如下：(以 D 圓筒為例)



圖形曲線不是線性關係，但是在自轉角速度 300rad/s 以內(本研究測量範

圍內)接近線性關係，與 B~E 管的測量結果符合。

(4) 公式型態並非直線方程式，分析在測量範圍內是否近似直線方程式。

$$\text{令 } C = \frac{I}{2ml^2 \cos \theta} \quad \text{則公式(2)、(3) 可寫成}$$

$$\omega_{(公)} = \sqrt{C^2 \times \omega_{(自)}^2 + \omega_0^2} - C \times \omega_{(自)} \quad (\text{反向})$$

$$\omega_{(公)} = \sqrt{C^2 \times \omega_{(自)}^2 + \omega_0^2} + C \times \omega_{(自)} \quad (\text{同向})$$

將圓筒規格、擺長 63.5 cm、自轉角速度以實驗測量範圍最大值 300rad/s 代入比較，如下：

編號	質量(kg)	內半徑(m)	外半徑(m)	$C = \frac{I}{2ml^2 \cos \theta}$	$C^2 \times \omega_{(自)}^2$	ω_0^2
B	0.4050	0.0170	0.0223	0.000490	0.0216	16
C	0.4132	0.0219	0.0274	0.000766	0.0528	
D	0.4228	0.0274	0.0325	0.001124	0.1137	
E	0.4332	0.0323	0.0375	0.001524	0.2090	

實驗中 ω_0 約為 4rad/s，由上表可知，各圓筒之 $C^2 \times \omega_{(自)}^2$ 均遠小於 ω_0^2 ，所以公轉角速度可近似為：

$$\Rightarrow \omega_{(公)} = \omega_0 - \frac{I}{2ml^2 \cos \theta} \times \omega_{(自)} \quad (\text{反向})$$

$$\omega_{(公)} = \omega_0 + \frac{I}{2ml^2 \cos \theta} \times \omega_{(自)} \quad (\text{同向})$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l \times \cos \theta}}$ 為 y 軸截距；C 為斜率；方程式近似線性關係，與測量結果相同。

(5) 擺長與擺角的影響詳見討論。

三、問題：

依照高中物理教材，錐動擺向心力來自重力與繩張力的合成，其值等於 $mg \tan \theta$ 。而本研究在同樣條件之下(只多了自轉)的擺錘在順轉、逆轉時的角速度不同，此向心力差異是否因為木棍提供了橫向作用力呢？

階段二 研究自旋擺的向心力來源

一、研究方法

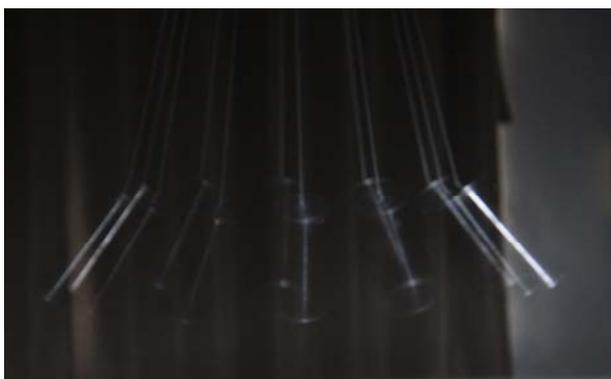
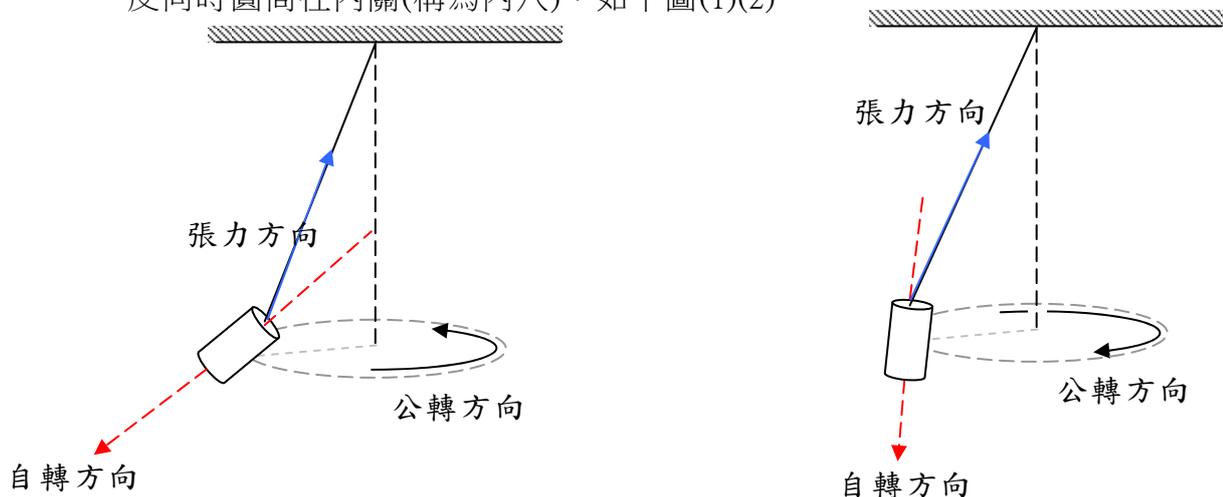
(一)以硬繩代替木棍，並且錄影記錄，其餘操作方法均與階段一相同。

