

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國中組 生活與應用科學科

佳作

030825

從平面到空間- 廣義四邊形磁磚的設計法與應用

學校名稱：新竹市立光華國民中學

作者： 國二 胡晉華	指導老師： 蕭慶利
---------------	--------------

關鍵詞：M.C.Escher、等量變換

## 摘要

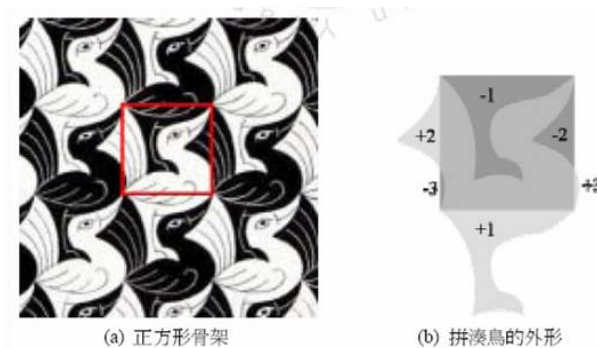
著名的荷蘭籍藝術家 M.C. Escher 以手繪的方式，創作了許多豐富且極具創意的密鋪圖樣。然而，在張瑜軒的研究[6]中，以加減遞補的方式來詮釋 M.C. Escher 的繪圖方法，這對於結構解析與製圖的設計方法上並無太大幫助。本研究主要以正方形為基本單元，首先利用已知的 4 種等量變換 (Isometry) 推論出正方形磁磚邊的作用方式共有 9 種；再利用窮舉的討論出共有 47 種設計方法，其中 44 種可以密鋪；並對 M.C. Escher 的圖樣做結構解析，在結構解析下配合快速且精確的方法製圖，創作新圖樣。最後，從二維平面延伸到曲面及立體圖形上，探討正方形磁磚在各種不同曲面及立體圖形可密鋪的設計方法。如：環面(Torus)、圓柱曲面(Cylinders)及著名的莫比紙圈(Mobius Strip)和正六面體(Cube)，在適當軟體的支援下，將可以在平面與曲面上輕鬆製作富有創意的新圖樣。

## 壹、 研究動機：

老師在上數學課時介紹了一位荷蘭籍版畫藝術家 M.C. Escher，他以手繪的方式，創作了許多豐富且極具創意的密鋪圖樣（見下圖左），在 Escher 的官網中也提供了很多可觀的動物瓷磚作品。然而，在張瑜軒的研究[6]中，她以加減遞補的方式（見下圖右）來詮釋 M.C. Escher 的繪圖方法，但這對於結構解析與製圖的設計方法上並無太大幫助，所以我決定試著找出方法能更完整地說明四邊形磁磚的結構解析。在指導老師的教導下，也協助我學會 Math PS（數學構圖軟體）的基本操作，開啟了我這次的研究之路。



圖片來源（參考文獻[2]）



圖片來源（參考文獻[5]）

## 貳、 研究目的：

- 一、探討正方形磁磚可密鋪的設計方法
- 二、對 M.C. Escher 的圖樣做結構解析，並運用研究的方法快速製圖
- 三、探討並歸納出哪些正方形磁磚設計法可在圓柱曲面(Cylinders)、環面(Torus)、莫比紙圈(Möbius strip)和正六面體(Cube)上密鋪

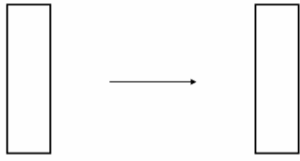
## 參、 研究設備及器材：

個人電腦、Math PS 數學構圖軟體（此為 Power Point 的外掛，為免費傳播程式）、Rhinceros 4

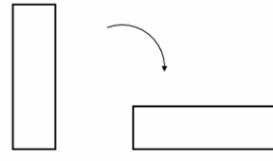
## 肆、 研究過程或方法：

根據研究[1]指出：在二維重複連續圖樣中，共有四種等量變換(Isometry)，其分別為：平移(Transformation)、旋轉(Rotation)、鏡射(Reflection)、滑動鏡射(Glide-reflection)，如下圖所示：

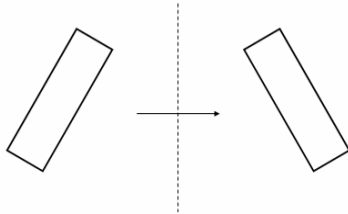
(一) 平移(Transformation)：



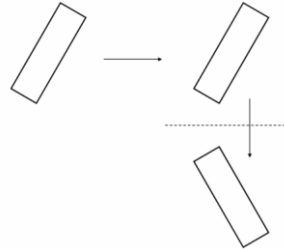
(二) 旋轉(Rotation)：



(三) 鏡射(Reflection)：



(四) 滑動鏡射(Glide-reflection)：



透過窮舉考慮這四種等量變換，可以歸納出九種邊的作用方式，其作用方式與符號定義如下：

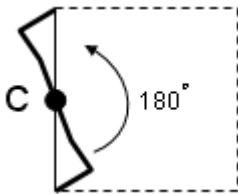
(一) 只討論「不做任何變化」的情況。

**I (Identity)**：不做任何變化



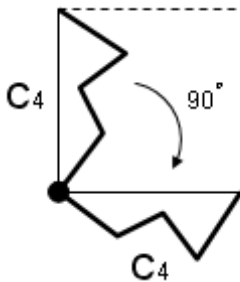
(二) 只討論「旋轉」的情況。

**C (Centre point rotation)**：以邊中點作旋轉中心旋轉 $180^\circ$



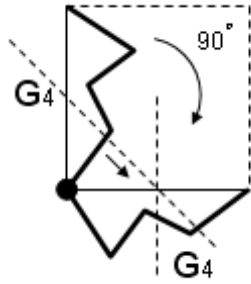
(三)「旋轉」又分成在邊上旋轉及在兩鄰邊之間旋轉，只討論「在兩鄰邊之間旋轉」的情況。

**C<sub>4</sub> (Corner Rotation)**：以頂點為旋轉中心旋轉 $90^\circ$



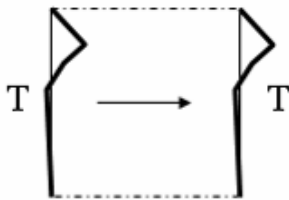
(四) 討論「在兩鄰邊之間旋轉」後，以邊中垂線做鏡射軸做鏡射。

$G_4$  (Glide reflection, adjacent sides) : 以一端為旋轉中心轉 $90^\circ$ 後再鏡射



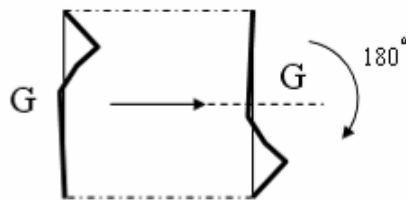
(五) 只討論「在對邊之間做平移」的情況。

T (Translation) : 平移



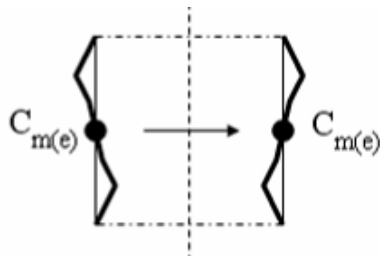
(六) 討論「在對邊之間做平移」後，以邊中垂線做鏡射軸做鏡射。

G (Glide reflection) : 平移後鏡射



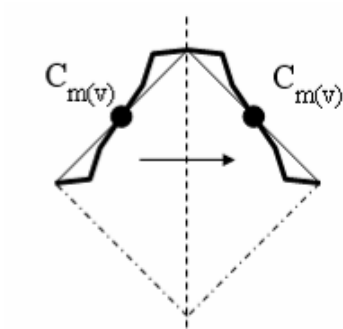
(七) 討論「在對邊之間做鏡射」的情況，但如果是任意形狀做鏡射，一定會無法成功密鋪，所以須再搭配 C 的作用，作用前後磁磚總面積才會相等，方能密鋪接合。

$C_{m(e)}$  (Center point rotation, mirror by edge) : 經 C 作用後，以一組對邊中垂線為鏡射軸做鏡射



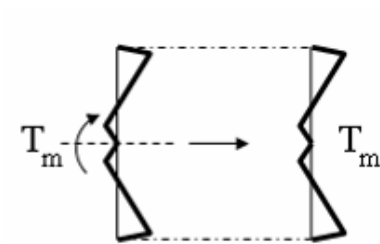
(八) 討論「在對角之間做鏡射」的情況，同  $C_{m(e)}$  的狀況，鏡射前須先搭配 C 的作用。

$C_{m(v)}$  (Center point rotation, mirror by vertex) : 經 C 作用後，以一組對角線為鏡射軸做鏡射



(九) 討論「若鏡射軸通過作用邊」時的情況，則鏡射軸所通過的作用邊只能是具有線對稱的性質的平移。

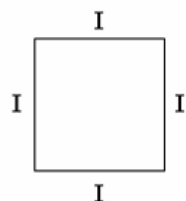
$T_m$  (Translation, mirror) : 以邊的中垂線為對稱軸做鏡射後再做平移



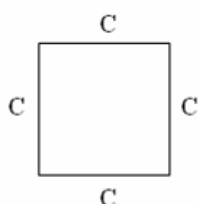
利用上述九種邊的作用方式，再透過窮舉的方法找出所有組合情形。底下可分三大類來考慮。

Case1 : 先考慮磁磚上只有單一種邊的作用方式的所有情形

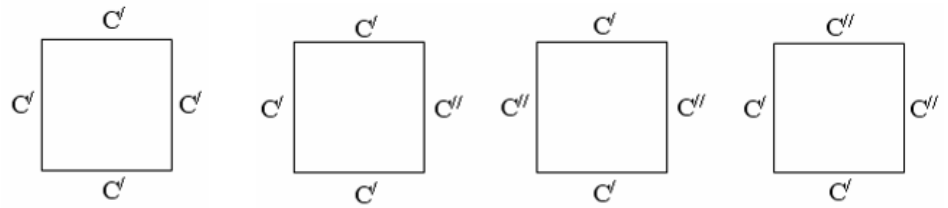
只討論 I :



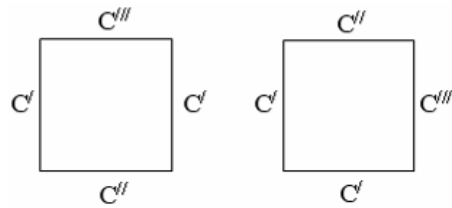
只討論 C :



