

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 地球科學科

第二名

030503

天地之間—測量地球的半徑

學校名稱：彰化縣立大同國民中學

作者： 國二 歐耘秀 國二 賴品菁 國一 黃裕紘	指導老師： 林哲正
---	------------------

關鍵詞：地球半徑、太陽仰角、凸透鏡聚光

天地之間－測量地球的半徑

摘要

根據第 48 屆全國中小學科學展覽作品：「做一個能輕易測得地球半徑的人－利用太陽光求地球半徑」研究，他們利用影子來測量同一經度南北兩地的太陽仰角，求得地球半徑。我們認為該團隊記錄時，因陽光形成的半影、選擇中央氣象局測候站公布太陽過中天時間為據、測量日期選在一月下旬，這三點令我們懷疑其報告可以求出極接近實際值的真實性。我們改進前人研究的缺點，利用水晶球 360° 聚焦太陽光的性質，自製一個不受風及半影影響的「太陽仰角記錄器」，並選定同一經度太陽過中天時間相同的「冬至」及「夏至」兩天測量，以所在經度換算測量時間，並輔以當天太陽過中天時太陽方位角 180° 正南、0° 正北方校正，測量出地球半徑為 6457.8947km 及 6336.0477 公里，誤差值 1.25% 及 0.66%。

壹、研究動機

根據第 48 屆中小學科學展覽，國中組地球科學科的研究：「做一個輕易測得地球半徑的人－利用太陽光求地球半徑」作品中，在同一時間、同一經度南北兩地太陽過子午線時，利用竿影測量並求出太陽的高度角，輔以 GPS 定位兩地距離，算出地球的半徑，用簡單的設備算出地球的半徑，讓我們覺得非常不可思議，同時我們注意到，該實驗因太陽光源形成的半影現象，使實際利用影子測量太陽高度角時，因半影現象而出現測量誤差；而且該團隊選定地點並非與中央氣象局測候站處於同一經度，兩地測候站太陽過中天時間也不同，因此不能依據測候站所公布的時間進行測量；且該團隊測量日期選在一月下旬，當天同經度南北兩地太陽過中天時間不同。針對這些缺點，我們想改良測量設備及測量的時間，希望得到更精準的地球半徑。

貳、研究目的

在同一時間、同一經度南北兩地太陽過子午線時，改良他人利用日影測量太陽仰角的缺點，利用自製「太陽仰角記錄器」測量太陽仰角，求出兩地緯度差，換算出地球半徑。

參、研究器材

器材：自製「太陽仰角記錄器」：木料、壓克力板、水晶球、透明半球殼、六角螺絲、快乾膠 (圖 3-1、3-2)、水平校正器、指北針、簽字筆



圖 3-1、自製仰角記錄器



圖 3-2、太陽仰角記錄器成品

肆、研究過程

一、文獻探討

地球的大小最早是在西元前 250 年由古埃及亞歷山大城圖書館館長艾拉托色尼測量的。當時，艾拉托色尼在亞歷山大城和塞恩城(現在稱阿斯旺城)之間發現了一個有趣的現象：夏至(6 月 21 日左右)的正午，陽光垂直地照耀在塞恩城人的頭頂上，能夠射到井底，豎直插在地上的旗杆沒有影子落在地面上。而就在這一天，塞恩城南面亞歷山大城的旗杆則在陽光照耀下於地面上留下一條長長的影子。仔細測量得出，亞歷山大城的太陽影子同旗杆的交角大約為 7 度。因為繞地球一圈是 360 度，所以這個角度對應於地面的“弧長”相當於地球周長的 $7/360$ ，近似等於 $1/60$ 。而艾拉托色尼從來往的商賈口中得知，亞歷山大城到塞恩城的距離是 5000 希臘里。因此艾拉托色尼得出，地球周長是 5000×50 希臘里，相當於 39600 公里，他算出地球直徑為 12800 公里。這個數值非常精確，同現在使用的地球赤道直徑數值 12756 公里相差很小。但是，這個數值比當時人們所知道的所有陸地和海洋的寬度都大幾百倍，所以艾拉托色尼不敢相信自己的測量。

根據第48屆全國中小學科學展覽作品：「做一個能輕易測得地球半徑的人—利用太陽光求地球半徑」研究得知，該團隊使用Google® earth 軟體找出相同經度、不同緯度的兩地：竹南附近及鵝鑾鼻，墾丁及草屯雙冬來當作測量地點(圖4-1)。利用日正當中時(中央氣象局測候站公布太陽過中天時間)在兩地同時進行標記與測量太陽高度角(圖4-2)，獲得兩地太陽仰角角度差。經由公式測得地球平均半徑為6367.9公里。