(二)由定格畫面分析圓筒 A、擺繩等之位置及夾角關係。

二、結果與分析

(一)測量結果

1、圓筒自轉軸方向與繩子方向並不一致。同向時，圓筒往外張開(稱為外八)，
反向時圓筒往內關(稱為內八)。如下圖(1)(2)



自轉逆公轉順(反向) 圖 1[外八]



自轉逆公轉逆(同向) 圖 2[內八]

自轉速度(單位：rpm 方向：逆時針)												
公轉方向	不自轉		1480		1960		2510		2800		3640	
	逆時	順時										
公轉十圈的 時間(s)	15.69	15.40	15.38	15.95	15.46	16.00	15.39	16.22	15.32	16.34	15.50	16.84
	15.67	15.67	15.44	15.87	15.41	16.17	15.30	16.30	15.48	16.31	15.33	16.86
	15.57	15.57	15.46	16.06	15.36	16.00	15.47	16.24	15.35	16.38	15.23	16.89
	15.61	15.61	15.39	15.93	15.56	15.92	15.38	16.14	15.40	16.24	15.36	17.01
	15.81	15.81	15.37	16.00	15.30	16.22	15.47	16.18	15.43	16.32	15.44	16.99
平均	15.67	15.61	15.41	15.96	15.42	16.06	15.40	16.22	15.40	16.32	15.37	16.92
σ	0.09	0.15	0.04	0.07	0.10	0.13	0.07	0.06	0.06	0.05	0.10	0.08

ω	4.008	4.023	4.075	3.934	4.073	3.909	4.077	3.872	4.078	3.848	4.085	3.712
----------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

2.公轉角速度與自轉角速度關係如下：

同向公轉角速度仍比反向大，但是差距不如使用木棍時那麼多。

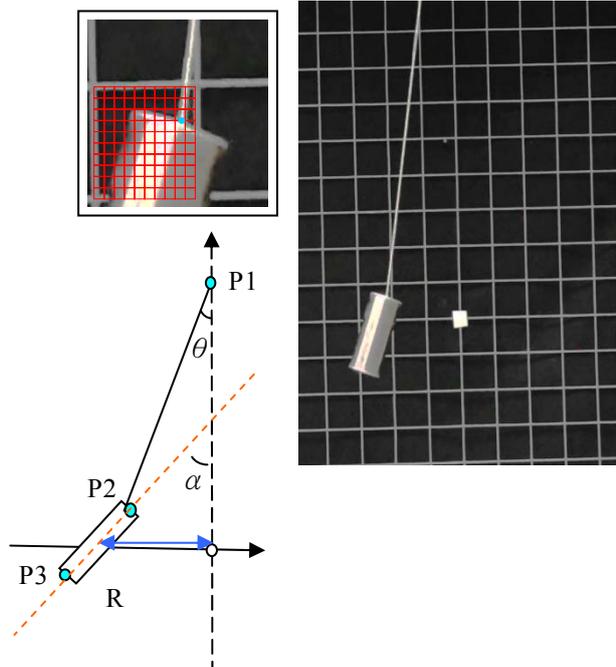
(二)分析與討論

1、原本以為改用硬繩之後繩子只能提供張力而無法提供橫向作用力，擺錘的公轉角速度不受自轉影響，但測量結果仍然不同。我們假設這差異是外八與內八時公轉半徑不同所造成的。

2、為了驗證以上假設，我們從錄影定格畫面分析擺繩與金屬圓筒的角度，求出繩張力在水平方向提供圓筒向心加速度的大小。

如右圖，讀取固定點 P1、P2、P3 座標，可計算出 θ 、 α 與公轉半徑 R。檢驗繩張力在水平方向提供的向心加速度為 $g \tan \theta$ 與圓筒進行錐動擺時所需的向心加

速度 $a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ 是否相同。



3、分析結果如下：

	自轉角速度(逆時針)							
	1480 rpm		2510 rpm		2800 rpm		3640 rpm	
公轉方向	逆時針	順時針	逆時針	順時針	逆時針	順時針	逆時針	順時針
公轉週期(秒)	1.541	1.596	1.540	1.622	1.540	1.632	1.537	1.692
半徑(m)	0.073	0.059	0.059	0.069	0.048	0.058	0.163	0.096
a_c [m/s ²]	1.219	0.922	0.977	1.028	0.808	0.867	2.768	1.337
θ (弧度)	0.124	0.095	0.098	0.105	0.082	0.088	0.274	0.138
$g \tan \theta$ [m/s ²]	1.221	0.932	0.967	1.032	0.803	0.868	2.751	1.358
百分誤差	-0.2%	-1.1%	1.0%	-0.4%	0.6%	-0.1%	0.6%	1.5%

