中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030422

燈場亮相

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 張竣翔	孫書勝
國二 黃柏豪	許正安

關鍵詞：立體點燈遊戲、規律、密碼鎖

摘要

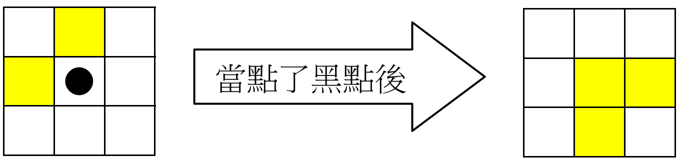
「點燈」益智遊戲，要想辦法讓所有的格子變亮，但點亮的方式必須遵循一個法則，即點亮一個燈時，周遭緊鄰的格子也都會亮起或熄滅，依其原本明暗狀態而變化。二維平面的點燈技巧，經過參考相關資料及嘗試，很快便能掌握，但是較為複雜的三維立體空間點燈，更引起我們的興趣。藉由這次的探討，我們發現立體點燈和平面點燈是有關聯性的，而且解法都具有規律。只要整理出規律，便能推算出同類圖形的解法，輕鬆掌握立體點燈的技巧。

壹、研究動機

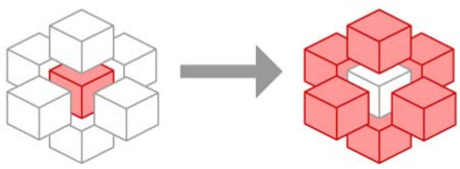
在網路上無意間發現了一個小遊戲「點燈」(又名滿堂彩)，遊戲規則十分簡單，最終的目的就是要把所有的格子點亮。這遊戲看似簡單，但其實難度非常高，若不懂技巧，最後可能會因為一直無法成功而將滑鼠摔掉。多數的點燈遊戲，都侷限於 2D 平面，由於平時喜歡玩魔術方塊，所以立體構造的點燈遊戲是否可以破解，很快就在我們腦海裡出現問號。這學期數學課本剛好介紹對稱圖形，似乎可以用它來做為討論的工具，藉機好好了解「3D 點燈遊戲」的奧妙。

貳、遊戲介紹

點燈遊戲的英文原名「all light game」，遊戲方法十分簡單，就是想辦法將格子全部點亮，但當你點選其中一個格子時，其四周緊鄰的格子皆會變成與原本相反的狀態，也就是原本亮的會暗；原本暗的會亮 (如下圖)。



而立體的點燈則是點了一個格子後，與其上下左右各面相鄰的格子 (最多六個，邊緣的格子影響變少)，亦會跟著改變狀態，即原本亮的會變暗；原本暗的會發亮 (如下圖)。



參、研究目的

一、深入了解平面點燈的技巧，探討將其運用在立體點燈問題上之可行性，並了解平面點燈與立體點燈問題之關聯性。

二、找出 3D 結構的立體點燈遊戲解法，討論其解法之規律性及延伸性。

三、研究如何快速完成立體點燈遊戲。

四、討論點燈遊戲用於密碼鎖的優勢。

肆、研究設備及器材

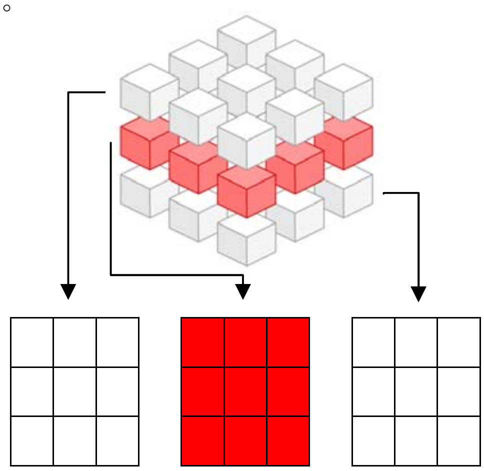
電腦、紙、筆、積木模型、老師指導所設計的 VB 程式。

伍、研究過程及方法

一、設計立體點燈工具

(一)解決由平面到立體的問題

由於立體方塊不容易用平面圖形表達，於是我們將立體的構造轉換為平面的圖形。以 3x3x3 為例，圖形被切割為三層分別抽出，即立體結構被轉換成 3 個 3x3 的平面，此方法使我們在解題時，變的十分輕鬆，不會漏掉被遮住的方塊，也較容易向說明我們的解法。

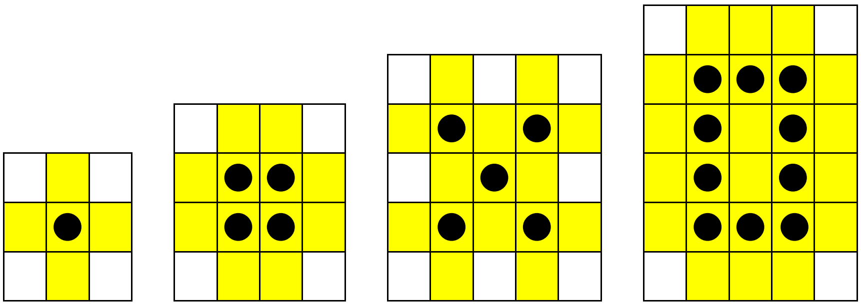


(二)立體點燈程式的設計

平面點燈只牽涉到一個平面、一次至多五個格子的變化，所以討論十分容易。而立體點燈則牽涉到三個平面、最多七個格子的變化，所以進行分析時相當複雜，也容易遺漏格子，於是我們利用將立體切割為平面的方法，請老師指導用 VB 設計出一個簡單的程式來幫助解題。如此節省了很多時間，讓我們能快速找出解答。

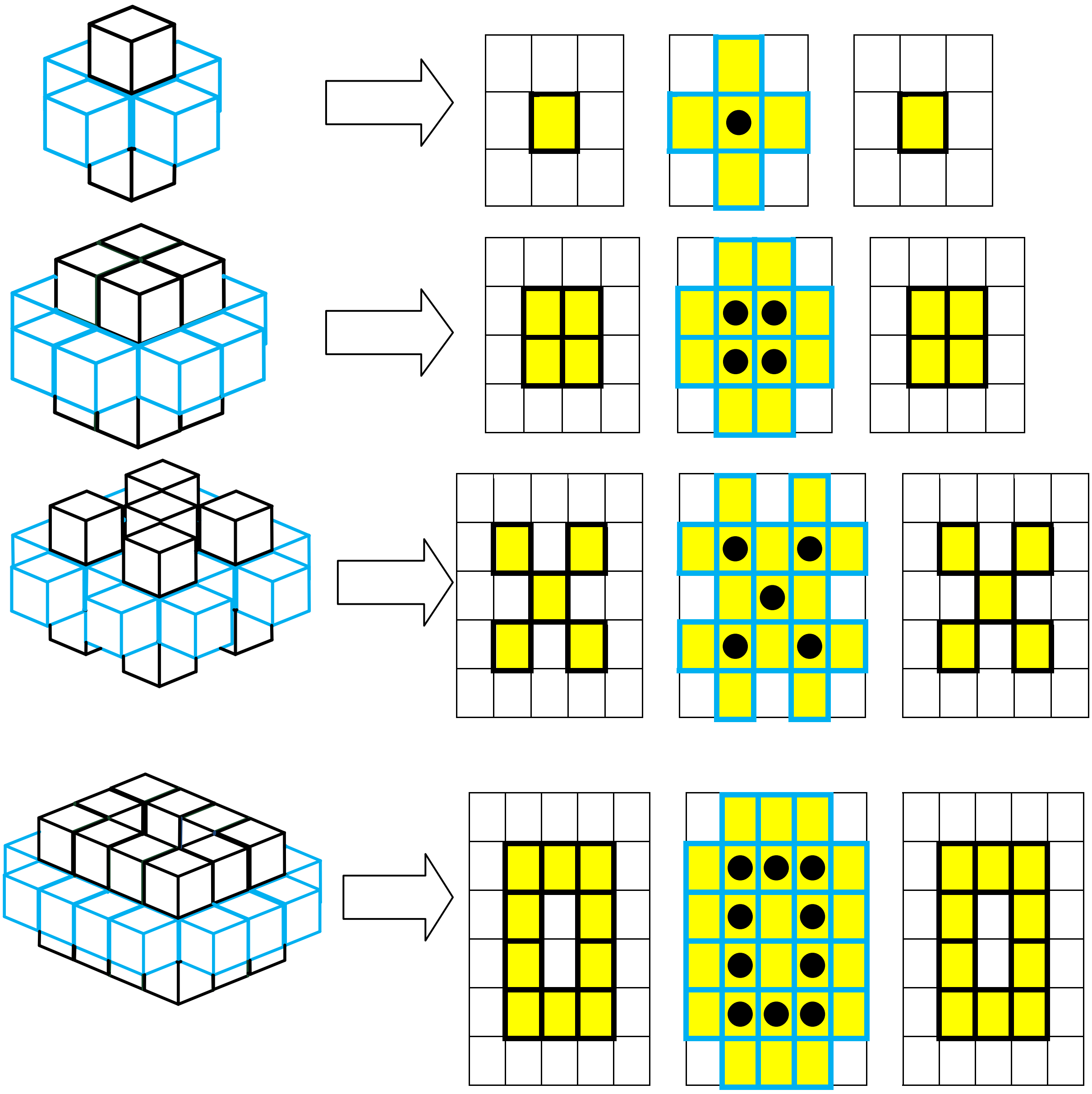
二、點燈技巧

首先，我們研究平面的點燈技巧，發現其點法並不是隨意亂點，而是由一些特定的點法所造成的圖形組合而成。



1 點　4 點　5 點　10 點

以上是平面點燈經常會用到的基本圖形，各點的順序不拘，造成的點亮效果一樣。推展到立體，基本圖形更多元，但比較常用的還是以上四個平面圖形的延伸。

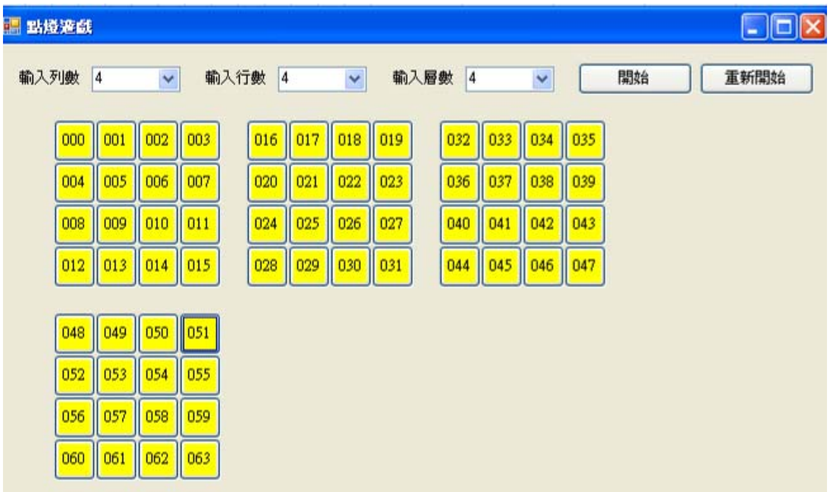


三、實驗的進行

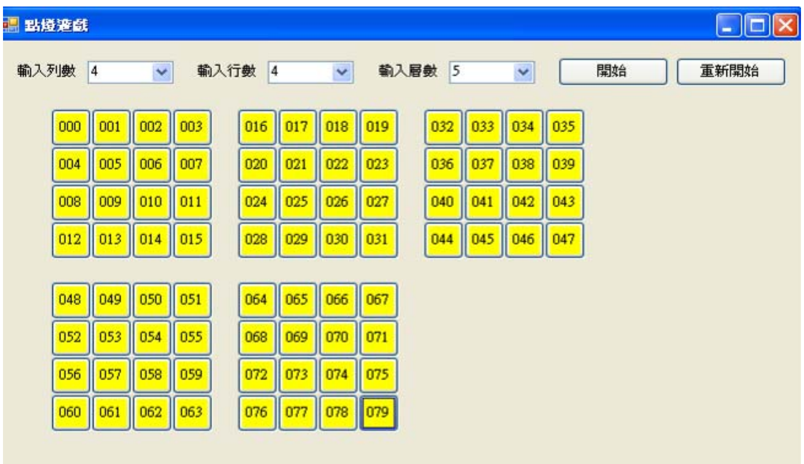
本研究利用設計的程式，開始嘗試解立體的圖形，並將結果記錄下來，以便討論。以下為任意 3 種不同立體結構展現之圖形。

(1) 3x3x3 的立體圖

(2) 4x4x4 的立體圖



(3) 4x4x5 的立體圖

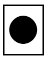


陸、分析研究結果

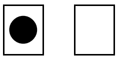
我們完成 a×b×c (a≦b≦4，c≦5，a、b、c 均為自然數) 3D 立體結構點燈的測試，結果與討論如下：

第一種類型 - 當 a=1、b=1 時，點燈之方法：

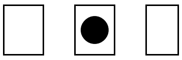
1x1x1



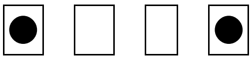
1x1x2



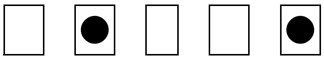
1x1x3



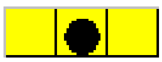
1x1x4



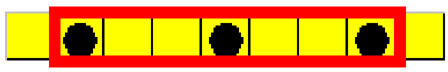
1x1x5



1x1xc 的 3D 結構，也可以當成是 1xcx1 ，即 1xc (2D)。所以 1x1xc 可當作 1xc 之 2D 點燈。我們發現，不管 c 為何數時，都可以使用圖 1 的解法拼湊而成，舉例來說，當 c=7 時，可以用 3 組圖 1 拼湊而成(圖 2) ，所以 1x1xc 的點燈方法可以無限延伸。



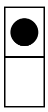
(圖 1)



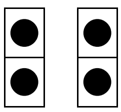
(圖 2)

第二種類型 - 當 a=1、b=2 時，點燈之方法：

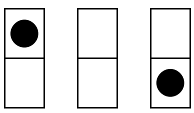
1x2x1



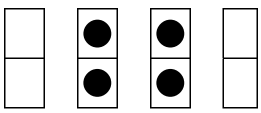
1x2x2



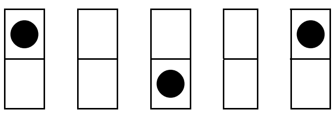
1x2x3



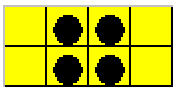
1x2x4



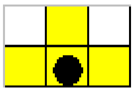
1x2x5



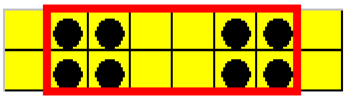
1x2xc 的 3D 結構，可以當成是 2xcx1，即 2xc (2D)，所以 1x2xc 可以看成 2xc 之 2D 點燈。我們發現當 c=2n 時，可以使用圖 3 的解法不斷鑲嵌而成，當 c=2n-1 時，可以使用圖 4 的解法不斷鑲嵌而成，舉例來說，當 c=6 時，可用 2 組圖 3 去鑲嵌而成(圖 5)，當 c=7 時，可用 4 組圖 4 去鑲嵌而成(圖 6)，所以 1x2xc 的解法有規律可循。