圖4-1、利用Google® earth 軟體找出測量地點

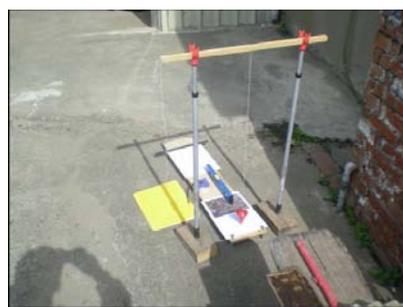


圖4-2、利用影長測量太陽角度

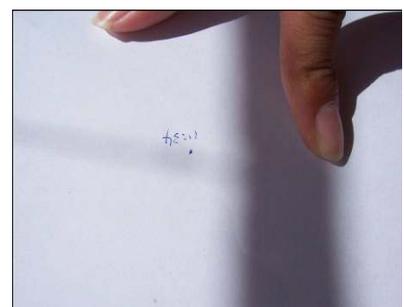


圖4-3、測量器具產生半影，無法精確定點

該團隊使用的方法極具創意，測量出來的地球半徑也接近實際值，但該團隊使用的方法有一些缺點：

- (一) 測量器具易受風吹影響，增加判讀困難，加上該團隊測量地點在墾丁，測量時期受落山風影響甚鉅。且太陽光照射測量器具，產生的影子含有半影(圖 4-3)，因此進行測量時，無法精確記錄日影的中點，會產生誤差。
- (二) 該團隊依照中央氣象局各測候站發布太陽過中天的時間，做為測量基準時間，但是參考的測候站和測量地點並不是處於同一經度，太陽過中天的時間也不相同，因此同一經度南北兩地點進行測量時，不可以使用中央氣象局測候站所公布的時間。
- (三) 因地球自轉軸傾斜及公轉關係，在地球公轉週期中，只有夏至與冬至兩天，太陽正午時同時照射同一經度南北兩處。該團隊測量時間為 1 月下旬，該日正午時太陽照射同一經度南北兩處的時間必然不同(圖 4-15)。

由以上三點可以推知該項實驗誤差值應極大，但該團隊所測出的數值卻極為接近地球實際的半徑，我們不禁懷疑該項作品的真實性，於是我們進行了實驗的改良，以期找出答案。

二、測量原理

如圖 4-4 所示，在地球上，南北 A、B 兩地位於相同經線，不同緯度，在同一天太陽過子午線的同時刻，設法精確測出 A、B 兩地太陽的仰角 θ_1 及 θ_2 ，可以求出兩地緯度差 $\Delta\theta$ ，若知道 A、B 兩地的距離，則可求出地球的半徑：

因為：
$$2\pi R \times \frac{\Delta\theta}{360^\circ} = \overline{AB} \quad R : \text{地球半徑 (單位: km)}$$

所以：
$$R = \frac{\overline{AB}}{2\pi} \times \frac{360^\circ}{\Delta\theta} \quad \overline{AB} : A、B \text{ 兩地距離 (單位: km)}$$

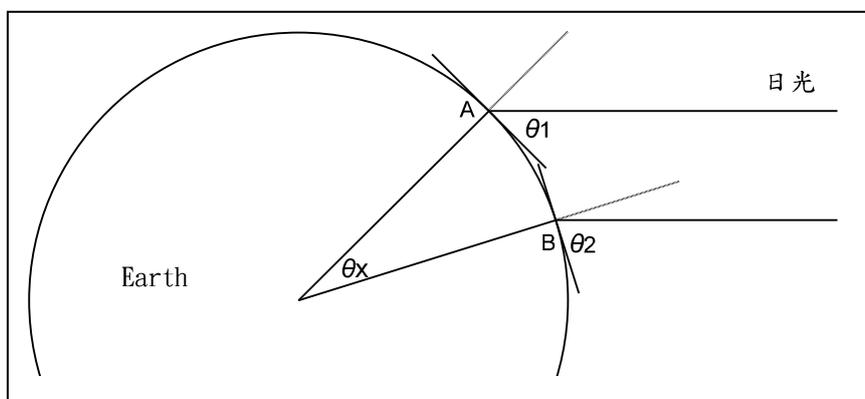


圖 4-4、利用兩地太陽仰角測量地球半徑的原理示意圖

三、研究方法

(一) 測量方法的改進

為了改善利用竿影法測量太陽仰角時，儀器因風吹以及影子產生半影現象的缺點，我們進行思考：什麼儀器不受風吹影響？如果器具會產生半影，如何不利用日影測量太陽仰角呢？我們嘗試利用光線聚焦的性質進行實驗設計。光線的直進性不受風吹的影響，但是凸透鏡的角度需要時時改變，才能使不同時刻的太陽光聚集成一個焦點。因此，我們改採**球狀水晶球**，無論太陽在天空中何處，均可產生清晰焦點(圖 4-5)。