兩種方法所得的加速度幾乎完全一樣，所以假設正確。

三、問題：

為何圓筒中心軸不是順著繩子方向，而是呈現外八或內八的現象？

繩張力不通過質心圓筒所受合力矩不為 0，此力矩與圓筒自轉的關係為何？

階段三 探討力矩與公轉角速度、自轉角動量間的關係

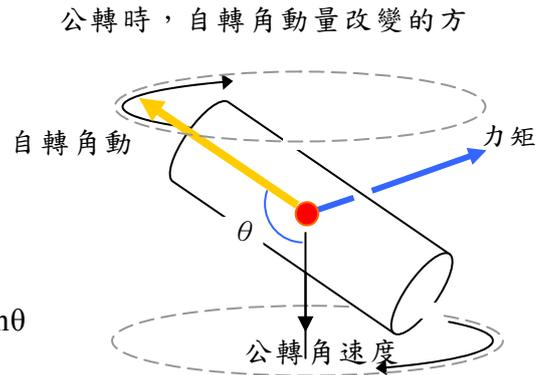
一、為了解釋使用硬繩時，為何會有內八、外八的特殊現象。我們在費曼物理學中找到了以下關係式：

$$\Delta L_{(自)} = L_{(自)} \times \Delta \phi = \text{力矩 } \tau \times \Delta t$$

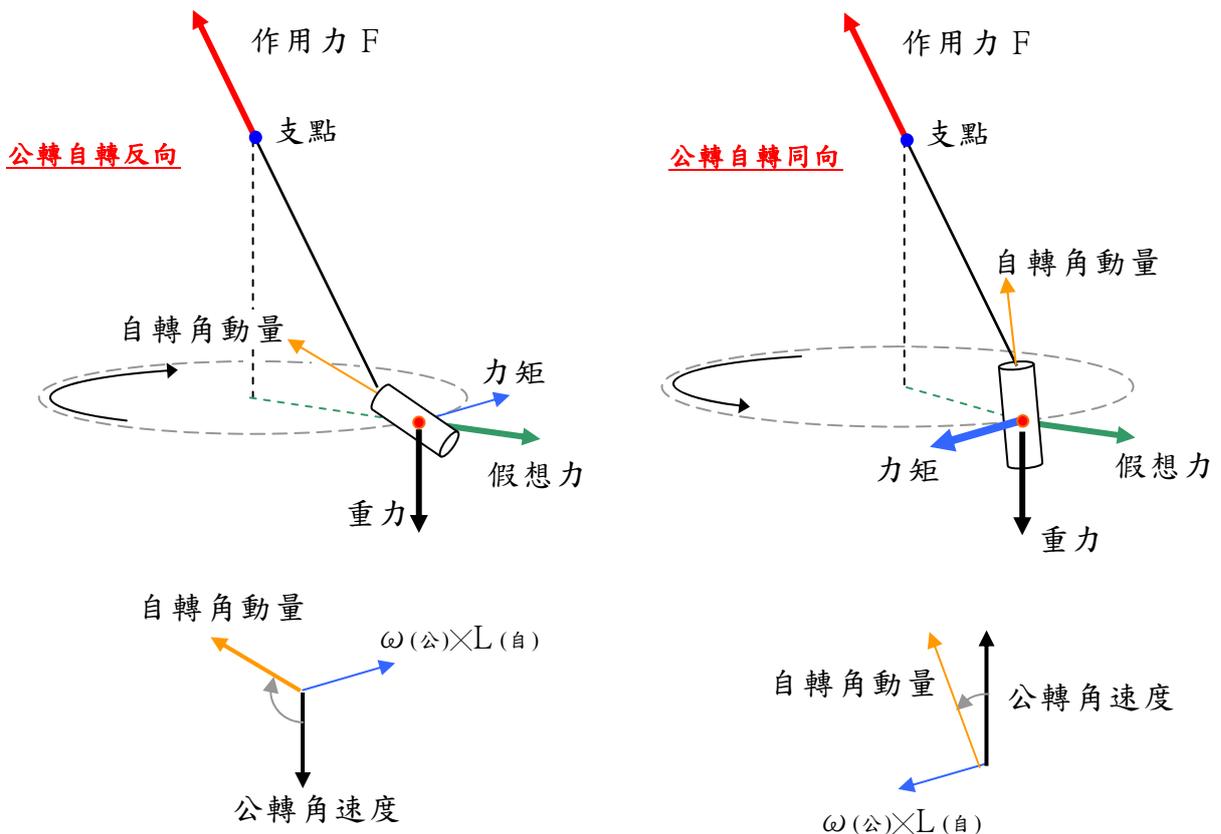
$$\text{力矩 } \tau = L_{(自)} \times \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = L_{(自)} \times \omega_{(公轉)} \times \sin \theta$$

$$\text{向量式為 } \vec{\tau} = \overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$$