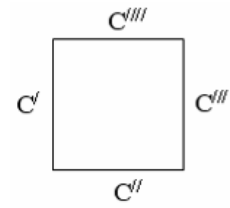
(1)只有一種 C： (2)考慮兩種不同 C 的情形：



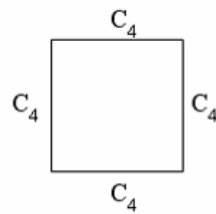
(3)考慮三種不同 C 的情形：



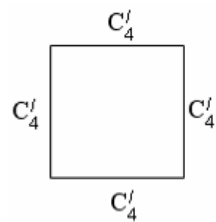
(4)考慮四種不同 C 的情形：



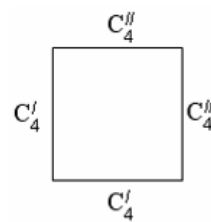
只討論  $C_4$ ：



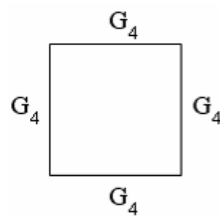
(1)只有一種  $C_4$ ：



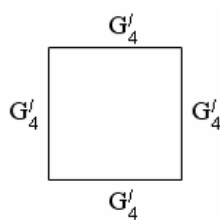
(2)考慮兩種不同  $C_4$  作用的情形：



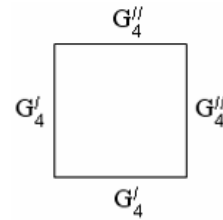
只討論  $G_4$ ：



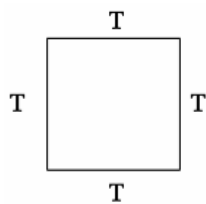
(1)只有一種  $G_4$ ：



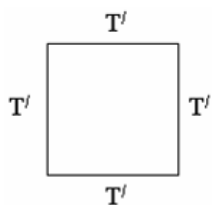
(2)考慮兩種不同  $G_4$  作用的情形



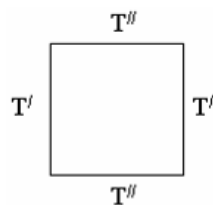
只討論 T :



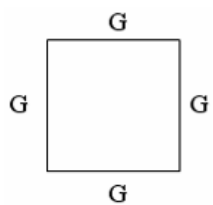
(1) 只有一種 T :



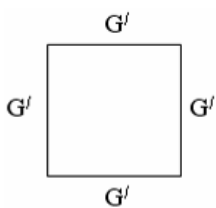
(2) 考慮兩種不同 T 作用的情形 :



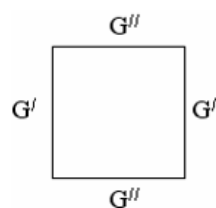
只討論 G :



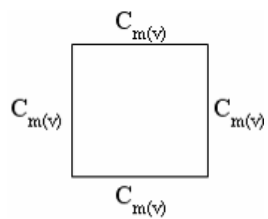
(1) 只有一種 G :



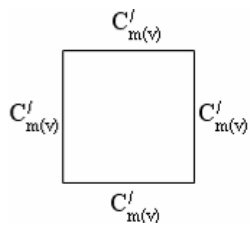
(2) 考慮兩種不同的 G 作用的情形 :



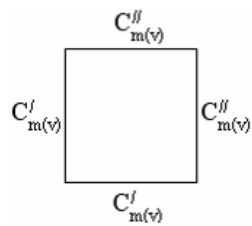
只討論  $C_{m(\nu)}$  :



(1) 只有一種  $C_{m(\nu)}$  :



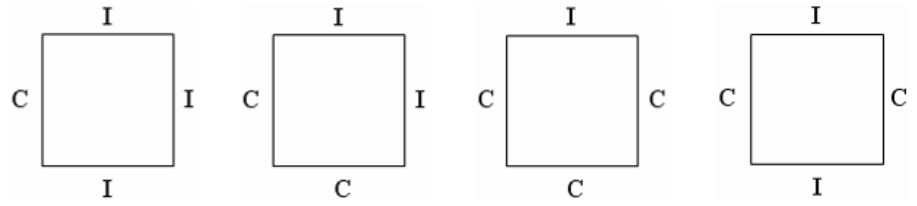
(2) 考慮兩種不同  $C_{m(\nu)}$  作用的情形 :



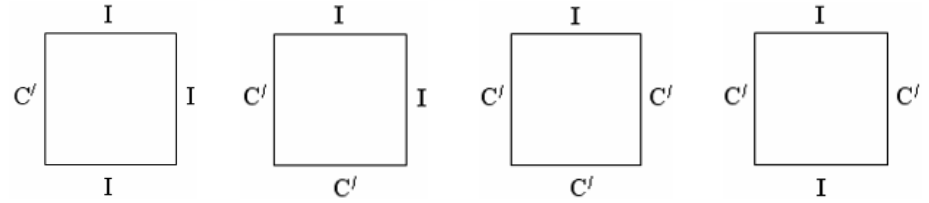


Case2：考慮磁磚上有兩種邊作用方式的所有情形

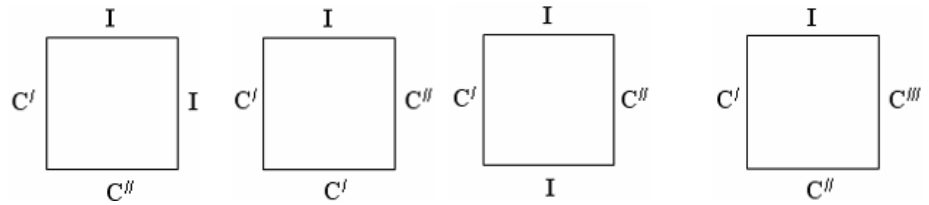
只討論 C 和 I：



(1) 只有一種 C：

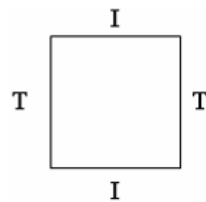


(2) 考慮兩種不同 C 作用的情形：

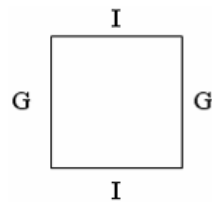


(3) 三種 C 作用的情形：

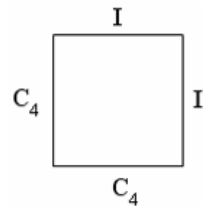
只討論 T 和 I：



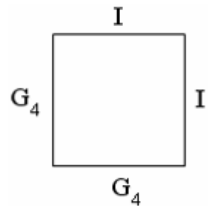
只討論 G 和 I：



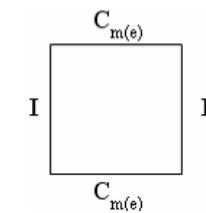
只討論  $C_4$  和 I：



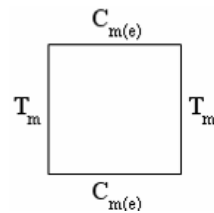
只討論  $G_4$  和 I：



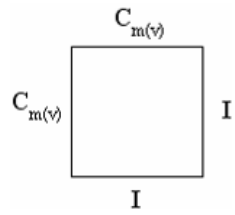
只討論  $C_{m(e)}$  和 I：



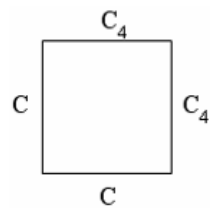
只討論  $T_m$  和  $C_{m(e)}$ ：



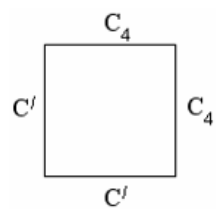
只討論  $C_{m(v)}$  和 I :



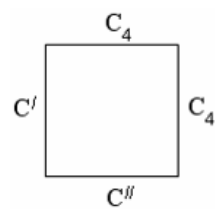
只討論 C 和  $C_4$  :



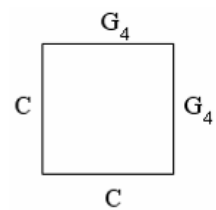
(1) 只有一種 C :



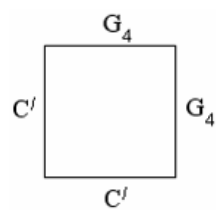
(2) 考慮兩種不同 C 作用的情形 :



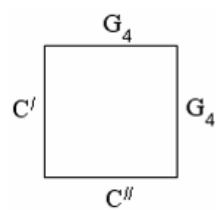
只討論 C 和  $G_4$  :



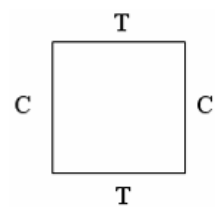
(1) 討論一種 C :



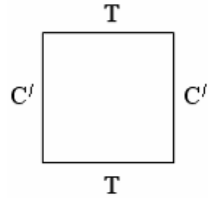
(2) 考慮兩種不同 C 作用的情形 :



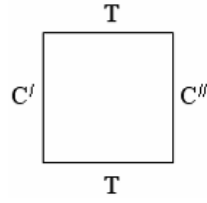
只討論 C 和 T :



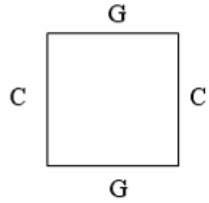
(1)只有一種 C :



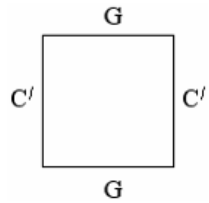
(2)考慮兩種不同 C 作用的情形 :



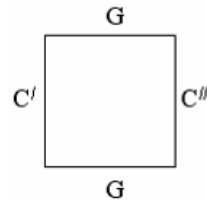
只討論 C 和 G :



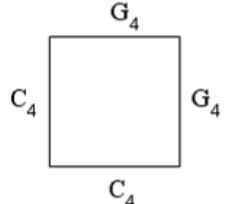
(1)只有一種 C :



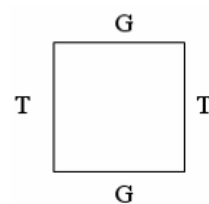
(2)考慮兩種不同 C 作用的情形 :



只討論 C<sub>4</sub> 和 G<sub>4</sub> :

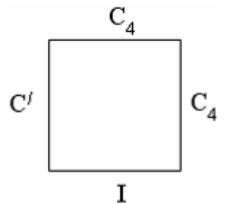


只討論 T 和 G :

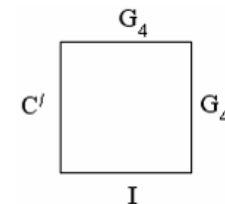


Case3 : 再來考慮磁磚上有三種邊作用方式的所有情形

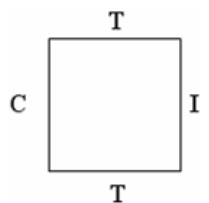
只討論 C、C<sub>4</sub> 和 I :



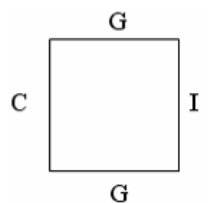
只討論 C、G<sub>4</sub> 和 I :



