中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030420

n柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國一　黃祈昌	鄭釧鋒
國一　王文忻	洪駿源
國一　田慈安	
國一　陳福誌	

關鍵詞：河內塔、遞迴式、排列組合

n 柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找

摘要

我們研究出n柱河內塔的移動，可透過優選得到最佳化，並推出其通式。成功的解決了”Explorations in 4-peg Tower of Hanoi” (Ben Houston & Hassan Masum , 2004)這篇論文，所談及的『**百年來，河內塔 4 柱以上的移動是不能証明最優化**』。在研究過程中，我們透過移動策略與優選方法，發現將n柱河內塔完成移動所需的最少步數，依序寫成數列，其間關係存在有趣的巴斯卡三角圖型，利用此關聯性，我們成功的導出 4 柱、5 柱、6 柱的公式及可一般化的n柱最佳化通式，完整的解決n柱河內塔長期以來未能解決的問題。

壹、研究動機

在中華民國第 49 屆中小學科學展覽國中組數學第一名作品「三柱輪換之移動策略---雞尾酒法」可查得四柱河內塔中m個盤子移動的最少步數與公式，我們很好奇地想瞭解n柱河內塔m個盤子的移動完成是否存在最少步數的一般化表示式。因此，我們上網搜尋相關資料發現”Explorations in 4-peg Tower of Hanoi” (Ben Houston & Hassan Masum , 2004)這篇論文提及四柱河內塔可找到 20 個盤子以內移動完成的最少步數，若超過 20 個盤子的最少步數則是無法確定，甚至是五柱以上的河內塔無法找出其最少步數的通式。上述兩篇研究的結果互相衝突，引起我們的好奇心，因此著手探討。

貳、研究目的

1、尋找n柱河內塔的移動策略。

2、尋找n柱河內塔的優選方法。

3、尋找n柱河內塔的關連性。

4、尋找n柱河內塔的最佳化通式。

參、研究器材

紙、筆、筆電、Word、Excel、GSP 軟體、隨身碟。

肆、研究過程

一、 n柱河內塔的移動規則：

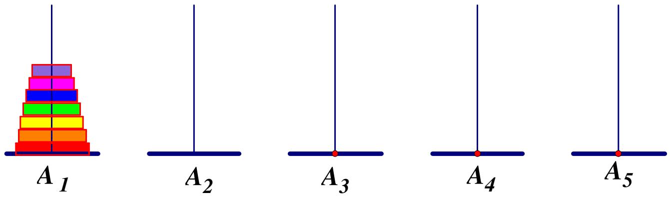
1、物件，包含

(1) n根柱子，編號分別為 A_1 、 A_2 、……、 A_n 。

(2) m個大小不等，中間穿洞的盤子，由小到大依序邊號為 1，2，3，…， m盤。

2、起始位置：將m個盤子由大到小、由下而上依序套在A_1柱子上，如圖(一)。

當$n=5$ ， $m=7$



圖(一)