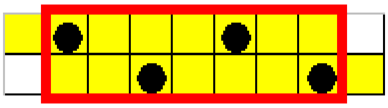
(圖 3)



(圖 4)



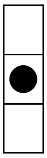
(圖 5)



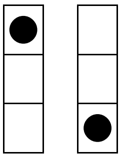
(圖 6)

第三種類型 - 當 a=1、b=3 時，點燈之方法：

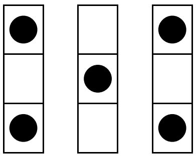
1x3x1



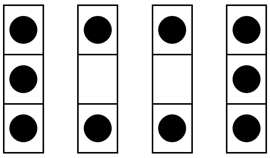
1x3x2



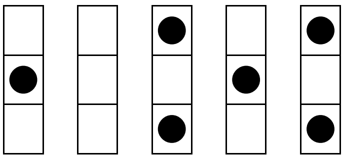
1x3x3



1x3x4

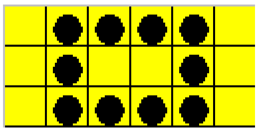


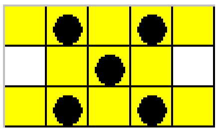
1x3x5

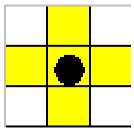


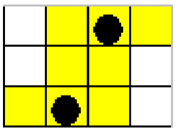
1x3xc 的結構，可以看成是 3xcx1，而 1x3xc 即是 2D 的 3xc。當 c=6n、6n-1、6n-2 時，都可以使用圖 7 的解法來拼湊而成，當 c=6n-3、6n-5 時，可以使用圖 8-1 和圖 8-2 的解法不斷鑲嵌而成，當 c=6n-4 時，可以使用圖 9-1、圖 9-2、圖 9-3 和圖 9-4 的解法不斷鑲嵌而成，舉例來說，當 c=7 時，可用圖 8-1 和圖 8-2 鑲嵌而成 (圖 10)，當 c=8 時，可以使用圖 9-1、圖 9-2、圖 9-3 和圖 9-4 鑲嵌而成 (圖 11)，當 c=9 時，可用圖 8-1 和圖 8-2 鑲嵌而

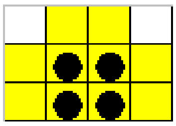
成 (圖 12)，當 c=10 時，可用 2 組圖 7 去鑲嵌而成 (圖 13)，當 c=11 時，也可用 2 組圖 7 去鑲嵌而成 (圖 14) ，所以 1×3×c 都有解。

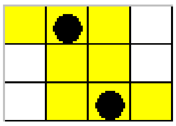

(圖 7)

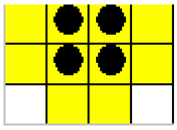

(圖 8-1)

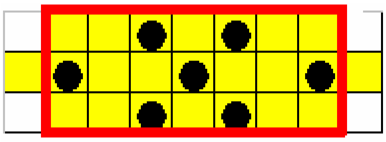

(圖 8-2)

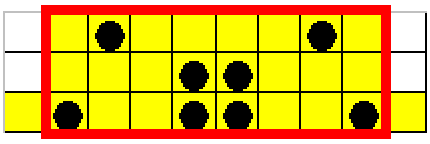

(圖 9-1)

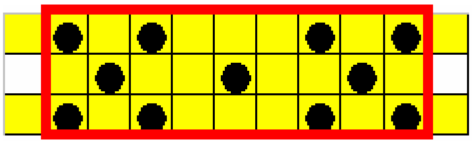

(圖 9-2)

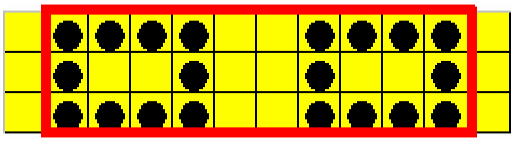

(圖 9-3)

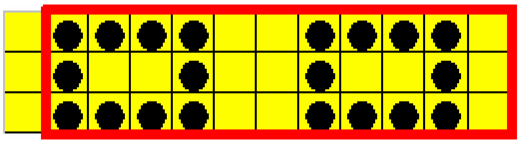

(圖 9-4)


(圖 10)


(圖 11)

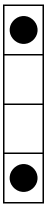

(圖 12)


(圖 13)

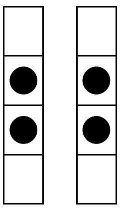

(圖 14)

第四種類型 - 當 a=1、b=4 時，點燈之方法：

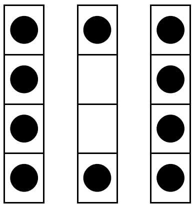
1×4×1



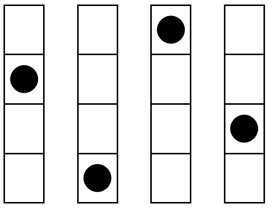
1×4×2



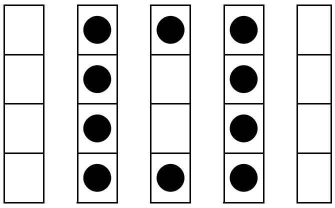
1×4×3



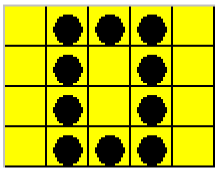
1×4×4

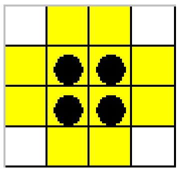


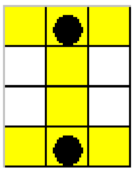
1×4×5

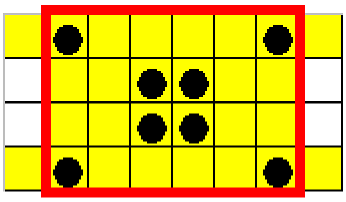


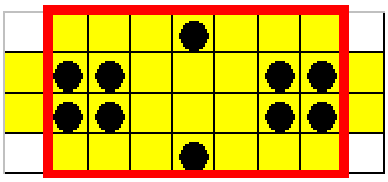
1×4×c 可以看成是 4×c×1，即為 2D 之 4×c 點燈。當 c=5n、5n-1、5n-2 時，可用圖 15 不斷拼湊而成，當 c=5n-3、5n-4 時，可用圖 16-1、圖 16-2 不斷鑲嵌而成，舉例來說，當 c=6 時，可用圖 16-1、圖 16-2 鑲嵌而成(圖 17)，當 c=7 時，可用圖 16-1、圖 16-2 鑲嵌而成(圖 18)，當 c=8 時，可用圖 15 拼湊而成(圖 19)，當 c=9 時，可用圖 15 拼湊而成(圖 20) ，所以 1×4×c 可以依上列方法解出。

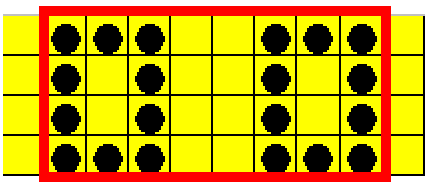

(圖 15)

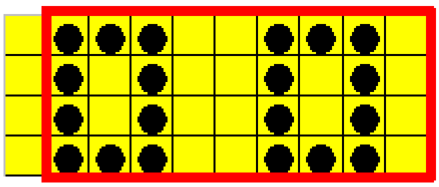

(圖 16-1)


(圖 16-2)


(圖 17)

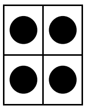

(圖 18)


(圖 19)

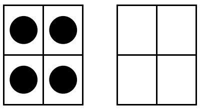

(圖 20)

第五種類型 - 當 a=2、b=2 時，點燈之方法：

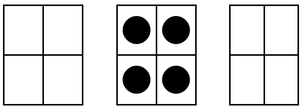
2×2×1



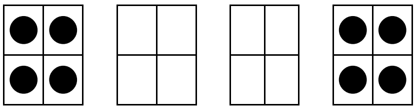
2×2×2



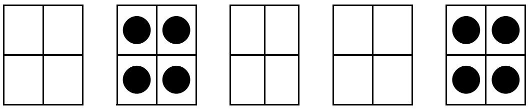
2×2×3



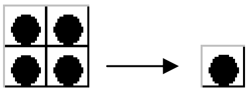
2×2×4



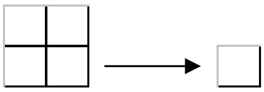
2×2×5



在 2×2×c 裡，每四個排再一起的點，可以看成一個點 (圖 21)，而每四格空格子可以看成一個空格子 (圖 22)，所以 2×2×c 可以當成 1×1×c 的結構。所以任何 2×2×c 都可解出。



(圖 21)

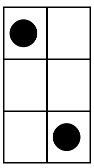


(圖 22)

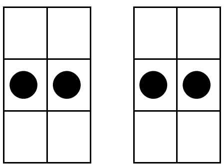
因為 2×2×c 可以看成 1×1×c，所以只要 1×1×c 有的特性，不管是對稱、順序......等，這些 2×2×c 都有，因此解法亦相同。

第六種類型 - 當 a=2、b=3 時，點燈之方法：

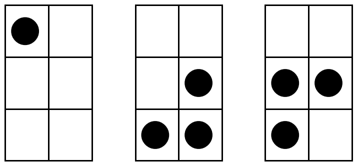
2×3×1



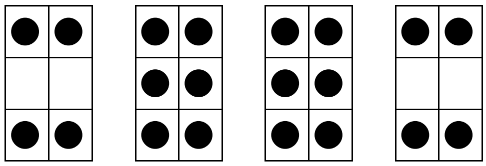
2×3×2



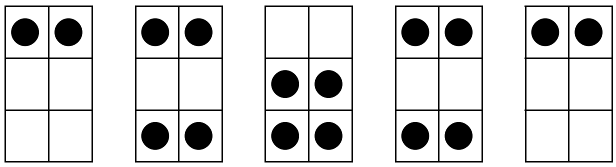
2×3×3



2×3×4



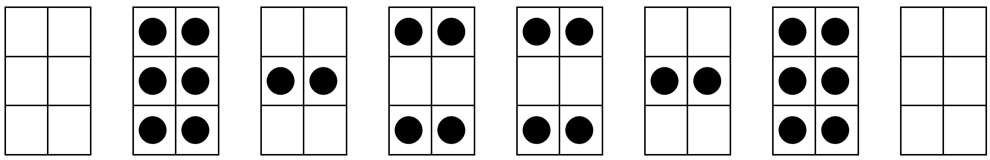
2×3×5



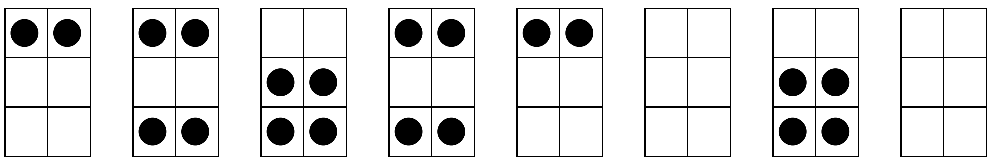
2×3×6 到 2×3×8 請見附錄(圖 1)

第六種類型主要是由(a)、(b)、(c)、(d)、(e)，5 種規律所組成的，這 5 種規律都是以 8 層為一次循環 (如下圖)。

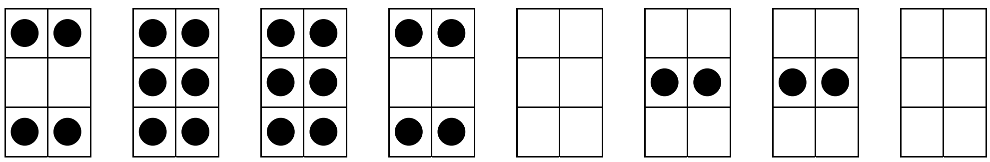
(a)



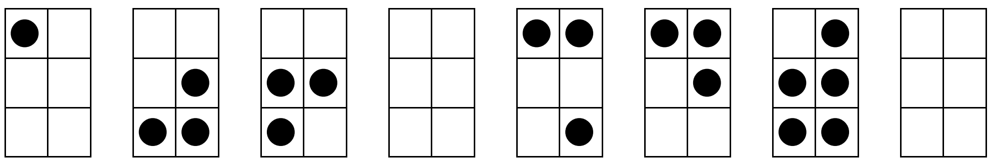
(b)



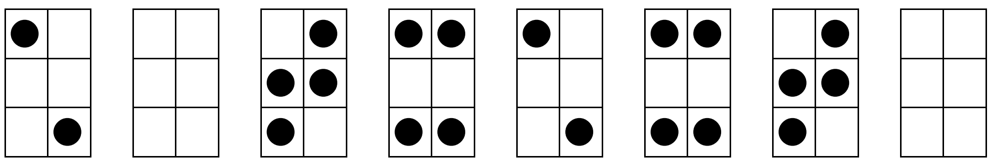
(c)



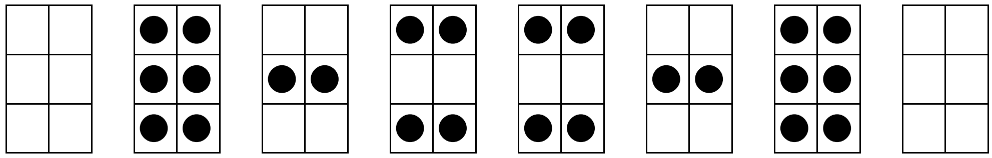
(d)



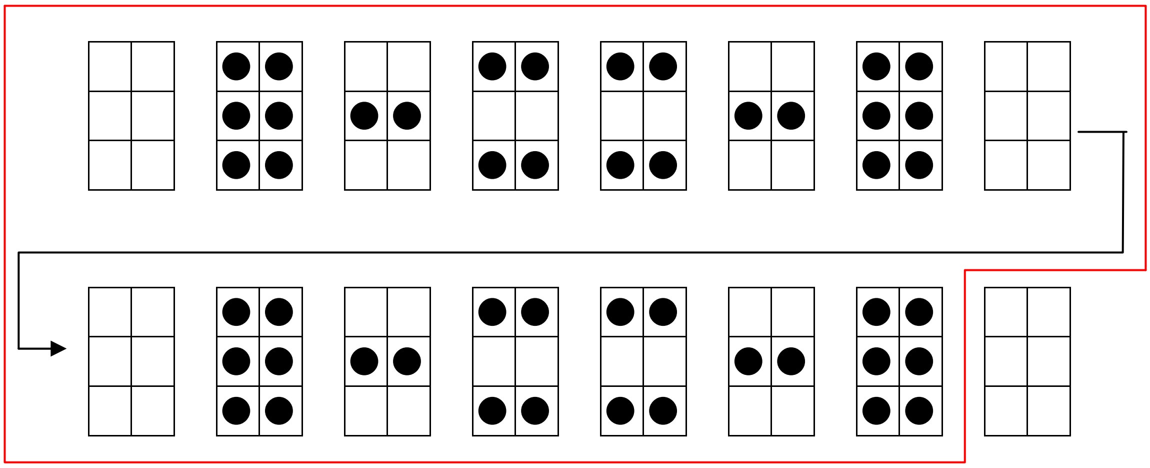
(e)



