中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030424

圍地盤遊戲的必勝策略

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
國二 劉佩雯 國二 韓杰霖 國二 陳怡君 國二 陳奕達	徐俊男

關鍵詞：窮舉法、線對稱圖形、必勝圖

摘要

圍地盤的遊戲一直是學生時代同學們課餘閒暇時會拿來互相較勁的數學遊戲之一。本次的研究將要去探討 $n\times m$ 地盤先下者或後下者之必勝的策略。為公平起見，則加以規定：當總筆數為偶數時，後下者有利，故規定後下者地盤數需大於先下者地盤數才算勝，否則為先下者勝；當總筆數為奇數時，先下者有利，故規定先下者地盤數需大於後下者地盤數，否則為後下者勝。

首先我們從 3×3 地盤開始，如下圖 1。利用窮舉法研究結果顯示 3×3 地盤後下者的必勝圖共有四種，如圖 2 ～ 圖 5。相反的，先下者的必勝策略則是破壞此 4 個必勝圖。

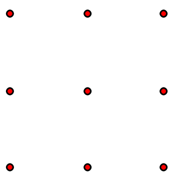


圖 1

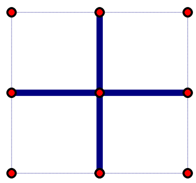


圖 2

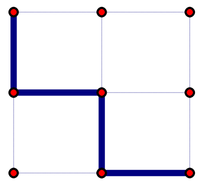


圖 3

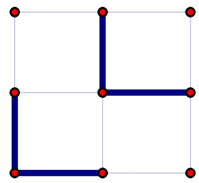


圖 4

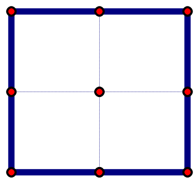
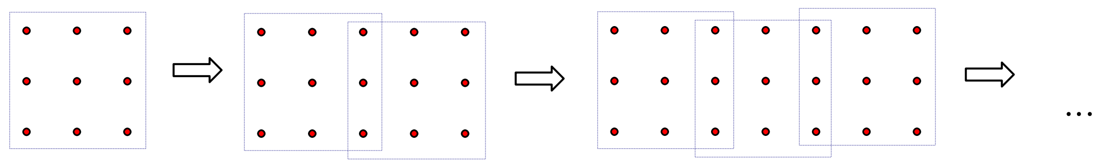
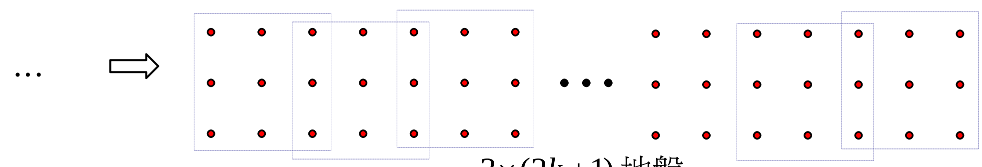


圖 5

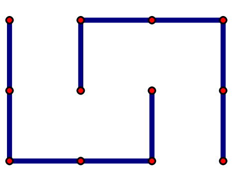
由於 3×3 地盤為偶數型，而 3×4 地盤為奇數型。所以接下來，我們先試者研究偶數型後下者的必勝策略，即是先 3×5 地盤、3×7 地盤、…、$3\times(2k+1)$ 地盤，再推廣至 $5\times(2k+1)$ 地盤、$7\times(2k+1)$ 地盤、$9\times(2k+1)$ 地盤、…、$(2h+1)\times(2k+1)$ 地盤。同理，3×4 地盤、3×6 地盤、3×8 地盤、…、$3\times2n$ 地盤為奇數型，對先下者有利，故探討先下者及後下者的必勝策略。而另外 2×2 地盤、4×4 地盤、6×6 地盤、…、$2n\times2n$ 地盤我們發現有其特殊性，研究的方式我們一樣以不讓地為原則，去探討其先下者及後下者的必勝策略。

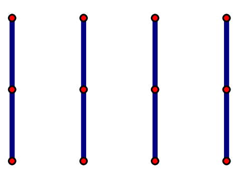
其中偶數型地盤推演的想法如下：

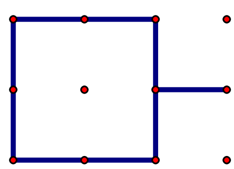

3×3 地盤　3×5 地盤　3×7 地盤

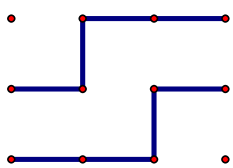

$3\times(2k+1)$ 地盤

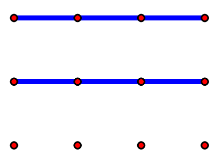
其中奇數型地盤必勝圖則分類分為「連續」型、「三筆畫」型、「封閉」型、「兩筆畫」型及「兩行」型等來作歸納及勝負判斷，舉例例如下：

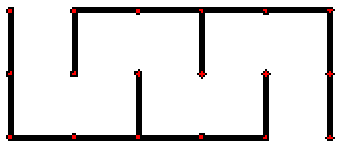

「連續」型


「三筆畫」型

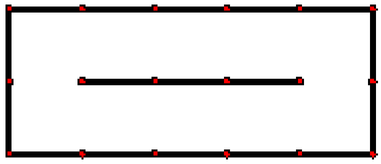

「封閉」型


「兩筆畫」型

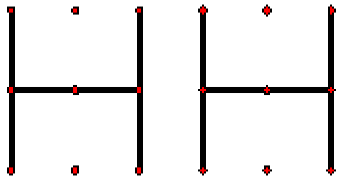

「兩行」型



進出不同型



進出相同型



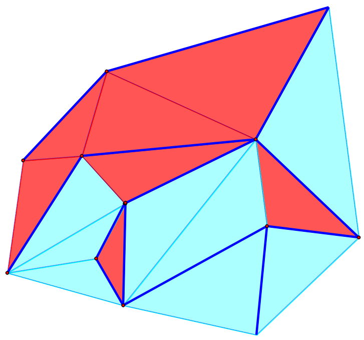
三筆畫結束型

壹、研究動機

記得國一時，班上很流行玩圍地盤的遊戲，圍地盤這個遊戲的玩法簡單、工具又少，只需要有筆和紙，隨時隨地都可以玩。而且我們在國一時正好教到平面座標，所以當時同學們就用方格紙來玩。

因爲這個遊戲的規則非常簡單易懂，隨時都可以玩，而且我們當時覺得這個遊戲只是靠運氣，沒什麼小技巧，只要夠細心，小心別送地給對手，應該就不會輸的太難看。但如今找了幾個同學玩，發現不只是靠運氣，這個遊戲似乎有什麼必勝的圖形，於是我們二話不說，馬上著手研究。

於是我們從網站 - UEPLAY 遊藝館 http://blog.ueplay.com－找到了相關資料。起初此遊戲的玩法是雙方必須先在紙上點幾個點，輪流將點和點之間用線相連。然後最先完成一個三角形的最後一筆者就可以擁有那一塊地，圖形不可有重疊。當遊戲結束時，統計雙方的得地數目，得到最多地的人就是贏家，如右圖，紅：藍＝7：8。，藍方獲勝。



而後此遊戲則進階到較有規律性的玩法，因此我們對此”有規律性圍地盤”遊戲有了好奇的想法，想知道此遊戲是否有其必勝圖，還是只是像我們在國一玩這個遊戲時的想法一樣-靠運氣-呢？也因此我們得到了一個有趣的研究題材。

貳、研究目的

一、探討 3×3 地盤後下者與先下者的必勝技巧，找出 3×3 地盤之必勝策略？

二、探討 3×5 地盤的必勝技巧，找出 3×5 地盤之必勝策略？

三、探討 $3\times(2k+1)$ 地盤的必勝技巧是否可由前者推廣出來？

四、探討 3×4 地盤後下者與先下者的必勝技巧，找出 3×4 地盤之必勝策略？

五、探討 3×6 地盤的必勝技巧，找出 3×6 地盤之必勝策略？

六、探討 $3\times2k$ 地盤的必勝技巧是否可由前者推廣出來？

七、探討 4×4 地盤的必勝技巧，找出 4×4 地盤之必勝策略？

八、探討 6×6 地盤的必勝技巧，找出 6×6 地盤之必勝策略？

九、歸納 2×2 地盤、 4×4 地盤及 6×6 地盤的相關性，探討 $2k\times2k$ 地盤的必勝策略？

參、研究器材

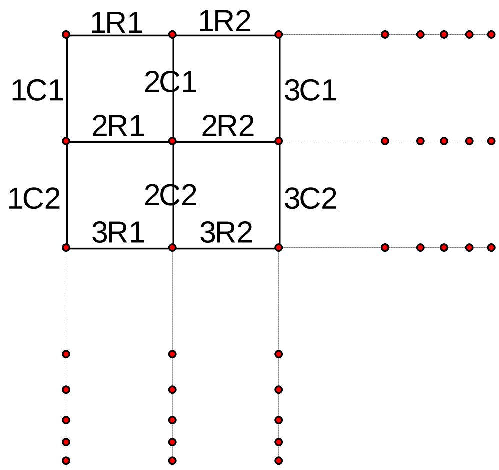
紙、筆、方格紙、小白板及電腦(使用 GSP 軟體繪圖)

肆、研究過程與方法

一、名詞解釋與定義：

(一)定義代號：

爲了方便研究，我們將每一條線都取了代號，以3×3地盤(3 列 row ×3 行 column)爲例，第一列的第 1 條稱爲『1R1』、第一列的第 2 條稱爲『1R2』、第一行的第 1 條稱爲『1C1』、第二行的第 1 條稱爲『2C1』、第三行的第 1 條稱爲『3C1』、…，依此類推。如下圖：



即是第 j 列的第 k 條稱爲『jRk』、第 j 行的第 k 條稱爲『jCk』 ， $j,k\in N$ 。

(二)研究過程中分先下者與後下者。定義在一個$m\times n$地盤中，先下者所圍地盤數以$f_{m\times n}$表示，後下者所圍地盤數則以$b_{m\times n}$表示。

二、定義遊戲規則：

(一)玩法：

圍地盤是一個兩人以上的紙筆遊戲。遊戲前，先用筆在紙上隨意點一些點，然後輪流在點和點之間連線，將連線區域封閉的人就佔有那個區域，可用不同顏色的筆或不同的記號來區別每個區域的擁有者，在此我們以紅色代表先下者所得之地盤，以藍色代表後下者所得之地盤。

(二)勝負判定：

在$m\times n$地盤中，若$m+n$爲偶數，則對後下者有利(必至少可圍一塊)。反之，若$m+n$爲奇數，則對先下者有利。故得勝的條件如下：

1.若$m+n$爲偶數--稱之爲偶數型，則

先下者得勝條件：$f_{m\times n}\ge b_{m\times n}$（即 先下者所圍地盤≥後下者所圍地盤）

後下者得勝條件：$b_{m\times n}>f_{m\times n}$（即 後下者所圍地盤數>先下者所圍地盤數）

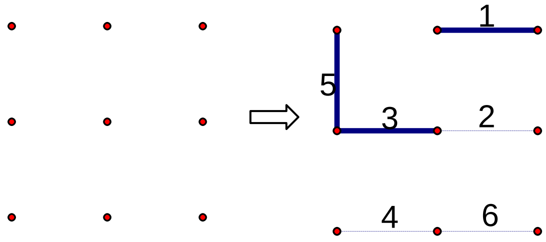
2.若$m+n$爲奇數--稱之爲奇數型，則

先下者得勝條件：$f_{m\times n}>b_{m\times n}$（即 先下者所圍地盤>後下者所圍地盤）

後下者得勝條件：$b_{m\times n}\ge f_{m\times n}$（即 後下者所圍地盤數≥先下者所圍地盤數）

三、舉例說明：

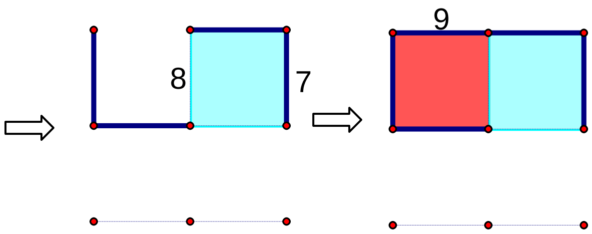
(一)以3×3地盤爲例，先下者以實線（－）表示、後下者以虛線（--）表示。下圖步驟爲一個3×3地盤玩法的部分過程。



先下者順序：1R2 , 2R1 , 1C1
後下者順序：2R2 , 3R1 , 3R2

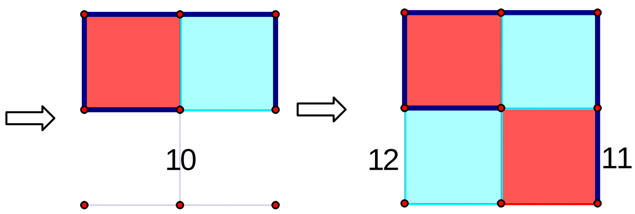
到此每個區塊都只剩 2 條邊能下，下一手就只能開始送地，我們也稱此狀況爲收割。

(二)接下來，先下者3C1送了一塊地(後下者2C1得到一塊地-藍色區域)，先下者1R1則得一塊地(紅色區域)