3、移動規則：須符合下面兩規定

(1) 一次只允許將套在柱子上最上層的1個盤子，從所在位置移動到別根柱子上，此移動的完成，我們稱為「1 次操作」記為「1 步」。

(2) 小盤子需置於大盤子上面。

4、最終位置：依上述移動規則，當A_1柱子上m個盤子全部移動到A_n柱子上，則遊戲結束。

二、 符號的意義：

$H_n(m)$：表示在n柱河內塔的遊戲中，將m個盤子從A_1柱子移往A_n柱子上，當完成遊戲所需的最少步數，稱之。

例： $H_3(m)$表示三柱河內塔共m個盤子的移動，完成遊戲所需的最少步數。在文獻上，可查得$H_3(m)=2^m-1$ 。

三、 文獻探討：

1、原三柱河內塔的遊戲

(1) 移動策略 $H_3(m)=H_3(m-1)+1+H_3(m-1)=2H_3(m-1)+1$

(2) 完成遊戲所需的最小步數 $H_3(m)=2^m-1$

2、在中華民國第 49 屆中小學科學展覽國中組數學科第一名作品「三柱輪換之移動策略-雞尾酒法」可查得

(1) 移動策略 $H_4(m)=H_4(x)+H_3(m-x)+H_4(x)$

$$=2H_4(x)+H_3(m-x)$$

(2) 完成遊戲所需的最小步數 $H_4(m)=\left[m-\frac{t(t-1)}{2}-1\right]\times 2^t+1$

其中 $t=\left[\sqrt{2m}\right]$與$t=\left[\sqrt{2m}\right]-1$ 兩者之一 ，[ ]：代表高斯符號

3、Explorations in 4-peg Tower of Hanoi 談及**河內塔 4 柱以上無法證明最優化的存在。**

發現：在「三柱輪換之移動策略---雞尾酒法」中，所得到的河內塔四柱通式，我們仔細尋找，但找不到推理方面的錯誤(有一些應是打字錯誤)，所以暫時稱它是對的。但「Explorations in 4-peg Tower of Hanoi」(Ben Houston & Hassan Masum , 2004) 內文卻提及無法證明最優化，其間問題，顯然值得我們去探索。

另外，五柱以上的完整探討與通式的尋求未能查尋到。針對上述的疑點與不足，我們試著提出方法與解決問題。

四、河內塔的移動策略：

1、4 柱河內塔的移動策略：

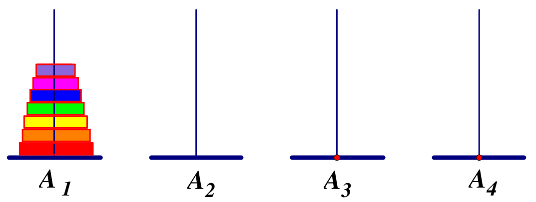
對於任意 m 個盤子，根據河內塔的移動規則，必然先將 x_1 個較小盤子，移往 A_2(或 A_3)，最後再利用 3 柱移動完成遊戲。

理由：根據遊戲規則至少須保留 3 根柱子可使用。因此，必然將某些數量(x_1 個)的較小盤子集中移往 A_2(或 A_3)。所以 4 柱的移動策略必然為

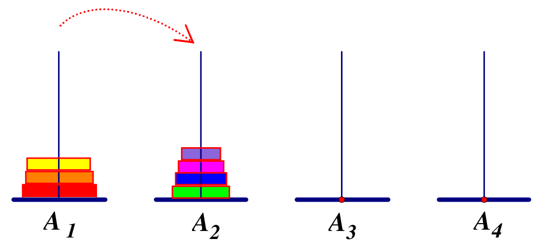
$$H_4(m)=H_4(x_1)+H_3(m-x_1)+H_4(x_1)=2H_4(x_1)+H_3(m-x_1)$$

其操作過程：

(圖1−1) 【起始位置】

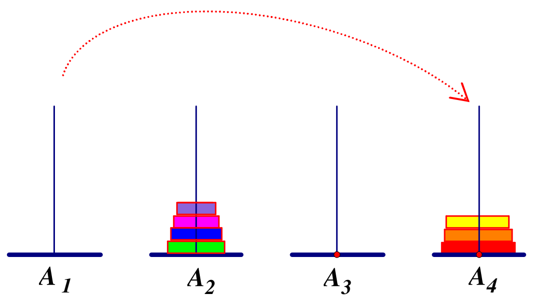


(圖1−2) 【步驟一】$H_4(x_1)$



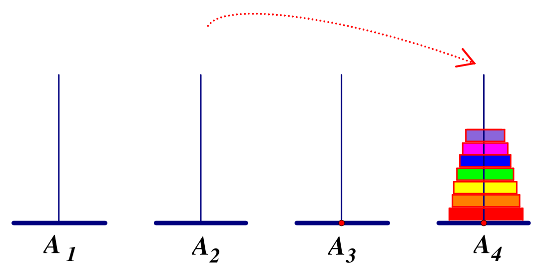
利用 4 柱將 x_1 個盤子移動至 A_2

(圖1−3) 【步驟二】$H_3(m-x_1)$



利用 3 柱將 A_1 中 $m-x_1$ 個盤子移動至 A_4

(圖1−4)【步驟三】$H_4(x_1)$



利用 4 柱將 A_2 中 x_1 個盤子移動至 A_4

[比較]：文獻上，「三柱輪換之移動策略---雞尾酒法」及「Explorations in 4-peg Tower of Hanoi(Ben Houston & Hassan Masum , 2004)」(見 p.26)其移動策略與上述相同。