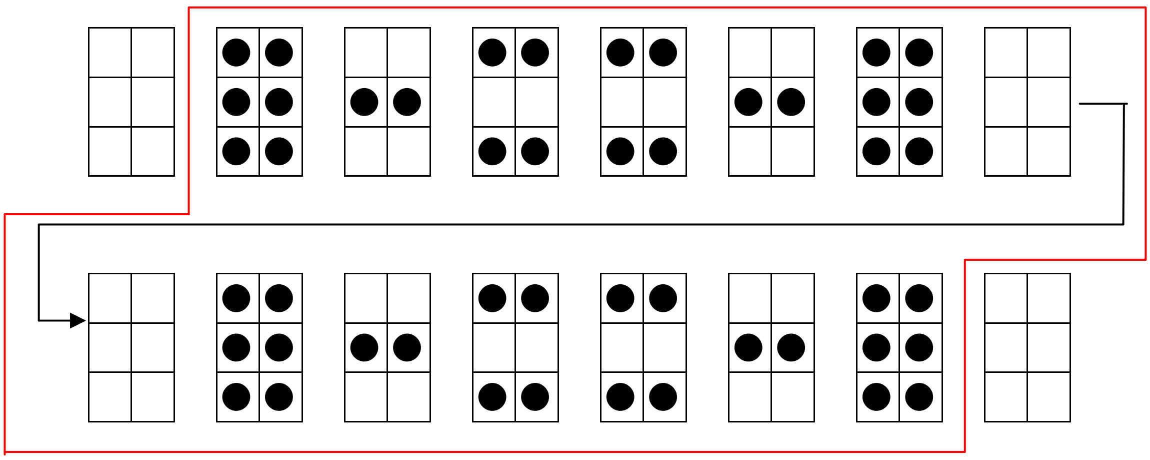
當 c=8n 時，可用(a)類規律拼湊而成（如下圖）



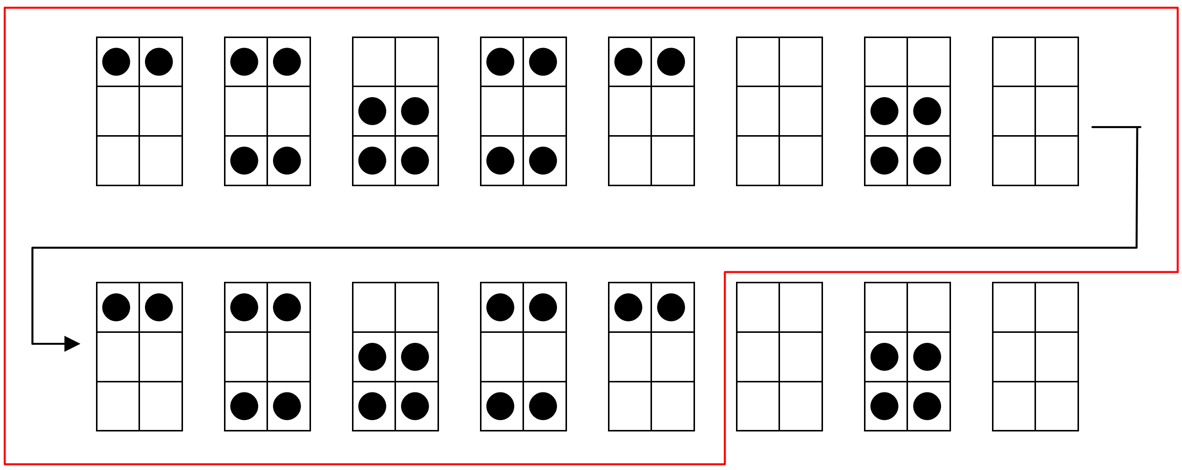
當 c=8n-1 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去最後一層（如下圖）



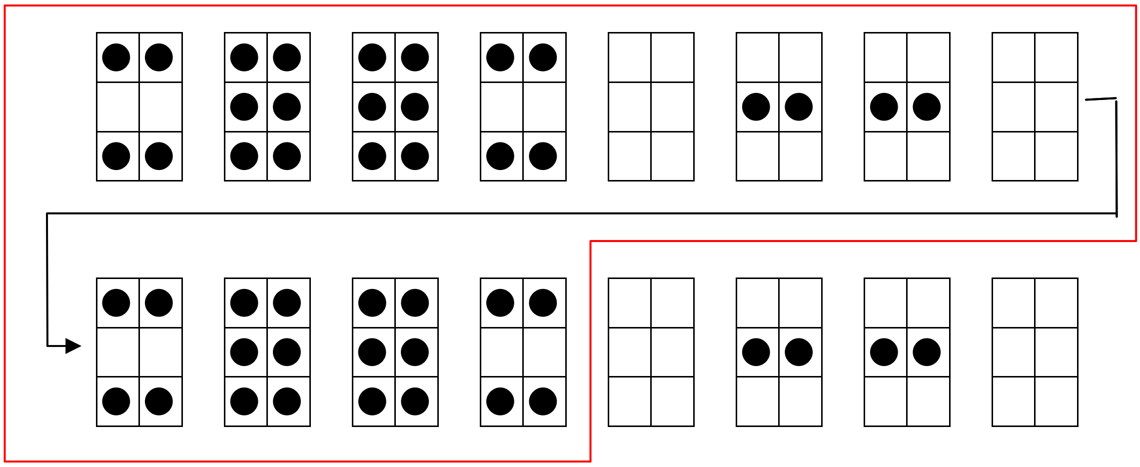
當 c=8n-2 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去第一層和最後一層（如下圖）



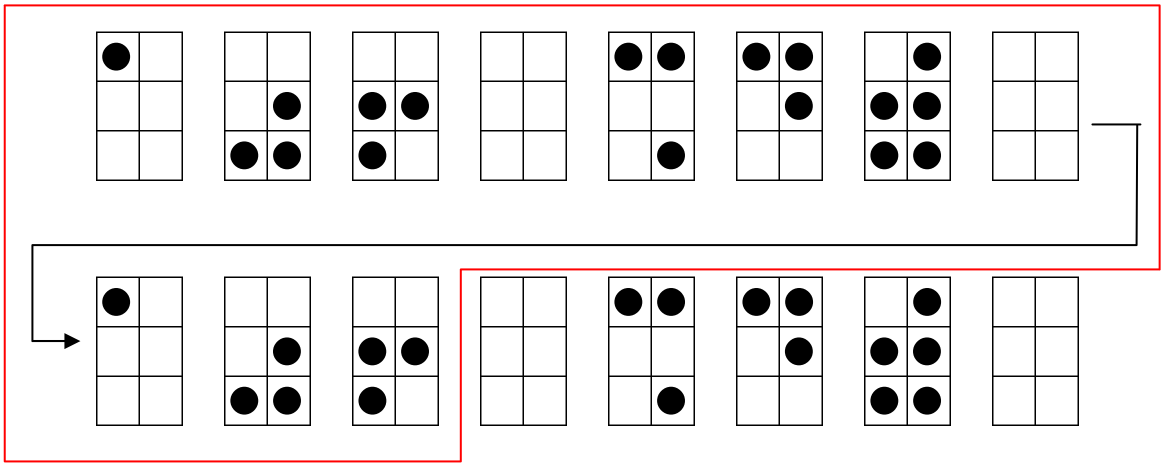
當 c=8n-3 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖）



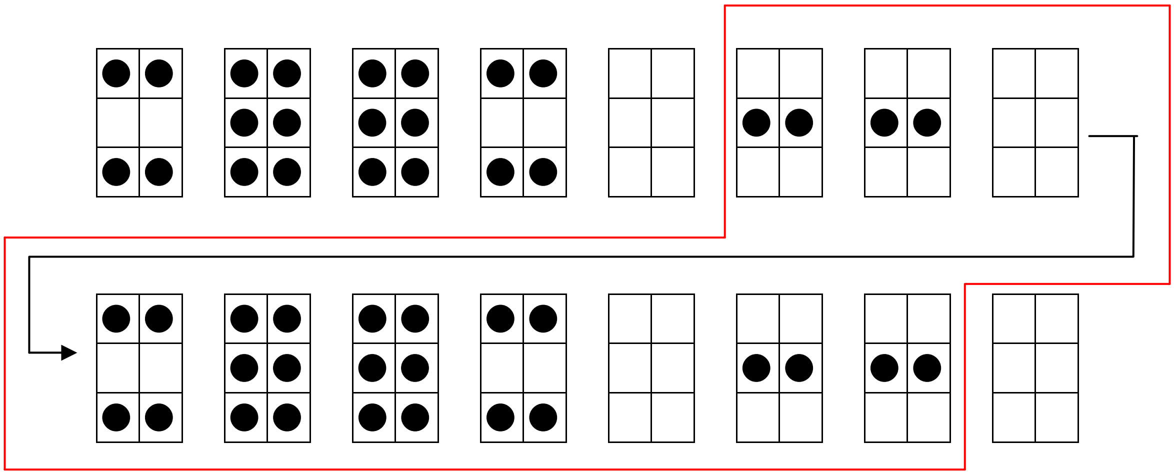
當 c=8n-4 時，可用(c)類規律拼湊而成（如下圖)



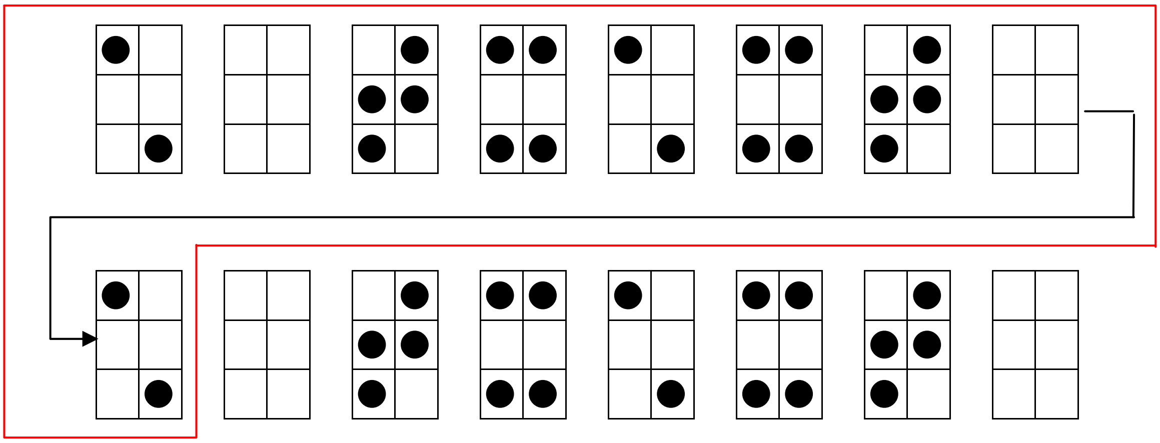
當 c=8n-5 時，可用(d)類規律拼湊而成（如下圖)



當 c=8n-6 時，可用(c)類規律拼湊而成（如下圖)



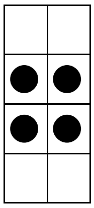
當 c=8n-7 時，可用(e)類規律拼湊而成（如下圖)



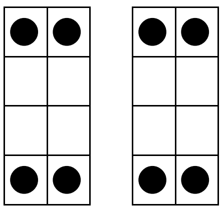
所以 2×3×c 的解法只要依照上述 5 種圖形解法加以排列，便通通都能解出。

第七種類型 - 當 a=2、b=4 時，點燈之方法：

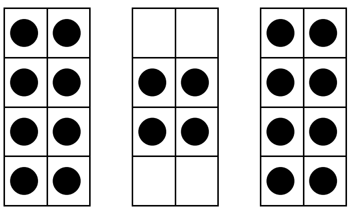
2×4×1



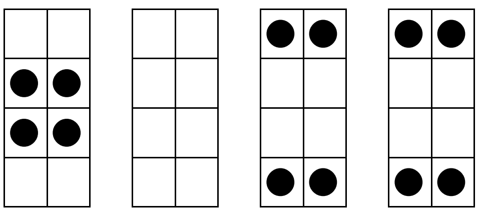
2×4×2



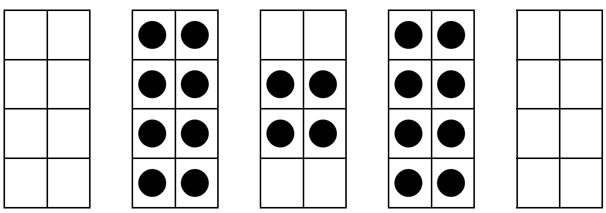
2×4×3



2×4×4

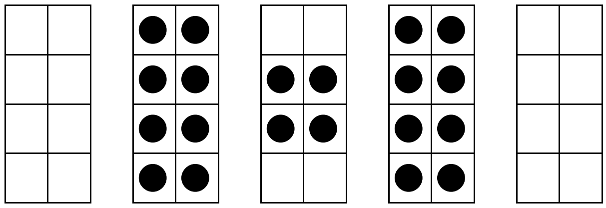


2×4×5

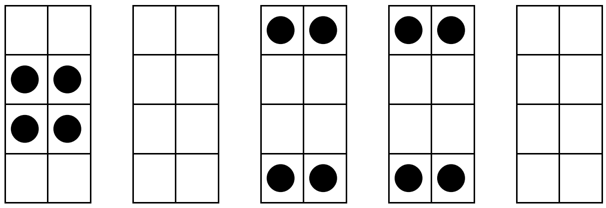


第七種類型主要是由 (a)和(b) 2 種規律所組成，這 2 種規律以 5 層為一次循環 (如下圖)。

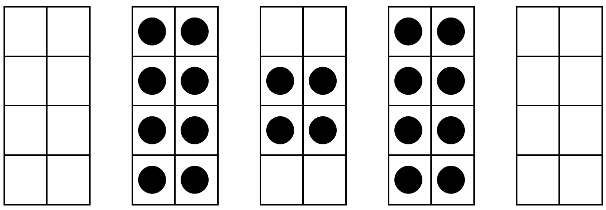
(a)