我們以此來解釋實驗中所觀察到的現象。



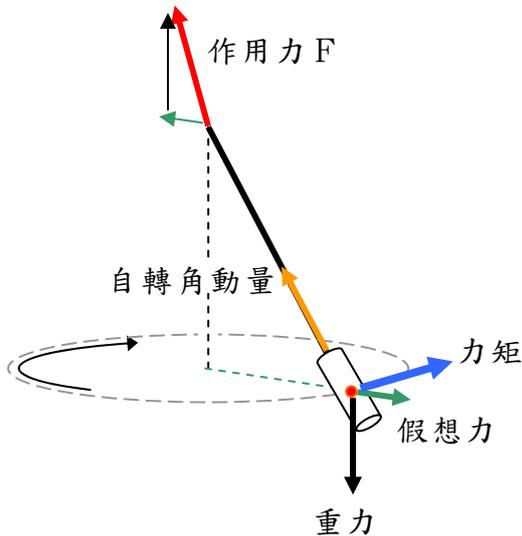
二、以硬繩為擺繩，圓筒一邊自轉一邊做錐動擺運動時，自轉角動量的方向會不斷地改變，表示圓筒有受到力矩的作用。對圓筒的質心而言，重力與圓周運動的假想力並不會產生力矩。因此推測：由於張力跟圓筒質心並不在同一直線上，此時支點對質心的力矩恰用來改變自轉角動量如下圖示：



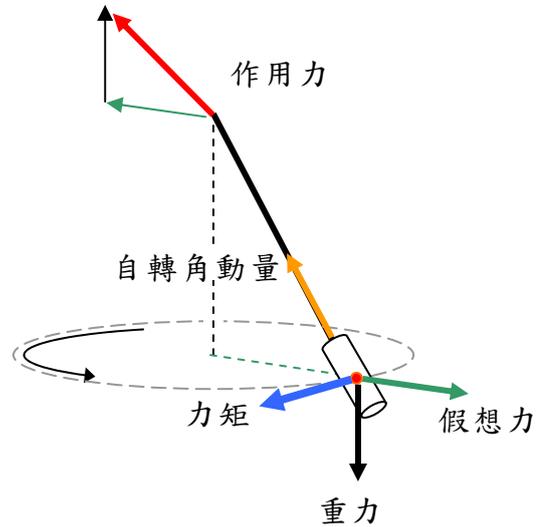
經由上圖分析可知，作用力 F 對質心產生的力矩，方向與自轉角動量方向改變時所需的力矩 $\vec{\tau} = \overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$ 方向相同。

三、延續上述的概念：以質心作為參考點，支點對木桿的作用力 F 不通過圓筒質心。如此，支點對系統質心產生的力矩可以改變自轉角動量的方向，讓圓筒可以穩定的一邊自轉一邊進行錐動擺公轉運動。

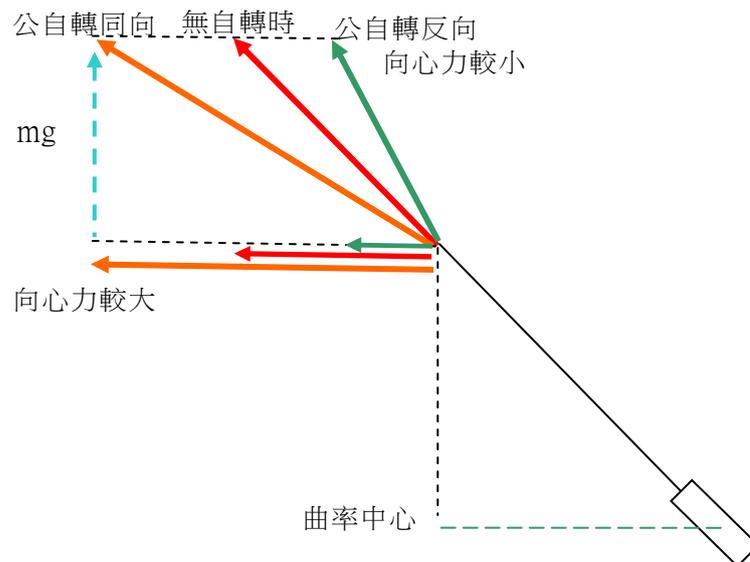
公轉自轉反向



公轉自轉同向



四、以木桿進行實驗。在同向、反向時，由於所需要的力矩方向不同，使得作用力 F 的方向不同，同向時較偏向水平方向，反向時較偏向鉛直方向。雖然方向不同，但是在鉛直方向的分力必須等於圓筒重量，於是，在水平方向的分力(向心力)就會不同。因此相同曲率半徑的錐動擺，由於受到的向心力大小不同，就會產生不同的公轉週期。