先下者順序：..3C1 , 1R1
後下者順序：..2C1 ,

(三)接下來，後下者必須送地，畫2C2…



先下者順序：   ... , 3C2。
後下者順序：..2C2 , 1C2。

(四)結果 $f_{3\times3}$：$b_{3\times3}$ =2：2，因爲3+3爲偶數，故依據規則得知 先下者得勝。

四、研究過程

爲方便我們做研究，我們從最小的3×3地盤開始，陸續探討偶數型3×5地盤、…等；接下來繼續探討奇數型3×4地盤、3×6地盤、…等。

(一)3×3地盤(屬於偶數型)必勝策略之探討：

經過一番的輪流對戰後，我們歸納找出了後下者必勝的四種必勝圖，如下：

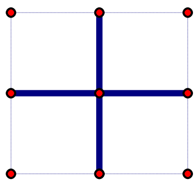


圖 1-1

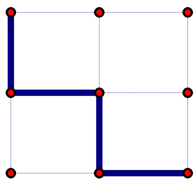


圖 1-2

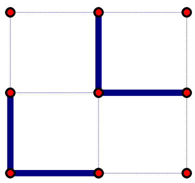


圖 1-3

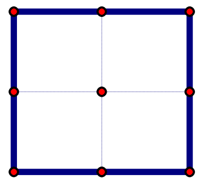
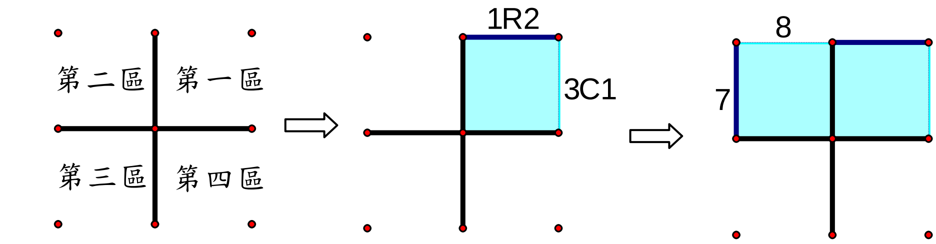


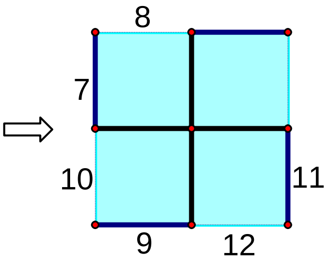
圖 1-4

接下來，我們證明圖 1-1~圖 1-4 爲3×3地盤中後下者的必勝圖，分別如下：

1.證明圖 1-1 為後下者之第一個必勝圖：

首先，將圖 1-1 先分 4 區。在第一區中，如果先下者第一手下 1R2，則後下者就下 3C1；反之則相反。其它區狀況同第一區，則結果 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ =0：4，後下者勝。

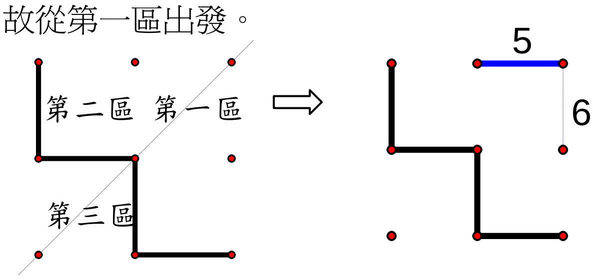




先下者順序：…1R2 , 1C1 , 3R1 , 3C2。
後下者順序：... 3C1 , 1R1 , 1C2 , 3R2。
結果 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ =0：4，後下者勝。

2.證明圖 1- 2 為後下者之第二個必勝圖：

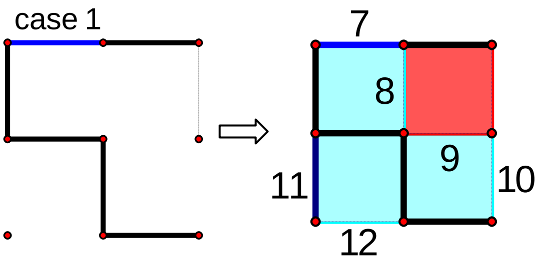
因為圖 1- 2 為對稱圖形，所以我們考慮其中一側即可。其中第二區、第三區會有送地危機，故從第一區出發。



先下者順序：…1R2 ,
後下者順序：…3C1 ,

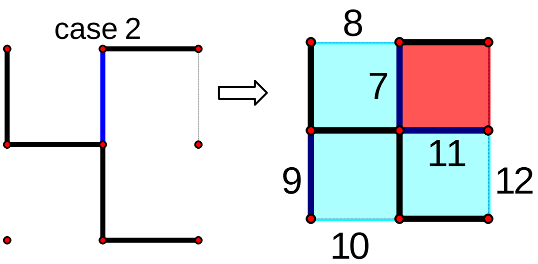
接下來先下者有三種下法，但結果 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ =1：3，皆為後下者獲勝。

(1)Case1- 1R1



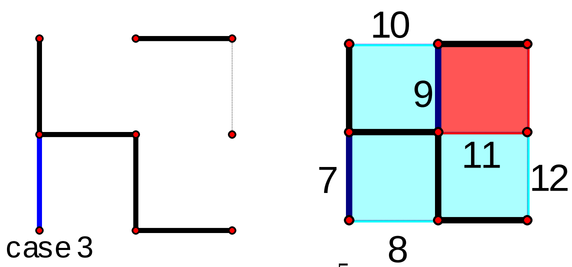
結果 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ =1：3，後下者勝。

(2)Case2- 2C1



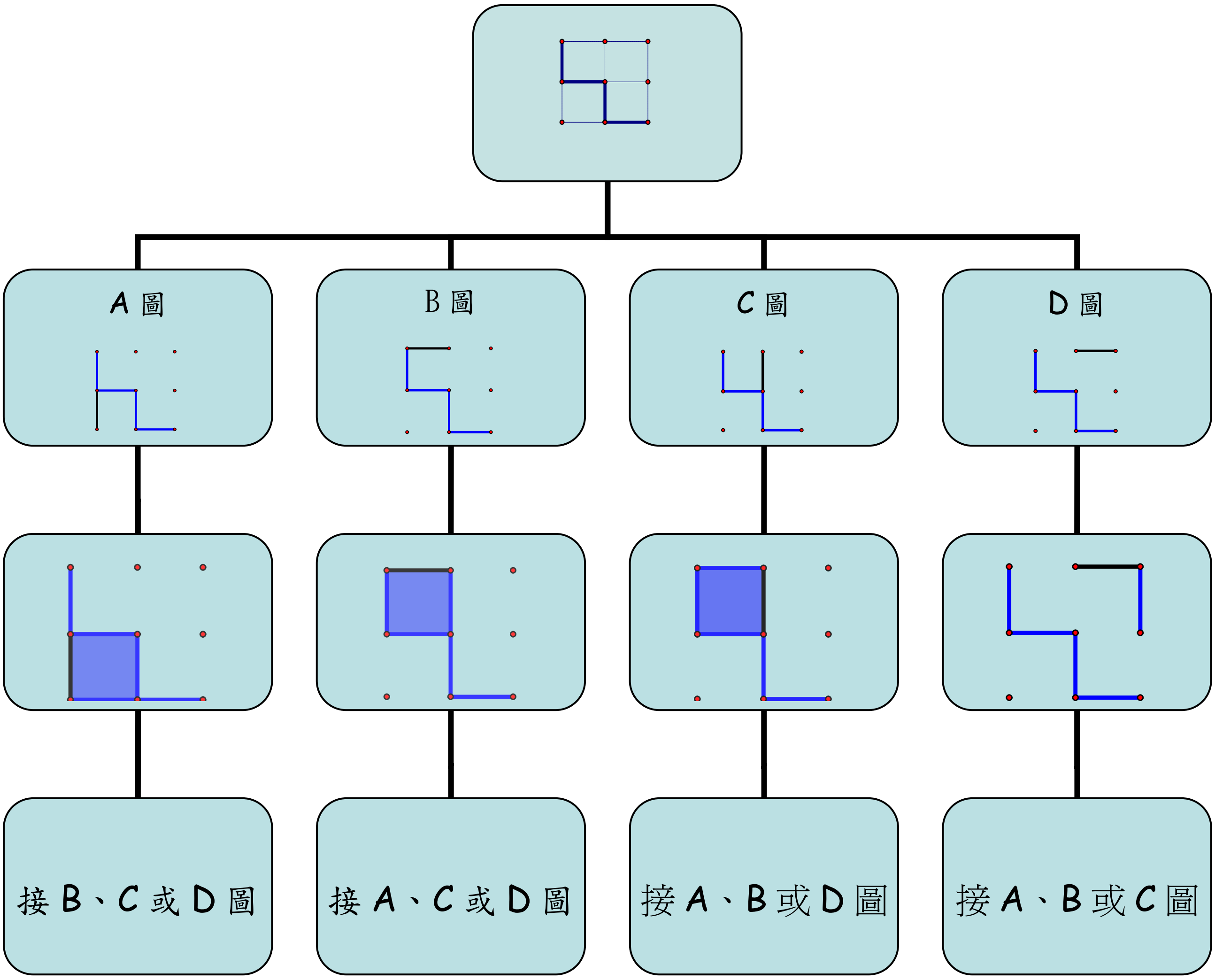
結果 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ =1：3，後下者勝。

(3)Case3- 1C2



結果 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ =1：3，後下者勝。

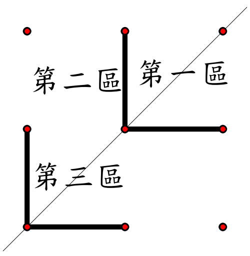
接下來分析如下：~~以下為後下者之必勝圖 1- 2 之流程~~



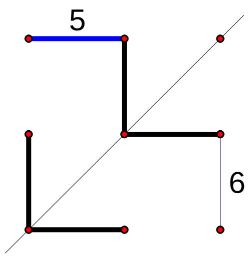
⇨ 必勝圖 1-2 結論：得出 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ ＝1：3，則後下者勝。

3. 證明圖 1- 3 為後下者之第三個必勝圖：

圖 1- 3 也為一個線對稱圖形，所以也考慮其中一側即可。而先下者若選擇第一區的 1R2 或第三區的 2R1，則勢必會送地，故先下者應該要選擇第二區的 1R1 或 1C1 較為恰當。