2、5 柱河內塔的移動策略：

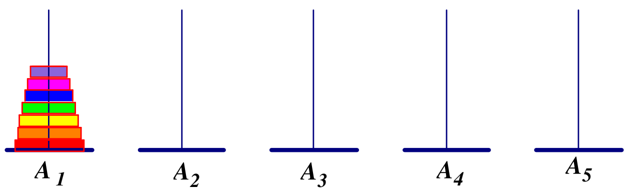
仿照上述 4 柱河內塔遊戲的移動策略，5 柱的移動策略必然如下：

$$H_5(m)=H_5(x_1)+H_4(x_2)+H_3(m-x_1-x_2)+H_4(x_2)+H_5(x_1)$$

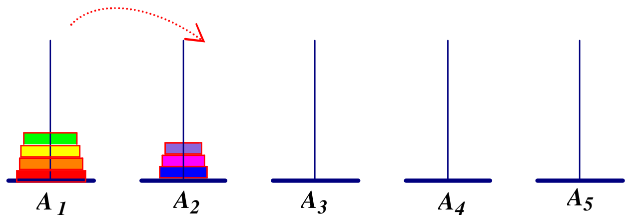
$$=2H_5(x_1)+2H_4(x_2)+H_3(m-x_1-x_2)$$

操作過程：

(圖 $2-1$)【起始位置】

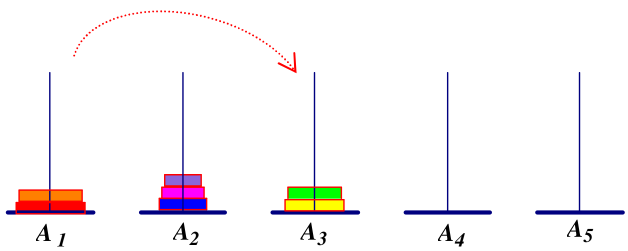


(圖 $2-2$) 【步驟一】 $H_5(x_1)$



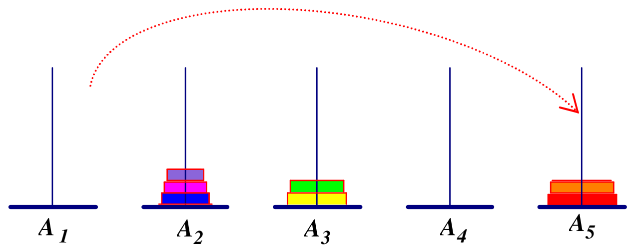
利用 5 柱將 A_1 中 x_1 個盤子移動至 A_2

(圖 $2-3$) 【步驟二】 $H_4(x_2)$



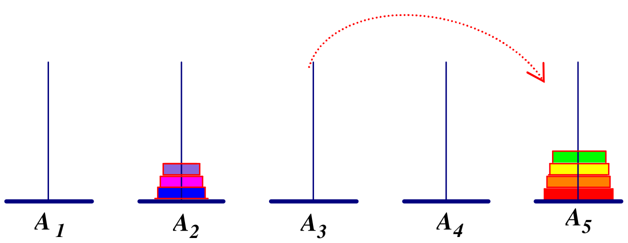
利用 4 柱將 A_1 中 x_2 個盤子移動至 A_3

(圖 $2-4$) 【步驟三】 $H_3(m-x_1-x_2)$



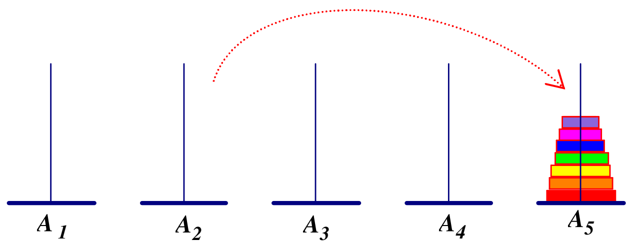
利用 3 柱將 $m-x_1-x_2$ 個盤子移動至 A_5

(圖 $2-5$)【步驟四】 $H_4(x_2)$



利用 4 柱將 A_3 中 x_2 個盤子移動至 A_5

(圖 $2-6$)【步驟五】 $H_5(x_1)$



利用 5 柱將 A_2 中 x_1 個盤子移動至 A_5

發現：圖 $2-3$~圖 $2-5$ 可看成只能利用 4 柱(A_1 、 A_3 、 A_4 、 A_5)之移動，所以其操作過程等同於 $H_4(m-x_1)$ 之移動。即：

$H_5(m)=2H_5(x_1)+2H_4(x_2)+H_3(m-x_1-x_2)$

【選擇 1】【選擇 2】　【選擇 3】　　　　　　　　　共 3 種策略選擇

$=2H_5(x_1)+H_4(m-x_1)$

※策略選擇：即是當完成 m 個盤子的移動策略下，若再增加一個盤子即 $H_5(m+1)$，此時的最佳移動選擇可能為使用