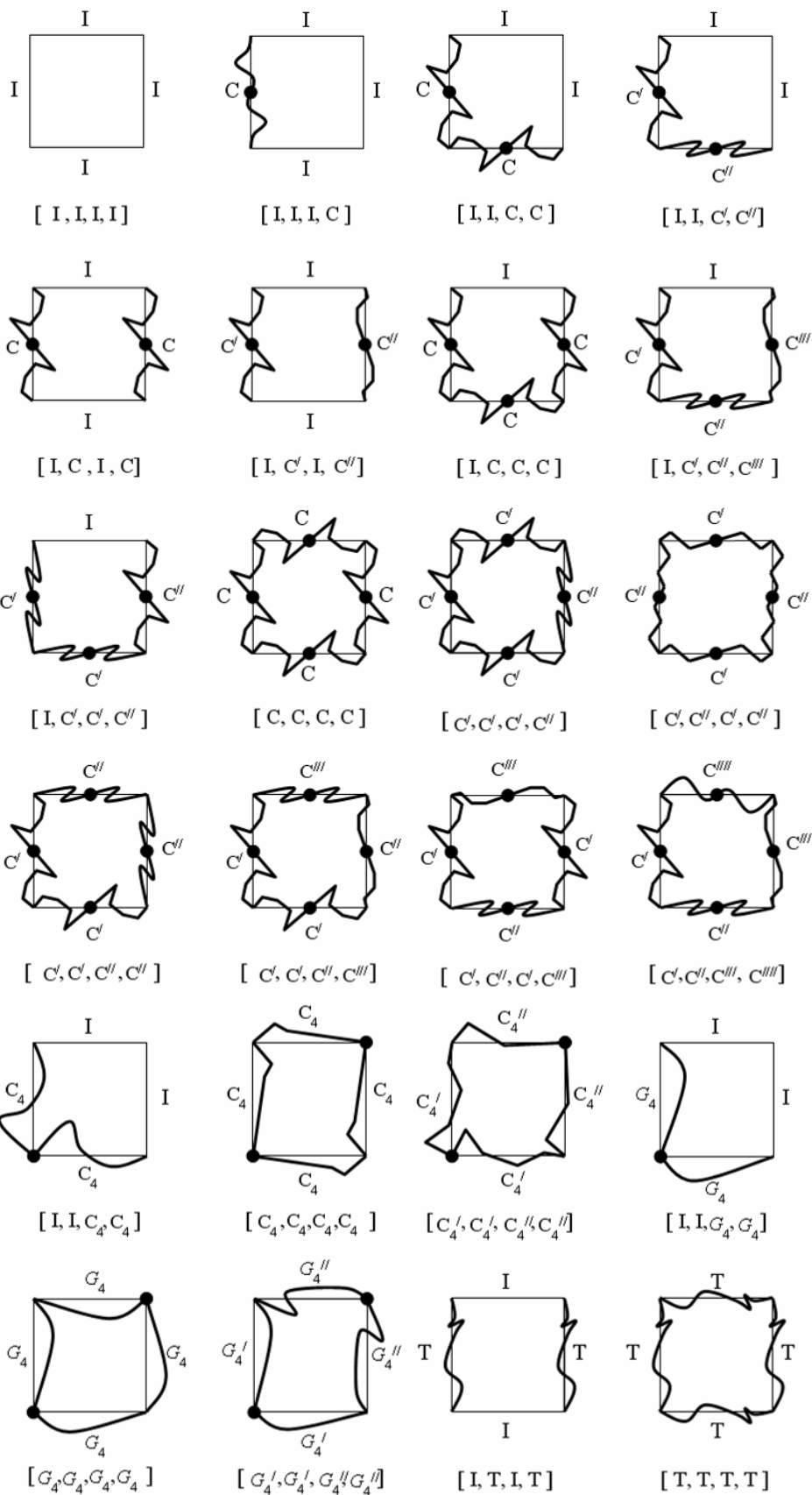
只討論 C、T 和 I :

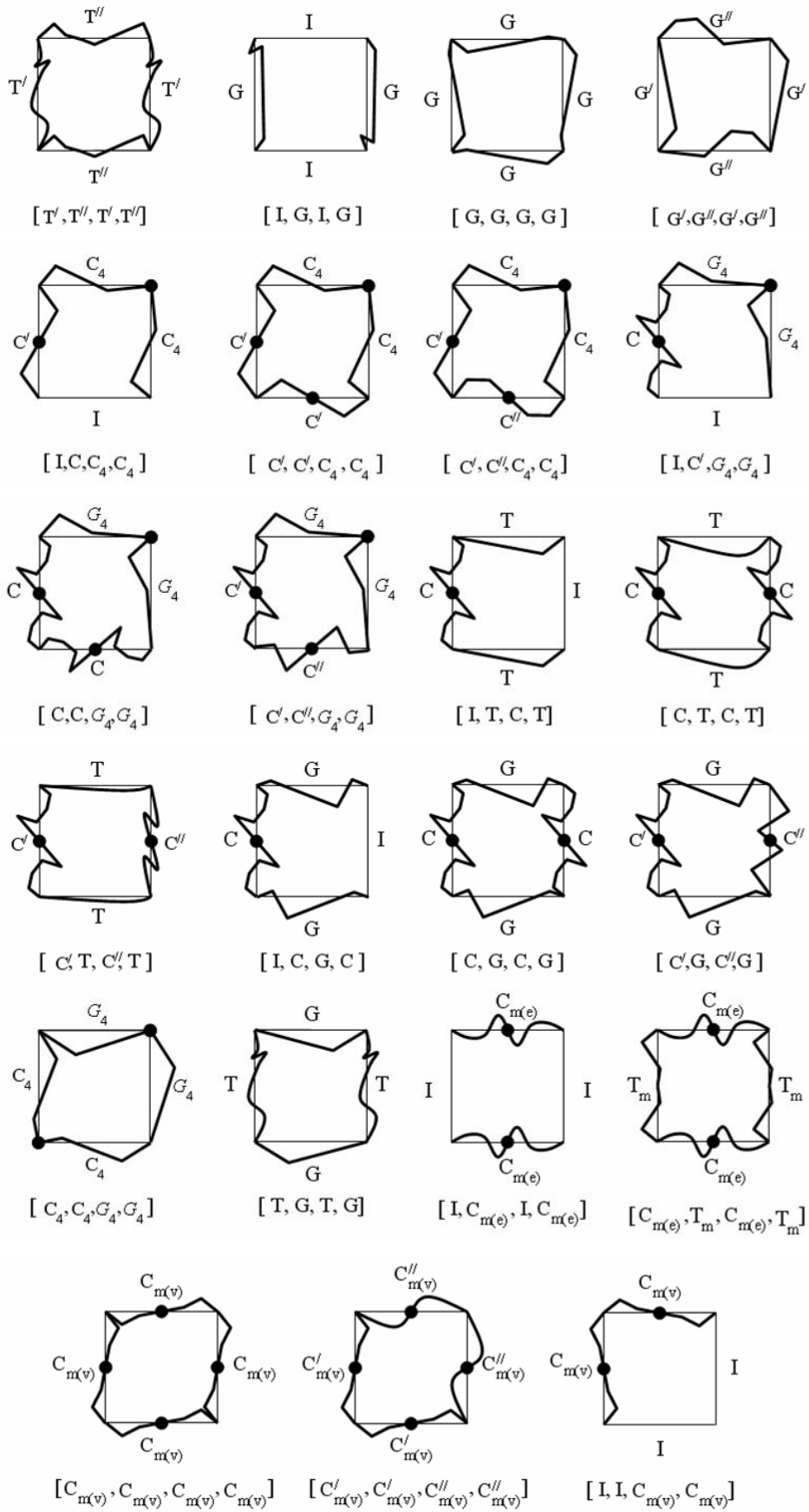


只討論 C、G 和 I :



將上列所有窮舉出的組合作整理，得到下列 47 種的正方形作用邊之變化方式。

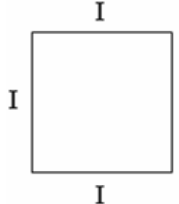

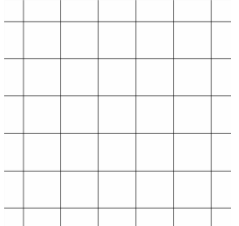
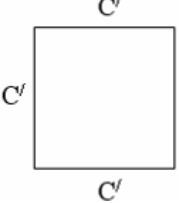

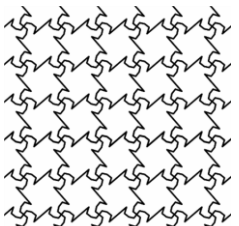
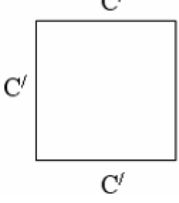

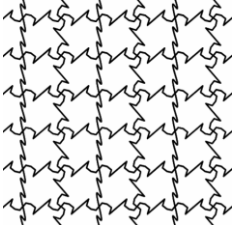
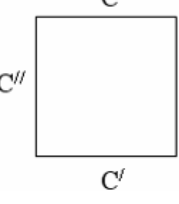

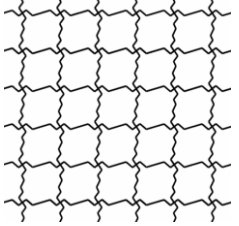
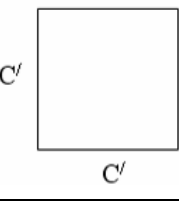

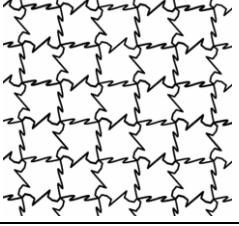
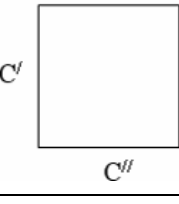

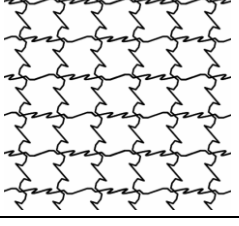




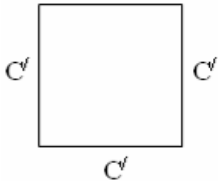

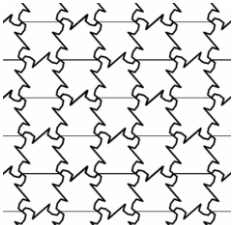
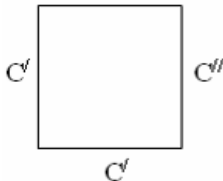

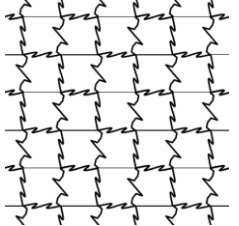
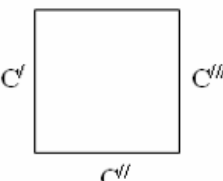

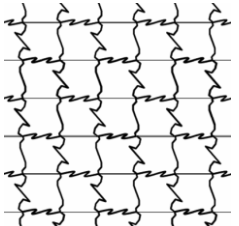
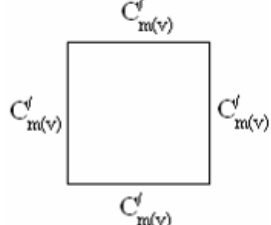
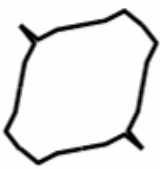
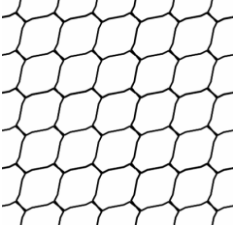
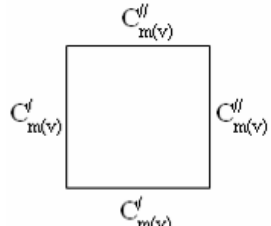