五、為了驗證以上的想法，將實驗過程中的影片擷取下來，進行數據分析。

(一)、以硬繩進行錐動擺實驗：

1. 利用數位相片分析，找出 P1、P2、P3 各點座標，並利用幾何關係找出 θ 、 α 的角度。

2. 支點對系統的作用力 F 與繩張力大小相同，作用在同一直線上。其大小為

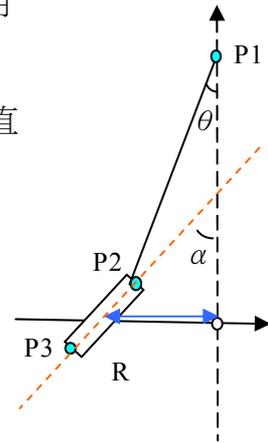
$$F = \sqrt{(mg)^2 + (ma_c)^2} \quad \text{其中, } a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

3. 計算作用力 F 對質心的力矩 $\tau = F \times d$

其中 力臂 $d = \text{半管高} \times \sin(\alpha - \theta)$

4. 計算自轉角動量方向改變時所需要的力矩大小 $\tau = L(\text{自}) \times \omega(\text{公}) \times \sin \theta$ 並與上述結果比較

5. 將上述分析結果整理如下表



	$\omega(\text{自轉})$ rpm	繩張力 T	力臂	力矩	L(自轉)	$\omega(\text{公轉})$	$\overline{\omega(\text{公})} \times \overline{L(\text{自})}$	百分誤差
同向	1480	3.52	0.0013	0.0045	0.0117	4.080	0.0046	3.4%
	2510	3.51	0.0013	0.0043	0.0198	4.079	0.0055	21.9%
	2800	3.50	0.0014	0.0048	0.0221	4.081	0.0043	12.9%
	3640	3.60	0.0044	0.0159	0.0288	4.122	0.0159	0.3%
反向	1480	3.51	0.0018	0.0062	0.0117	3.937	0.0064	2.2%
	2510	3.51	0.0048	0.0168	0.0198	3.875	0.0170	1.3%
	2800	3.50	0.0048	0.0169	0.0221	3.851	0.0171	0.8%
	3640	3.52	0.0136	0.0479	0.0288	3.729	0.0489	2.2%

由上表數據可知，支點對繩的作用力 F 對於質心所產生的力矩大小 τ 與自轉角動量方向改變時所需的力矩 $\omega(\text{公轉}) \times L(\text{自轉})$ ，不僅方向一致，大小亦相同。(僅少數數據誤差較大)

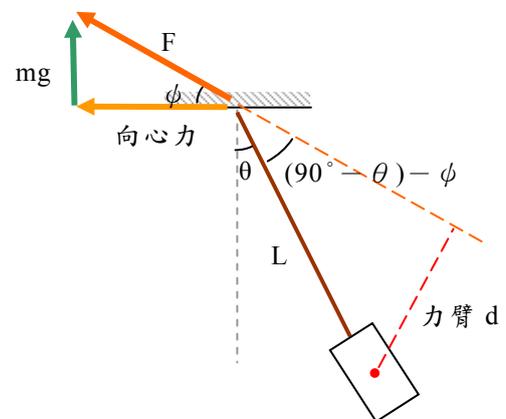
(二)、以木桿進行錐動擺實驗：

1. 以數位相片分析，測量木桿與鉛直線間的夾角 θ

2. 質心作圓周運動的曲率半徑 $R = L \times \sin \theta$

$$\text{向心力} = m \times \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\text{支點對木桿作用力 } F = \sqrt{\text{重量}^2 + \text{向心力}^2}$$



F 與水平線間夾角 ϕ

3.計算 力臂長 $d = L \times \sin(90^\circ - \theta - \phi)$ 及

F 對質心的力矩 = $F \times d$

4.計算 自轉角動量方向改變時所需的力矩 $\tau = L_{(自)} \times \omega_{(公)} \times \sin \theta$

5.將上述分析結果整理如下表

ω (自轉) 2600rpm	θ (度)	作用力	力臂	力矩	L(自轉)	ω (公轉)	$\overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$	百分誤差
同向	20	4.69	0.052	0.24	0.144	4.553	0.228	6%
	19	4.62	0.051	0.24	0.144	4.553	0.210	11%
	15	4.48	0.036	0.16	0.144	4.425	0.170	-6%
	12	4.38	0.028	0.12	0.144	4.394	0.129	-5%
	10	4.35	0.027	0.12	0.144	4.425	0.110	5%
反向	14	4.33	0.031	0.14	0.144	3.557	0.126	7%
	12	4.31	0.026	0.11	0.144	3.557	0.106	4%
	11	4.30	0.021	0.09	0.144	3.597	0.098	-9%
	9	4.28	0.018	0.08	0.144	3.557	0.079	0%
	7	4.27	0.013	0.05	0.144	3.584	0.060	-11%