(1)【選擇 1】：使得移動策略為 $H_5(m+1)=2H_5(x_1+1)+2H_4(x_2)+H_3(m-x_1-x_2)$

(2)【選擇 2】：使得移動策略為 $H_5(m+1)=2H_5(x_1)+2H_4(x_2+1)+H_3(m-x_1-x_2)$

(3)【選擇 3】：使得移動策略為 $H_5(m+1)=2H_5(x_1)+2H_4(x_2)+H_3(m-x_1-x_2+1)$

同理，6 柱的移動策略如下：

$H_6(m)=H_6(x_1)+H_5(x_2)+H_4(x_3)+H_3(m-x_1-x_2-x_3)+H_4(x_3)+H_5(x_2)+H_6(x_1)$

$=2H_6(x_1)+2H_5(x_2)+2H_4(x_3)+H_3(m-x_1-x_2-x_3)$

【選擇 1】【選擇 2】【選擇 3】　【選擇 4】　　　　　　　共 4 種策略選擇

$=2H_6(x_1)+2H_5(x_2)+H_4(m-x_1-x_2)$

$=2H_6(x_1)+H_5(m-x_1)$

如此下去，可得

$H_n(m)=2H_n(x_1)+2H_{n-1}(x_2)+\cdots+2H_4(x_{n-3})+H_3(m-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3})$

【選擇 1】【選擇 2】⋯【選擇 $n-3$】　【選擇 $n-2$】　　共 $n-2$ 種策略選擇

$=2H_n(x_1)+H_{n-1}(m-x_1)$

從上面的策略整理，可得結論：

(1) $H_4(m)$、$H_5(m)$、⋯、$H_n(m)$ 分別存在 2、3、...、$n-2$ 種策略選擇。

(2) 對稱性：根據 $H_n(m)$ 的移動策略，河內塔的最佳移動，必然以 m 號盤子到達 A_n 柱(目的柱)爲分界形成對稱移動。

理由：從 $H_n(m)$ 的策略推導，可得最佳移動策略必然以 H_3 為分界形成對稱移動。又 H_3 的移動完成，根據其遞迴關係式，可知必以 m 號盤到達 A_n 柱為中心形成移動對稱。

接下來，我們如何『**針對移動策略產生的變數，尋找出最佳組合，使遊戲以最少步數完成移動。**』本研究稱此目的的達成爲『**優選**』。至於，如何才能達到優選？以下是我們的探討：