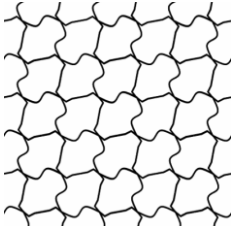
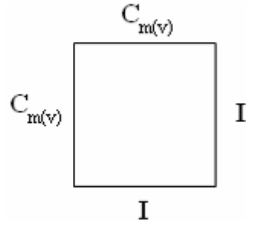

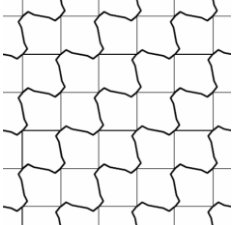
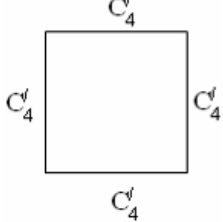

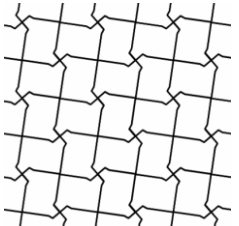
結論一：(1)正方形磁磚邊的作用方式共有 9 種。

(2)利用窮舉的方式探討出可密鋪的設計方法共有 47 種。

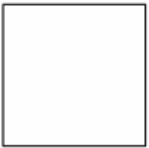

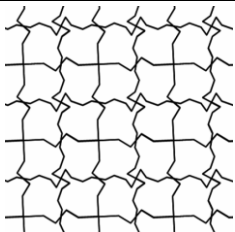


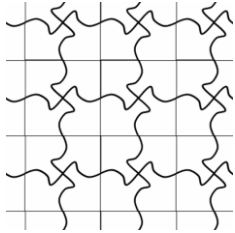
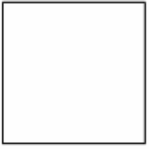

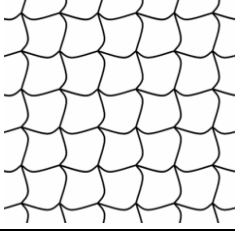


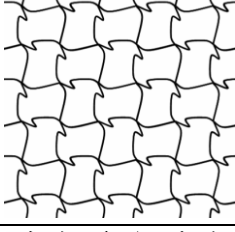


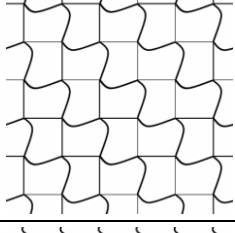


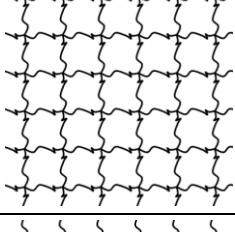


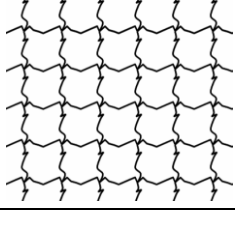
再來，底下將分析所有磁磚設計法密鋪的可能性，透過將每一種磁磚經旋轉或鏡射的方式密鋪後，若出現規律週期且各種作用邊皆不會互相交錯，即可判定此設計法可延伸密鋪成整個平面。

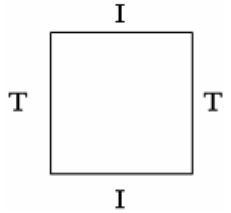
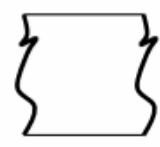
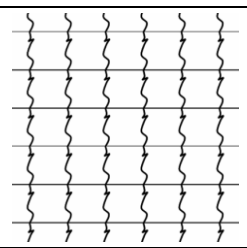
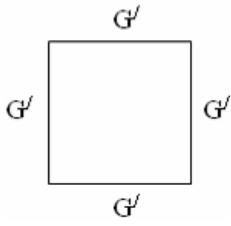

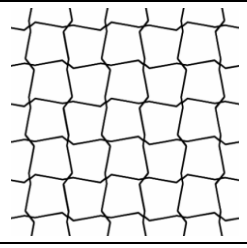
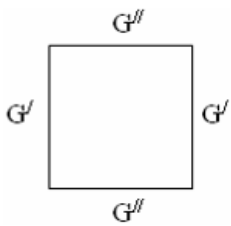

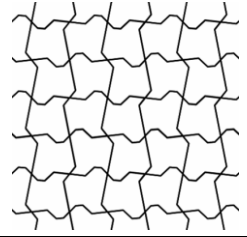
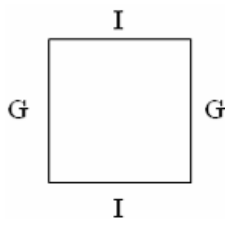

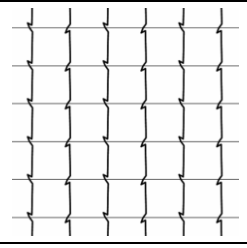
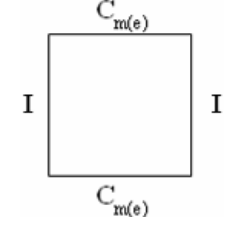
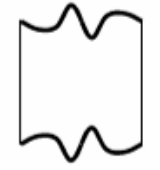
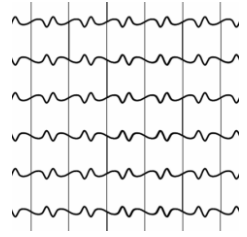
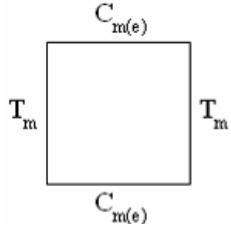

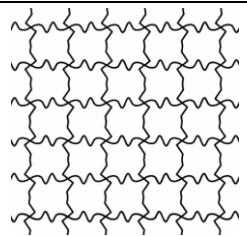
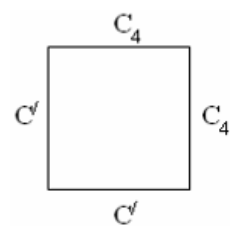

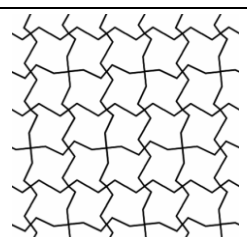
	符號表示	磁磚例圖	密鋪
只討論 I			
只討論 C			
			
			
			
			

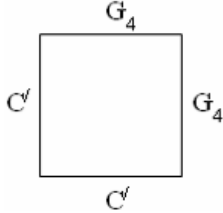

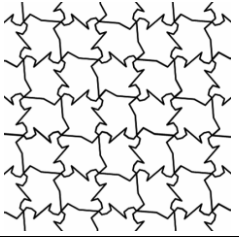
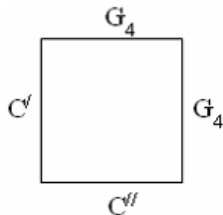

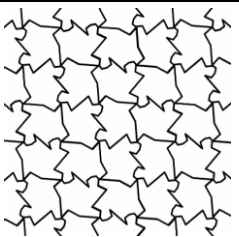
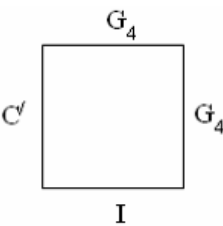

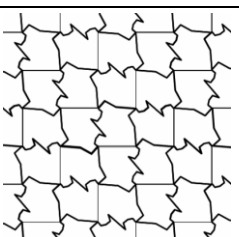
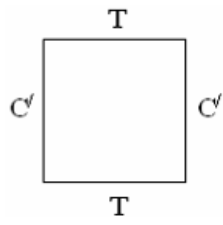

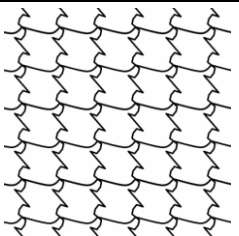
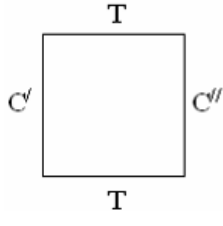

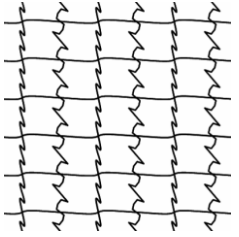
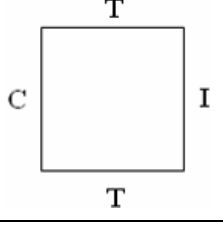

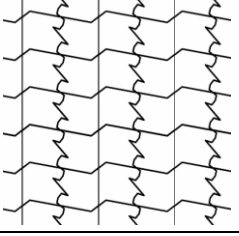
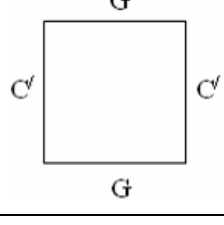

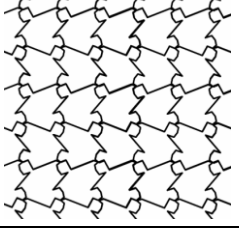
只討論 C 和 I			

	<p style="text-align: center;">I</p> 		
	<p style="text-align: center;">I</p> 		
	<p style="text-align: center;">I</p> 		
只討論 $C_{m(v)}$	<p style="text-align: center;"><math>C_{m(v)}^d</math></p> 		
	<p style="text-align: center;"><math>C_{m(v)}^{d'}</math></p> 		
只討論 $C_{m(v)}$ 和 I	<p style="text-align: center;"><math>C_{m(v)}</math></p> 		
只討論 $C_4$	<p style="text-align: center;"><math>C_4^d</math></p> 		



	$C_4'$ $C_4''$ 		
只討論 $C_4$ 和 I	$C_4$ $I$ 		
只討論 $G_4$	$G_4'$ $G_4''$ 		
	$G_4'$ $G_4''$ 		
只討論 $G_4$ 和 I	$G_4$ $I$ 		
只討論 T	$T'$ $T'$ 		
	$T'$ $T''$ 		