1. 第一代儀器

我們先利用陽光測出水晶球的**焦距**，並找出適當的透明半圓球殼作為焦點投影屏幕(圖 4-6)，接下來將此半圓球殼黏在壓克力板下，並且設計一個可以調整水平的木架(圖 4-7)。使用自製的「太陽仰角記錄器」時，首先調整觀測器下方四根可旋轉的六角螺絲，以水平校準儀使檯面與地面平行(圖 4-8)，並且以指北針校正平台，使平台朝向正南北方(圖 4-9)，此時在壓克力板下方透明球殼上可以清楚的見到太陽因折射而聚集成一個小亮點(圖 4-10)，經過測試後，此儀器不受風吹影響，而且因太陽聚集成一個光點，不會有半影產生的測量誤差。

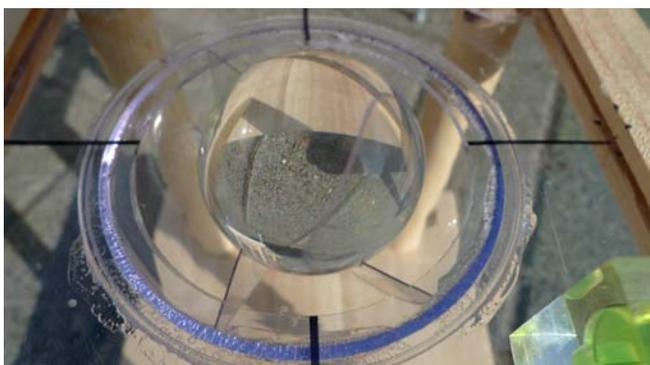


圖 4-5、聚焦太陽光的水晶球



圖 4-6、從相框取下的半圓球殼



圖 4-7、可調整水平之木架平台

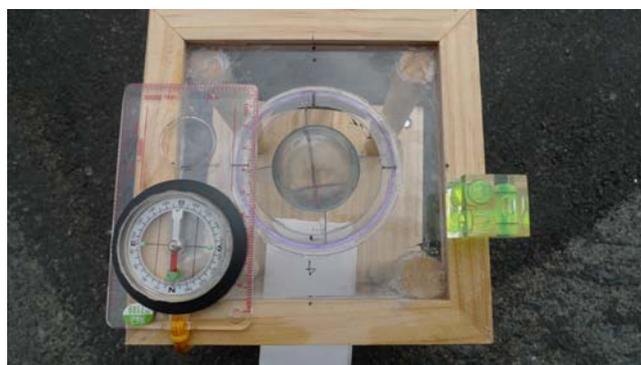


圖 4-8、水平校正儀校正水平



圖 4-9、指北針校正方位

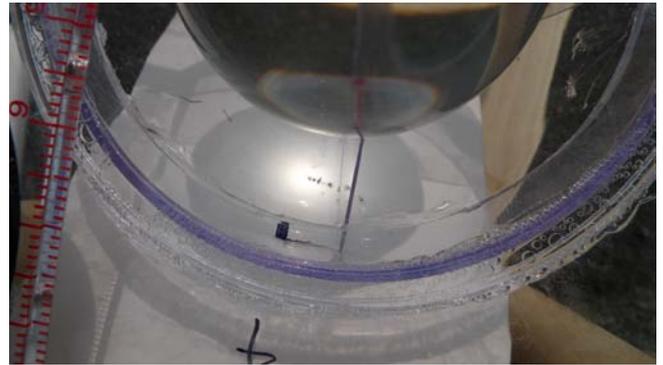


圖 4-10、太陽聚焦在球殼上

2. 第二代儀器

在五月底區域複賽中，評審教授對我們的測量儀器十分感興趣，但也對我們的儀器有些批評與建議。教授認為我們可以把當屏幕的半圓球殼加大，增加精準度。但是我們發現，當球殼加大時，水晶球也必須跟著加大，球殼加大比較容易達成，但卻無法找到適當大小的水晶球。因此，採用另外一種方式，不加大球殼，但增加其精準度，因為我們自製的第一代儀器，使用的球殼與水晶球之間的焦距並不是很準確，所以我們繪製一張太陽仰角記錄器的設計圖(圖 4-11)，請專人利用開模的方式重新製作半圓球殼(圖 4-12)，並將模具固定在可調整水平的木架上(圖 4-13)，如此一來，焦距就會非常精準。