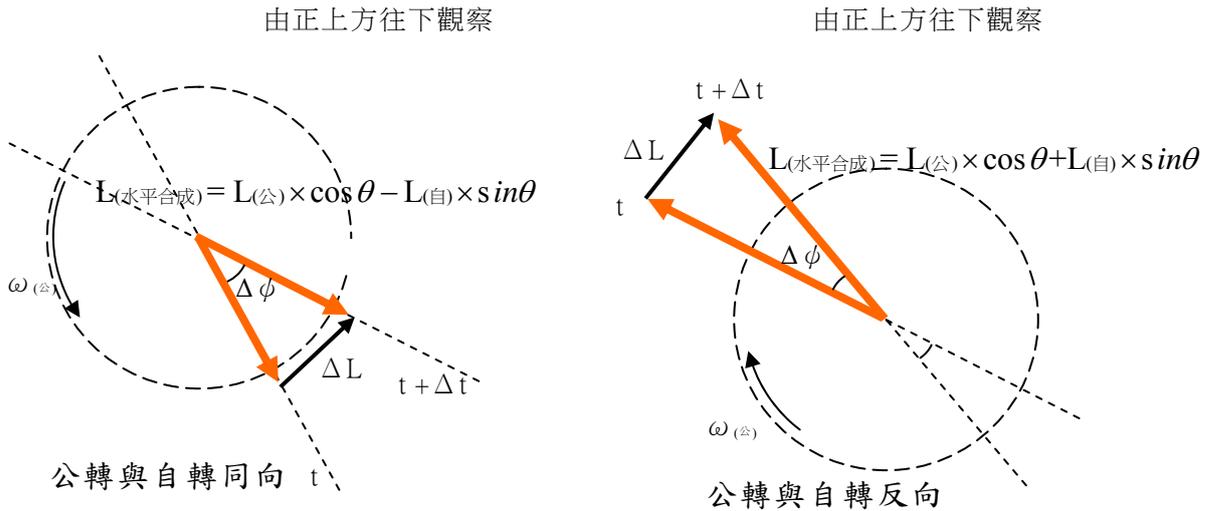
由上表數據可知，支點對系統(木桿+圓桶)的作用力 F 對於質心所產生的力矩大小 τ 與自轉角動量方向改變時所需的力矩 $\omega_{(公轉)} \times L_{(自轉)}$ ，不僅方向一致，大小亦相近。驗證了我們提出的概念：『作用力 F 對質心產生的力矩，恰好是圓筒自轉角動量方向改變時，所需要的力矩』。

伍、討論：

一、自旋擺作錐動擺運動時，其公轉角速度與單純的錐動擺不同的原因從兩種不同的分析方式說明如下：

(一) 在相同擺角 θ 時，擺錘重力 mg 對 O 點的力矩大小固定，在相同時間 Δt 造成的角動量改變 ΔL 相同，但是對於不同公轉方向的自旋錐動擺產生的影響程度卻不同。公轉角動量與自轉角動量合的水平分量(如下公式)會因同向或反向而不同，同向時 $L_{(水平合成)}$ 較小，受重力矩作用產生的角速度較大(如下面左圖)，而反向時 $L_{(水平合成)}$ 較大，產生的角速度較小(如下面右圖)。

$$L_{(水平合成)} = L_{(公)} \times \cos \theta \pm L_{(自)} \times \sin \theta$$



(二) 當自旋錐動擺穩定轉動時此自轉軸進動的角速度大小 $\omega_{(自轉)}$ 恰好等於公轉角速度 $\omega_{(公轉)}$ 。以擺錘質心為參考點，則自旋錐動擺受到支點作用的力矩 τ 恰好是圓筒自轉角動量 L 改變方向(進動)所需，即滿足 $\vec{\tau} = \overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$ 。又支點對擺錘施力的垂直分量必等於擺錘重量，因此施力的夾角便決定了向心力的大小(如圖)，同向時向心力較大公轉角速度也大，反向時向心力較小公轉角速度也小。

二、由本研究所推導出來的公式 $\omega_{(公)} = \frac{\sqrt{I^2 \omega_{(自)}^2 + 4m^2 gl^3 \cos \theta} \pm I \omega_{(自)}}{2ml^2 \cos \theta}$ ，及實驗所用圓筒

形擺錘的自旋轉動慣量 $I = m(R_1^2 + R_2^2)/2$ 判斷，影響公轉角速度的變因有圓筒內外半徑 R_1 、 R_2 、擺長 l 、自轉角速度 $\omega_{(自)}$ 及擺角 θ 。分別說明如下：