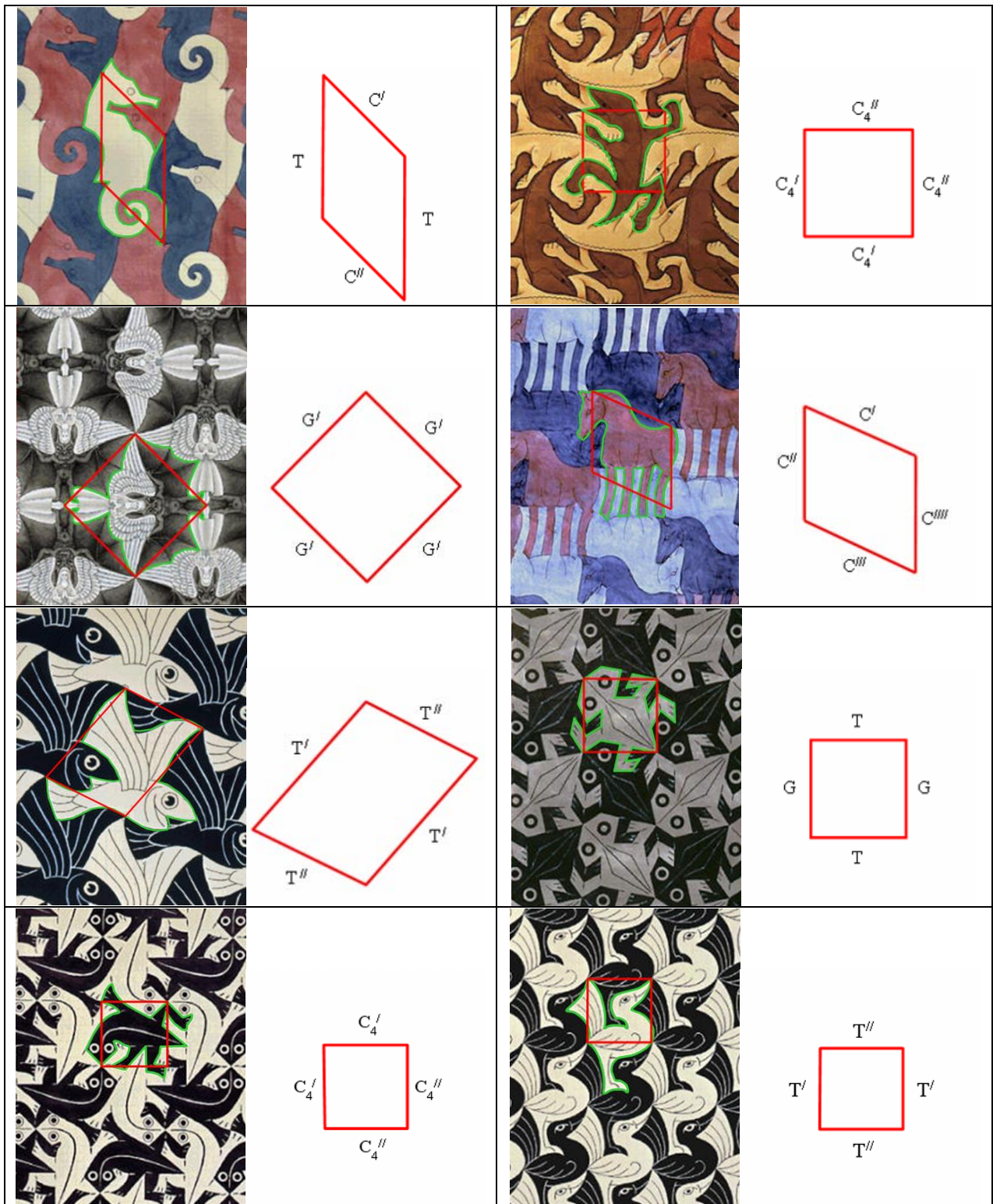
只討論 T 和 I			
只討論 G			
			
只討論 G 和 I			
只討論 $C_{m(e)}$ 和 I			
只討論 $C_{m(e)}$ 和 $T_m$			
只討論 C 和 $C_4$			

只討論 C 和 $G_4$			
			
只討論 C、 $G_4$ 和 I			
只討論 C 和 T			
			
只討論 C、T 和 I			
只討論 C 和 G			

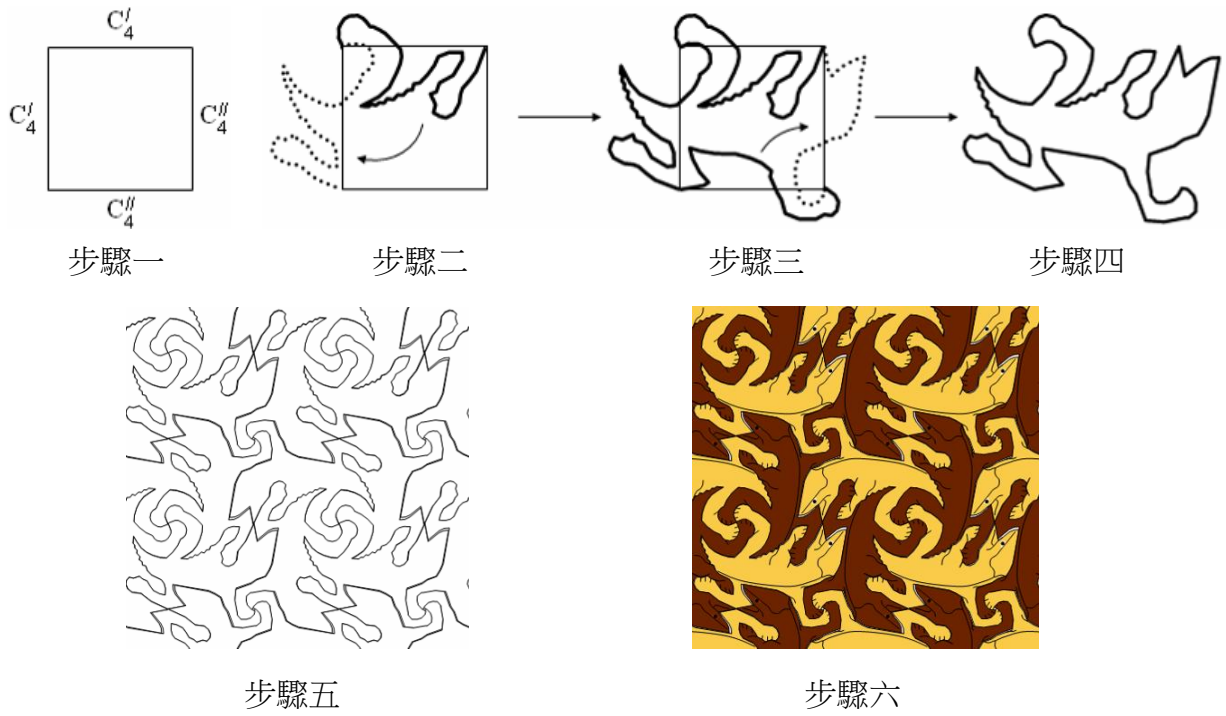
只討論 C、G 和 I			
只討論 T 和 G			
只討論 C 和 C <sub>4</sub>			
只討論 C、C <sub>4</sub> 和 I			
只討論 C <sub>4</sub> 和 G <sub>4</sub>			

結論二：在 47 種設計方法中，共 44 種設計方法可以無限密鋪，而剩餘的三種則無法密鋪，分別為  $[C', C'', C_4, C_4]$ 、 $[I, C, C_4, C_4]$  及  $[C_4, C_4, G_4, G_4]$ 。

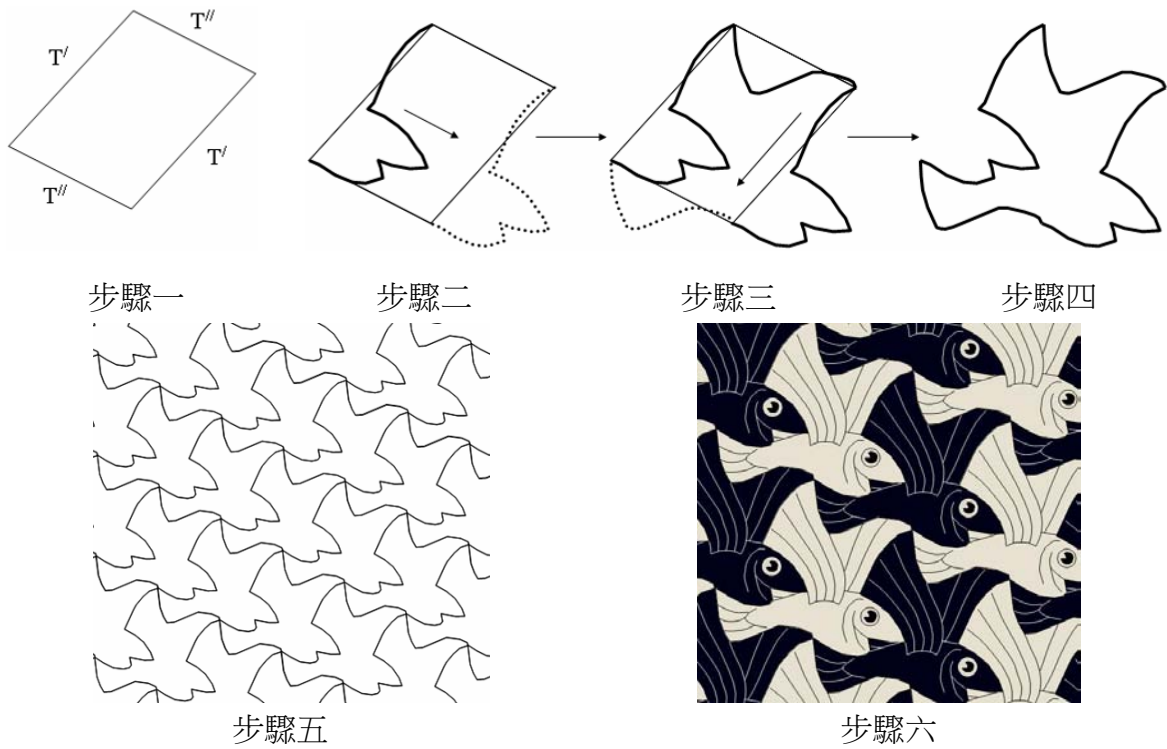
接下來我對 Escher 手繪的圖，做一結構解析，並透過我所研究的設計方法精確快速製圖，成功的克服了 Escher 手繪所造成的誤差。



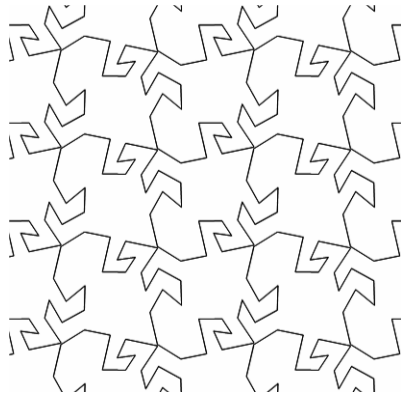
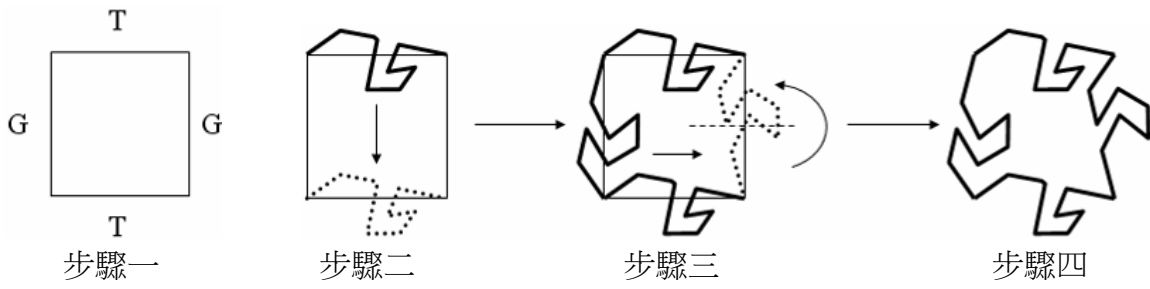
範例一：(此圖為 Escher 的作品之一，蜥蜴)



範例二：(此圖為 Escher 的作品之一，飛魚)



範例三：(此圖為 Escher 的作品之一，昆蟲)