五、$H_n(m)$優選步驟的探討

由移動策略$H_n(m)=2H_n(x_1)+2H_{n-1}(x_2)+...+2H_4(x_{n-3})+H_3(m-x_1-x_2-...-x_{n-3})$可知要滿足上述等式左端，則右端所有策略的選擇，即產生的組合須達成右端各項總和的最小值，即**優選**。顯然要符合上述的優選，則右端的每一項也要透過其相關的移動策略達成優選。如此下去，最後必然會推到不需優選而能確定其為最少步數的完成。我們將「不需透過優選而能確定其為最少步數的完成，所得的$H_n(m)$」稱為**「邊界條件」**。

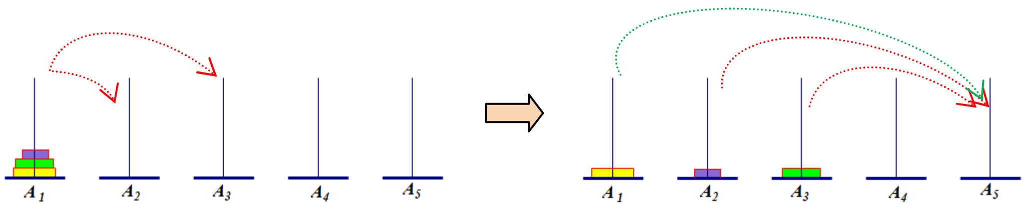
$H_n(m)$邊界條件的尋找？

根據「邊界條件」的意義，當不需透過優選而能以最少步數完成移動，即當第k號盤子可在第k次移動到A_n柱(即目的柱)時，再根據移動【對稱性】可得移動完成共$2(k-1)+1=2k-1$步。顯然，此移動完成的步數必為最小值，即$H_n(k)=2k-1$。

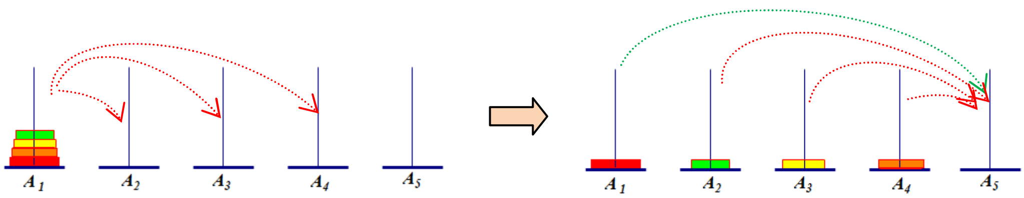
k最大值的尋求？

因為第k號盤子要在第k次移動到A_n柱，必為第 1，2，3，…，$k-1$號盤子須依序以一步移動到A_2，A_3，A_4，…，A_{k-1}(順序可交換)，接著第k號移動到A_n柱。且當A_2，A_3，…，A_n每根柱子皆已放置一個盤子，可得此時k最大值$=n-1$。即$H_n(m)$的邊界條件為$H_n(1)=1$，$H_n(2)=3$，…，$H_n(n-1)=2n-3$，形成公差為 2 的等差數列。

以 5 柱河內塔為範例：如圖 3-1，先將空白柱填滿(紅色虛線)，移動過程不需優選，可得$H_5(3)=2\times3-1$；如圖 3-2，$H_5(4)=2\times4-1$。顯然 5 柱河內塔最多有 4 個空白柱可利用，因此邊界條件為$H_5(1)$、$H_5(2)$、$H_5(3)$、$H_5(4)$。同理，$H_n(m)$的邊界條件為$H_n(1)$、$H_n(2)$、…、$H_n(n-1)$，公差為 2 的等差數列。



(圖 3-1)



(圖 3-2)

有了上述邊界條件，並配合移動策略開始進行如何優選？

1、$H_4(m)$ **如何優選？**

【步驟一】邊界條件 $H_4(1)=1$ 、 $H_4(2)=3$ ， $H_4(3)=5$

我們將所得列成(表 1)。

m	1	2	3
$H_3(m)$	1	3	7
差距	2	4	
$H_4(m)$	1	3	5
差距	2	2	

(表 1)