(一) 研究 B、C、D、E 圓筒半徑的影響

$$\text{由近似公式} \Rightarrow \omega_{(公)} = \omega_0 - \frac{I}{2ml^2 \cos \theta} \times \omega_{(自)} \quad (\text{反向})$$

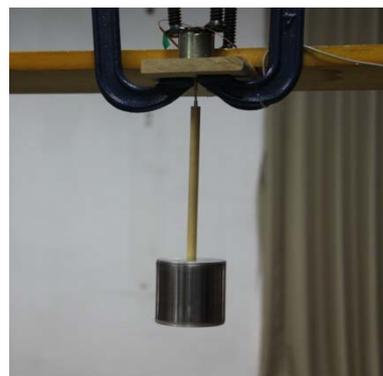
$$\omega_{(公)} = \omega_0 + \frac{I}{2ml^2 \cos \theta} \times \omega_{(自)} \quad (\text{同向})$$

則 $(R_1^2 + R_2^2)$ 應該正比於「 $\omega_{(公)} - \omega_{(自)}$ 關係圖」的斜率，且同向與反向的斜率應該大小相等但是一正一負。分析如下：

內外半徑平方和與斜率之比值

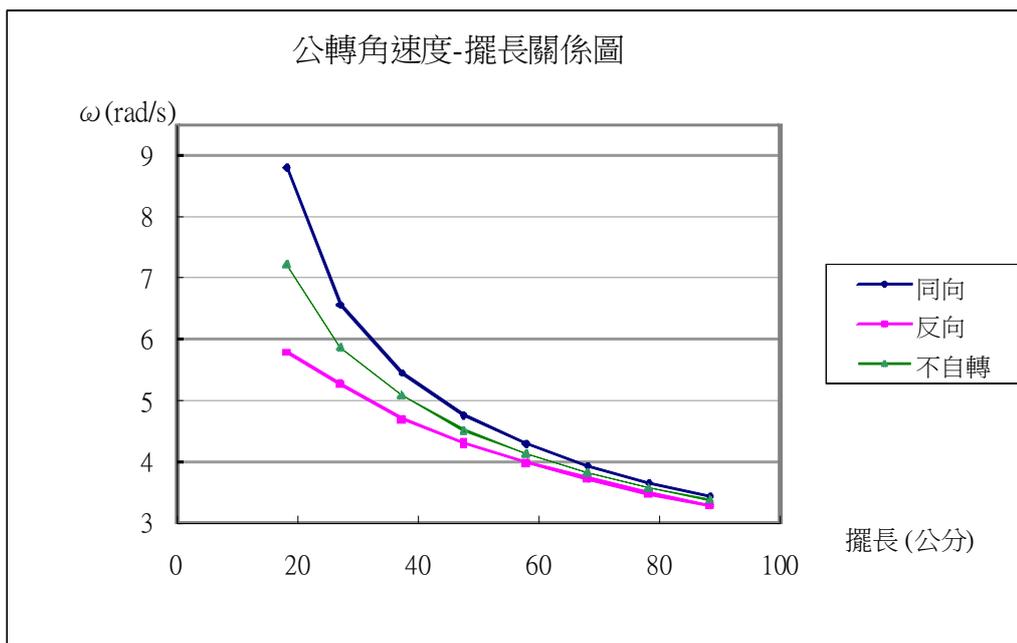
圓筒	R_1	R_2	平方和	斜率(同)	斜率(反)	比值(同)	比值(反)
B	1.7	2.23	7.9	0.0007	-0.0005	1.1E+04	-1.6E+04
C	2.19	2.74	12.3	0.0007	-0.0006	1.8E+04	-2.1E+04
D	2.74	3.25	18.1	0.0011	-0.0010	1.6E+04	-1.8E+04
E	3.23	3.75	24.5	0.0015	-0.0014	1.6E+04	-1.7E+04

結果顯示除了圓筒 B 反向之外，其餘的「內外半徑平方和」與「斜率」之比值(絕對值)都很接近，且一正一負。又，同一圓筒反向比值都比同向比值略大，此現象更符合完整公式之特徵。