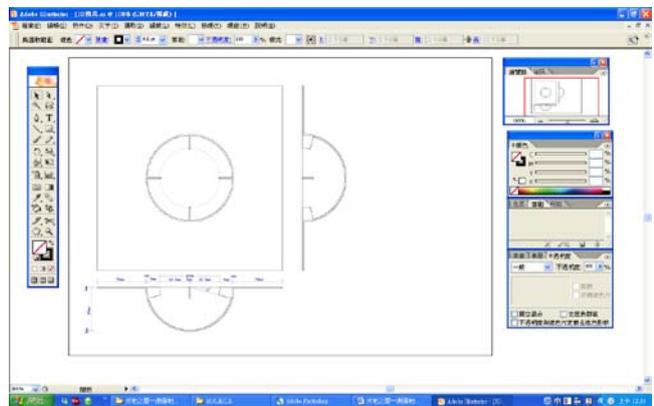
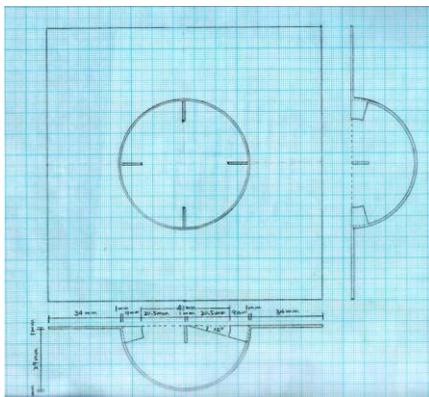


圖 4-11、太陽繪製仰角記錄器所需平台及球殼屏幕三視圖，並以電腦軟體完稿



圖 4-12、重新設計製作的半圓球殼屏幕



圖 4-13、第二代「太陽仰角記錄器」

(二) 太陽仰角記錄器的構造及原理

如圖 4-14 所示，太陽光照射到水晶球後，經過水晶球的折射會形成一個焦點落在記錄用的透明球殼上(圖 4-15、4-16)，這個焦點與儀器平台所夾的角度 θ_2 ，等於測量當時太陽的仰角 θ_1 ，實際測量記錄時可以簽字筆直接在球殼上點出焦點位置，再經過外嵌式的量角器讀出太陽仰角。

圖 4-14 為本團隊自製「太陽仰角記錄器」側面示意圖及原理

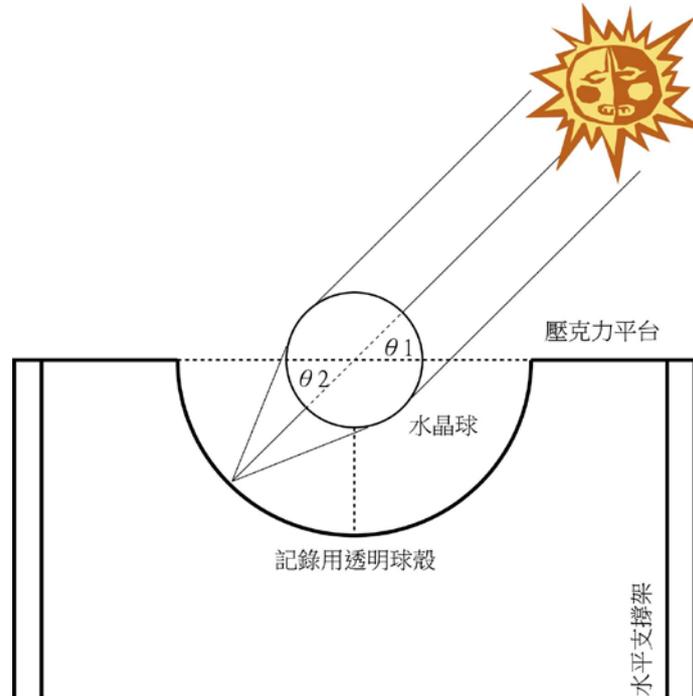


圖 4-15、陽光經水晶球聚焦成一個小亮點



圖 4-16、陽光經水晶球聚焦成一個小亮點

(三) 測量後的角度計算

為了精準讀出記錄器上焦點的角度，我們使用了 Adobe® Illustrator 軟體繪製解析度為 0.2° 的量角器(圖 4-17)，以投影片印製，再經過割圓刀切出球殼大小的圓洞，外嵌在記錄用的球殼上，讀出太陽的仰角。區域複賽後，依照教授的意見，重新繪製解析度為 0.1° 的量角器(圖 4-18)，提升實驗的精密度。