【步驟二】因爲邊界條件 $H_4(3)=2H_4(1)+H_3(2)$

又由移動策略 $H_4(m)=2H_4(x_1)+H_3(m-x_1)$ ，可知：

【選擇 1】　【選擇 2】

當盤子每增加 1 個皆有兩種選擇，但爲了維持優選，所以選擇目的要使增加步數維持最少。

(1)【選擇 1】由(表 1)可知， $H_4(m)$ 相鄰兩項「差距 2」的有兩個。因此，可造出「差距 4」(即增加 4 步)的後續項共兩項。

得 $H_4(4)=2H_4(2)+H_3(2)=2\times3+3=9$ 步

$H_4(5)=2H_4(3)+H_3(2)=2\times5+3=13$ 步

(2)【選擇 2】顯然，只能造出「差距 4」的後續項 1 項，即

$H_4(6)=2H_4(3)+H_3(3)=2\times5+(2^3-1)=17$ 步

綜合上述(1)(2)的結果，整理得(表 2)：

m	1	2	3	4	5	6
$H_3(m)$	1	3	7	15		
差距	2	4				
$H_4(m)$	1	3	5	9	13	17
差距	2	2	4	4	4	

(表 2)

【步驟三】重複【步驟二】可知後續項的優選必增加 8 步，若採用

(1).【選擇 1】：由(表 2)可知 $<H_4(m)>$ 相鄰兩項「差距 4」的有 3 組，當採用【選擇 1】可產生增加 8 步的優選共 3 項，即

$H_4(7)=2H_4(4)+H_3(3)=2\times9+7=25$ 步

$H_4(8)=2H_4(5)+H_3(3)=2\times13+7=33$ 步

$H_4(9)=2H_4(6)+H_3(3)=2\times17+7=41$ 步

(2). 【選擇 2】僅能造出「差距 8」的後續項只有 1 項。綜合(1).(2)可得後續項增加 8 步的優選只能產生 4 項，整理得(表 3)：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H_3(m)$	1	3	7	15	31					
差距	2	4	8	16						
$H_4(m)$	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49
差距	2	2	4	4	4	8	8	8	8	

(表 3)

【步驟四】如此下去，可得 $H_4(m)$ 的優選產生依序為：

第一群：公差 2^1 共 3 項的等差數列：$H_4(1)$，$H_4(2)$，$H_4(3)$ ⋯**[邊界條件]**

第二群：公差 2^2 共 4 項的等差數列：$H_4(3)$，$H_4(4)$，$H_4(5)$，$H_4(6)$

第三群：公差 2^3 共 5 項的等差數列：$H_4(6)$，$H_4(7)$，$H_4(8)$，$H_4(9)$，$H_4(10)$

…………… …………

第 k 群：公差 2^k 共 $(k+2)$ 項等差數列：且第 $k-1$ 群的末項為第 k 群的首項。

根據上述關係可得(表 4)。

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
群別		1			2			3					4					5		
$H_4(m)$	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129	161	193	225	257	289
差距	2	2	4	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16	16	32	32	32	32	32	32
項數		3			4			5					6					7		

m	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
群別				6								7					
$H_4(m)$	321	385	449	513	577	641	705	769	897	1025	1153	1281	1409	1537	1665	1793	2049
差距	64	64	64	64	64	64	64	128	128	128	128	128	128	128	128	256	256
項數				8								9					

m	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
群別			8						9			
$H_4(m)$	2305	2561	2817	3073	3329	3585	4097	4609	5121	5633	6345	6857
差距	256	256	256	256	256	512	512	512	512	512	512	512
項數			10						11			

(表 4)

2、$\boxed{H_5(m)\text{ 如何優選？}}$

由於 $H_5(m)$ 的策略為 $H_5(m)=2H_5(x_1)+2H_4(x_2)+H_3(m-x_1-x_2)$

【選擇 1】　【選擇 2】　【選擇 3】　　共 3 種選擇。

因此同 $H_4(m)$ 的優選方式，可得：

【步驟一】邊界條件：共 $n-1=5-1=4$ 項

即 $H_5(1)=1$，$H_5(2)=3$，$H_5(3)=5$

$$H_5(4)=2H_5(1)+2H_4(1)+H_3(2)=2\times1+2\times1+3=7$$

因為 $H_5(m)$ 的移動策略須由 3 種選擇產生優選。因此我們將相關的邊界條件列出，如(表 5)。

m	1	2	3	4
$H_3(m)$	1	3	7	15
差距	2	4	8	
$H_4(m)$	1	3	5	9
差距	2	2	4	
$H_5(m)$	1	3	5	7
差距	2	2	2	