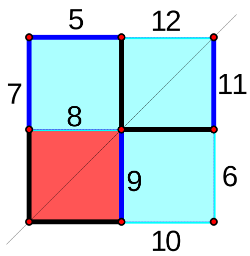


⇨



接下來每一區皆剩兩筆，所以對後下者而言是相當有利的。

⇨

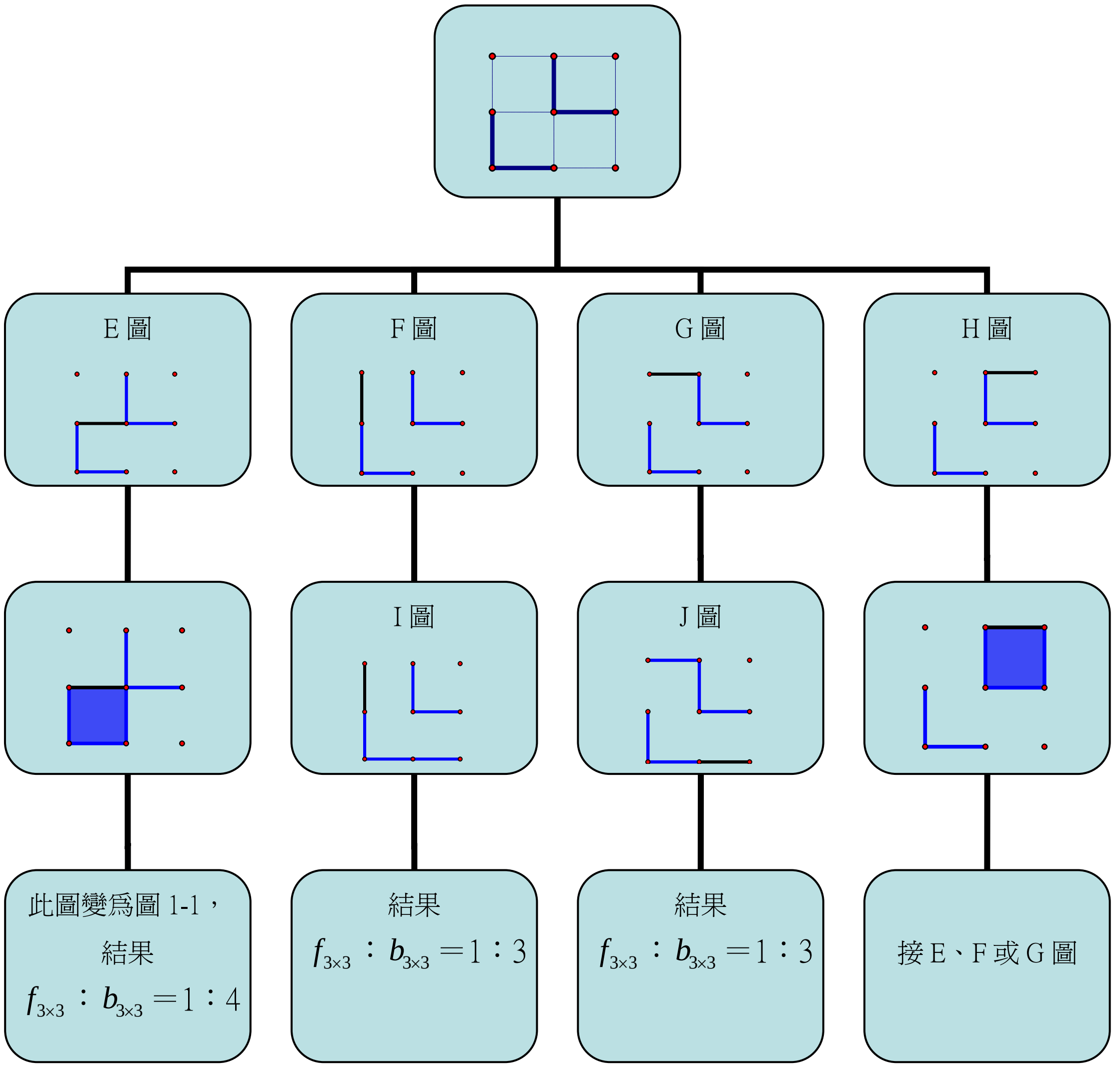


先下者順序：⋯1R1 , 1C1 , 2C2 , 3C1。

後下者順序：⋯3C2 , 2R1 , 3R2 , 1R2。

結論, $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ ＝1：3，後下者勝。

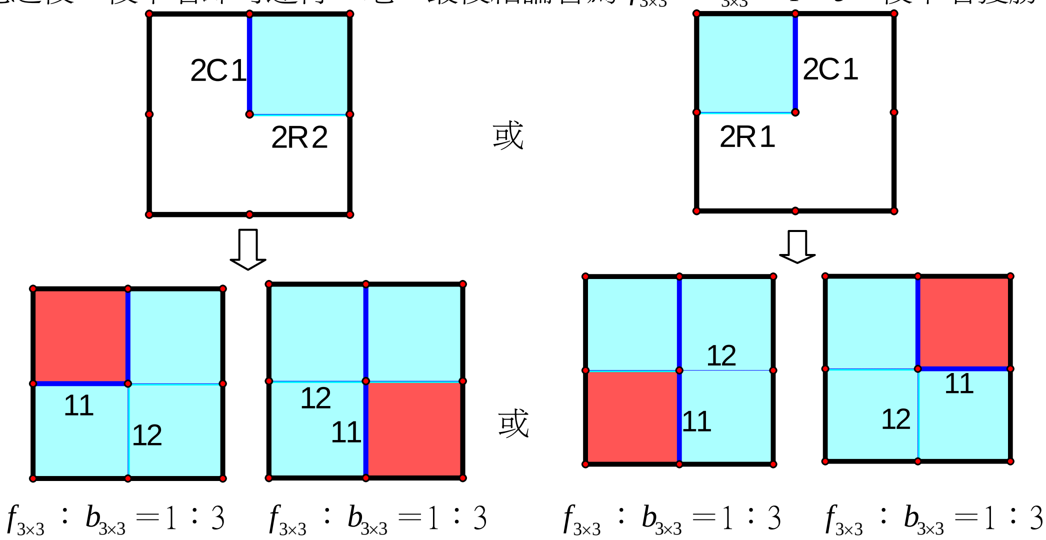
接下來分析如下：~~以下為後下者之必勝圖 1- 3 之流程



最後結論為後下者獲勝。

4. 證明圖 1- 4 為後下者之第四個必勝圖：

圖 1- 4 中，如果先下者下 2C1，則後下者就下 2R2 or 2R1 得一地；接下來先下者得一地之後，後下者即可連得二地，最後結論皆為 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ ＝1：3，後下者獲勝。



5. 證明3×3地盤僅有此 4 個必勝圖：

經過上述的證明，可以知道圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3、圖 1-4 皆爲3×3地盤後下者的必勝圖。但是僅有此 4 個必勝圖嗎？答案是肯定的。

經過我們更進一步的研究，發現後下者所有的勝利情況皆能包含此 4 種必勝的基本圖，即是只要下出來的圖形中出現上述 4 種必勝圖的圖案，則此圖結果必爲後下勝。證明如下：

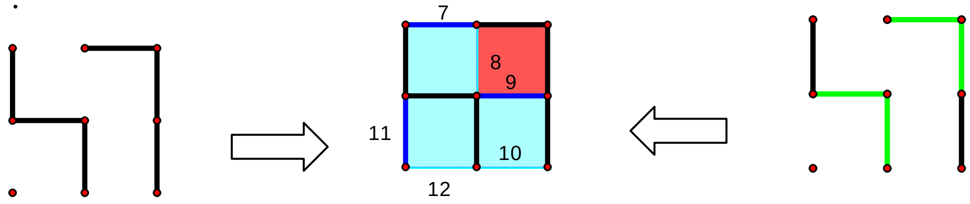


圖 1-5　　圖 1-6， $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ ＝1：3　　綠色爲所含的基本圖

因爲圖中含有必勝圖(1-3)，如圖 1-6 所標示，因此當看到類似圖 1-5 這種圖形時，我們便能直接下定論：**不管如何此圖後下者必勝**。相反的如果圖中不含有此 4 種必勝圖，在不送地的情形下，則爲後下者皆會輸。

以下舉例：

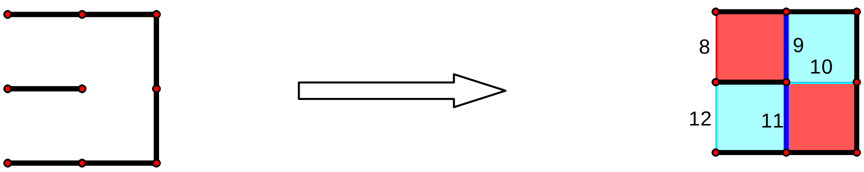
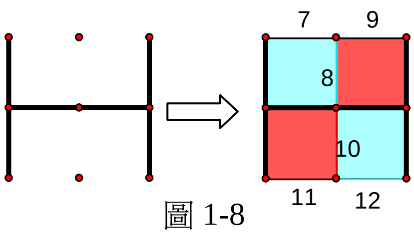


圖 1-7　　此圖無必勝圖在內，所以推測後下者輸　　$f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ ＝2：2

(偶數型、先下者勝)

結論：由上述的許多流程圖中可看出3×3地盤的所有後下者必勝的圖形皆至少包含一種基本必勝圖(即是圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3、圖 1-4)，我們利用窮舉法（Brute force attack）驗證了3×3地盤後下者必勝的 4 個必勝圖。相反的，如果先下者想獲勝，則必須破壞後下者這 4 個必勝圖策略，這也就是先下者的必勝策略了。

6. 討論：由觀察可知，3×3地盤僅有的 4 個必勝圖皆爲**線對稱圖形**，這就讓我們想到一個問題-『是否所有的線對稱圖形皆爲必勝圖型呢？』，於是我們又著手檢視了上面的步驟，最後我們發現了一個結論爲：必勝圖型必爲線對稱圖形，但線對稱圖形不一定是必勝圖形，反例如下圖 1-8 及圖 1-9。



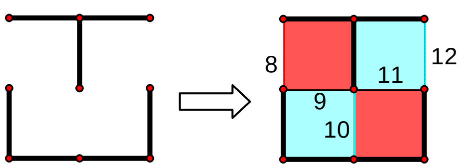


圖 1-8　　圖 1-9

圖 1-8 及圖 1-9 皆爲 $f_{3\times3}$ ： $b_{3\times3}$ ＝2：2 (偶數型、先下者勝)，所以說 線對稱圖形非爲必勝圖型。

(二)3×5 地盤(屬於偶數型)必勝策略之探討：

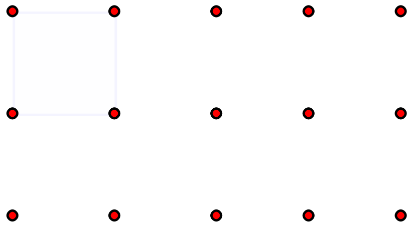


圖 2-1

如上圖 2-1，

1.此情況的總邊數是22條邊($(3-1)\times5+3\times(5-1)=22$)，也就是說在這種情況下先下者與後下者雙方的總筆數加起來會等於22 (偶數)，對後下者有力，因此依據規則

(1)先下者得勝條件： $f_{3\times5}\ge b_{3\times5}$（即 先下者所圍地盤≥後下者所圍地盤）

(2)後下者得勝條件： $b_{3\times5}>f_{3\times5}$（即 後下者所圍地盤數＞先下者所圍地盤數）

2.所以在處理 3×5 地盤圖形時，對後下者而言，我們嘗試把他分為 2 個 3×3 地盤，再利用 3×3 地盤原本的必勝圖作組合。做法如下：想像從中切一線，左右兩側皆為一個 3×3 地盤的必勝圖，如圖 2-1-1。

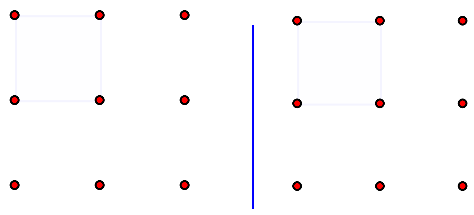


圖 2-1-1

因為如果下了此特別區域那就等於在左右 2 個 3×3 地盤各下一手，即表示其中一個 3×3 地盤變成先下者，另一個則為後下者，所以必須兩筆皆不畫或兩筆皆畫才能依照我們的想法讓後下者獲勝。而先下者要能獲勝的方法就是此兩筆僅畫其中一筆即可。

3.舉例說明如下：

如圖 2-1-2 所示。藍色框框為特別區，如果下了此特別區那就等於在左右 2 個 3×3 地盤各下一手，即表示其中一個 3×3 地盤變成先下者，另一個則為後下者，所以在下法上不管先下者或後下者，若能增取為每一區的後下者，則勝的機會就比較大。

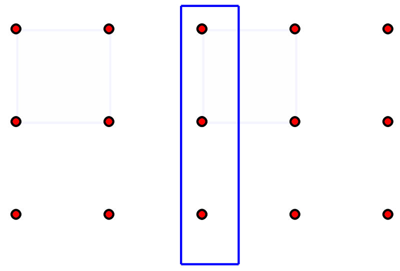


圖 2-1-2

接下來，我們將3×3地盤後下者的必勝圖兩兩組合，如圖 2-2 爲其中一例。

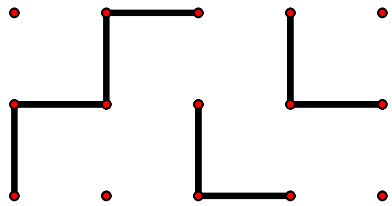


圖 2-2

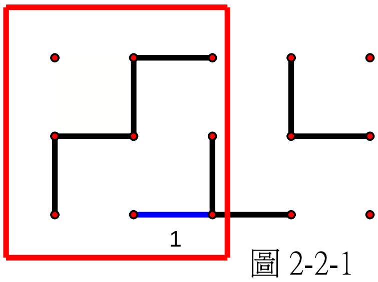


圖 2-2-1

在此圖 2-2 中，在特別區已下了一筆 3C2，如圖 2-2-1，所以導致先下者，在紅色框框標記處變爲後下(即是藍色 1)，也就是有利的情況，結果如圖 2-2-2。

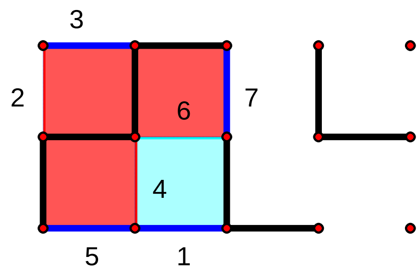


圖 2-2-2 中先下者爲奇數且爲紅色區；
後下者爲偶數且爲藍色區。
目前左邊 $f_{3\times3}:b_{3\times3}=3:1$，先下者勝。

圖 2-2-2 (先下:奇數、紅色區)

接下來，考慮右手邊綠色框框部分，如圖 2-2-3。

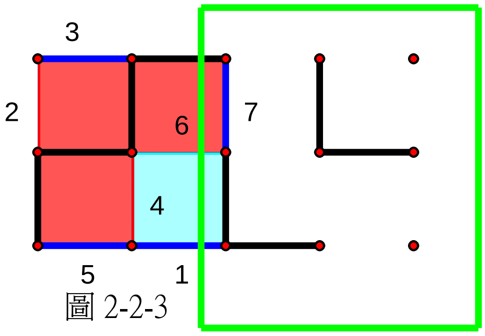


圖 2-2-3

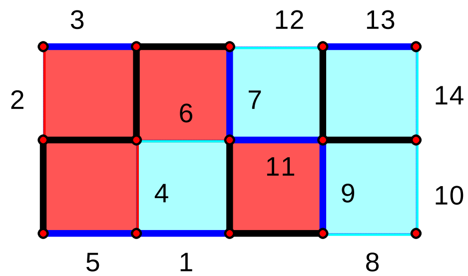


圖 2-2-4

如圖 2-2-3，在特別區已被下了一筆 3C1，所以在右邊的3×3圖形中(即是綠色框框所標示處)，先下和後下的位置又恢復原狀了，即是對後下者有必勝策略，如圖 2-2-4。雖然右半部後下者又重拾必勝圖的有利情況，而贏了右半部($f_{3\times3}:b_{3\times3}=1:3$)，但最終結果爲 $f_{3\times5}:b_{3\times5}=4:4$，偶數型平手，乃爲先下者獲勝。

但若在圖 2-2 中先下者先攻右半部，則右半部 $f_{3\times3}:b_{3\times3}=1:3$後下者勝，左半部也對後下者有利，爲 $f_{3\times3}:b_{3\times3}=1:3$。故 $f_{3\times5}:b_{3\times5}=2:6$，後下者勝。

也因此在『3×5地盤-屬於偶數型』中利用3×3地盤之 4 個必勝圖組合得知共有 21 種不同的組合，我們將此 21 種組何分成兩類，如下：

(1) 第一類---後下者必勝型：共有 15 種，分別如下

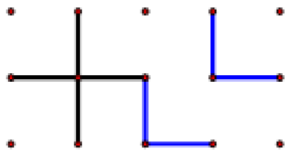


圖 2-3-1

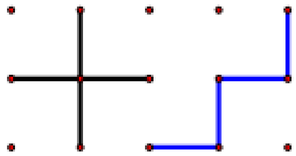


圖 2-3-2

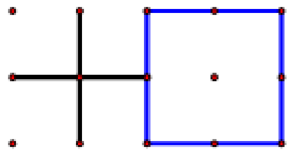


圖 2-3-3

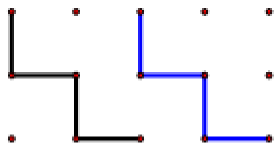


圖 2-3-4

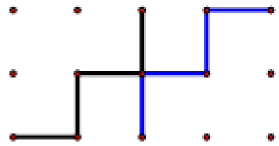


圖 2-3-5

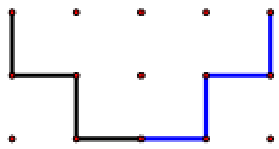


圖 2-3-6

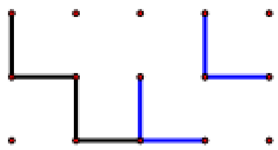


圖 2-3-7

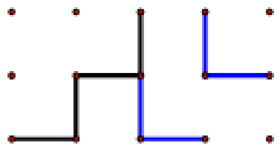


圖 2-3-8

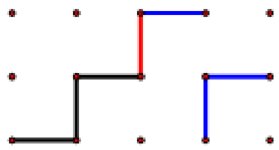


圖 2-3-9

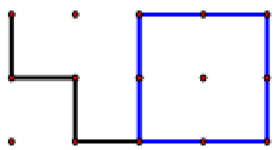


圖 2-3-10

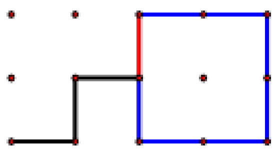


圖 2-3-11

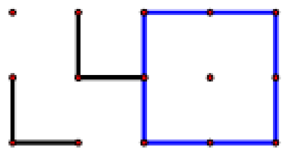


圖 2-3-12

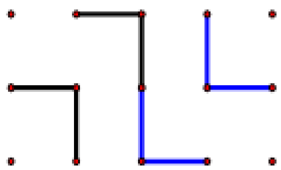


圖 2-3-13

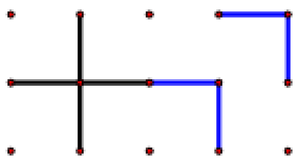


圖 2-3-14

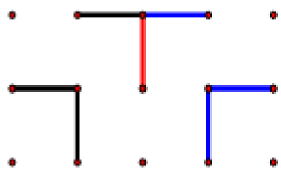


圖 2-3-15

舉一些例子證明如下：

a.如圖 2-3-2a 爲圖 2-3-2 的結果圖，其爲 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ =3：5，後下者獲勝。