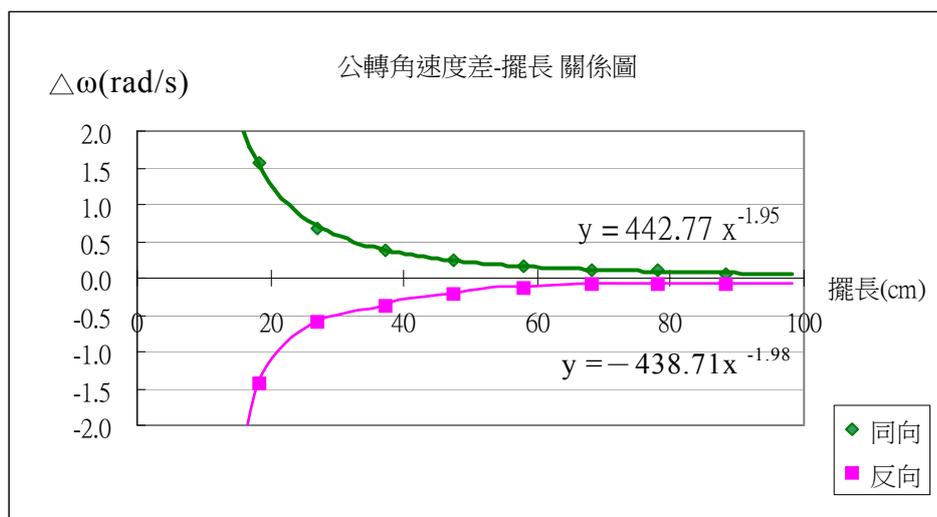


(二)研究擺長的影響

同階段一的研究方法，以圓筒 D 為擺錘，自轉速度定為 1250rpm，改變擺長進行研究，結果如下：



將同向、反向的公轉角速度與不自轉的角速度相減，可得以下關係



$\Delta\omega$ 與 1 大略成平方反比關係，符合以下關係

$$\Delta\omega = \frac{I}{2ml^2 \cos\theta} \times \omega_{(自)} \rightarrow \Delta\omega \propto \frac{1}{l^2}$$

(三)分析擺角的影響

同上述公式， $\Delta\omega$ 與 $\cos\theta$ 成反比，本研究控制的擺角約在 $5^\circ \sim 10^\circ$ 以間，此範圍 $\cos\theta$ 介於 0.996~0.984 之間，都很接近 1，因此對於各項研究的影響很小。

(四)自轉角速度的影響以詳細敘述於前面了。

綜合以上分析研究的結果與我們所推出的公式都很吻合。

陸、結論

一、以硬棍連結擺錘的自旋錐動擺，其公轉角速度會因公轉方向不同而不同。本研究推導出以下公式。且由「重力力矩造成角動量變化」分析或者由「進動公式 $\vec{\tau} = \overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$ 」分析都得出相同結果，且與實驗測量結果極吻合。

$$\omega_{(公)} = \frac{-I\omega_{(自)} + \sqrt{I^2\omega_{(自)}^2 + 4m^2gl^3 \cos\theta}}{2ml^2 \cos\theta} \quad (\text{自旋與公轉反向})$$

$$\omega_{(公)} = \frac{+I\omega_{(自)} + \sqrt{I^2\omega_{(自)}^2 + 4m^2gl^3 \cos\theta}}{2ml^2 \cos\theta} \quad (\text{自旋與公轉同向})$$

二、藉由分析公轉自轉角動量在水平面上的投影合成，可解釋為何公轉角速度大小改變的原因。

二、在本實驗的測量範圍內，自旋錐動擺與公轉角速度具有下列的特徵：

當自轉角速度 $\omega_{(自)}$ 增加，同向公轉角速度 $\omega_{(同向)}$ 跟著線性增加，反向公轉角速度 $\omega_{(反向)}$ 跟著線性減少。

每一個圓筒均可寫成：

$$\omega_{(反向)} = -A_{(反向)} \times \omega_{(自轉)} + B$$

$$\omega_{(同向)} = A_{(同向)} \times \omega_{(自轉)} + B$$

三、將實驗中各裝置的物理量代入結論一的方程式後，可將方程式簡化為

$$\omega_{(公)} = \omega_0 - \frac{I}{2ml^2 \cos\theta} \times \omega_{(自)} \quad (\text{反向})$$

$$\omega_{(公)} = \omega_0 + \frac{I}{2ml^2 \cos\theta} \times \omega_{(自)} \quad (\text{同向})$$

與實驗結果一致。

四、以硬繩連結擺錘的自旋錐動擺，其公轉角速度也會因公轉方向不同而不同。且擺錘「同向內八」「反向外八」的現象可經由「進動公式 $\vec{\tau} = \overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$ 」得到完

美的驗證。

五、以硬桿連結擺錘的自旋錐動擺，藉由「進動公式 $\vec{\tau} = \overline{\omega_{(公)}} \times \overline{L_{(自)}}$ 」可推測固定端對系統作用力的方向，並合理解釋為何在相同的曲率半徑下，錐動擺受到的向心力不同，導致公轉角速度不同。

柒、參考資料及其他

一、《物理下冊》，翰林出版社，姚珩等人主編。

二、Introduction To Classical Mechanics ,Prentice Hall , Atam P. Arya

三、Fundamentals of Physics Extended Fifth Edition 《物理(上)-第五版》，David Halliday

四、《費因曼物理學》，徐氏基金會出版，陳順強編譯

【評語】 040105

本件作品討論圓柱擺動的行為，雖有討論自轉及公轉的運動，對角動量、角速度的討論詳實，但較欠缺創新的設計或討論模式，此議題為可解析問題，應以較新穎方式探討。