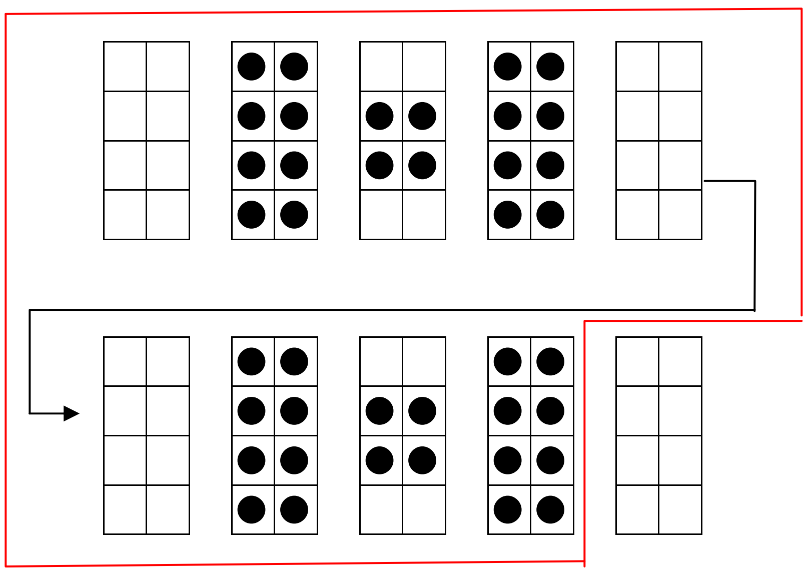
(b)



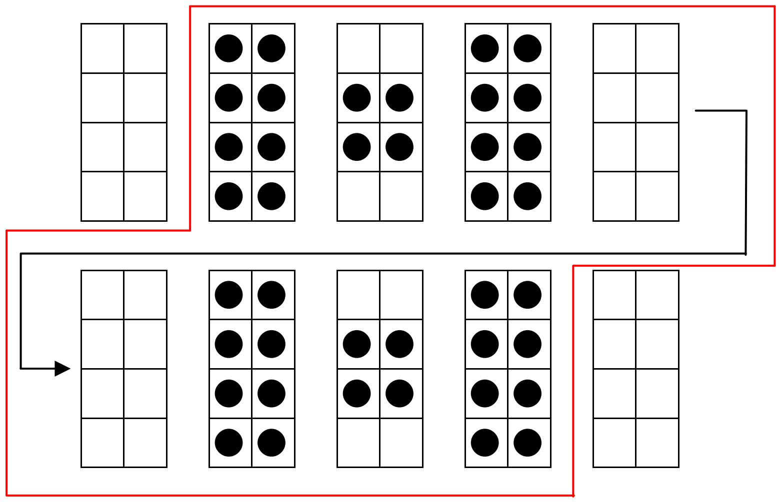
當 c=5n 時，可用(a)類規律拼湊而成(如下圖)



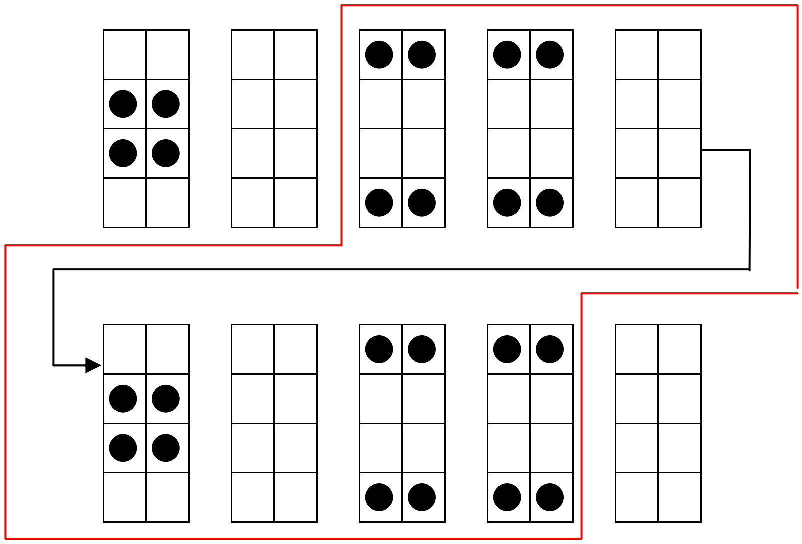
當 c=5n-1 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去最後一層(如下圖)



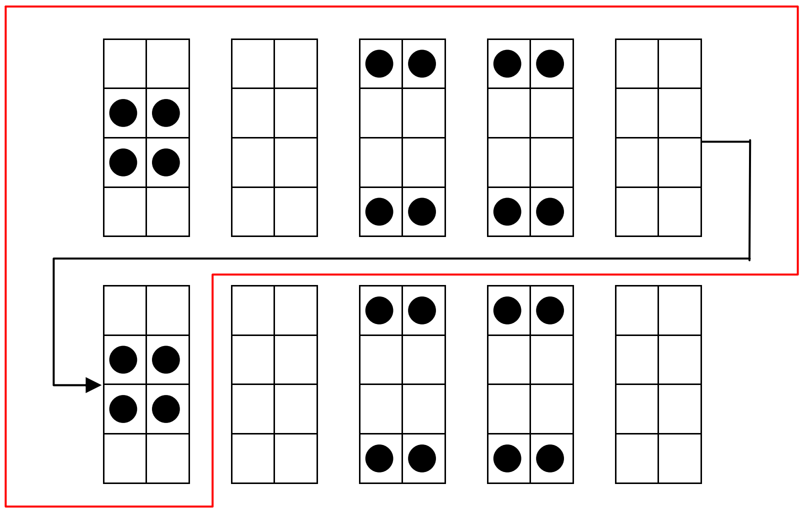
當 c=5n-2 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去第一層和最後一層(如下圖)



當 c=5n-3 時，可用(b)類規律拼湊而成，但要捨去第前二層和最後一層(如下圖)



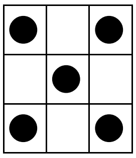
當 c=5n-4 時，可用(b)類規律拼湊而成(如下圖)



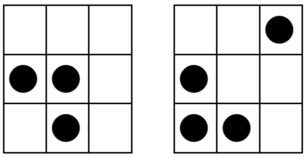
所以 2×4×c 之結構都可以依以上方法解出。

第八種類型 - 當 a=3、b=3 時，點燈之方法：

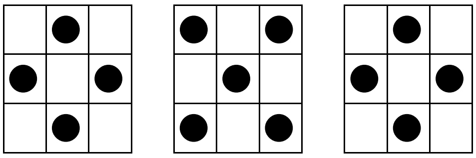
3×3×1



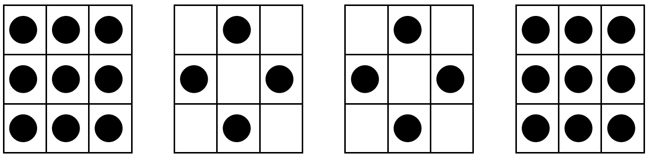
3×3×2



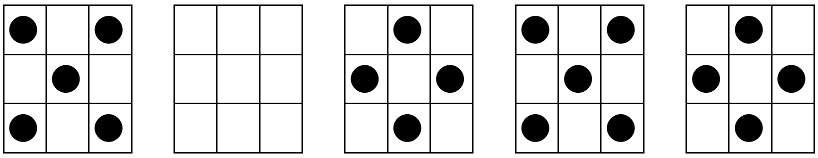
3×3×3



3×3×4



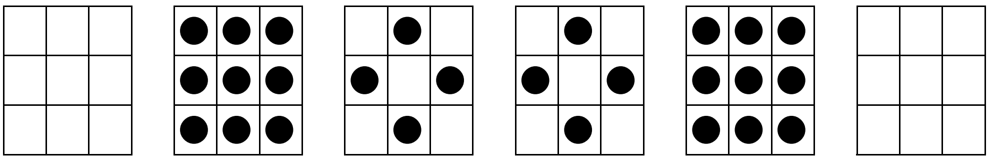
3×3×5



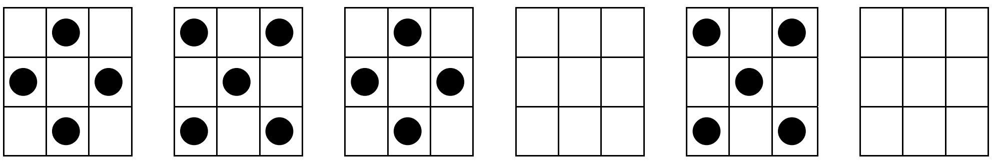
3×3×6 請見附錄(圖 2)

第八種類型主要是由(a)、(b)、(c)，3 種規律所組成的，這 3 種規律都是以 6 層為一循環 (如下圖)。

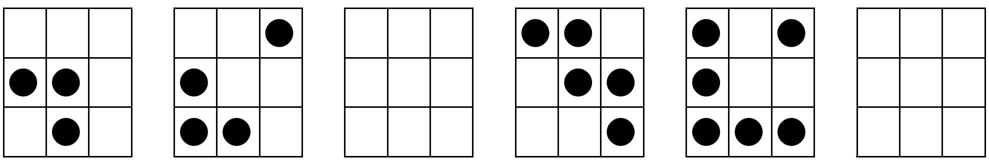
(a)



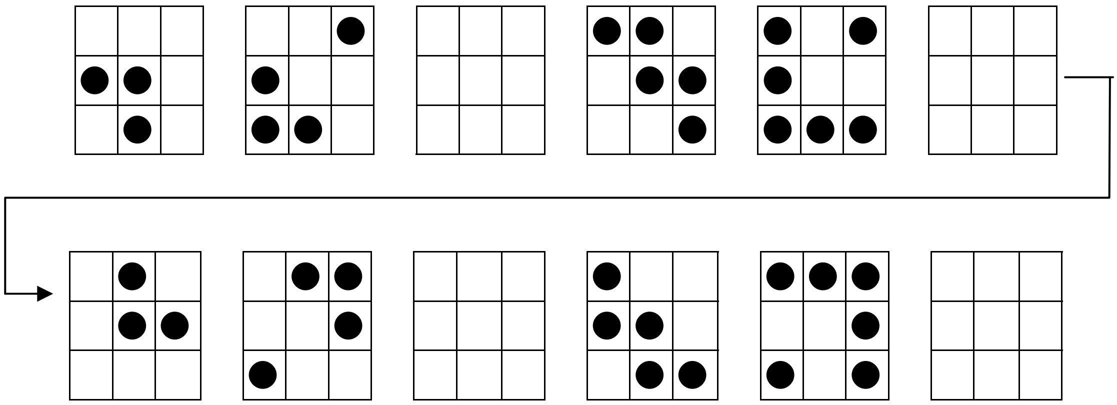
(b)



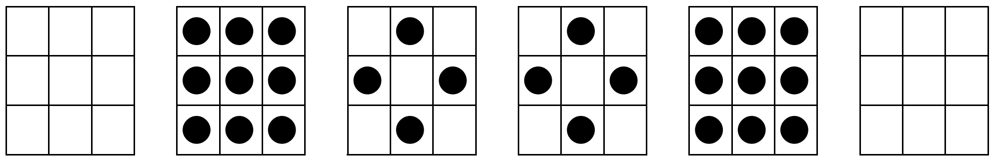
(c)



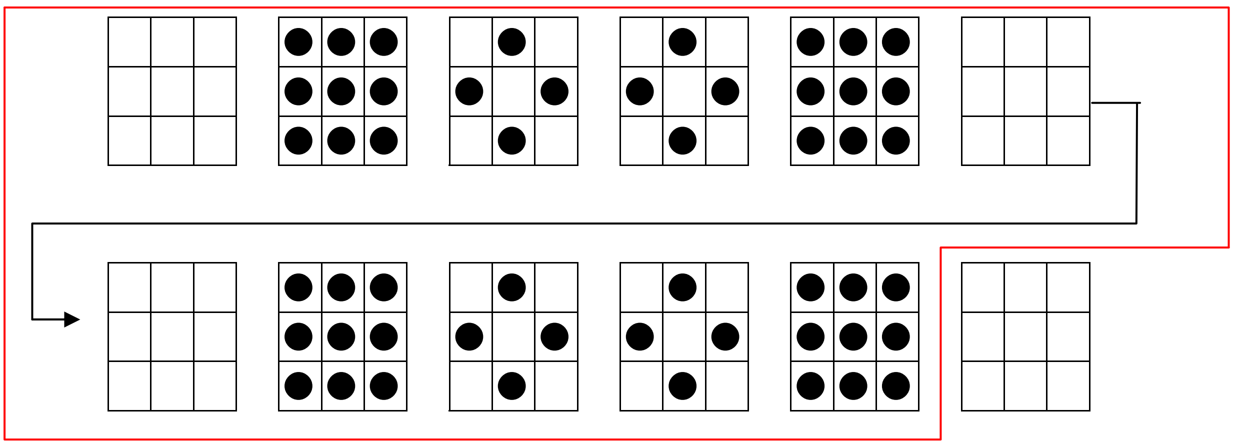
其中，(c)的規律比較特殊，每循環一次就需要將每一層的圖案轉 180 度（如下圖)：



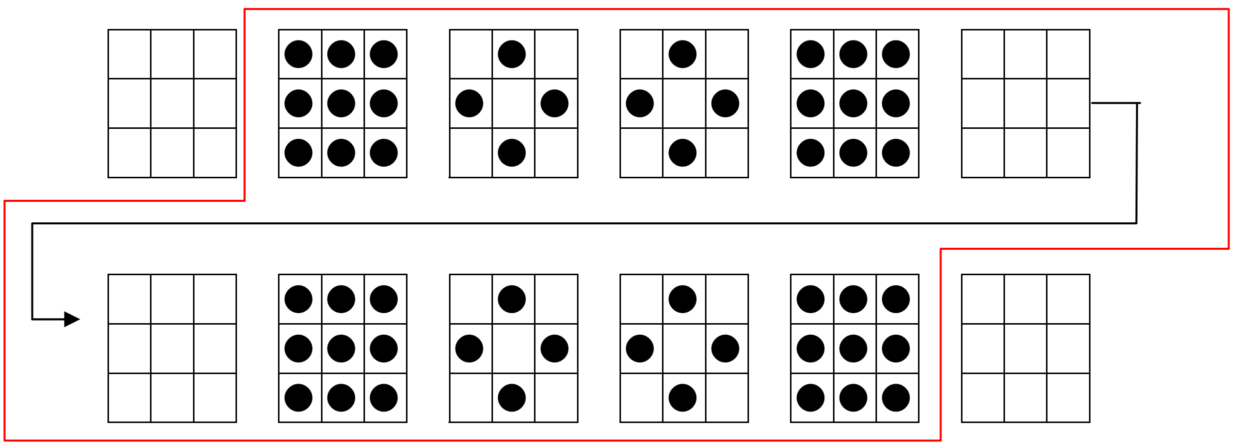
當 c=6n 時，可用(a)類規律拼湊而成（如下圖)