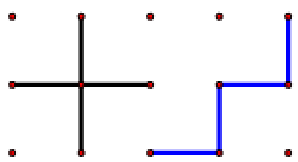


圖 2-3-2

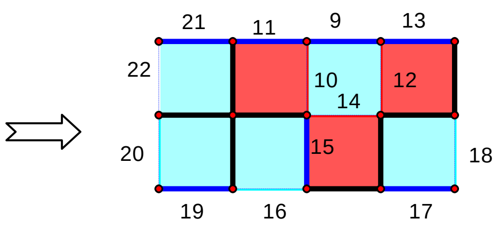
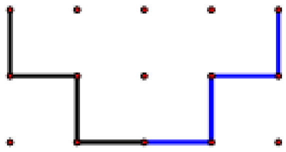
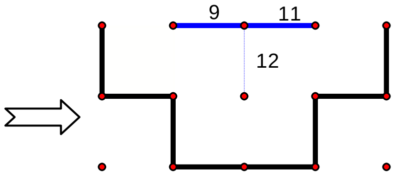


圖 2-3-2a

b.如圖 2-3-6b 爲圖 2-3-6 的結果圖，其爲 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝2：6，後下者獲勝。





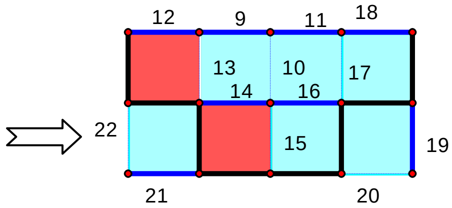


圖 2-3-6　　圖 2-3-6a　　圖 2-3-6b

c.在圖 2-3-14c 的綠色兩區 A、B 中，雖然圍的地盤數皆相等，但會造成先後順序互換，如圖 2-3-14d、2-3-14e。因此 A、B 兩處下完後，即會回歸爲原來先後順序，造成結果爲 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝3：5，後下者獲勝。

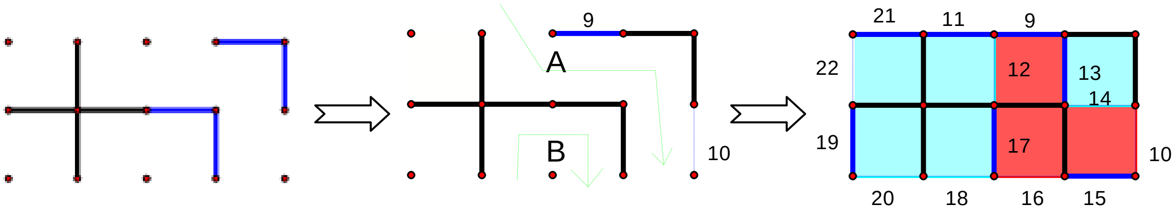


圖 2-3-15c

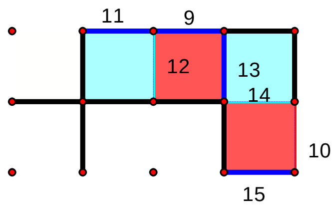


圖 2-3-15d 換成後下者先下

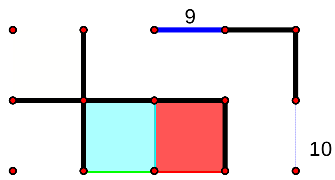


圖 2-3-15e 換成後下者先下

d. 圖 2-3-15 中可分成兩種下法，一種爲先下 3R2、3R3 如圖 2-3-15b，另一種爲先下 3C2 如圖 2-3-15c。但不管哪種下法，後下者必勝，如圖 2-3-15d 及 2-3-15e。

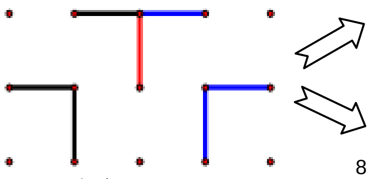


圖 2-3-15

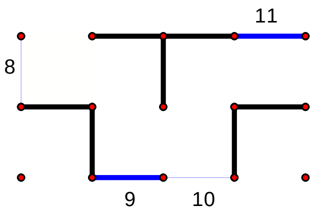


圖 2-3-15b

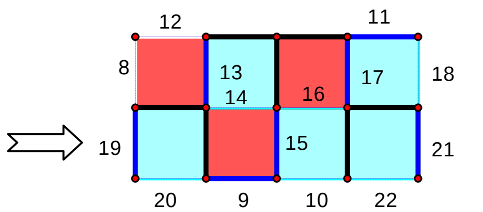


圖 2-3-15d　$f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝3：5

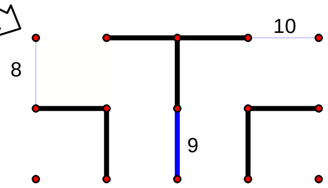


圖 2-3-15c

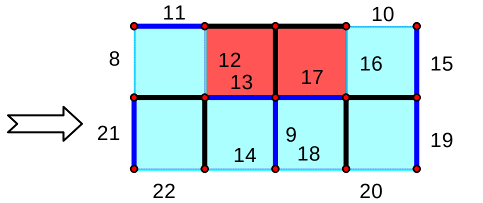


圖 2-3-15e　$f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝2：6

(2) 第二類---有輸有贏型：共有 6 種，分別證明如下:

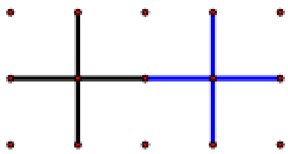


圖 2-3-16

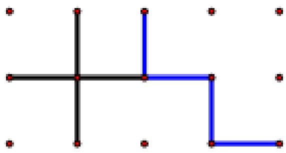


圖 2-3-17

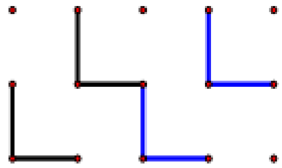


圖 2-3-18

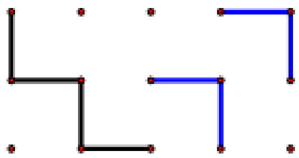


圖 2-3-19

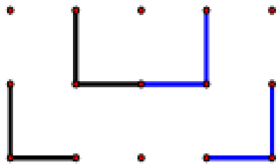


圖 2-3-20

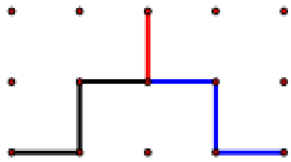


圖 2-3-21

a. 如圖 2-3-16a 為圖 2-3-16 先下者勝之結果圖，其為 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝4：4，先下者獲勝。而圖 2-3-16b 為圖 2-3-16 後下者勝之結果圖，其為 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝4：4，後下者獲勝。其勝負關鍵為在圖 2-3-16c 中後下者接下來的這一步。**若後下者下在 3C2、3R2 或 3R3 中**，則 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝2：6，後下者必勝；否則結果為 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝4：4，先下者獲勝。

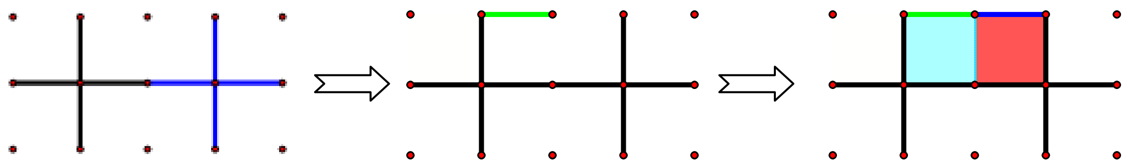


圖 2-3-16　　　　圖 2-3-16c

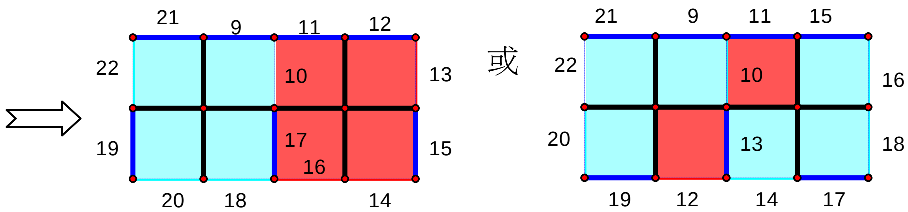


圖 2-3-16a　　　　圖 2-3-16b

b. 如圖 2-3-17a 為圖 2-3-17 先下者勝之結果圖，其為 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝6：2，先下者獲勝。而圖 2-3-17b 為圖 2-3-17 後下者勝之結果圖，其為 $f_{3\times5}$ ： $b_{3\times5}$ ＝3：5，後下者獲勝。其勝負關鍵為在圖 2-3-17c 中的 A、B 區。若後下者下在 A 區，先下者獲勝；若後下者下在 B 區，則後下者獲勝。

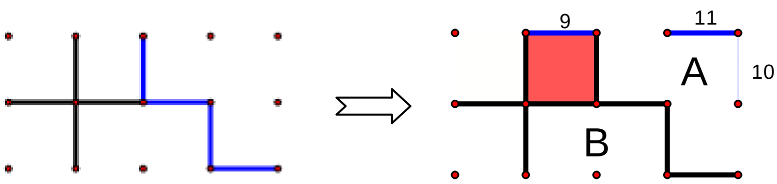


圖 2-3-17　　　　圖 2-3-17c

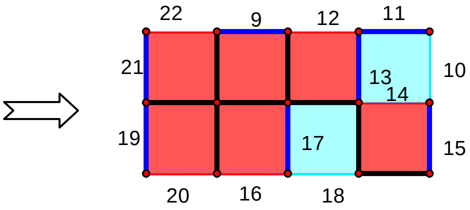


圖 2-3-17a 先下 A 區

或

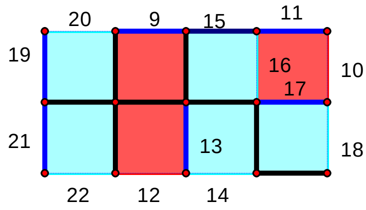


圖 2-3-17b 先下 B 區

c. 同理，圖 2-3-18 也分 A、B 兩區。在圖 2-3-18c 中，若後下者下在 A 區，$f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$＝4：4 則先下者獲勝，如圖 2-3-18a；若後下者下在 B 區 $f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$＝3：5 則後下者獲勝，如圖 2-3-18b。

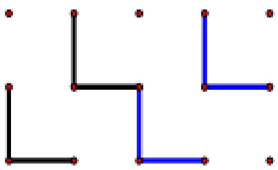


圖 2-3-18

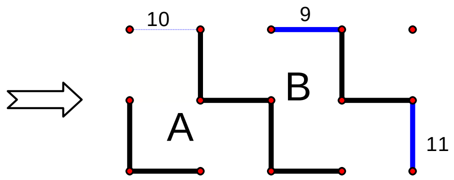


圖 2-3-18c

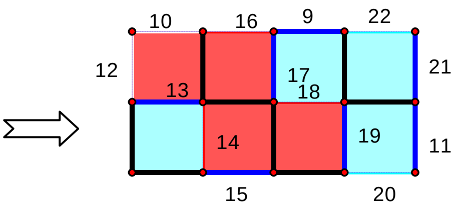


圖 2-3-18a

或

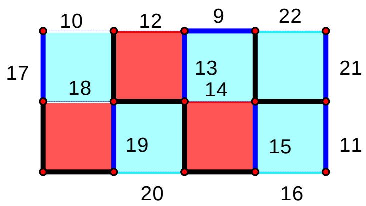
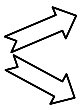


圖 2-3-18b

d. 如圖 2-3-19b 爲圖 2-3-19 先下者勝之結果圖，其爲 $f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$＝4：4，先下者獲勝。而圖 2-3-19a 爲圖 2-3-19 後下者勝之結果圖，其爲 $f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$＝3：5，後下者獲勝。其勝負關鍵爲在圖 2-3-19c 中的補法不同上。若補法爲[1R2、**3C1**、5C2]，則後下者勝；若補法爲[1R2、**1R3**、5C2]，則先下者獲勝。