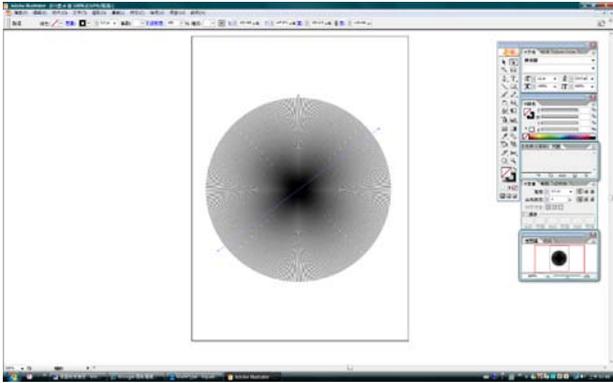


圖 4-17、以 Adobe® Illustrator 軟體繪製解析度為 0.2° 的量角器



圖 4-18、以投影片上解析度為 0.2° 的量角器測量球殼上記錄的角度

(四) 時間的選定

選定測量時間時，兩地太陽通過中天(子午線)的時間必須一致，測量才可以比較精準。可以參考中央氣象局各地太陽過子午線的時間，得到測量時間的基準，但中央氣象局測候站地點未必與測量地點相同，公布太陽過中天時間也與測量地點不同，如圖 4-19 所示，若本實驗選定 A、B 兩地點在同一經度之上，但中央氣象局測站僅有 A'與 B 兩地太陽過中天資料，A'與 B 兩地太陽過中天的時間必定不同。但是本實驗 A、B 兩地必須在同一經度上才有意義，這樣太陽過中天的時間才會一致。

為了使選定的 A、B 兩地點，在同一天太陽過子午線的時間相同，我們考慮了地球自轉軸傾斜，並且繞太陽公轉的規律，我們知道太陽公轉一周時，只有「夏至」與「冬至」兩天在同一經度上的南北 A、B 兩地，太陽過中天的時間是一樣的。使用我們團隊設計的「太陽仰角記錄器」，可以使太陽照射所形成的光點落在記錄半圓球殼上正南北向的同一經度上。如果不是在這兩天觀測，會因為地球自轉軸傾斜的關係，使同一經度的 A、B 南北兩地，中午時太陽過中天的時間會不一樣，陽光形成的光點不會落在記錄球殼同經度南北方向。如圖 4-20 中，10 月某日 A'、B'兩地太陽過中天的時刻相同(橘色面)，但因自轉軸傾斜，A'、B'兩地卻不在同一經度南北方向上，只有 A、B 兩地才是在地球的另一經度上。