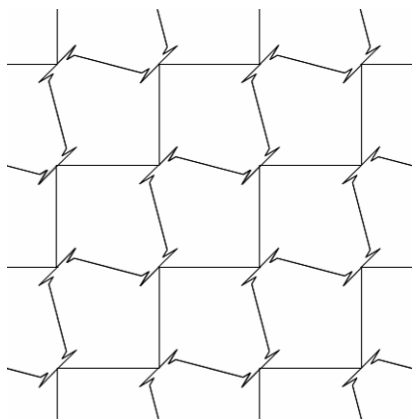
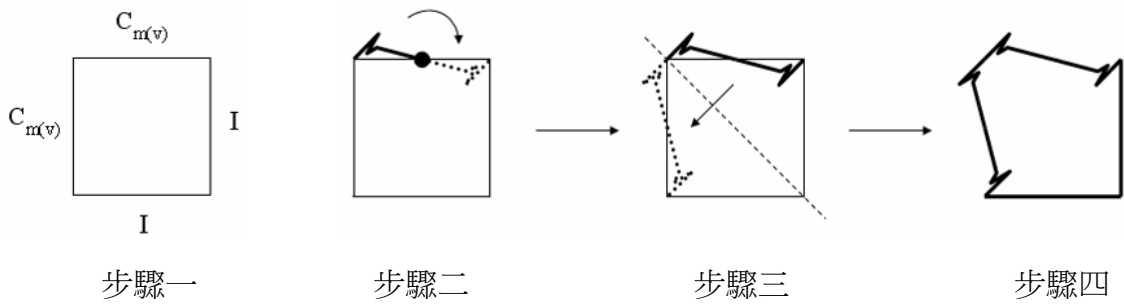


步驟五

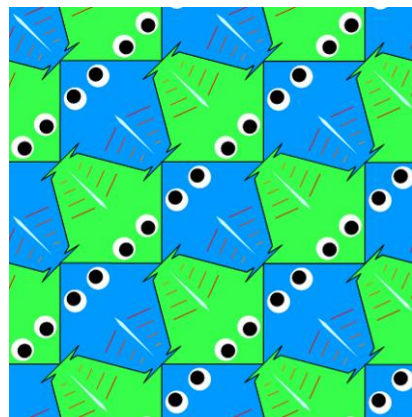


步驟六

範例四：(此圖為依據研究結果自製仿動物磁磚，大眼魚)

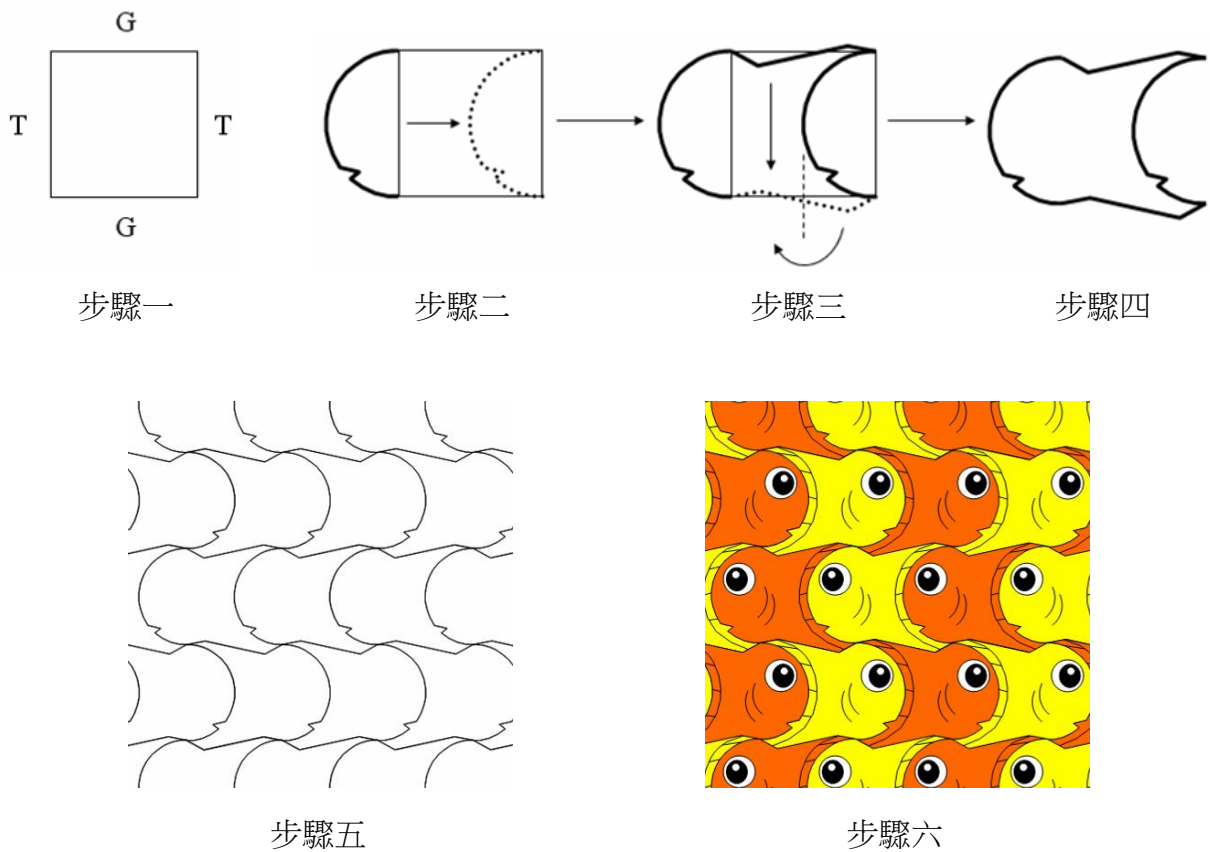


步驟五


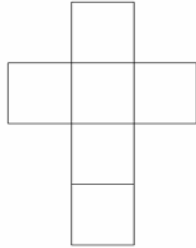

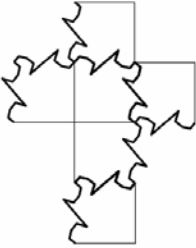

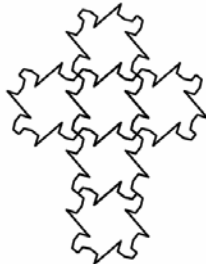

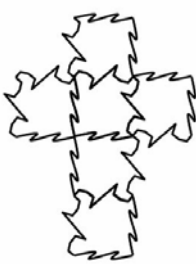


步驟六


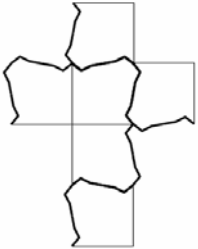

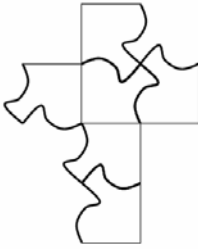

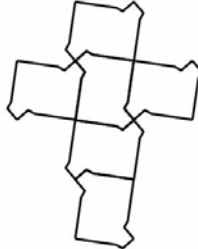

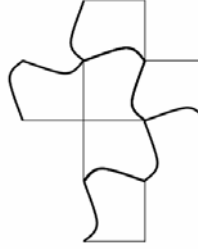





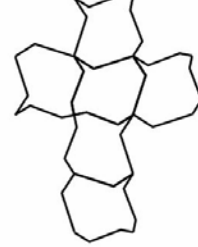

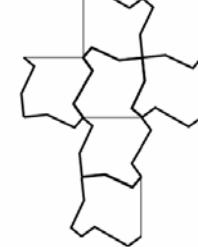



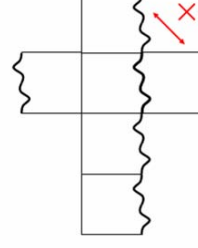

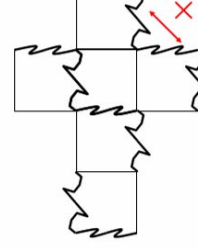

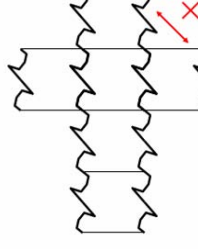
範例五：(此圖為依據研究結果自製仿動物磁磚，金魚)


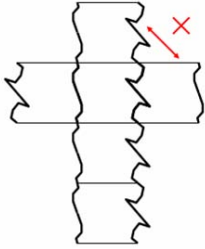

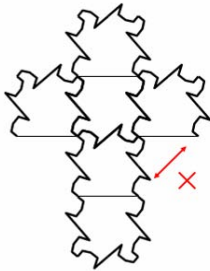

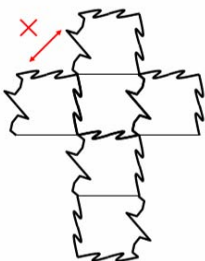

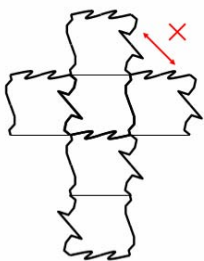

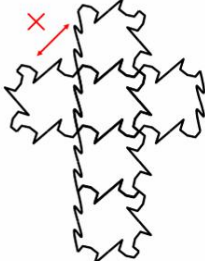

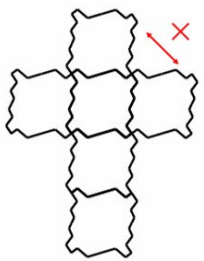

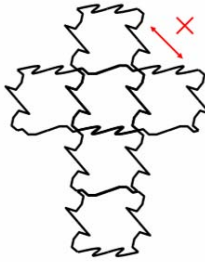

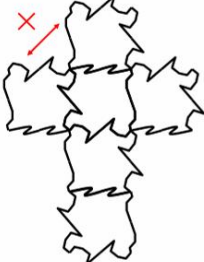

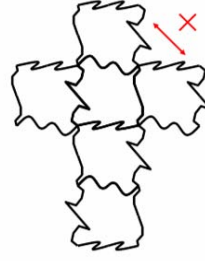
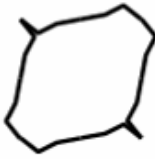
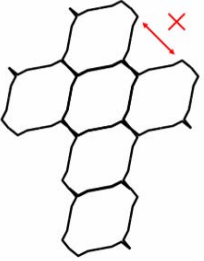

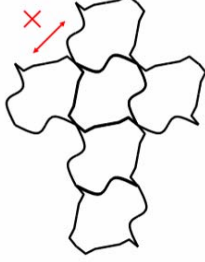

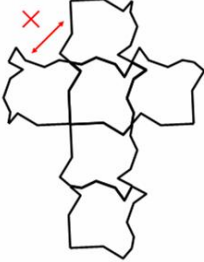



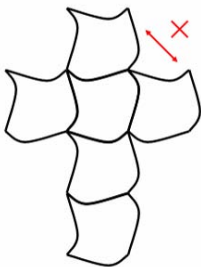

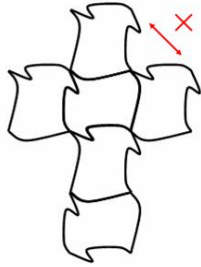

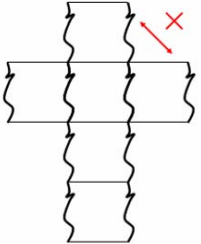

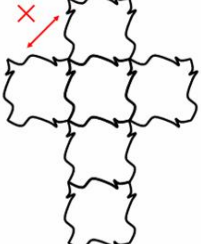

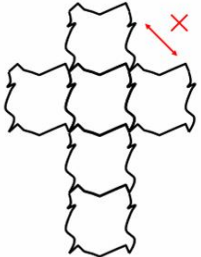
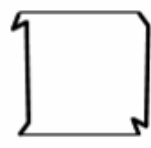
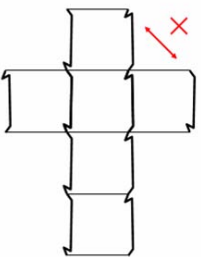