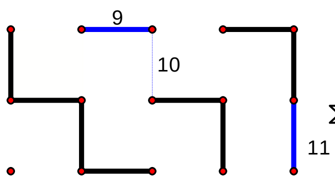


圖 2-3-19c 補法 1

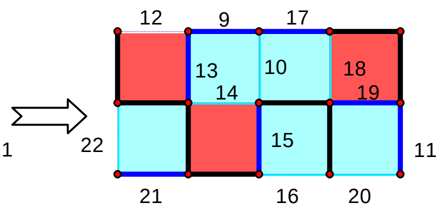


圖 2-3-19a

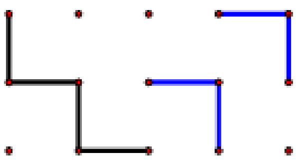


圖 2-3-19

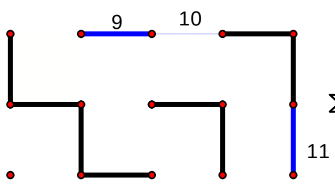


圖 2-3-19c 補法 2

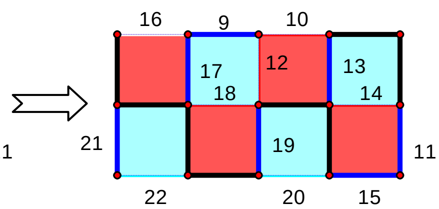


圖 2-3-19b

e. 如圖 2-3-20a、2-3-20b 及 2-3-20c 爲圖 2-3-20 先下者勝之結果圖，其爲 $f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$ ＝4：4 或 $f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$ ＝5：3，先下者獲勝。而圖 2-3-20d 爲圖 2-3-20 後下者勝之結果圖，其爲 $f_{3\times5}$：$b_{3\times5}$ ＝3：5，後下者獲勝。其勝負關鍵爲在圖 2-3-20 中的補法不同上。當補法爲[1C1、3C2、3R3、5C1] 如圖 2-3-20A，則先下者勝；當補法爲[1C1、3C2、5C1] 如圖 2-3-20B，若後下者先攻 A 區可使順序對調，而造成後下者獲勝，如圖 2-3-20d。

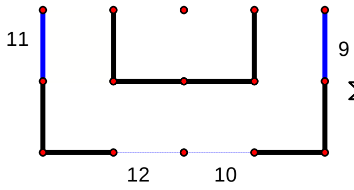


圖 2-3-20A

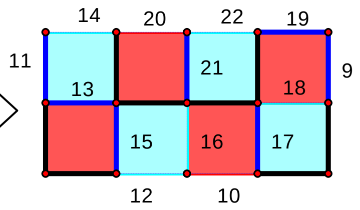


圖 2-3-20a

或

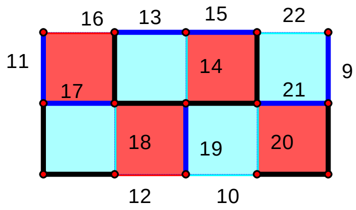


圖 2-3-20b

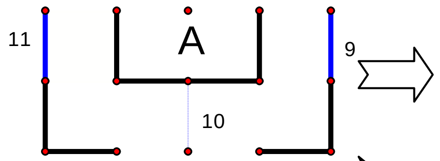


圖 2-3-20B

後下者未先攻 A 區

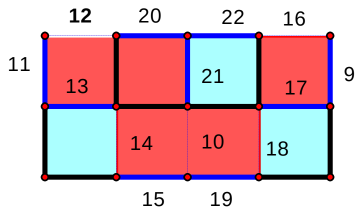


圖 2-3-20c

後下者先攻 A 區
使順序對調

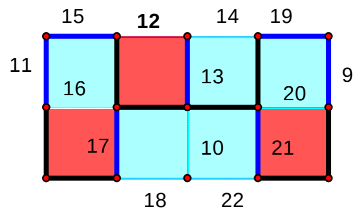


圖 2-3-20d

f. 圖 2-3-21 勝負關鍵在於 A 區。在圖 2-3-21c 中，若後下者下在 A 區，則後下者獲勝，如圖 2-3-21b；若後下者非下在 B 區，則先下者獲勝，如圖 2-3-21a。

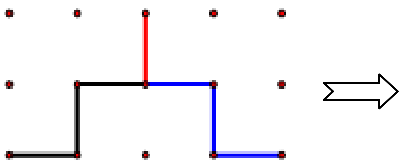


圖 2-3-21

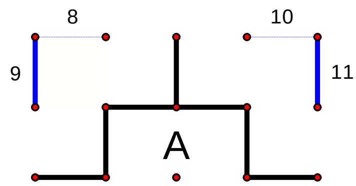


圖 2-3-21c

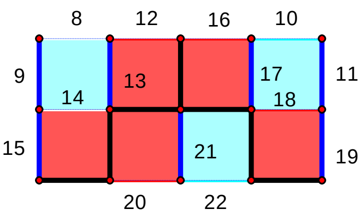


圖 2-3-21a, $f_{3\times5}$ ：$b_{3\times5}$ ＝5：3

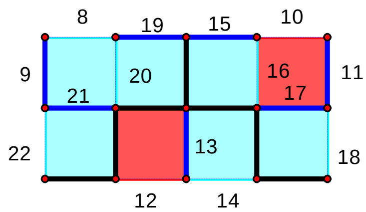


圖 2-3-21b, $f_{3\times5}$ ：$b_{3\times5}$ ＝2：6

(三) $3\times(2k+1)$ 地盤(屬於偶數型)之探討：

For $k\in N$，在 $3\times(2k+1)$ 地盤中，我們可以將它分成許多個 3×3 地盤，並以 3×3 地盤必勝圖的組合走法來達到獲勝；但是此類尚有個地方下法上要特別注意，就是交界處，即是 2 個 3×3 地盤所連接重複的地方，如圖 3-1 所示。

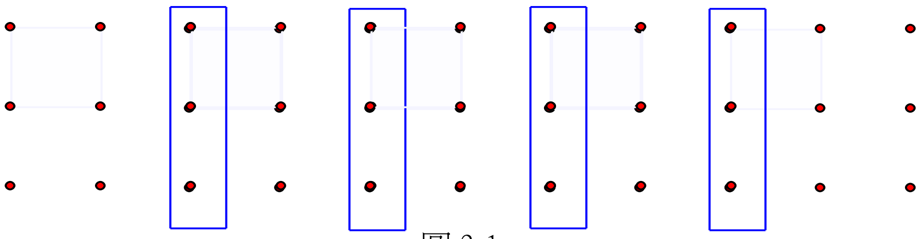


圖 3-1

因此玩家的必勝策略為：**掌握住會使『先下者與後下者順序調換』的特別區域即可。**

(四) 3×4 地盤(屬於奇數型)之探討：

若 $m+n$ 為奇數--稱之為奇數型，則

先下者得勝條件： $f_{m\times n}>b_{m\times n}$ （即 先下者所圍地盤＞後下者所圍地盤）

後下者得勝條件： $b_{m\times n}\geq f_{m\times n}$ （即 後下者所圍地盤數≥先下者所圍地盤數）

經過我們分析研究後，發現 3×4 地盤的下法有如下的特性：

1.「**連續**」**型**：其類型之下法為不管怎麼下，一定是[先者下一筆-後者吃-先者吃-後者吃-先者吃-後者吃…一直吃到結束]，雙方各吃 3 塊，達到平手。即為**後下者獲勝**，如下列各圖：

(1) (2) (3) (4)

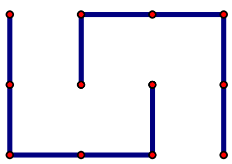


圖 4-1

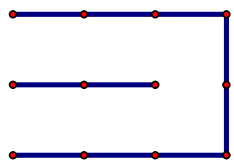


圖 4-2

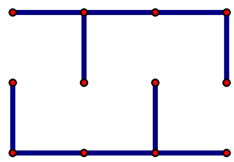


圖 4-3

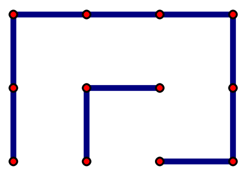


圖 4-4

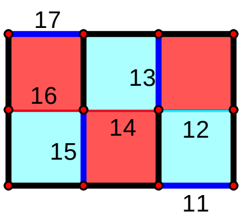


圖 4-1-1

$f_{3\times 4}:b_{3\times 4}=3:$

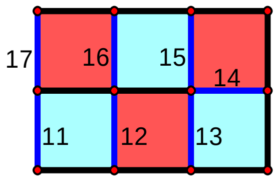


圖 4-2-1

$f_{3\times 4}:b_{3\times 4}=3:$

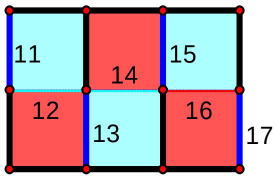


圖 4-3-1

$f_{3\times 4}:b_{3\times 4}=3:$

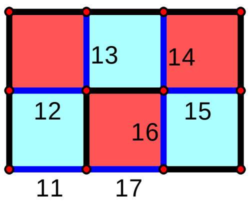


圖 4-4-1

$f_{3\times4}:b_{3\times4}=3:3$

2. 「**三筆畫**」**型**：三個三筆畫就能結束的圖形稱之為「三筆畫」型。不管是從哪裡下手，下法皆為[先者下一筆-後者吃-先者吃-後者下一筆-先者吃-後者吃-先者下一筆-後者吃-先者吃]，雙方各吃三塊，達到平手，為**後下者獲勝**，如圖 4-5,圖 4-6。

3.「**三筆畫+連續**」**型**：此類型爲一個三筆畫結束的圖形加上一個「連續」型的圖形，若是三筆畫結束的圖形先下，下法爲[先者下一筆-後者吃-先者吃-後者下一筆-先者吃-後者吃-先者吃…同樣一直吃到底]，或是先下「連續」型之圖形[先者下一筆-後者吃-先者吃…吃到不能再吃後先者下一筆-後者吃-先者吃]，但不管先下哪裡，結果都相同，雙方各吃三塊，達到平手，同樣爲**後下者獲勝**，如圖 4-7,圖 4-8。

(1) (2) (3) (4)

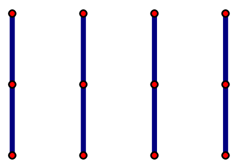


圖 4-5

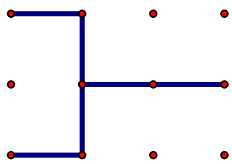


圖 4-6

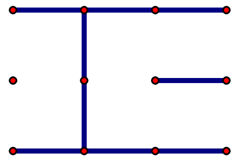


圖 4-7

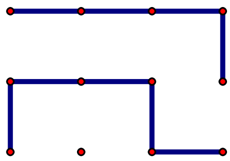


圖 4-8

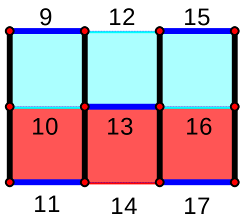


圖 4-5-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=3:3$

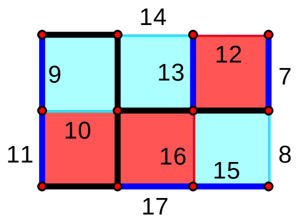


圖 4-6-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=3:3$

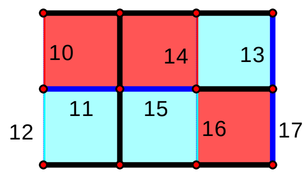


圖 4-7-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=3:3$

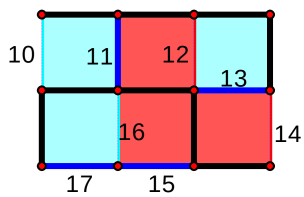


圖 4-8-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=3:3$

4.「**封閉**」**型**：封閉圖的圖形有兩種可能性，第一種爲 3*3 圖形大小的封閉圖形，若是先下者要先送一塊地的話，按照 3*3 必勝圖的理論，誰先下封閉圖形誰輸，所以先下者要先下別的地方，等待後下者下封閉圖形才會贏。第二種爲 3*4 大小的封閉圖形，就直接按照[先者下一筆-後者下一筆-先者吃-後者吃-先者吃-後者吃-先者吃]的步驟，結果爲 $f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$，**先下者獲勝**，如下列各圖：

(1) (2) (3) (4)

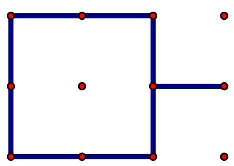


圖 4-9

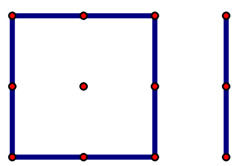


圖 4-10

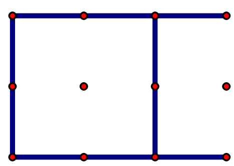


圖 4-11

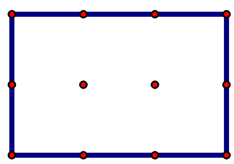


圖 4-12

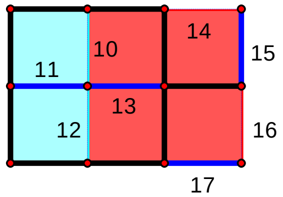


圖 4-9-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

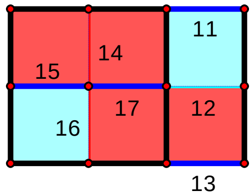


圖 4-10-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

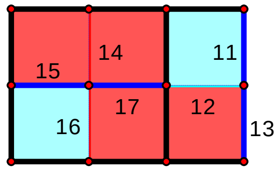


圖 4-11-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

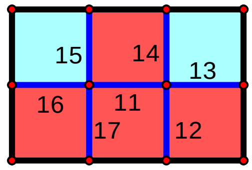
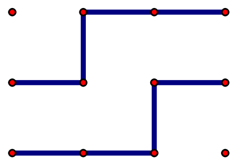
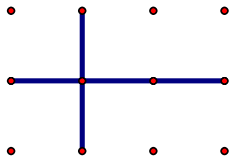
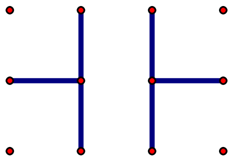


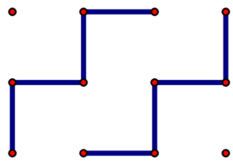
圖 4-12-1
$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