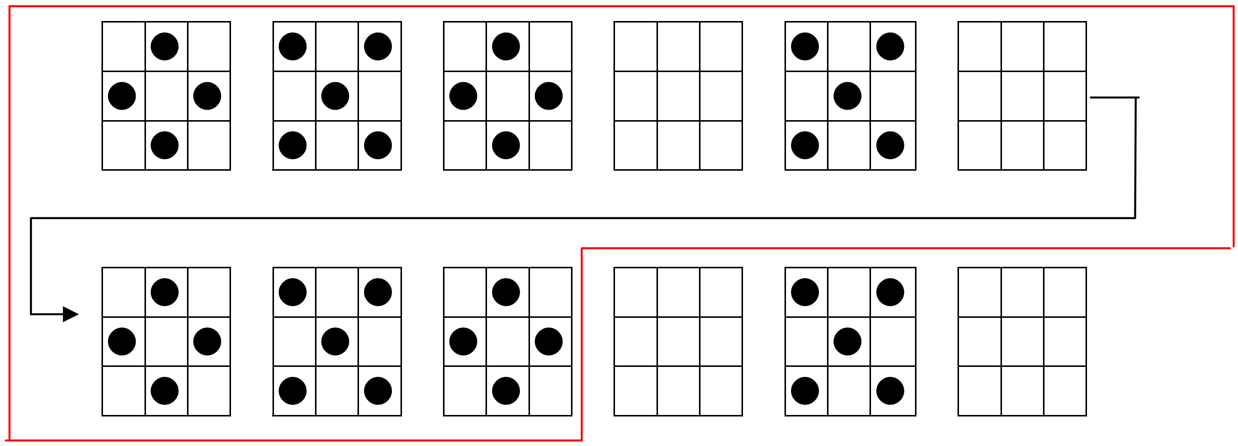
當 c=6n-1 時，也可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去最後一層（如下圖)



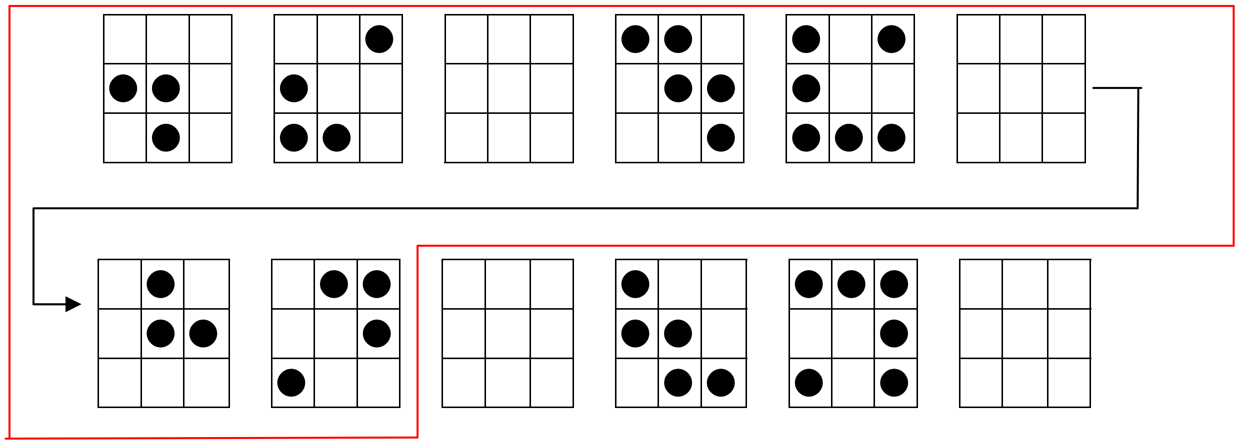
當 c=6n-2 時，也可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去第一層和最後一層（如下圖)



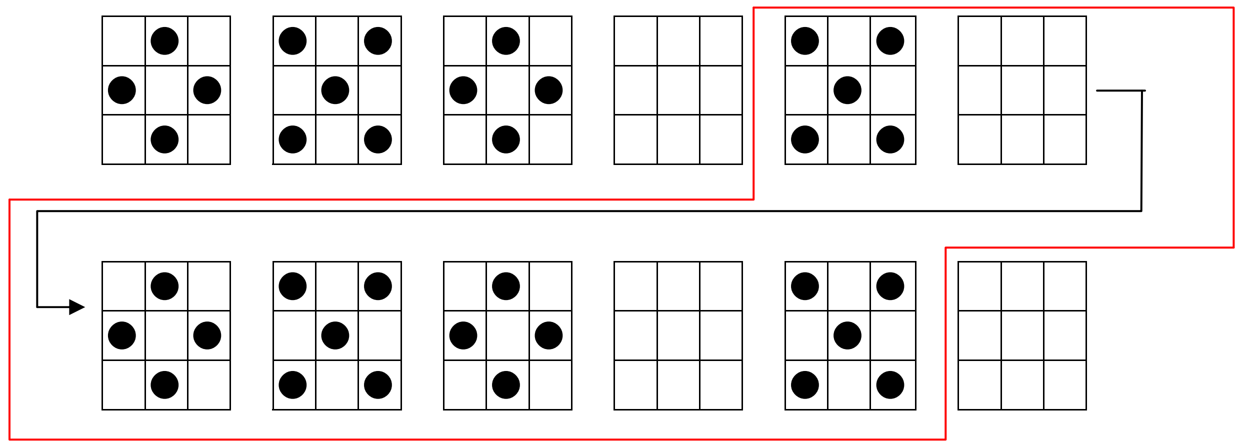
當 c=6n-3 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖)



當 c=6n-4 時，可用(c)類規律拼湊而成，但要捨去最後四層（如下圖)



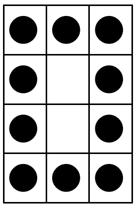
當 c=6n-5 時，可用(b)類規律拼湊而成，但要捨去前面四層（如下圖)



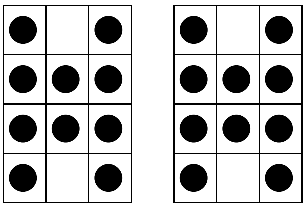
所以 3x3xc 之結構都可以依以上方法解出。

第九種類型 - 當 a=3、b=4 時，點燈之方法：

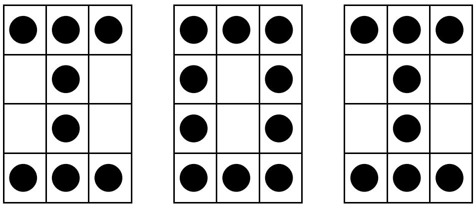
3×4×1



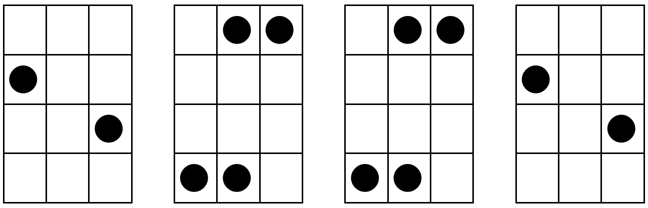
3×4×2



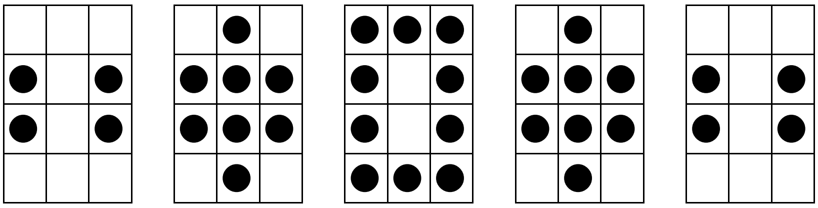
3×4×3



3×4×4



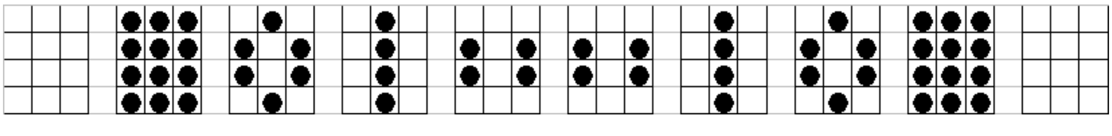
3×4×5



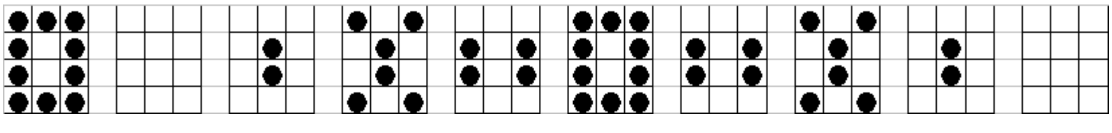
3×4×6 到 3×4×10 請見附錄(圖 3)

第九種類型主要是由(a)、(b)、(c)、(d)、(e)，5 種規律所組成的，這 5 種規律都是以 10 層為一循環 (如下圖)：

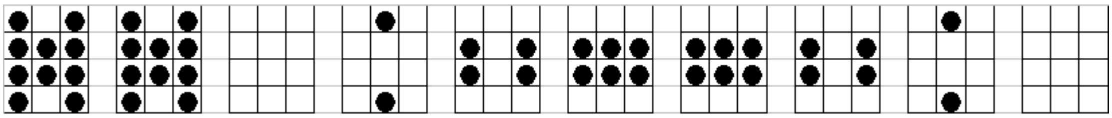
(a)



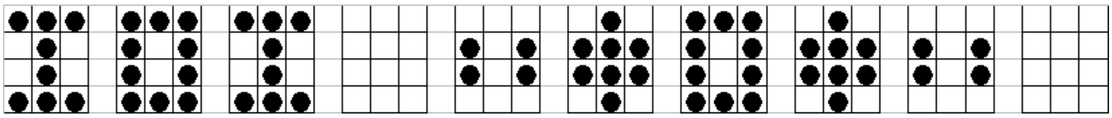
(b)



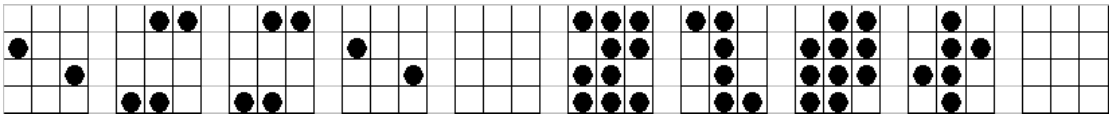
(c)



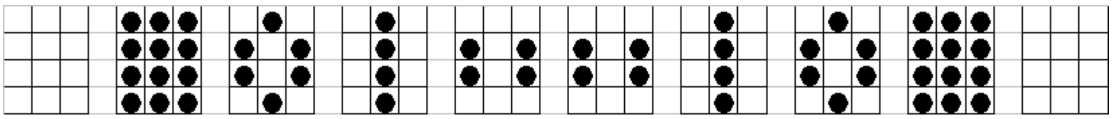
(d)



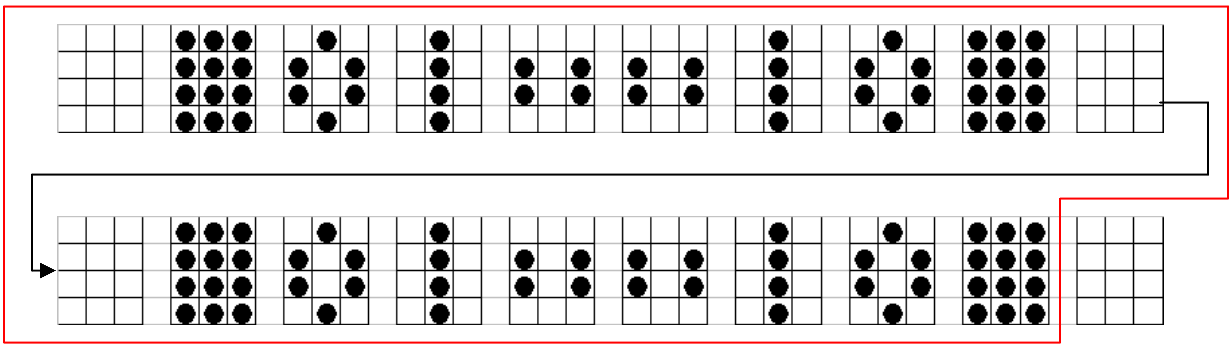
(e)



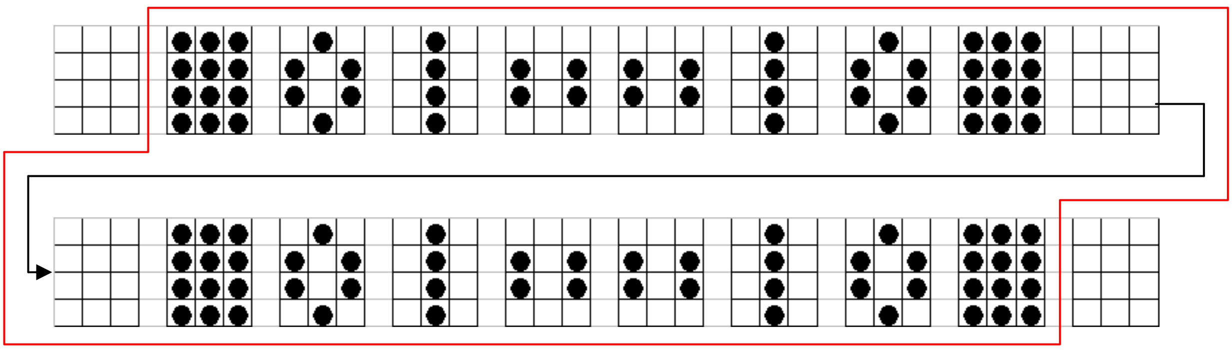
當 c=10n 時，可用(a)類規律拼湊而成 (如下圖)



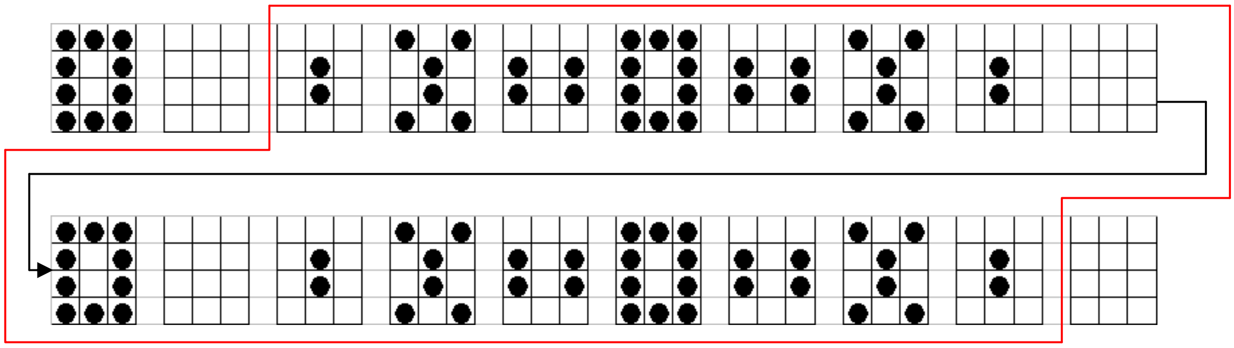
當 c=10n-1 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去最後一層 (如下圖)