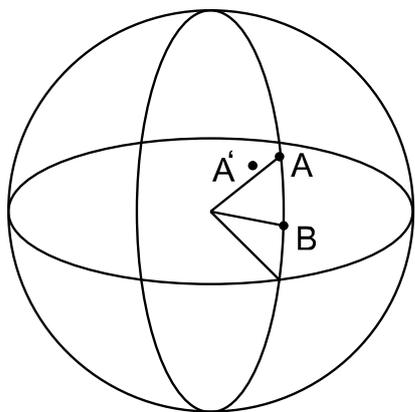


圖 4-19、同經度南北兩地太陽過子午線時間相同

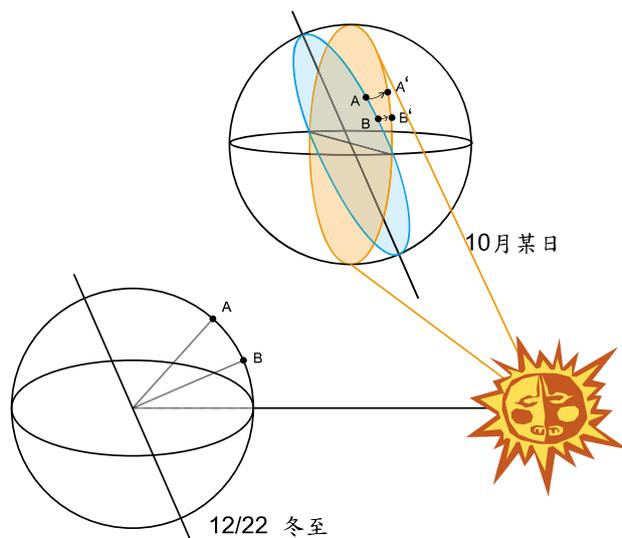


圖 4-20、非冬至、夏至兩天，同經度南北兩地，太陽通過子午線時間不同

因此，我們選擇了「冬至」這天進行測量。當天同一經度南北 A、B 兩地，太陽過中天的時間相同，而且過中天時，太陽位於天頂偏正南方，除了測量時間可以同步外，更可以方位作為校正依據。經由複賽評審教授給我們的建議中，因為我們只在冬至這一天測量，數據不多，算出來的數值當然也不會很精準。所以我們又選在「夏至」這天測量，相同的，因為台灣時區的關係，故當天太陽過中天時間大約在 AM11:57 左右。

(五) 時區的換算

台灣時區位於 120°E ~ 135°E，但是測量地點位於 120°43'53"E，並沒有剛好在 120°E 時區線上，經由時區的換算算出冬、夏至時，正確的過中天時間應該是要比 AM12:00 提早三分鐘測量(如下換算)，2009 年 12 月 21 日測量當天自 AM11:32 起至 PM12:32 止，每隔五分鐘測量記錄一次。即使不知道太陽過中天的確切時間，在記錄時，位於正南方天空的太陽形成的光點就是我們要測量的時間。此種作法可以校正中央氣象局提供的觀測地點與我們觀測地點有差異所造成的誤差。2010 年 6 月 21 日當天我們自 AM11:45 起至 PM12:15 止，每隔三分鐘記錄一次。如此一來便能增加更多的數據，使我們算出來的數值更加接近實際值。

換算的算式：因為一天的標準時間為 23 小時又 56 分，所以，

$$(23 \times 60 + 56) \text{ min.} \times \frac{\left(\frac{43}{60}\right)^\circ}{360^\circ} = 2.917 \text{ min. (大約等於 3 min.)}，\text{也就是 } 12:00 - 3 \text{ min.} = 11:57$$

(六) 地點的選定

選定南北 A、B 兩地觀測地點考量如下：

1. 兩地點必須是位於同一經度之上。
2. 兩地點必須安全且空曠無遮蔽物。
3. 兩地點至少有一點接近中央氣象局公布資料的地點附近，此地太陽過中天時間可以參考中央氣象局資料。

綜合以上需求，我們使用 Google® earth 軟體搜尋台灣本島同一經度的南北兩地點；恆春半島恆春鎮附近水泉國小前為 B 點(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E)，苗栗縣後龍鎮中和國小附近為 A 點(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E) (圖 4-13)，兩地相距 293.05 公里。

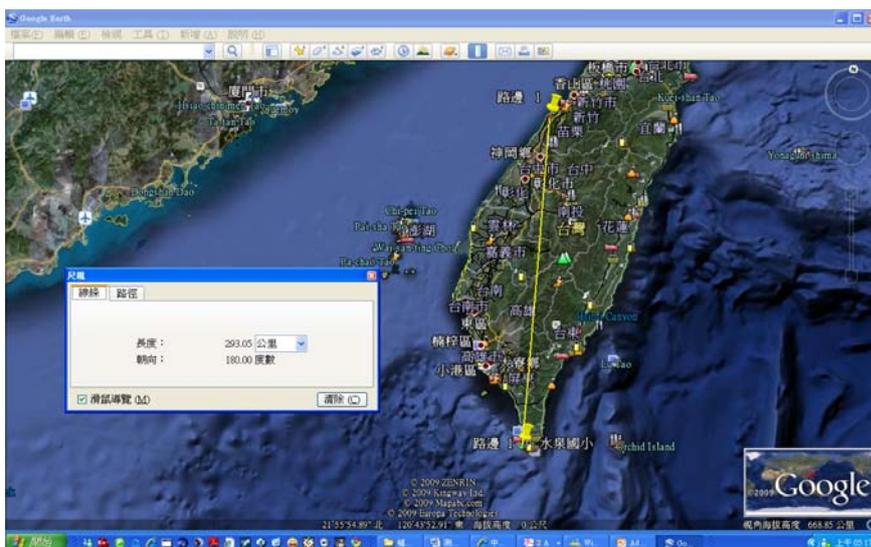


圖 4-13、利用 Google® earth 軟體找出位於同一經度，南北 A、B 兩地

伍、研究結果

一、2009年12月21日(冬至)實際測量結果

2009年12月21日，我們分成兩組，一組在苗栗縣後龍鎮中和國小附近(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E) (圖 5-1)，另一組到墾丁水泉國小前(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E) (圖 5-2)，自 AM11:32 起至 PM12:32 止，每隔五分鐘以自製「太陽仰角記錄器」測量紀錄，回學校後轉換太陽的仰角及方位角，結果如表 5-1 所示：