5.「**兩筆畫」型**：只要有兩個兩筆畫就能結束的圖形，就是「兩筆畫」型。先下者只要先下別的地方，最後再下兩筆畫就能結束的圖形，即能獲勝，所以最後的吃法一定是[後者下一筆-先者吃-後者再下一筆-先者吃]，爲**先下者獲勝**，如下列各圖：

(1) 
圖 4-13

(2) 
圖 4-14

(3) 
圖 4-15

(4) 
圖 4-16

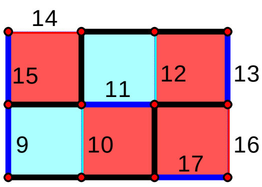


圖 4-13-1

$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

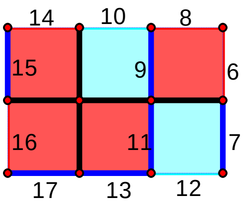


圖 4-14-1

$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

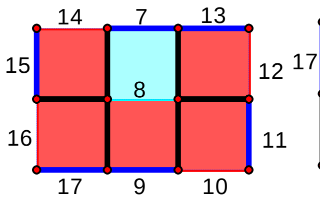


圖 4-15-1

$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

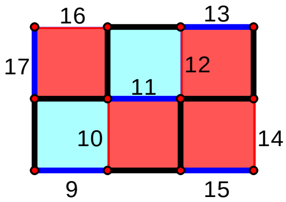
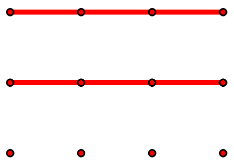
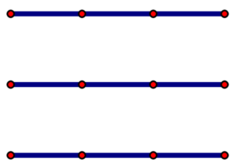


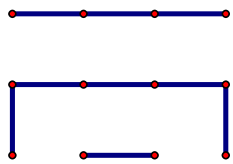
圖 4-16-1

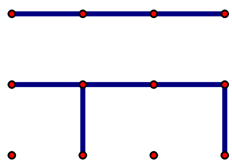
$f_{3\times\ 4}:b_{\times3}\mp\ 4:$

6.「**兩行」型**：爲連續兩行之圖形(圖 4-17)，爲先下者獲勝，如下列各圖：

(--) 
圖 4-17

(1) 
圖 4-18

(2) 
圖 4-19

(3) 
圖 4-20

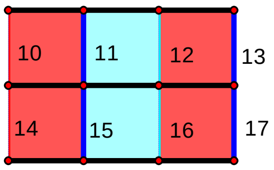


圖 4-14-1

$f_{3\times\ 4}:b_{\times3}\mp\ 4:$

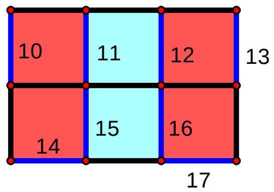


圖 4-15-1

$f_{3\times\ 4}:b_{\times3}\mp\ 4:$

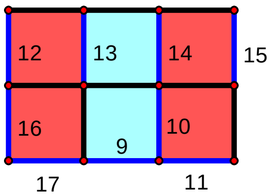


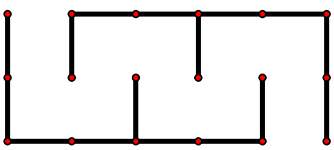
圖 4-16-1

$f_{3\times4}:b_{3\times4}=4:2$

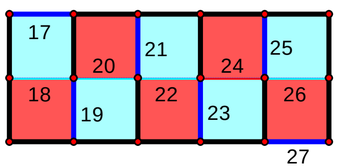
(五)3×6地盤(屬於奇數型)之探討：

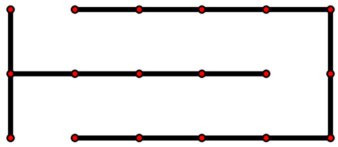
此類型地盤與3×4地盤差異不大，皆有勝負關係。分析如下：

(1)進出不同型：

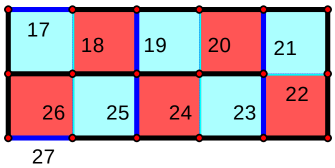


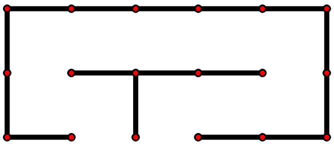
5 : 5



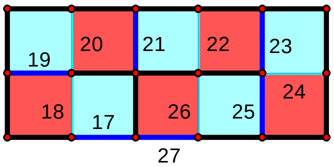


5：5

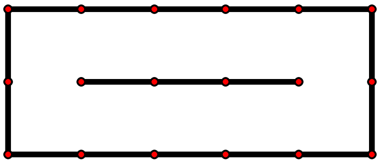




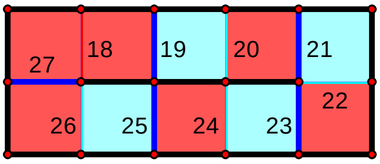
5：5

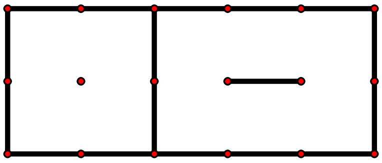


(2)進出相同型：

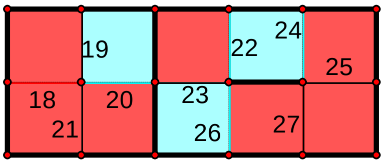


6：4

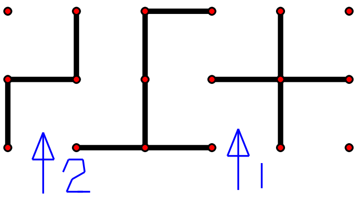




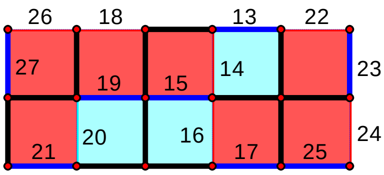
7：3



(3)其他類型：



7：3

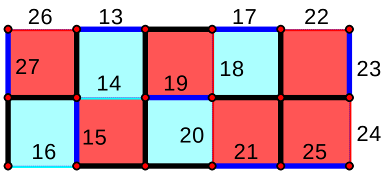


換先下，先下勝，但要先下箭頭處！

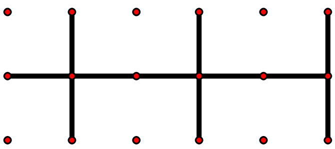
→箭頭1結果

換先下者下,先下者一定要下箭頭處,其中箭頭1處可以改變順序,
使後下者必須先下左上,右上,右下的L形區域

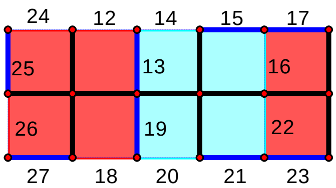
6：4



→箭頭2結果



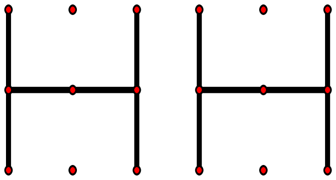
6：4



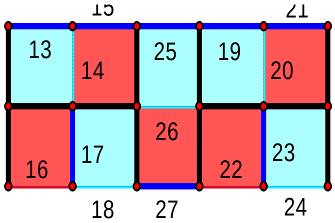
換後下，先下勝

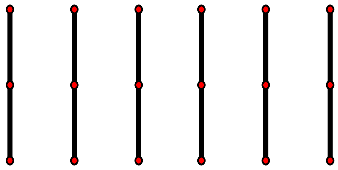
換後下下,再換了四次順序後,
由後下者必須畫下左上和左下的第一筆,
使那兩塊地都給先下者吃去了

(4)三筆畫結束型：

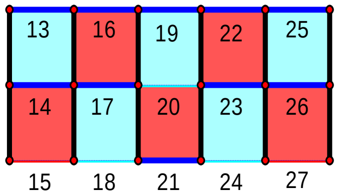


5：5





5：5



(六)探討 $3\times 2n$ 及 $(2h+1)\times 2n$ 地盤之後下者的必勝技巧，是否與前者奇數型有相關？

此類型地盤比較變化多端，目前正積極研究中。

(七) 4×4 地盤(屬於偶數型)之探討：

經過我們分析研究後，發現 4×4 地盤的勝負關係大多皆為**後下者勝**，如圖 7-1～圖 7-15。而少數狀況會根據不同下法而使先下者可反敗為勝，如圖 7-16、圖 7-17-2、圖 7-18-2、圖 7-19-2 等。

分析方式為依據不送地的概念有如下數個基本圖，分析方式如下：

(1)

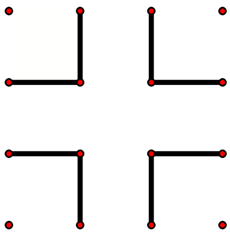


圖 7-1

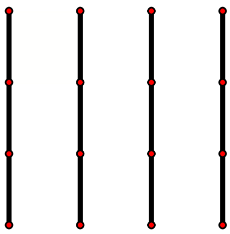


圖 7-2

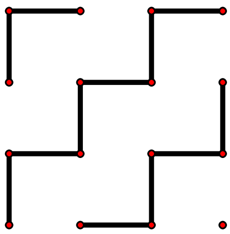


圖 7-3

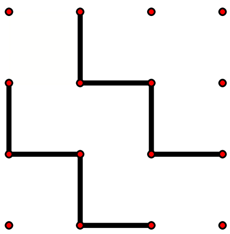


圖 7-4

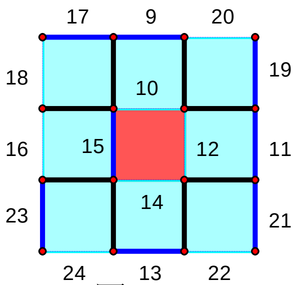


圖 7-1-1

$f_{4\times4}：b_{4\times4}=1：8$

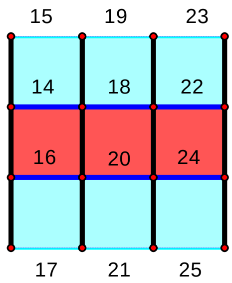


圖 7-2-1

$f_{4\times4}：b_{4\times4}=3：6$

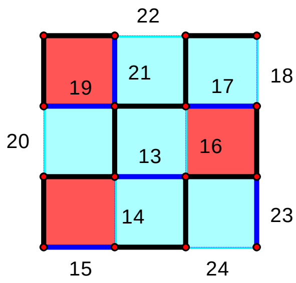


圖 7-3-1

$f_{4\times4}：b_{4\times4}=3：6$

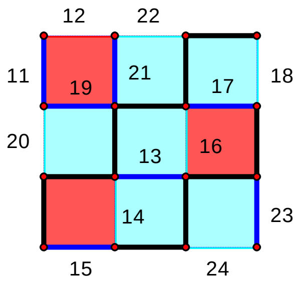


圖 7-4-1

$f_{4\times4}：b_{4\times4}=3：6$

(2)

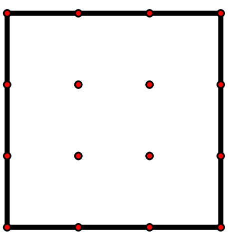


圖 7-5

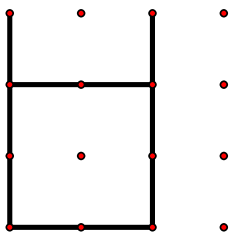


圖 7-6

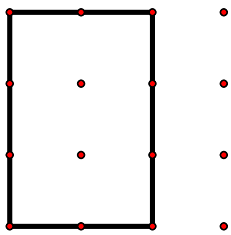


圖 7-7

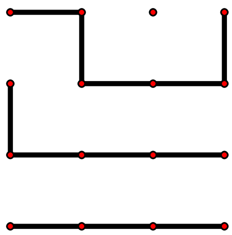


圖 7-8

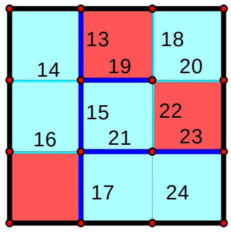


圖 7-5-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=3:6$

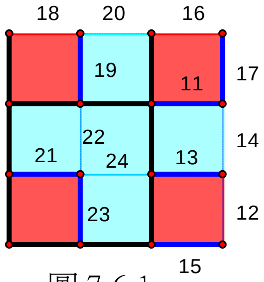


圖 7-6-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

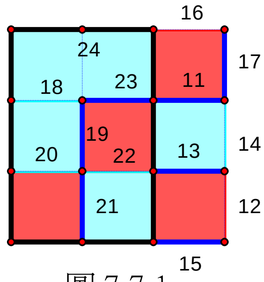


圖 7-7-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

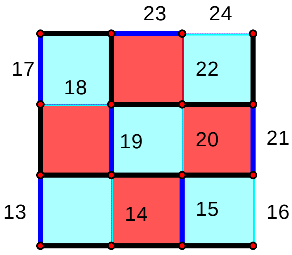


圖 7-8-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

(3)

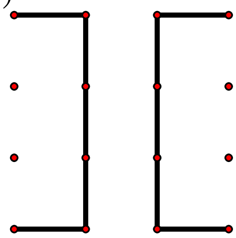


圖 7-9

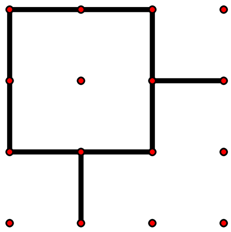


圖 7-10

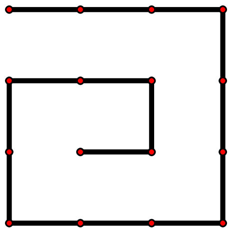


圖 7-11

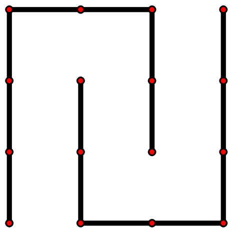


圖 7-12

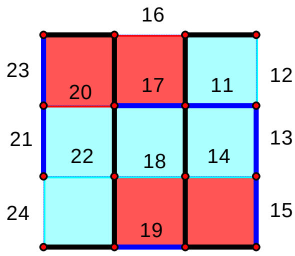


圖 7-9-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

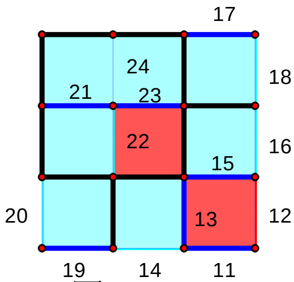


圖 7-10-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=2:7$

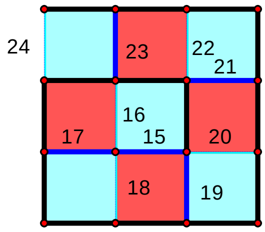


圖 7-11-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

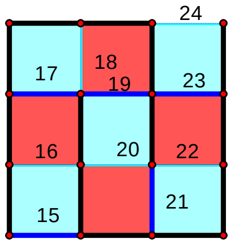


圖 7-12-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

(4)