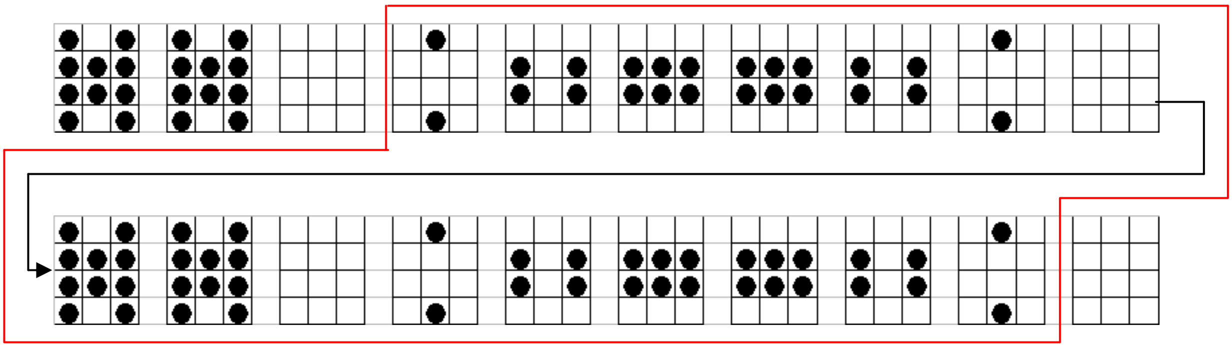
當 c=10n-2 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去第一層和最後一層 (如下圖)



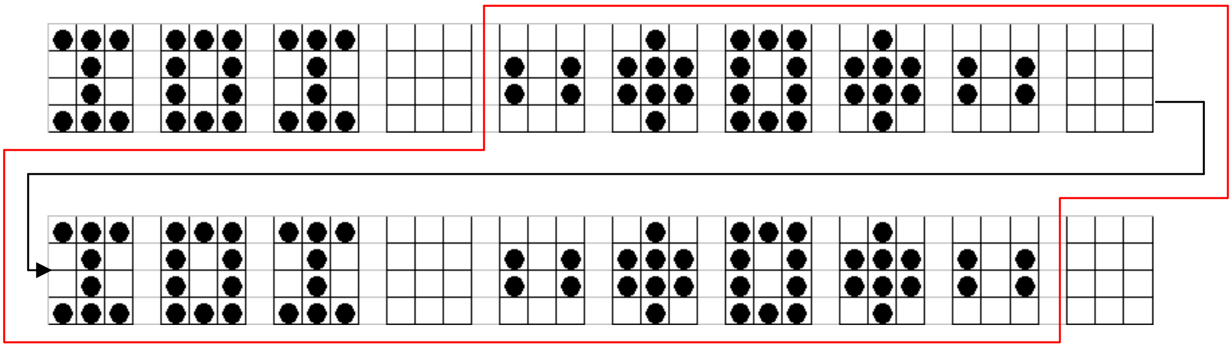
當 c=10n-3 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖）



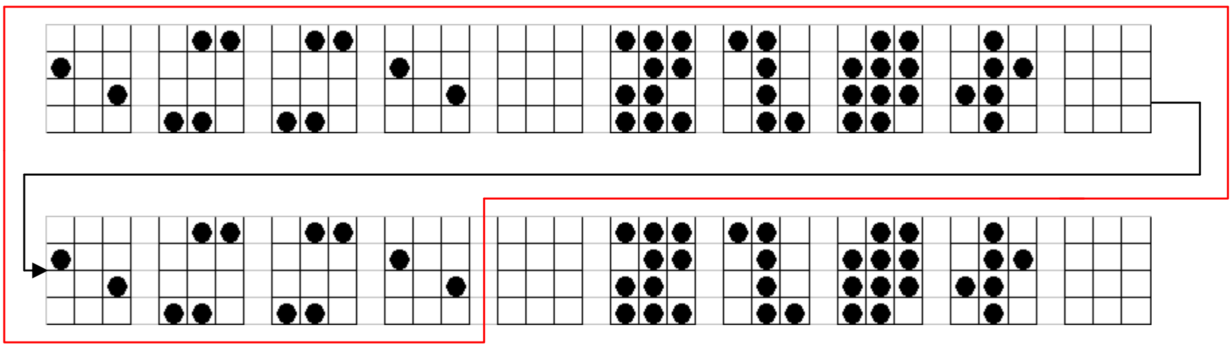
當 c=10n-4 時，可用(c)類規律拼湊而成（如下圖）



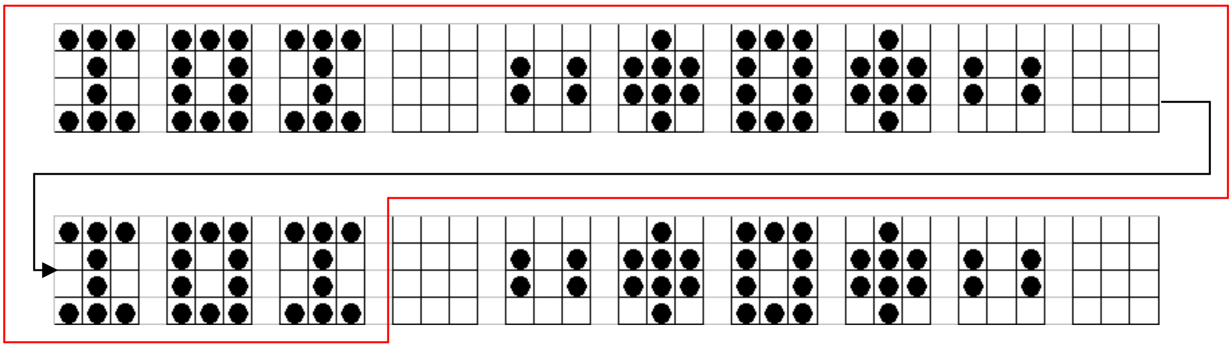
當 c=10n-5 時，可用(d)類規律拼湊而成（如下圖）



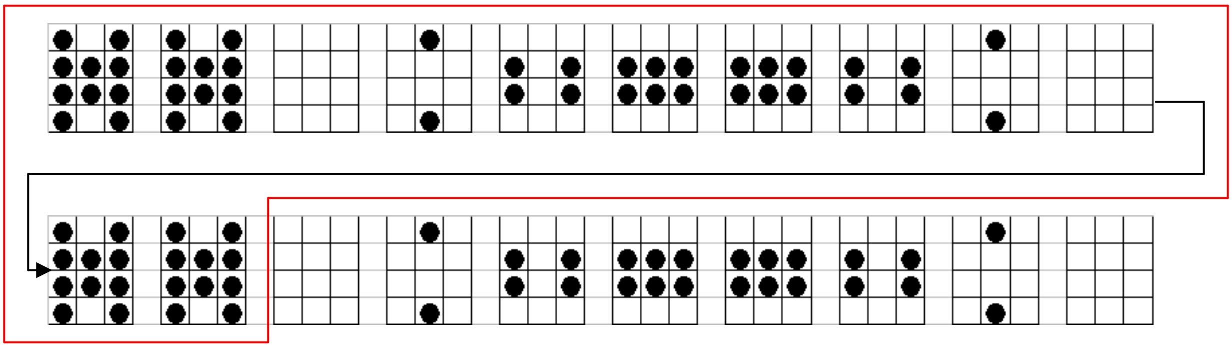
當 c=10n-6 時，可用(e)類規律拼湊而成（如下圖）



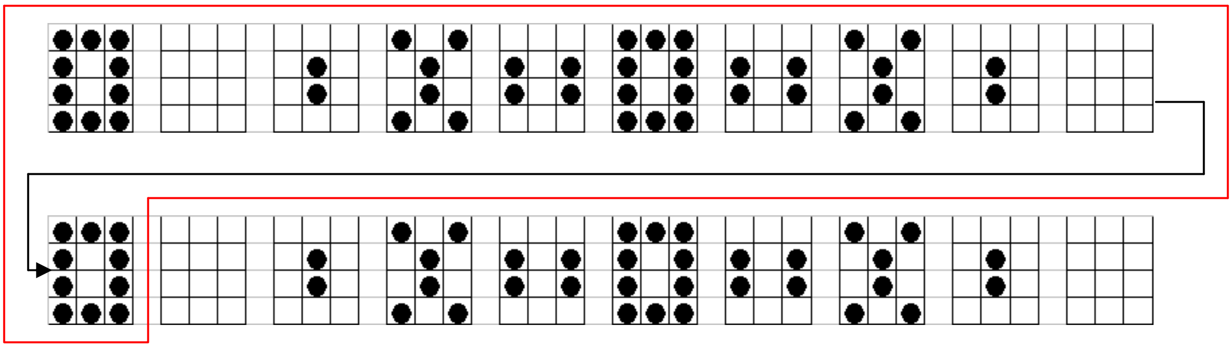
當 c=10n-7 時，可用(d)類規律拼湊而成（如下圖)



當 c=10n-8 時，可用(c)類規律拼湊而成（如下圖)



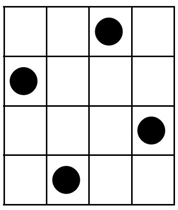
當 c=10n-9 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖)



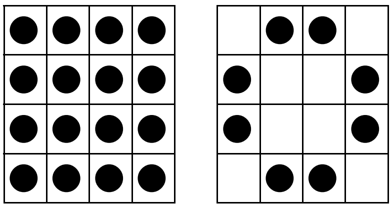
所以 3×4×c 之結構都可以依以上方法解出。

第十種類型 - 當 a=4、b=4 時，點燈之方法：

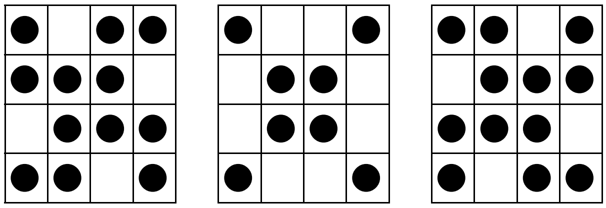
4×4×1



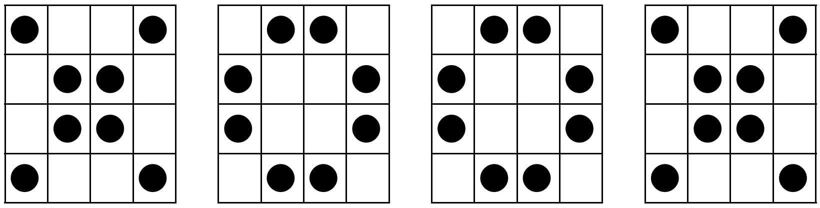
4×4×2



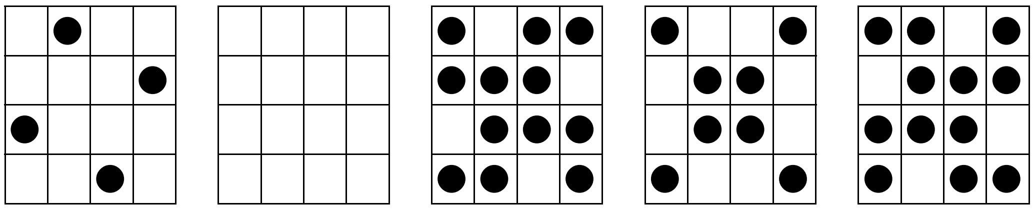
4×4×3



4×4×4



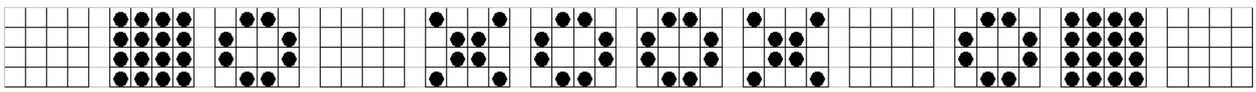
4×4×5



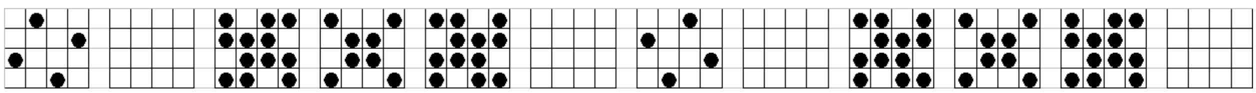
4×4×6 到 4×4×12 請見附錄(圖 4)

第十種類型主要是由(a)和(b) 2 種規律所組成，這 2 種規律都是以 12 層為一循環 (如下圖)。

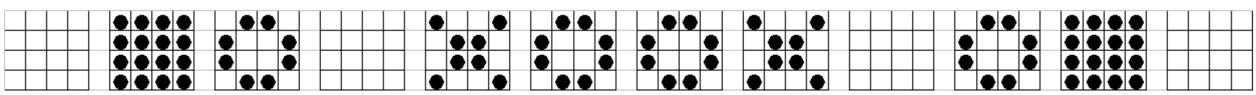
(a)



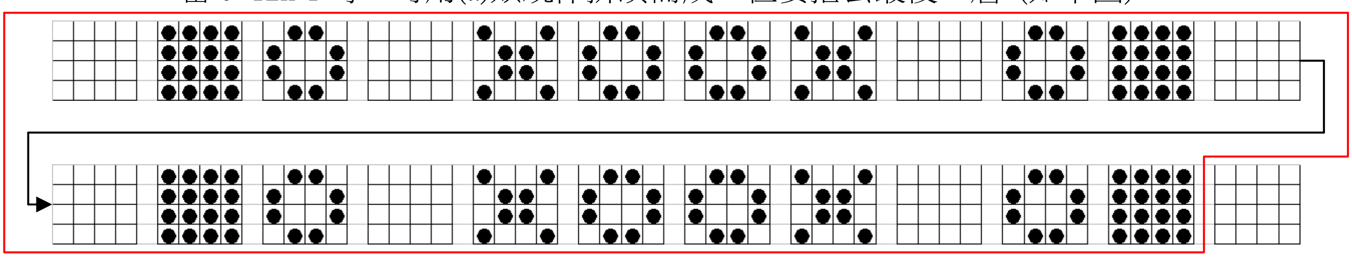
(b)



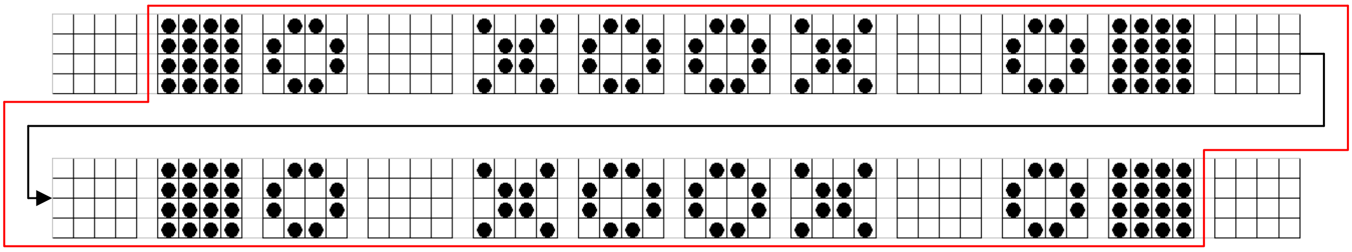
當 c=12n 時，可用(a)類規律拼湊而成 (如下圖)