表 5-1、2009年12月21日，AM11:32~PM12:32，A 地(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E)、B 地(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E)記錄器上記錄讀出之太陽仰角、方位角記錄：

	A 地(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E)		B 地(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E)	
	方位角(°)	仰角(°)	方位角(°)	仰角(°)
11:32	—	—	—	—
11:37	—	—	—	—
11:42	—	—	174	42.0
11:47	176	44.8	176	42.2
11:52	178	45.0	178	42.4
11:57	180	45.2	180	42.6
12:02	182	45.0	182	42.4
12:07	184	44.8	184	42.4
12:12	—	—	—	—
12:17	—	—	—	—
12:22	190	44.2	—	—
12:27	192	43.8	192	41.4
12:32	—	—	194	41.0

※「—」：太陽因雲遮蔽，無法清楚記錄



圖 5-1、2009年12月21日，苗栗縣後龍鎮中和國小附近 24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E



圖 5-2、2009年12月21日，墾丁水泉國小前 21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E

根據表 5-1 結果，在 AM11：57 時，兩地的太陽仰角最大，且方位角皆為 180° 正南方，因此，兩地太陽仰角差為 45.2°-42.6°=2.6°，依據公式：

$$R = \frac{\overline{AB}}{2\pi} \times \frac{360^\circ}{\Delta\theta}$$

求得：

$$R = \frac{293.05}{2 \times 3.141593} \times \frac{360^\circ}{2.6^\circ} = 6457.8947 \text{ km}$$

與實際值相差：

$$\frac{6457.8947 - 6378.16}{6378.16} \times 100\% = 1.25\%$$

二、2010 年 6 月 21 日(夏至)實際測量結果

2010 年 6 月 21 日，我們分成兩組，一組在苗栗縣後龍鎮中和國小附近(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E) (圖 5-3)，另一組到墾丁水泉國小前(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E) (圖 5-4)，自 AM11：45 起至 PM12：15 止，每隔三分鐘以自製「太陽仰角記錄器」測量紀錄，回學校後使用提升解析度的量角器，轉換太陽的仰角及方位角，結果如表 5-2 所示：

表 5-2、2010 年 6 月 21 日，AM11：45~PM12：15，A 地(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E)、B 地(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E)記錄器上記錄讀出之太陽仰角、方位角記錄：

	A 地(24°35'14.39"W, 120°43'53.00"E)		B 地(21°56'17.69"W, 120°43'53.00"E)	
	方位角(°)	仰角(°)	方位角(°)	仰角(°)
11：45	177	88.30	—	—
11：48	177.8	88.40	—	—
11：51	178.5	88.45	1.5	88.70
11：54	—	—	0.8	88.75
11：57	180	88.55	0	88.8
12：00	180.8	88.5	359.2	88.75
12：03	—	—	358.5	88.70
12：06	182.3	88.35	357.7	88.65
12：09	183	88.30	357.0	88.60
12：12	183.8	88.20	356.2	88.50
12：15	184.5	88.10	355.5	88.50

※「—」：太陽因雲遮蔽，無法清楚記錄

根據表 5-2 結果，在 AM11：57 時，兩地的太陽仰角最大，A 地方位角為 180° 正南方，B 地方位角 0° 正北方，因此兩地太陽仰角差為 1.2°+1.45°=2.65°，依據公式可以求得地球半徑為 6336.0477 公里，誤差為 0.66%



圖 5-3、2010 年 6 月 21 日，苗栗縣後龍鎮中和國小附近 $24^{\circ}35'14.39''\text{W}, 120^{\circ}43'53.00''\text{E}$



圖 5-4、2010 年 6 月 21 日，墾丁水泉國小前 $21^{\circ}56'17.69''\text{W}, 120^{\circ}43'53.00''\text{E}$