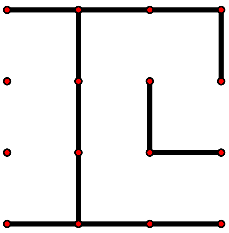


圖 7-13

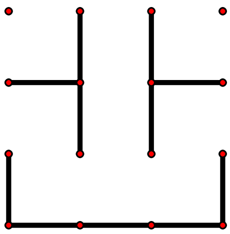


圖 7-14

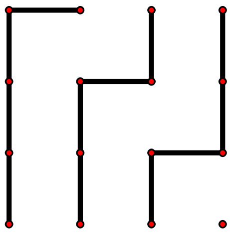


圖 7-15

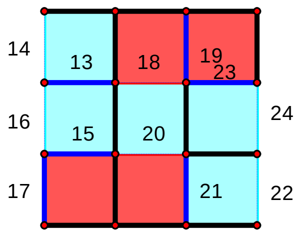


圖 7-13-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

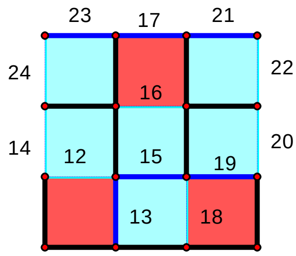


圖 7-14-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=3:6$

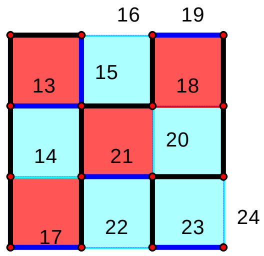


圖 7-15-1

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}=4:5$

(5)特殊下法：

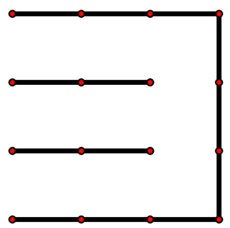


圖 7-16

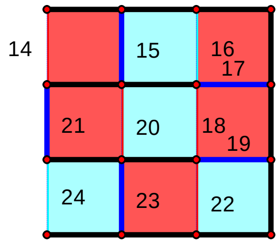


圖 7-16-1， $f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝5：4　　此為先下者勝。

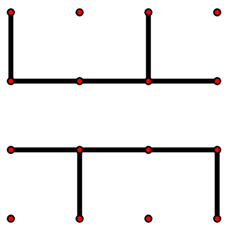


圖 7-17

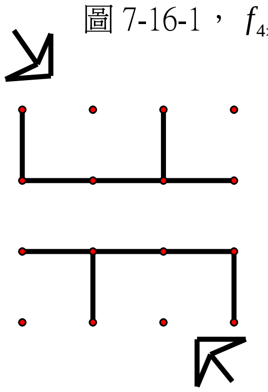


圖 7-17 勝負關鍵為箭頭所指的這兩處。

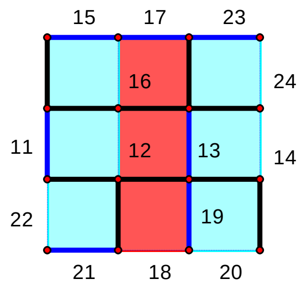


圖 7-17-1：兩處皆下

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝3：6

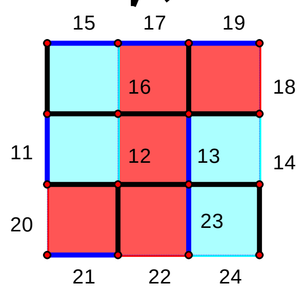


圖 7-17-2：僅下一處

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝5：4

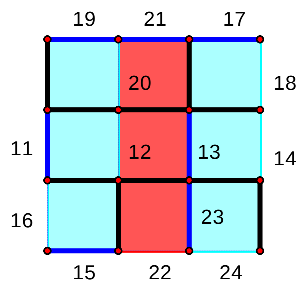


圖 7-17-3：兩處皆不下

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝3：6

結論：圖 7-17 關鍵處的兩處若皆下或皆不下，則後下者勝；若僅下一處，則先下者勝。

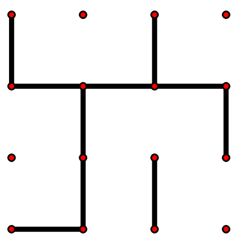


圖 7-18

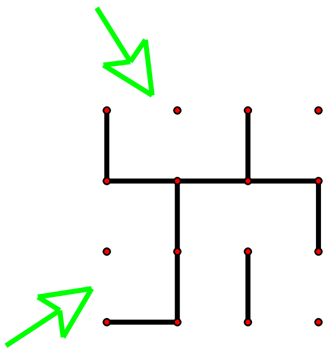


圖 7-18 勝負關鍵為箭頭所指的這兩處。

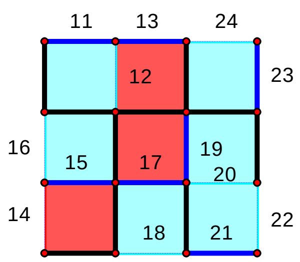


圖 7-18-1：兩處皆下

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝3：6

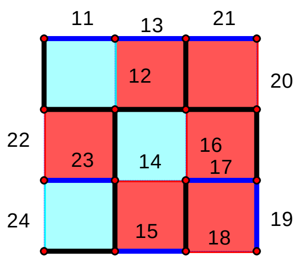


圖 7-18-2：僅下一處

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝6：3

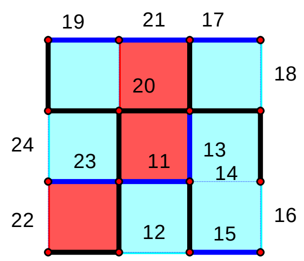


圖 7-18-3：兩處皆不下

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝3：6

結論：圖 7-18 關鍵處的兩處若皆下或皆不下，則後下者勝；若僅下一處，則先下者勝。

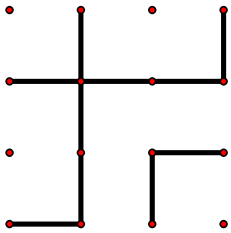


圖 7-19

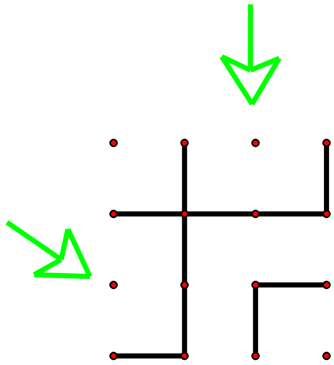


圖 7-19 勝負關鍵爲箭頭所指的這兩處。

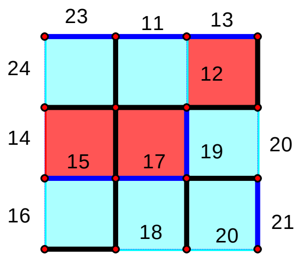


圖 7-19-1：兩處皆下

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝3：6

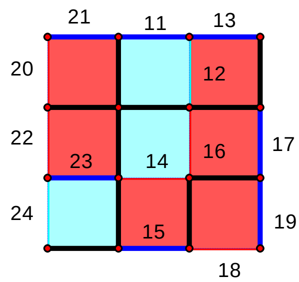


圖 7-19-2：僅下一處

$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝6：3

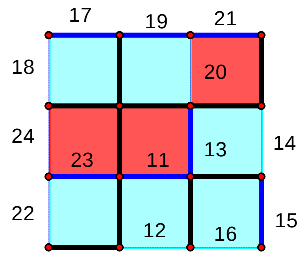


圖 7-19-3：兩處皆不下

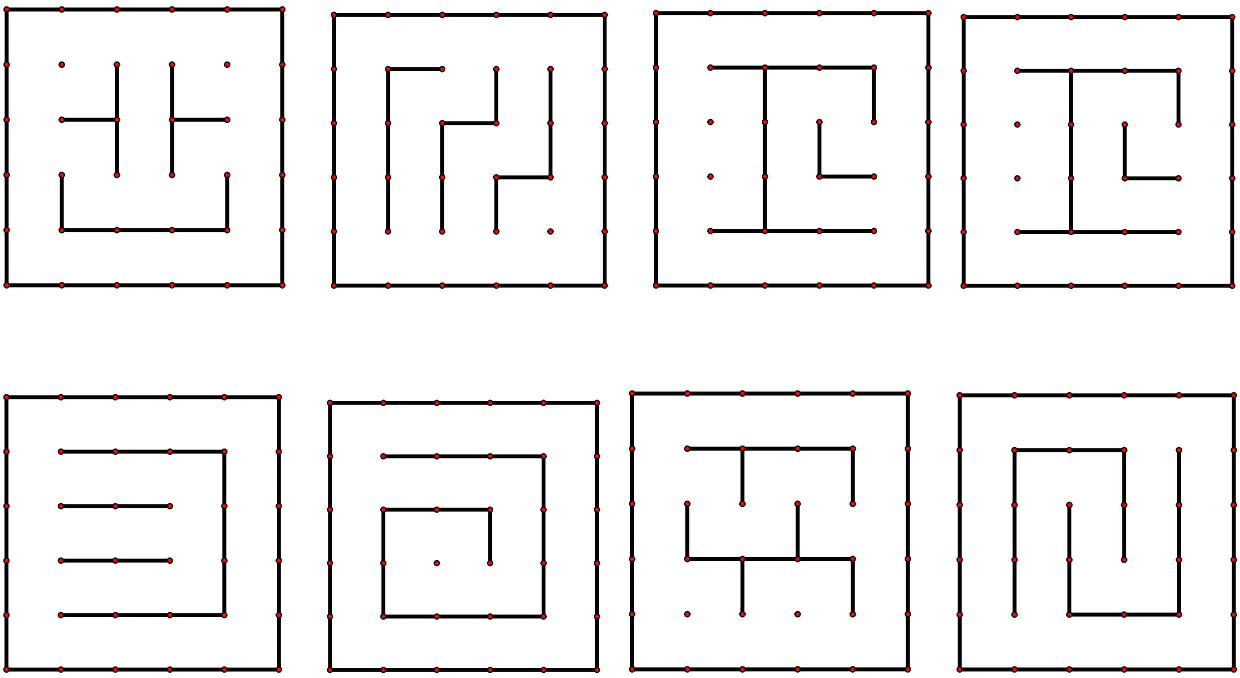
$f_{4\times4}$ ： $b_{4\times4}$ ＝3：6

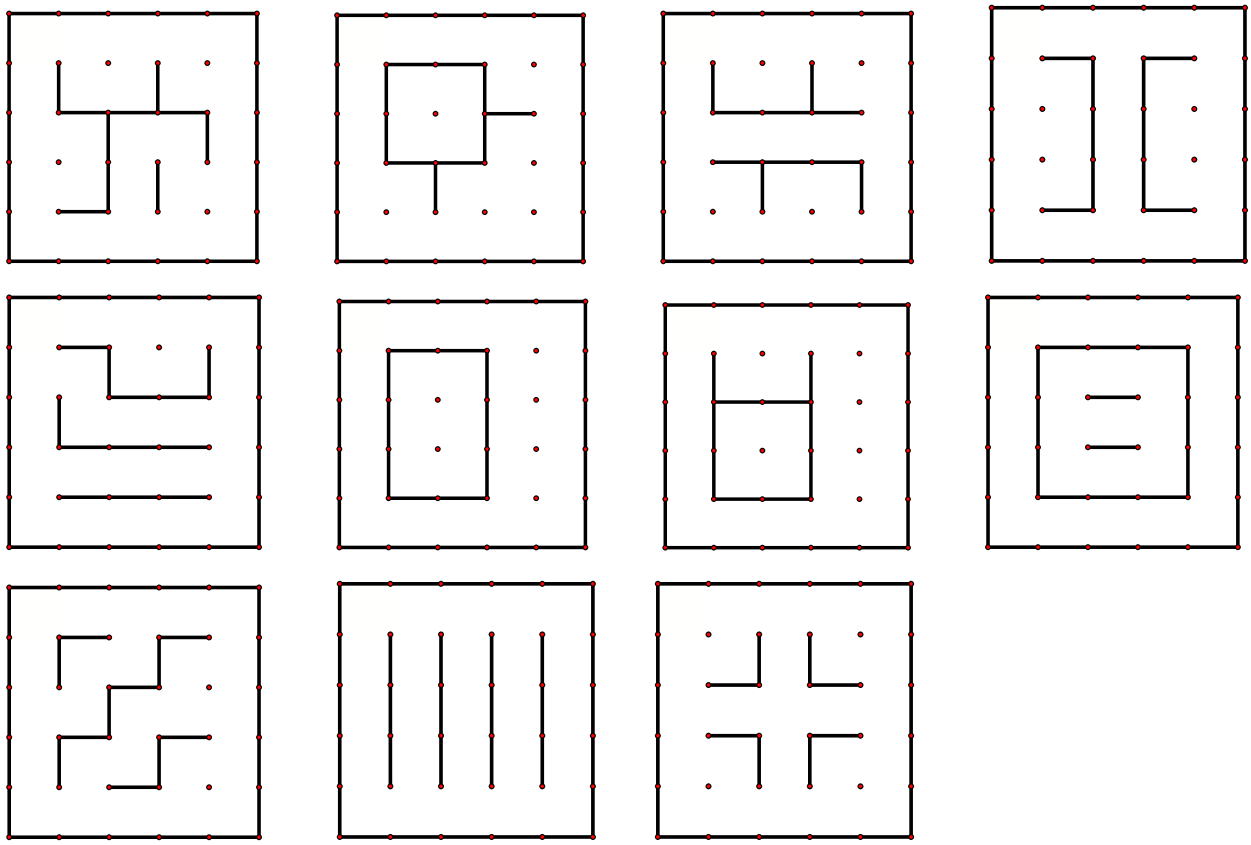
結論：圖 7-19 關鍵處的兩處若皆下或皆不下，則後下者勝；若僅下一處，則先下者勝。