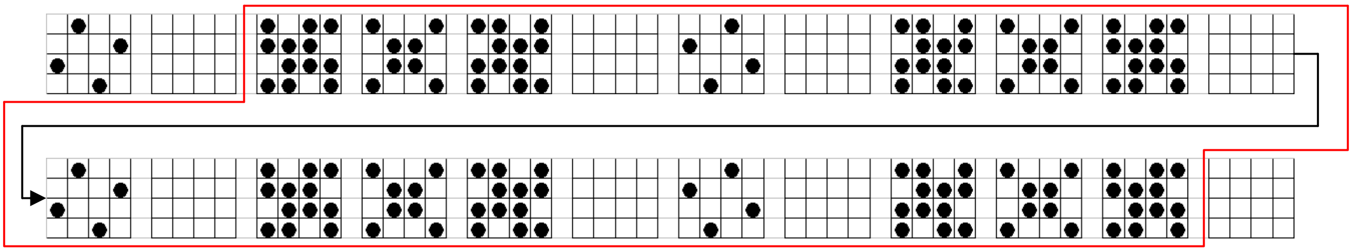
當 c=12n-1 時，可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去最後一層 (如下圖)



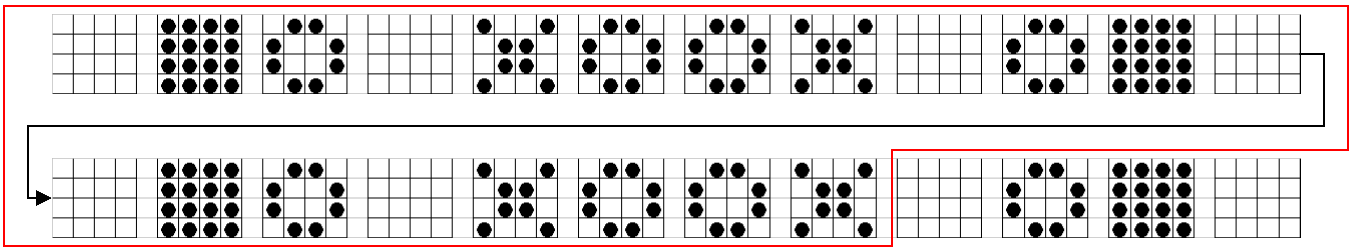
當 c=12n-2 時，也可用(a)類規律拼湊而成，但要捨去第一層和最後一層（如下圖)



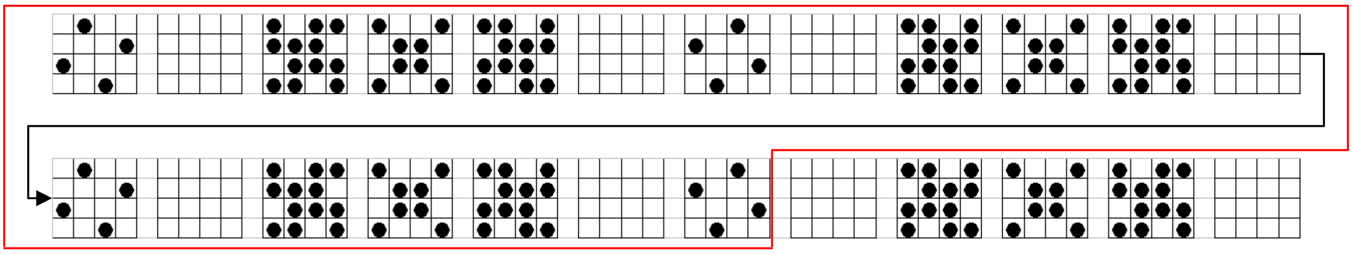
當 c=12n-3 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖)



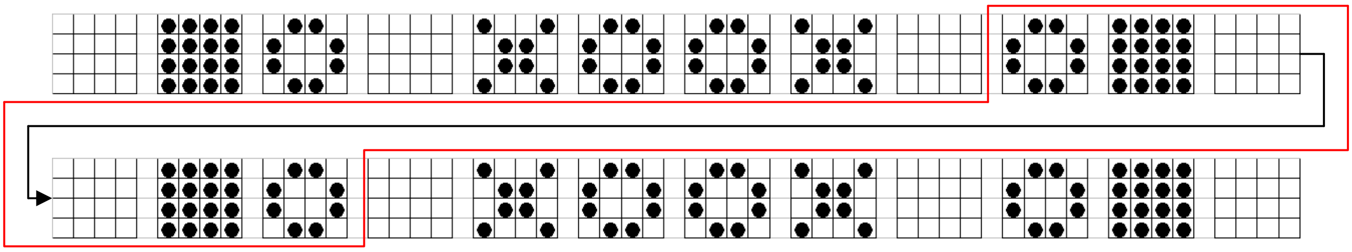
當 c=12n-4 時，可用(a)類規律拼湊而成（如下圖)



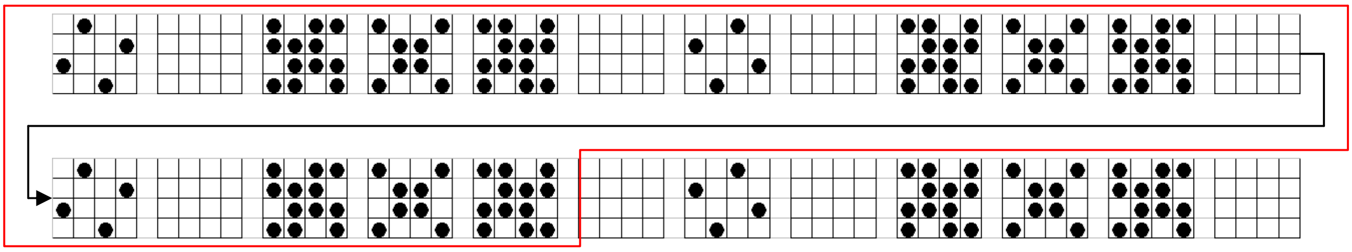
當 c=12n-5 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖)



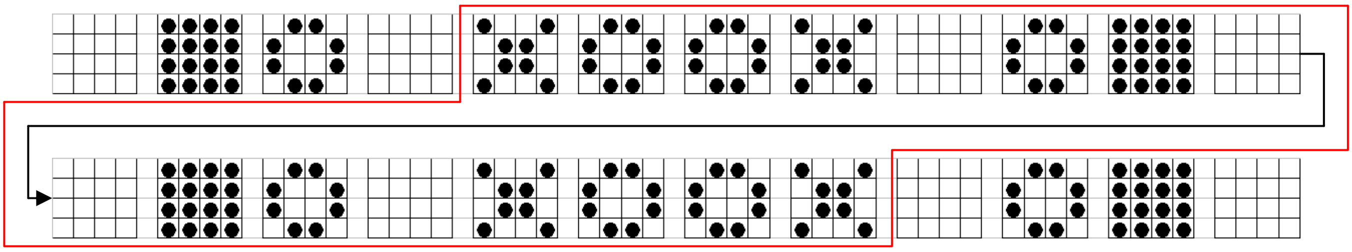
當 c=12n-6 時，可用(a)類規律拼湊而成（如下圖)



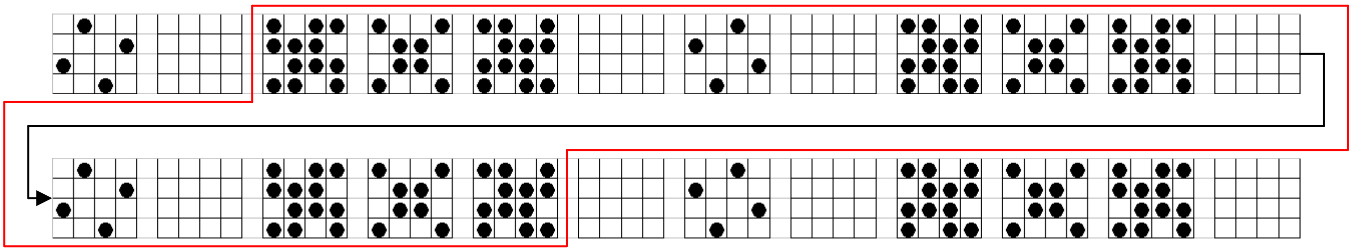
當 c=12n-7 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖）



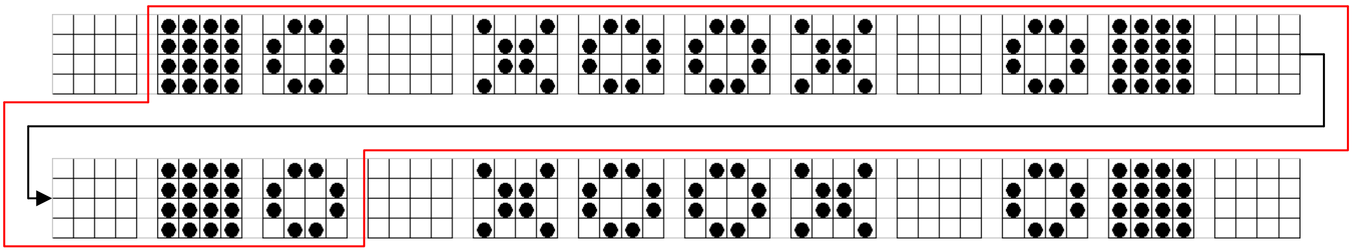
當 c=12n-8 時，可用(a)類規律拼湊而成（如下圖）



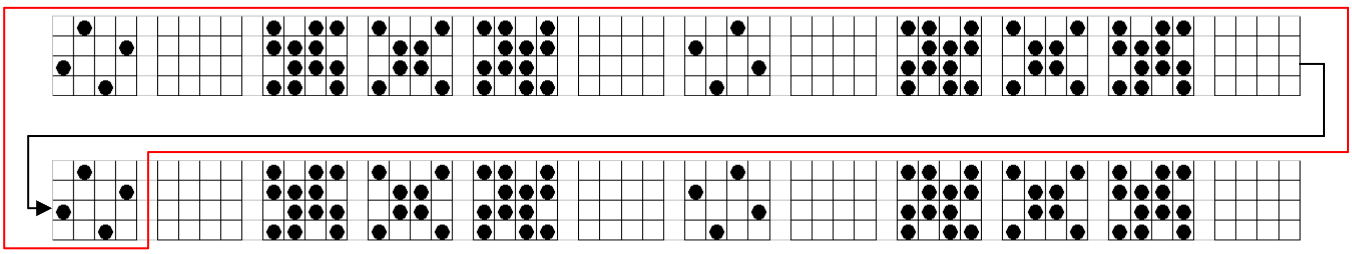
當 c=12n-9 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖）



當 c=12n-10 時，可用(a)類規律拼湊而成（如下圖）



當 c=12n-11 時，可用(b)類規律拼湊而成（如下圖）



所以 4×4×c 之結構都可以依以上方法解出。

柒、討論

一、立體點燈與密碼鎖的聯結

本研究在尋找立體點燈的解時，花費了不少時間，於是我們便想探討是否能將立體點燈求解應用到生活中，因此我們聯想到密碼鎖(把立體點燈運用在電腦程式加密的密碼鎖上)，並討論其與數字鎖的機率大小之比較。

一個立體點燈的密碼鎖，可以分為兩層的加密，第一層加密必須知道 a×b×c 為多少，而第二層加密必須知道要點選哪幾個方格。下表為解出一個 3×3×3 的密碼鎖所需考慮的所有可能。

a×b×c	計算方式	總和
1×1×1	1+1 種	2 種
1×1×2	1+2+2×1 種	5 種
1×1×3	1+3+3×2+3×2×1 種	16 種
1×2×1	1+2+2×1 種	5 種
1×2×2	1+4+4×3+4×3×2+4×3×2×1 種	65 種
1×2×3	1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1 種	3914 種
1×3×1	1+3+3×2+3×2×1 種	16 種
1×3×2	1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1 種	3914 種
1×3×3	1+9+9×8+⋯+9×8×⋯×2×1 種	986410 種
2×1×1	1+2+2×1 種	5 種
2×1×2	1+4+4×3+4×3×2+4×3×2×1 種	65 種
2×1×3	1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1 種	3914 種
2×2×1	1+4+4×3+4×3×2+4×3×2×1 種	65 種
2×2×2	1+8+8×7+⋯+8×7×⋯×2×1 種	109601 種
2×2×3	1+12+12×11+⋯+12×11×⋯×2×1 種	1302061345 種
2×3×1	1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1 種	3914 種
2×3×2	1+12+12×11+⋯+12×11×⋯×2×1 種	1302061345 種
2×3×3	1+18+18×17+⋯.+18×17×⋯×2×1 種	1.74035×10^{16}種
3×1×1	1+3+3×2+3×2×1 種	16 種
3×1×2	1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1 種	3914 種
3×1×3	1+9+9×8+⋯+9×8×⋯×2×1 種	986410 種
3×2×1	1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1 種	3914 種
3×2×2	1+12+12×11+⋯+12×11×⋯×2×1 種	1302061345 種
3×2×3	1+18+18×17+⋯.+18×17×⋯×2×1 種	1.74035×10^{16}種
3×3×1	1+9+9×8+⋯+9×8×⋯×2×1 種	986410 種
3×3×2	1+18+18×17+⋯.+18×17×⋯×2×1 種	1.74035×10^{16}種
3×3×3	1+27+27×26+⋯.+27×26×⋯×2×1 種	2.9599×10^{28}種
總計	(1+27+27×26+⋯.+27×26×⋯×2×1)+3(1+18+18×17+⋯.+18×17×⋯×2×1)+3(1+12+12×11+⋯+12×11×⋯×2×1)+3(1+9+9×8+⋯+9×8×⋯×2×1)+(1+8+8×7+⋯+8×7×⋯×2×1)+6(1+6+6×5+⋯.+6×5×..×2×1)+3(1+4+4×3+4×3×2+4×3×2×1)+3(1+3+3×2+3×2×1)+3(1+2+2×1)+(1+1)種	2.96×10^{28} 種

經過計算後，解出一個 3x3x3 的密碼鎖的機率是 $\frac{1}{2.96\times10^{28}}$，而一個 27 位的數字鎖有 10^{27} 種可能，所以解出數字鎖的機率為 $\frac{1}{10^{27}}$，因為 $\frac{1}{2.96\times10^{28}}<\frac{1}{10^{27}}$ 所以要解出一個 3x3x3 的密碼鎖的機率較低。

二、立體密碼鎖實例

這次我們單就密碼鎖的第二層加密進行討論，假設 axbxc 為 3x3x17，之後為每一格設定編號由 1 到 153(如圖)