陸、討論

本組研究與第 48 屆團隊作品的優缺點比較，如表 6-1。第 48 屆團隊作品所使用儀器容易受到風的影響而產生晃動，而且產生的影子因陽光產生半影，不容易判讀。該團隊記錄時間以不在同一經度上的測候站為依據，並且選擇一月下旬測量，當天同一經度南北兩地太陽過中天的時間不同。可是該團隊所測得的數據，與實際值僅有 0.16% 的誤差，讓我們感到相當的懷疑。

表 6-1、兩組作品優缺點比較

	第 48 屆團隊作品	本組
使用原理	利用垂直地面細繩產生的影子，依照三角函數表換算太陽仰角	利用水晶球 360° 聚焦太陽光，在記錄球殼上出現太陽光的焦點，再以外嵌式量角器(0.2°)直接讀出太陽仰角，區域複賽後，將量角器解析度提升到 0.1°
記錄誤差	利用影子判讀仰角，會因陽光產生半影現象，無法精確判讀	記錄時須以極細簽字筆標記太陽光形成的焦點，球殼屏幕越小，誤差會越大
記錄儀器	容易受到風的影響而產生晃動	穩定不受風影響
記錄日期	一月下旬，同經度南北兩地，太陽過中天的時間不同	選擇冬至、夏至當天測量，當天同一經度南北兩地太陽過中天的時間相同
記錄時間	參照中央氣象局測候站公布太陽過中天的時間，但測候站並非在同一經度南北方向上，測候站公布的時間與實際測量地點有出入	冬至、夏至當天太陽過中天的時間與台灣所在時區換算後約為 AM11:57，且冬至當天太陽過中天時方位角為 180° 正南方，夏至當天兩地太陽過中天時方位角為 180°、0° 正北方
仰角精密度	0.01°	0.1°
測量結果	6367.9km	6457.8947km(冬至)； 6336.0477 km(夏至)
結果誤差	0.16%	1.25%(冬至) 0.66%(夏至)

我們經討論後推測，該團隊選擇北部氣象測候站公布太陽過中天的時間，做為北部測量地點的依據，測候站位於測量地點的西邊，所以**北部地點會延遲測量**；而南部地點所選用的氣象測候站位於地點的東邊，所以南部地點會提早測量。所以我們推測該團隊日期與時間選定錯誤：北部因選錯依據時間而延遲測量，南部測後站公布時間比實際太陽過中天的時間還早，南北兩處分別因測候站位於的經度不同，產生提前測量及延後測量，而因地球自轉軸傾斜的關係，在冬至過後的一月下旬測量，**北部地點過中天時間比南部地點早**，所以兩處時間

差剛好互相抵銷，反而意外得出誤差更小的結果。

本組自製「太陽仰角記錄器」裝置改善前人研究儀器容易受風力影響，以及記錄時半影判讀的誤差，並選定同一經度太陽過中天時間相同的「冬至」當天測量，佐以當天太陽過中天時太陽方位角為 180°S 來校正，測量出地球半徑為 6457.8947km，與實際值相差 1.25%。區域複賽後，本組改良了測量儀器，並且提升量角器解析度，在「夏至」當天作第二次的測量，求得地球半徑為 6336.0477 公里，誤差為 0.66%。本組儀器與時間選定上皆優於前人研究，但在讀出太陽仰角的精密度上仍有差異，若要再提升精準度，對於球殼上外嵌式的量角器精密度可以再提升。而前人研究中出現科學上的謬誤，卻因雙重誤差相互抵消，只能說是因禍得福。

柒、結論

本組自製「太陽仰角記錄器」裝置改善前人研究儀器容易受風影響及記錄時半影判讀的誤差，並選定同一經度太陽過中天時間相同的「冬至」及「夏至」兩天測量，以所在經度換算測量時間，並輔以當天太陽過中天時太陽方位角 180° 正南、 0° 正北方校正，測量出地球半徑為 6457.8947km 及 6336.0477 公里，誤差值 1.25% 及 0.66%。

捌、參考資料

- 一、康軒文教事業編輯部（民98年）。自然與生活科技教科書第三冊：第四章，康軒文教事業編輯部：台北
- 二、古希臘科學家艾拉托色尼，資料來源：
<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1005022305575>
- 三、張廷安、劉彥辰、吳尚儒（民97年）。做一個能輕易測得地球半徑的人－利用太陽光求地球半徑，第48屆全國中小學科學展覽作品集，科教館：台北

【評語】 030503

優點：

為追求精確度，改良測量儀器與量角器，精神可嘉。

缺點：

沒有注意地球表面弧度（非正球形）與大氣折射效應（冬至影響尤大）

缺兩地間的距離與夾角之球面三角關係