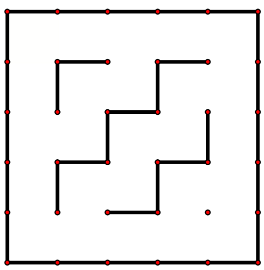
(八) 6×6 地盤(屬於偶數型)之探討：

與 4×4 地盤的想法一致，我們一樣從不讓地的走法開始探討。

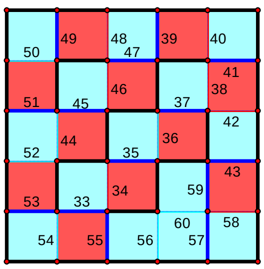
(1)『外圍一圈型』：此類型皆爲後下者勝。

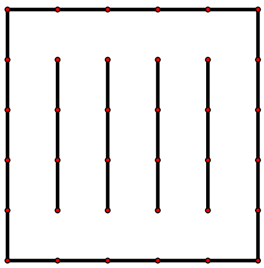




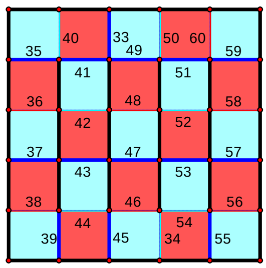


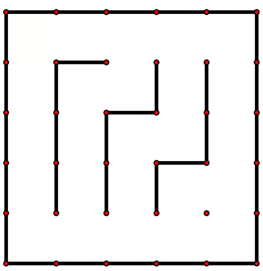
11 : 14



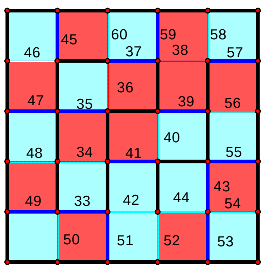


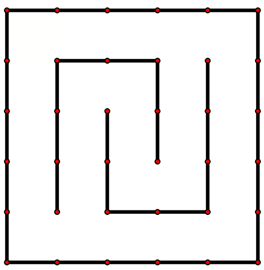
12 : 13



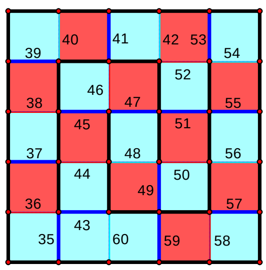


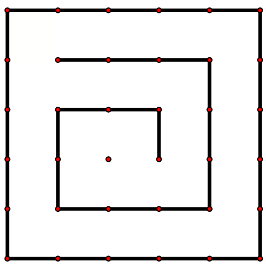
12 : 13



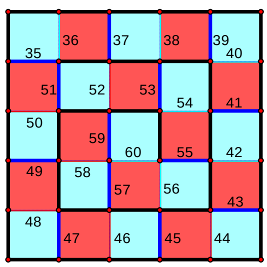


11 : 14





12 : 13



(2)『仿 4×4 地盤』型：分析如下，也皆為後下者勝。

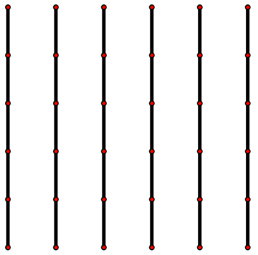


圖 8-1

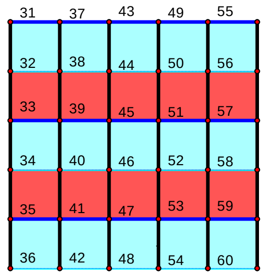


圖 8-1-1

$f_{6\times6}:b_{6\times6}=10:15$ 後下者勝

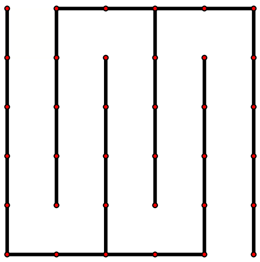


圖 8-2

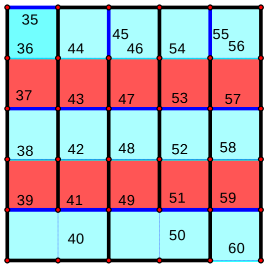


圖 8-2-1

$f_{6\times6}:b_{6\times6}=10:1$ 後下者勝

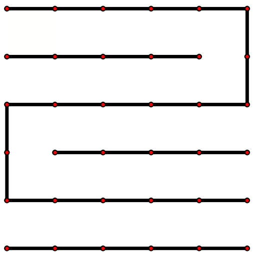


圖 8-3

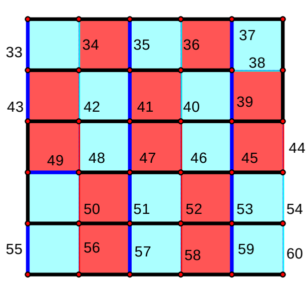


圖 8-3-1

$f_{6\times6}:b_{6\times6}=12:13$ 後下者勝

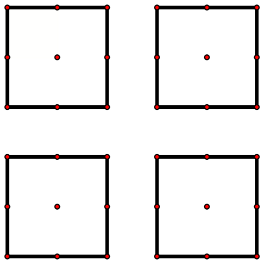


圖 8-4

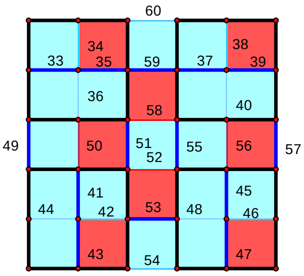


圖 8-4-1

$f_{6\times6}:b_{6\times6}=8:1$ 後下者勝

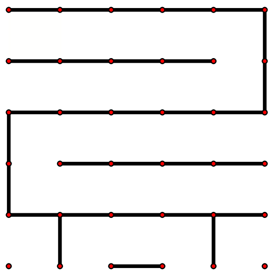


圖 8-5

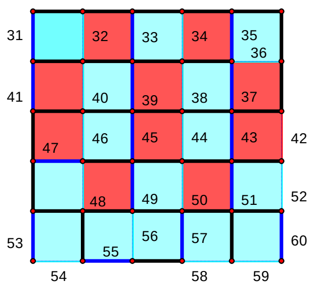


圖 8-5-1

$f_{6\times6}:b_{6\times6}=10:15$ 後下者勝

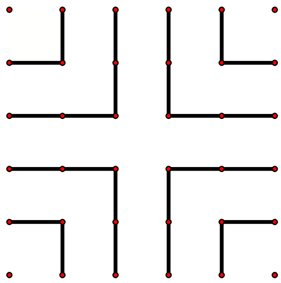


圖 8-6

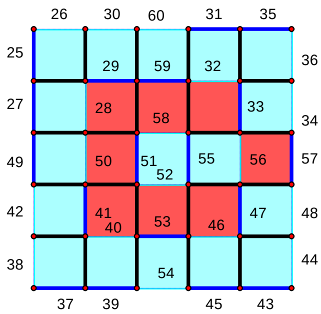


圖 8-6-1

$f_{6\times6}:b_{6\times6}=8:1$ 後下者勝

(九) $2k\times2k$ 地盤(屬於偶數型)之探討：

由於 2×2 地盤必為後下者勝，即是 $f_{2\times2}$ ： $b_{2\times2}=0:1$。而 4×4 地盤除少數幾種走法會使先下者會勝之外，可說是後下者絕對有利。同理，6×6 地盤的狀況也是。因此我們推估 $2n\times2n$ 地盤也必定是後下者絕對有利的狀況。

※證明：$2n \times 2n$ 地盤($n \in N$)在不讓地原則下，每種基本圖後下者皆必有獲勝機會。

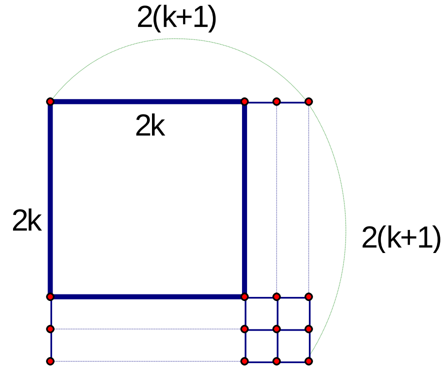
1^0 已知 $n=1$ 時，$f_{2\times2}$ ：$b_{2\times2}$ =0：1 恆成立。

2^0 設 $n=k$ 時，此命題成立，

即是 $f_{2k\times2k} < b_{2k\times2k}$ 。

則

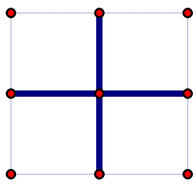
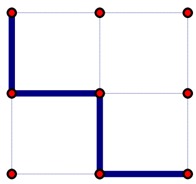
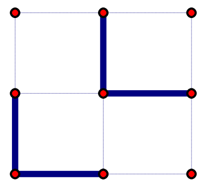
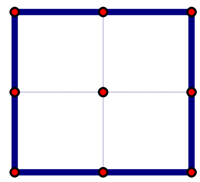
當 $n=k+1$，如右圖可知 $2(k+1)\times2(k+1)$ 地盤比 $2k\times2k$ 地盤多出來的部分正好爲一個 $3\times4k$ 地盤，而依據 $3\times2k$ 地盤的結論可知，只要能夠適當注意順序調換問題，後下者必能有獲勝機會。



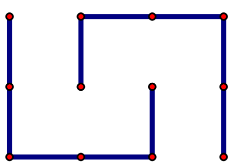
3^0 由數學歸納可知，原命題成立。

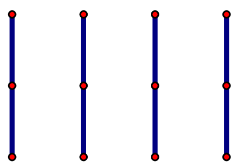
伍、研究結果

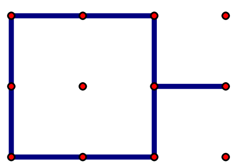
以 3×3 地盤必勝策略的 4 種必勝圖(如下 4 圖)爲基本元素做爲策略做推廣而達到必勝的目的。

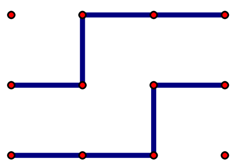





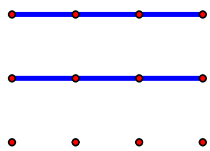
使能推廣至 3×5 地盤..等進而推出 $3\times(2k+1)$ 地盤的必勝技巧。接下來，再探討奇數型地盤必勝圖，以 3×4 地盤、3×6 地盤爲基礎推廣出 $3\times2k$ 地盤的必勝技巧，其中必勝圖則分類分爲「連續」型、「三筆畫」型、「封閉」型、「兩筆畫」型及「兩行」型等來作爲歸納及勝負的判斷，舉例例如下：

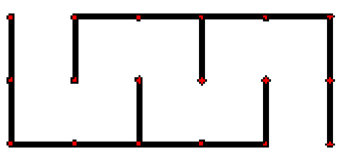

「連續」型

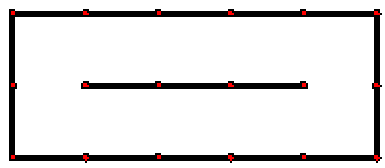

「三筆畫」型

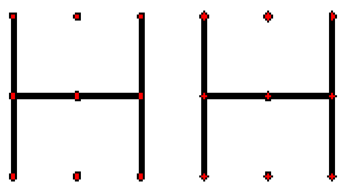

「封閉」型


「兩筆畫」型


「兩行」型


進出不同型


進出相同型

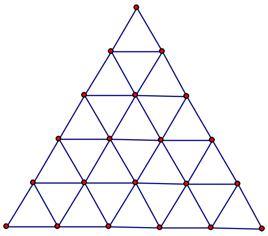

三筆畫結束型

而後再研究 2×2 地盤、4×4 地盤及 6×6 地盤的相關性，並探討 $2k\times2k$ 地盤的必勝策略。我們也發現了必勝圖型必爲線對稱圖形，但線對稱圖形不一定是必勝圖形之特性。

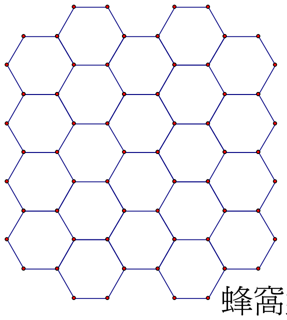
陸、討論

此題目對於國中生而言是相當有挑戰性及有趣性，特別是探討 $m \times n$ 地盤時是無法舉例說明的，必須利用歸納、推廣的結果來作推論。

另外，可推廣的類似方向尚有許多種類，諸如：三角型地盤、蜂窩型地盤等，如下圖。



三角型地盤



蜂窩型地盤

而在規則上對於玩法也可以做許多變動，例如：當一方得一地後，可立即再下一筆的玩法，皆是相當有趣、有挑戰性的。

參考文獻

壹、 中文部分

【一本書】

夏興國（1999）。 數學歸納法縱橫談。台北市：九章。

貳、 網路資源

【分享網站】

UEPlay 游藝館：http://blog.ueplay.com/。一個探討童玩、玩具、遊戲、游藝、教育的空間。紙筆遊戲-圍地盤(Dots and Boxes) ，取自：http://blog.ueplay.com/?p=1723

【評語】030424

本作品作者群利用圍地盤遊戲進行窮舉法探討，進而延伸討論展現團體創意，唯必勝策略的思考若能重新定義（比照井字遊戲……），及進行 N×N 的延伸，將會使此作品，更具意義！