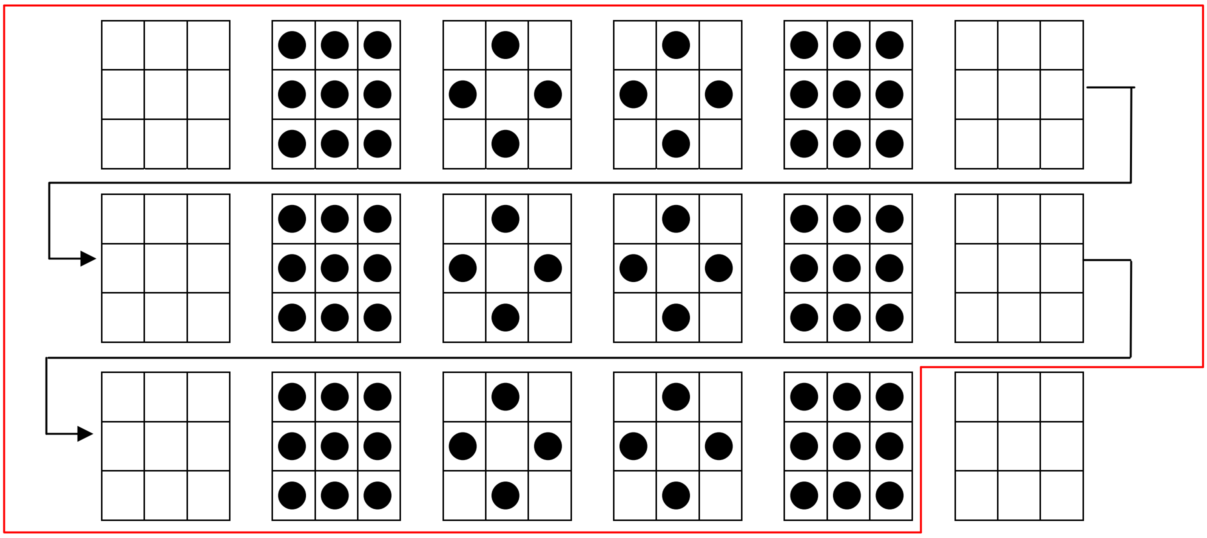
1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

…………………

145	146	147
148	149	150
151	152	153

而這次將解設為必須全部點亮，且順序固定，其解如下圖。由於本研究在前面的實驗結果分析已找到規律，所以能夠輕鬆地解出，但若破解者沒有概念，就只能隨意亂點了。



在一個人完全不知道要如何解這個密碼鎖時，他必須將所有點法都點過一次。

點 0 個點的點法有 1 種

點 1 個點的點法有 153 種

點 2 個點的點法有 153x152 種

……….

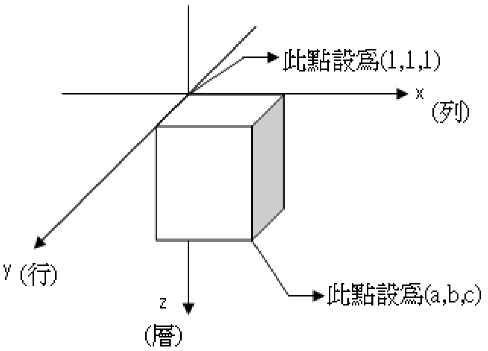
點 153 個點的點法有 153x152x…x2x1 種

但此密碼鎖的解法只有一種，所以解出此密碼鎖的機率是

$$\frac{1}{1+153+153\times152+\cdots\cdots+153\times152\times\cdots\times2\times1}=\frac{1}{5.4538\times10^{269}}$$

而解出一個 153 位的數字鎖的機率是 $\frac{1}{10^{153}}$，因為 $\frac{1}{5.4538\times10^{269}}<\frac{1}{10^{153}}$，所以要解出一個 3x3x17 的密碼鎖的機率較低。

三、奇偶判別法



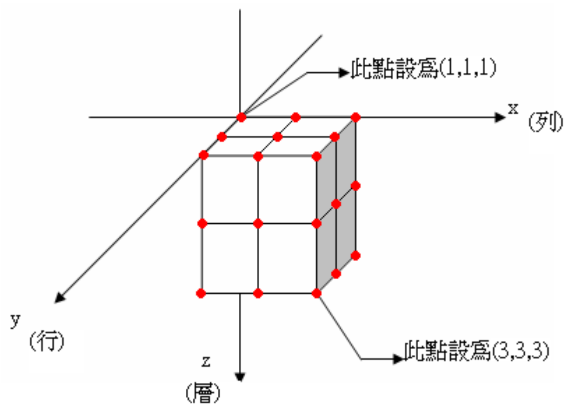
利用座標的概念，將所要點選的點用座標表示，例如:第一層第一列第一行的座標為(1,1,1)

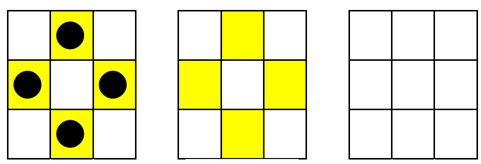
如上圖，a,b,c 為任意數，而 1<d<a、1<e<b、1<f<c，分別討論所有情況下是否該點，將會得到下面的表格。

是否該點的方格	影響前者是否要點的方格
角（1,1,f）	(1,1,f-1)(1,2,f-1)(2,1,f-1)
角（1,b,f）	(1,b,f-1)(1,b-1,f-1)(2,b,f-1)
角（a,1,f）	(a,1,f-1)(a,2,f-1)(a-1,1,f-1)
角（a,b,f）	(a,b,f-1)(a,b-1,f-1)(a-1,b,f-1)
邊（d,1,f）	(d,1,f-1)(d-1,1,f-1)(d+1,1,f-1)(d,2,f-1)
邊（1,e,f）	(1,e,f-1)(1,e-1,f-1)(1,e+1,f-1)(2,e,f-1)
邊（d,b,f）	(d,b,f-1)(d-1,b,f-1)(d+1,b,f-1)(d,b-1,f-1)
邊（a,e,f）	(a,e,f-1)(a,e-1,f-1)(a,e+1,f-1)(a-1,e,f-1)
中間（d,e,f）	(d+1,e,f-1)(d-1,e,f-1)(d,e+1,f-1)(d,e-1,f-1) (d,e,f-1)

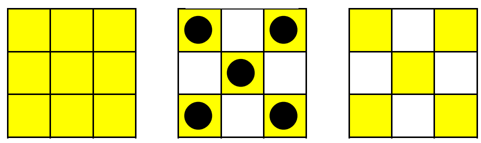
本研究發發現若後者有亮的方格數為偶數，則前者需點；相反地，如果後者有亮的格子數為奇數，則前者不需要點，此想法我們稱為「奇偶判別法」。

以下舉 3x3x3 的立體點燈為例，利用「奇偶判別法」來檢驗。





(圖 1)



(圖 2)

設第一層點(圖 1)：(1,2,1) (2,1,1) (2,3,1) (3,2,1)

（一）第二層(圖 2)

（1）（1,1,2）（1,3,2）（3,1,2）（3,3,2）這四格為第二層的角

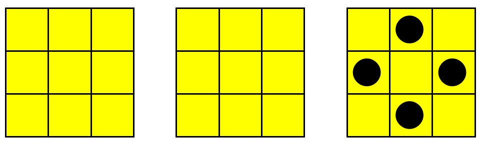
∵（1,1,f）被(1,1,f-1)(1,2,f-1)(2,1,f-1)這三格影響

∴（1,1,2）被（1,1,1）（1,2,1）（2,1,1）影響

∴（1,1,2）要點

∵（1,b,f）被(1,b,f-1)(1,b-1,f-1)(2,b,f-1)這三格影響
∴（1,3,2）被（1,3,1）(1,2,1)（2,3,1）影響
∴（1,3,2）要點
∵（a,1,f）被(a,1,f-1)(a,2,f-1)(a-1,1,f-1)這三格影響
∴（3,1,2）被（3,1,1）(3,2,1)（2,1,1）影響
∴（3,1,2）要點
∵（a,b,f）被(a,b,f-1)(a,b-1,f-1)(a-1,b,f-1)這三格影響
∴（3,3,2）被（3,3,1）(3,2,1)（2,3,1）影響
∴（3,3,2）要點
（2）(2,1,2)（1,2,2）(2,3,2)（3,2,2）這四格為第二層的邊
∵（d,1,f）被(d,1,f-1)(d-1,1,f-1)(d+1,1,f-1)(d,2,f-1)這四格影響
∴（2,1,2）被（2,1,1）(1,1,1)（3,1,1）(2,2,1)影響
∴（2,1,2）不點
∵（1,e,f）被(1,e,f-1)(1,e-1,f-1)(1,e+1,f-1)(2,e,f-1)這四格影響
∴（1,2,2）被（1,2,1）(1,1,1)（1,3,1）(2,2,1)影響
∴（1,2,2）不點
∵（d,b,f）被(d,b,f-1)(d-1,b,f-1)(d+1,b,f-1)(d,b-1,f-1)這四格影響
∴（2,3,2）被（2,3,1）(1,3,1)（3,3,1）(2,2,1)影響
∴（2,3,2）不點
∵（a,e,f）被(a,e,f-1)(a,e-1,f-1)(a,e+1,f-1)(a-1,e,f-1)這四格影響
∴（3,2,2）被（3,2,1）(3,1,1)（3,3,1）(2,2,1)影響
∴（3,2,2）不點
（3）(2,2,2)為第二層的中心
∵（d,e,f）被 (d+1,e,f-1)(d-1,e,f-1)(d,e+1,f-1)(d,e-1,f-1) (d,e,f-1) 這五格影響
∴（2,2,2）被（3,2,1）(1,2,1)（2,3,1）(2,1,1)（2,2,1）影響
∴（2,2,2）要點

（二）第三層(圖 3)
（1）(1,1,3)（1,3,3）(3,1,3)（3,3,3）這四格為第三層的角
∵（1,1,f）被(1,1,f-1)(1,2,f-1)(2,1,f-1)這三格影響
∴（1,1,3）被（1,1,2）(1,2,2)（2,1,2）影響
∴（1,1,3）不點
∵（1,b,f）被(1,b,f-1)(1,b-1,f-1)(2,b,f-1)這三格影響
∴（1,3,3）被（1,3,2）(1,2,2)（2,3,2）影響
∴（1,3,3）不點
∵（a,1,f）被(a,1,f-1)(a,2,f-1)(a-1,1,f-1)這三格影響
∴（3,1,3）被（3,1,2）(3,2,2)（2,1,2）影響
∴（3,1,3）不點
∵（a,b,f）被(a,b,f-1)(a,b-1,f-1)(a-1,b,f-1)這三格影響
∴（3,3,3）被（3,3,2）(3,2,2)（2,3,2）影響
∴（3,3,3）不點



(圖 3)

（2）(2,1,3)（1,2,3）(2,3,3)（3,2,3）這四格為第三層的邊
∵（d,1,f）被(d,1,f-1)(d-1,1,f-1)(d+1,1,f-1)(d,2,f-1)這四格影響
∴（2,1,3）被（2,1,2）(1,1,2)（3,1,2）(2,2,2)
∴（2,1,3）要點
∵（1,e,f）被(1,e,f-1)(1,e-1,f-1)(1,e+1,f-1)(2,e,f-1)這四格影響

∴（1,2,3）被（1,2,2）(1,1,2)（1,3,2）(2,2,2)
∴（1,2,3）要點
∵（d,b,f）被(d,b,f-1)(d-1,b,f-1)(d+1,b,f-1)(d,b-1,f-1)這四格影響
∴（2,3,3）被（2,3,2）(1,3,2)（3,3,2）(2,2,2)
∴（2,3,3）要點
∵（a,e,f）被(a,e,f-1)(a,e-1,f-1)(a,e+1,f-1)(a-1,e,f-1)這四格影響
∴（3,2,3）被（3,2,2）(3,1,2)（3,3,2）(2,2,2)
∴（3,2,3）要點
（3）(2,2,3）為第三層的中心
∵（d,e,f）被 (d+1,e,f-1)(d-1,e,f-1)(d,e+1,f-1)(d,e-1,f-1) (d,e,f-1) 這五格影響
∴（2,2,3）被（3,2,2）(1,2,2)（2,3,2）(2,1,2)（2,2,2）
∴（2,2,3）不點

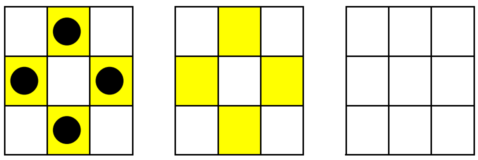
捌、結論

一、這次的研究我們發現 2D 點燈與 3D 點燈是有關聯的，且有許多相似的地方。
(一) 2D 點燈與 3D 點燈的解具有對稱性。
(二) 2D 點燈與 3D 點燈的解具有規律，所以可以推測出解法。
(三) 2D 點燈與 3D 點燈的解法，順序可以互換，並不會影響結果。

二、本研究在分析實驗結果時，藉由探討 a×b×c (a≦b≦4，c≦5，a、b、c 均為自然數)的 3D 立體結構，找到解法規律，證明 a×b×n (a≦b≦4，a、b、n 為自然數) 的立體結構都可解出。

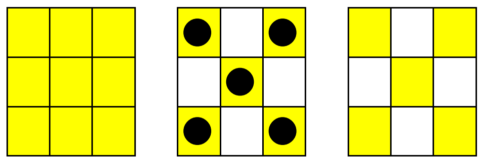
三、在平面點燈中，所有解法都是由第一行所決定，而立體點燈也有同樣的特性。每一層平面，其點燈方法都被前兩層的結果所唯一決定，我們稱此方法為「奇偶判別法」。在討論時，我們用代數的方式來表示，下面的例子，是用較簡單的方法來解釋。

(1)



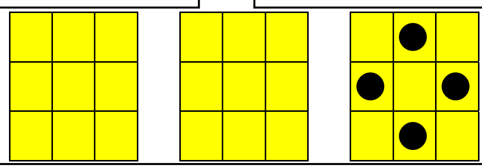
第一層隨機決定，但要優先選擇對稱的圖形。

(2)



第二層則點第一層沒亮的地方，也就是在點完第一層時所剩下的。

(3)



第三層則點第二層所剩下的，點完發現整個圖形都亮了，所以這是一組解。

奇偶判別法的依據是，當第一層固定時，能影響到第一層的只剩下第二層，所以第二層必須要點第一層所沒點亮的部份，同理，當第一層和第二層固定時，能影響到第二層的只剩下第三層，所以第三層必須要點第二層所沒點亮的部份。

四、本研究在討論時，藉由計算出立體點燈和數字鎖解出的機率，並經比較後發現，解出立體點燈的機率遠低於數字鎖，也證明了立體點燈用於密碼鎖其實是有增加解碼難度的優勢。

玖、參考資料及其他

一、康軒版國中數學課本二下　第二章　2-2 垂直、平分與線對稱圖形

【評語】030422

把立體 3D 圖形切成 3 個〝3x3〞的平面來解析，巧妙地將數學問題化繁為簡；同時，將立體點燈的概念與密碼鎖連結，增加了本研究的應用性。此外，利用老師指導的電腦程式輔以解題，亦有效地提高了研究的效率，是一篇值得嘉許的佳作。