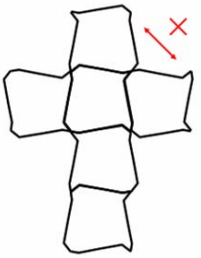

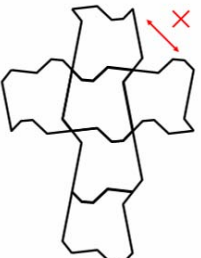
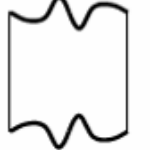
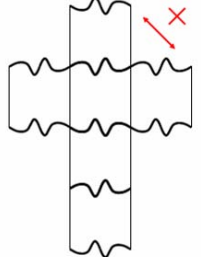

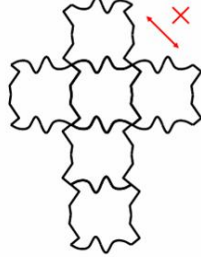

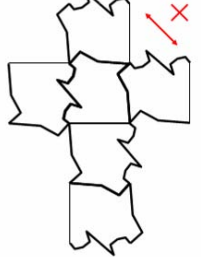

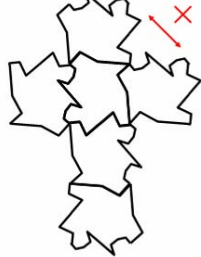
接下來我探討 47 種正方形磁磚設計方法中，哪些可以在正六面體上密鋪。(無法密鋪的部分，將在無法接合的邊做記號表示)


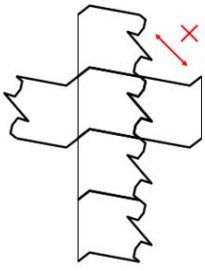

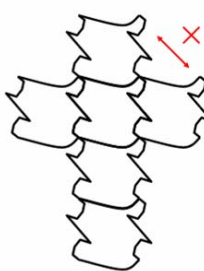

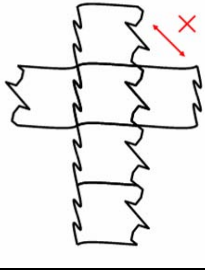

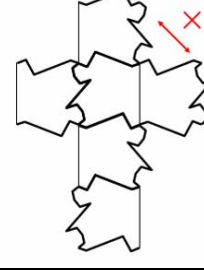

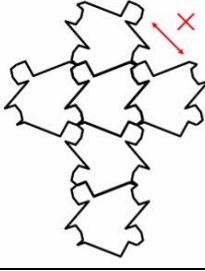

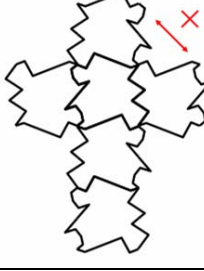

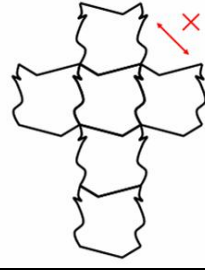
磁磚例圖	正方體展開圖	磁磚例圖	正方體展開圖
 <p>[I, I, I, I]</p>		 <p>[I, I, C, C]</p>	
 <p>[C, C, C, C]</p>		 <p>[C', C', C'', C'']</p>	



			
[ I, I, C <sub>m(e)</sub> , C <sub>m(e)</sub> ]		[ I, I, C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> ]	
			
[ C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> ]		[ I, I, G <sub>4</sub> , G <sub>4</sub> ]	
			
[ C, C, C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> ]		[ C, C, G <sub>4</sub> , G <sub>4</sub> ]	
			
[ C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> , G <sub>4</sub> , G <sub>4</sub> ]		[ I, C, C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> ]	
			
[ C', C'', C <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> ]		[ I, I, I, C ]	
			
[ I, I, C', C'' ]		[ I, C, I, C ]	

 <p>[I, C', I, C'']</p>		 <p>[I, C, C, C]</p>	
 <p>[I, C', C', C'']</p>		 <p>[I, C', C'', C''']</p>	
 <p>[C', C', C', C'']</p>		 <p>[C', C'', C', C'']</p>	
 <p>[C', C'', C', C''']</p>		 <p>[C', C', C'', C''']</p>	
 <p>[C', C'', C'', C''']</p>		 <p>[C<sub>m(v)</sub>, C<sub>m(v)</sub>, C<sub>m(v)</sub>, C<sub>m(v)</sub>]</p>	
 <p>[C'<sub>m(v)</sub>, C'<sub>m(v)</sub>, C''<sub>m(v)</sub>, C''<sub>m(v)</sub>]</p>		 <p>[C'<sub>4</sub>, C'<sub>4</sub>, C''<sub>4</sub>, C''<sub>4</sub>]</p>	

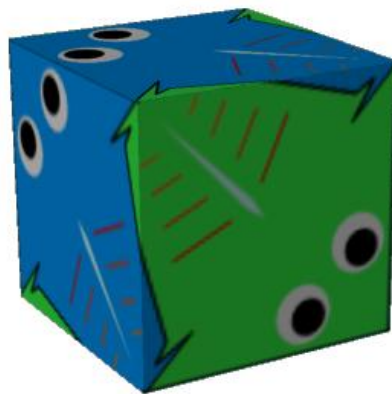
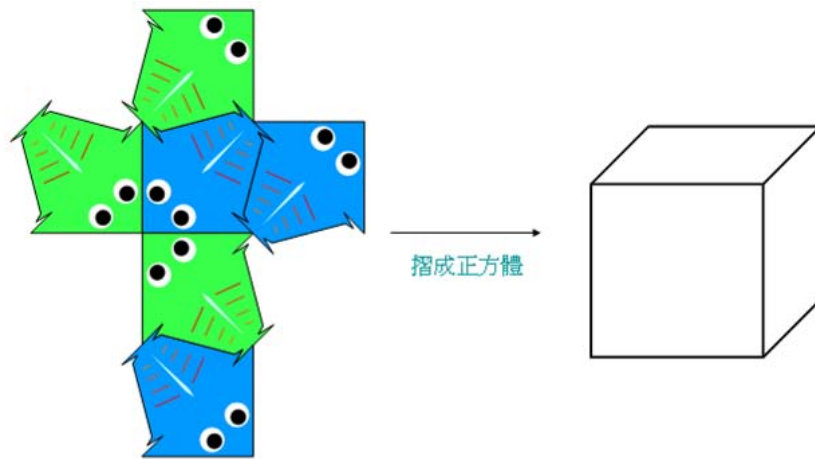
 <p>[ G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]</p>		 <p>[ G'<sub>4</sub>, G'<sub>4</sub>, G''<sub>4</sub>, G''<sub>4</sub> ]</p>	
 <p>[ I, T, I, T ]</p>		 <p>[ T, T, T, T ]</p>	
 <p>[ T', T'', T', T'' ]</p>		 <p>[ I, G, I, G ]</p>	
 <p>[ G, G, G, G ]</p>		 <p>[ G', G'', G', G'' ]</p>	
 <p>[ I, C<sub>m(e)</sub>, I, C<sub>m(e)</sub> ]</p>		 <p>[ C<sub>m(e)</sub>, T<sub>m</sub>, C<sub>m(e)</sub>, T<sub>m</sub> ]</p>	
 <p>[ I, C, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]</p>		 <p>[ C', C'', G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]</p>	

 <p>[I, T, C, T]</p>		 <p>[C, T, C, T]</p>	
 <p>[C', T, C'', T]</p>		 <p>[I, G, C, G]</p>	
 <p>[C, G, C, G]</p>		 <p>[C', G, C'', G]</p>	
 <p>[T, G, T, G]</p>			

從上面的表格討論，可以知道：在 47 種設計方法中，共 13 種設計方法可以密鋪成一個正立方體，分別是 [I, I, I, I]、[I, I, C, C]、[C, C, C, C]、[C', C', C'', C'']、[I, I, C<sub>m(e)</sub>, C<sub>m(e)</sub>]、[I, I, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>]、[C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>]、[I, I, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>]、[C, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>]、[C, C, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>]、[C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>]、[I, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>]、[C', C'', C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>]。值得一提的是，原本不能密鋪在平面上的 [C', C'', C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>]、[I, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>] 及 [C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>]，卻可以在正六面體上密鋪。

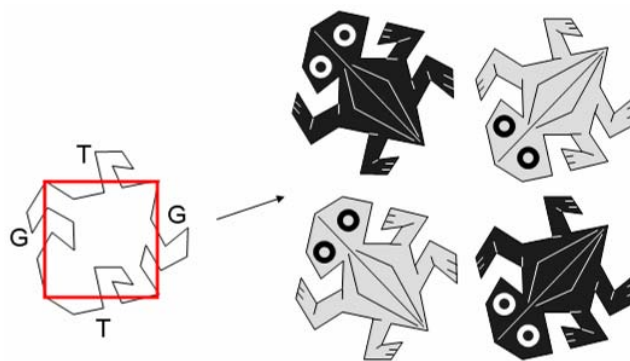
**結論三：在 47 種設計方法中，共 13 種設計方法可以在正六面體上密鋪。**

我進一步利用以上的結論，配合自製仿動物磁磚製圖方法，製做一可密鋪於正六面體實例，如下圖所示。



我再進一步去分析 47 種設計方法在其他立體圖形上密鋪的情形，發現可將每一種磁磚經旋轉或鏡射的方式密鋪成環面(Torus)、圓柱曲面(Cylinders)及著名的莫比紙圈(Mobius Strip)，若能密鋪成一條紙帶，經過適當的裁切，即可判定此磁磚可密鋪且摺成其立體圖形。進一步透過 3D 繪圖程式 Rhinoceros 4，繪製出各種立體圖形，其步驟如下：

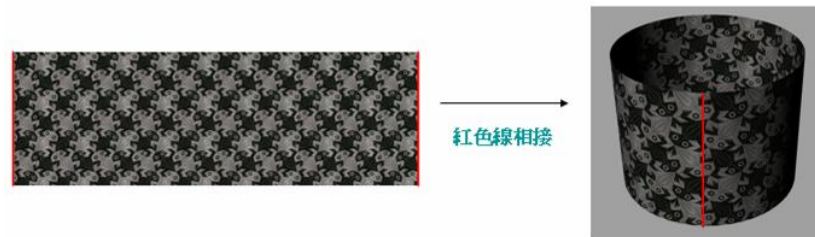
### 1. 找一個適當的四邊型磁磚



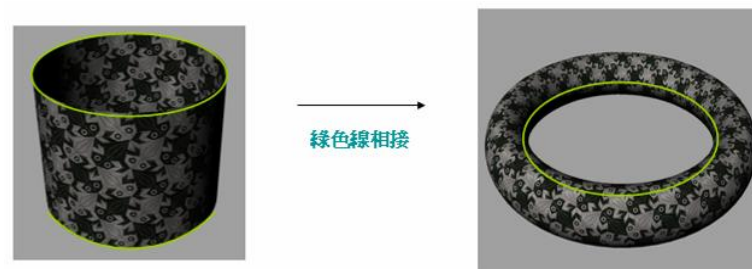
## 2. 密鋪成一條紙帶



## 3. 依以下步驟捲成環狀紙帶

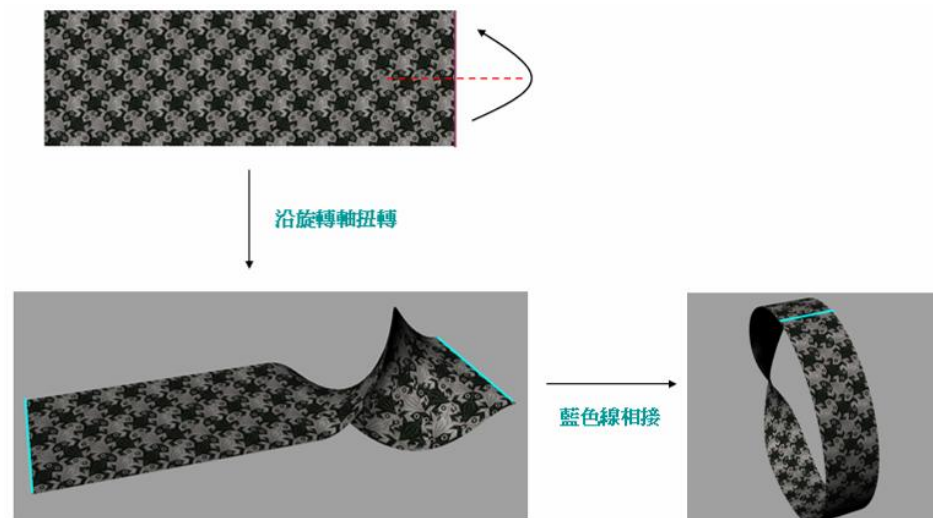


## 4. 依以下步驟捲成圓柱曲面



繪製 3D 立體圖時發現，所有設計方法中只要是能在同一平面完全密鋪的，換句話說，只要是在密鋪過程出現規律週期而使此磁磚能無限制地延伸下去，代表其可以密鋪在環面和圓柱曲面上，並且接縫處的作用邊不會相交。

## 5. 依以下步驟捲成莫比紙圈



而在密鋪成莫比紙圈時，因 3D 繪圖程式在編輯圖層時，程式會自動將一條紙帶的正反兩面編輯成上下相反的圖形，所以當做出「扭轉」的指令後，看似扭轉，實際上紙帶邊緣的作用邊與未扭轉時的圖形相同，最後捲成莫比紙圈後，基本上結構會與捲成環面、圓柱曲面時的結構一樣，都是只要磁磚密鋪在平面上時能出現規律週期，就可以密鋪在環面、圓柱曲面及莫比紙圈上。

結論四：在 47 種設計方法中，共 44 種設計方法可以密鋪成環面、圓柱曲面及莫比紙圈。而剩餘的三種則無法密鋪，分別為[  $C'$ ,  $C''$ ,  $C_4$ ,  $C_4$  ]、[  $I$ ,  $C$ ,  $C_4$ ,  $C_4$  ]及[  $C_4$ ,  $C_4$ ,  $G_4$ ,  $G_4$  ]。

若將本研究的結果，運用創意將可廣泛的應用在日常生活中的小物件上。如：保溫杯、馬克杯、泳圈、包裝禮盒以及相關的建築設計等。

1. 將「環面」應用於可恣意更換樣式的保溫杯上



圖片來源（參考文獻[6]）

2. 將「環面」和「莫比紙圈」應用於馬克杯的外杯壁及把手上(見下圖一)

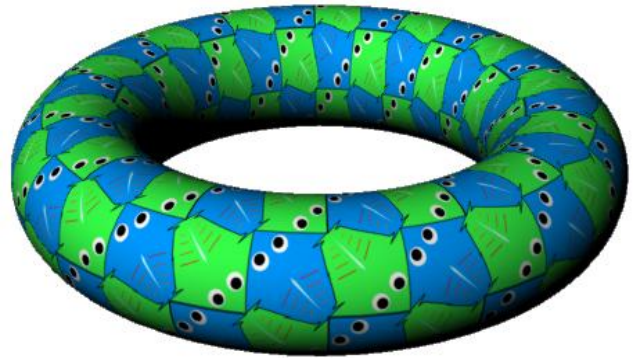


圖片來源（參考文獻[7]）

3. 將「圓柱曲面」應用於游泳圈上( 見下圖二 )

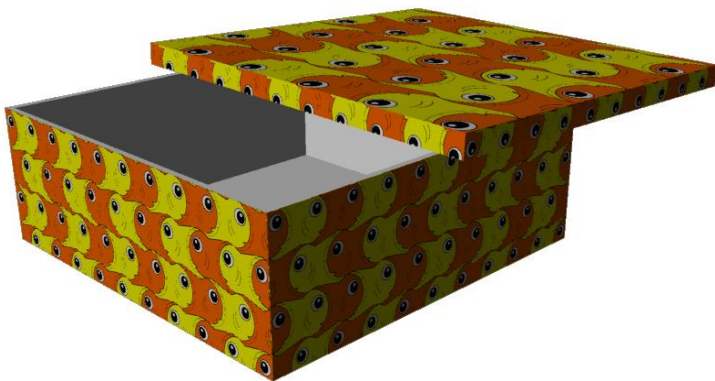


( 圖一 )

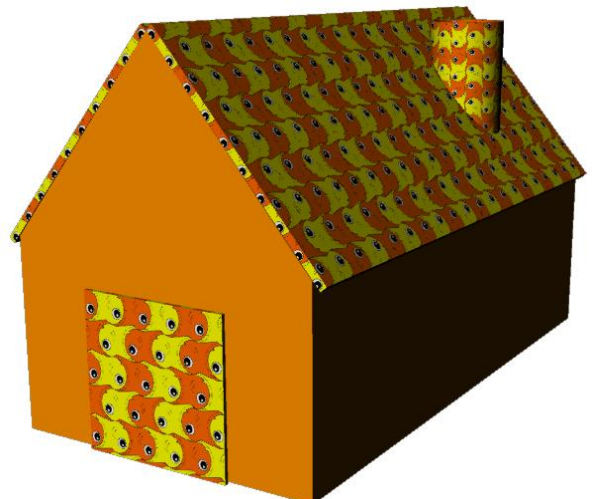
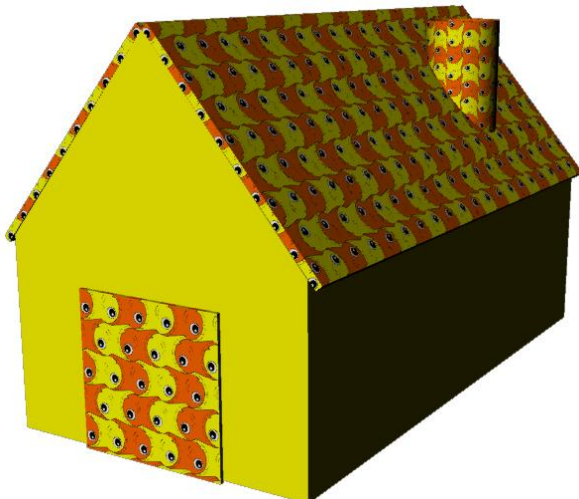


( 圖二 )

4. 應用於包裝禮盒上



5. 應用於建築設計上





## 伍、 結論：

- 一、研究發現正方形磁磚邊的作用方式共有 9 種，分別為 I、C、C<sub>4</sub>、G<sub>4</sub>、T、G、C<sub>m(e)</sub>、C<sub>m(v)</sub>、T<sub>m</sub>。
- 二、利用窮舉的方式探討出可密鋪的設計方法共有 47 種。
- 三、在 47 種設計方法中，共 44 種設計方法可以無限密鋪，而剩餘的三種則無法密鋪，分別為 [ C', C'', C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ I, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ] 及 [ C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]。
- 四、Escher 網站所提供的各種磁磚中，只用到了 6 種四邊形磁磚的設計方法，分別是 [ C', T, C'', T ]、[ C<sub>4</sub>', C<sub>p</sub>', C<sub>4</sub>'', C<sub>4</sub>'' ]、[ G, G, G, G ]、[ T, T, T, T ]、[ T', T'', T', T'' ]、[ T, G, T, G ]、[ C', C'', C''', C'''' ]。但研究出來卻達四十四種之多（可密鋪的作用方式），有將近七分之六的結構尚未被 Escher 使用到。
- 五、在 47 種設計方法中，共 13 種設計方法可以在正六面體上密鋪，分別是 [ I, I, I, I ]、[ I, I, C, C ]、[ C, C, C, C ]、[ C', C', C'', C'' ]、[ C, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ I, I, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ I, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ C', C'', C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ I, I, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]、[ C, C, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]、[ C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ] 和 [ I, I, C<sub>m(v)</sub>, C<sub>m(v)</sub> ]。
- 六、在 47 種設計方法中，共 44 種設計方法可以密鋪成環面、圓柱曲面及莫比紙圈，而剩餘的三種則無法密鋪，分別為 [ C', C'', C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ]、[ I, C, C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> ] 及 [ C<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, G<sub>4</sub> ]。
- 七、本研所得結果，應當可應用於保溫瓶、馬克杯、游泳圈、包裝禮盒、正六面體及相關建築設計與美術製圖...等。

## 陸、 未來展望：

- 一、依據研究的理論，希望在未來可以與藝術創作領域相結合，製作出更多種不同造型變化的美麗動物圖形。
- 二、本研究結果，希望未來可以被更廣泛的應用於日常生活中。

## 柒、 參考資料來源：

- [1] Crowe, D. W., Symmetries of Culture, BRIDGES, Volume 3, No. 2, 2001.
- [2] The Official M.C.Escher Website, by The M.C. Escher Company B.V., from <http://www.mcescher.com>
- [3] 塞伊德·蔣·阿巴斯(Syed Jan Abas), 阿默·夏克爾·薩爾曼(Amer Shaker Salman)著, 伊斯蘭的幾何藝術, 廖純中譯, 左岸文化, 台北, 2004。
- [4] 張佐安、史謹誌、胡晉傑 (民96), 繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究, 新竹市光華國中, 第47屆全國中小學科展作品。
- [5] 張瑜軒 (民91), 群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成研究-以多媒體創作為例, 中原大學商業設計學系碩士學位論文, 台中市。
- [6] 圖片來源：禮品網站, 取自：<http://www.youzgift.com/index.shtml>
- [7] 圖片來源：Yahoo! 奇摩拍賣網站, 取自：<http://tw.bid.yahoo.com/>

## 【評語】 030825

- 1.對於四邊形，列舉所有作用組合情形，顯見作者極具細心與耐心。
- 2.研究成果對於磁磚的設計具有實用性。
- 3.若能用數學證明，則理論將更具完整性。