(表 5)

【步驟二】因為 $H_5(4)$ 可看成 $H_5(4)=2H_5(1)+2H_4(1)+H_3(2)$，所以每當盤子數增加 1，由(表 5)可知，可以產生後續項為公差 4，共 $3+2+1=6$ 項的等差數列，即

(1)【選擇 1】：共 3 次，

$H_5(5)=2H_5(2)+2H_4(1)+H_3(2)=2\times3+2\times1+3=11$ 步

$H_5(6)=2H_5(3)+2H_4(1)+H_3(2)=2\times5+2\times1+3=15$ 步

$H_5(7)=2H_5(4)+2H_4(1)+H_3(2)=2\times7+2\times1+3=19$ 步

(2)【選擇 2】：共 2 次，

$H_5(8)=2H_5(4)+2H_4(2)+H_3(2)=2\times7+2\times3+3=23$ 步

$H_5(9)=2H_5(4)+2H_4(3)+H_3(2)=2\times7+2\times5+3=27$ 步

(3)【選擇 3】：共 1 次，

$H_5(10)=2H_5(4)+2H_4(3)+H_3(3)=2\times7+2\times5+(2^3-1)=31$ 步

整理得(表 6):

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H_3(m)$	1	3	7	15	31					
差距	2	4	8	16						
$H_4(m)$	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49
差距	2	2	4	4	4	8	8	8	8	
$H_5(m)$	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31
差距	2	2	2	4	4	4	4	4	4	

(表 6)

【步驟三】由(表 6)可得【選擇一】、【選擇二】、【選擇三】分別可使用 6、3、1 次，

共 6＋3＋1＝10 次

即後續項可得公差 8，共 10 項的等差數列，如下：

$H_5(11)=39$ 、 $H_5(12)=47$ 、 $H_5(13)=55$ 、 $H_5(14)=63$ 、 $H_5(15)=71$

$H_5(16)=79$ 、 $H_5(17)=87$ 、 $H_5(18)=95$ 、 $H_5(19)=103$ 、 $H_5(20)=111$

【步驟四】循序下去，可得 $H_5(m)$ 是一個有規律的數列。

即 $<H_5(m)>$ 的構成是由

第一群：公差 2 共 4 項的等差數列……**[邊界條件]**

第二群：公差 2^2 共 7 項的等差數列

第三群：公差 2^3 共 11 項的等差數列

……………　…………

第 k 群：公差 2^k 共 $1+1+2+3+......+(k+1)=1+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ 項的等差數列

且第 $k-1$ 群的末項為第 k 群的首項。根據上述關係可得(表 7)：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
群別	1			2						3											
$H_5(m)$	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	127
差距	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	16	
個數	3			6						10											

m	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
群別	4														5					
$H_5(m)$	143	159	175	191	207	223	239	255	271	287	303	319	335	351	383	415	447	479	511	543
差距	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	32	32	32	32	32	32	
個數	15														21					

(表 7)

3、$H_n(m)$**如何優選？**

將上述 $H_4(m)$ 、 $H_5(m)$ 的優選推導到 $H_n(m)$ 如下：

移動策略： $H_n(m)=2H_n(x_1)+2H_{n-1}(x_2)+\cdots+2H_4(x_{n-3})+H_3(m-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3})$

【選擇 1】【選擇 2】 【選擇 $n-3$】 【選擇 $n-2$】

【步驟一】: 邊界條件：共 $n-1$ 項

即 $H_n(1)=1$ ， $H_n(2)=3$ ， $H_n(3)=5$ ，……， $H_n(n-1)=2n-3$

可產生「差距 2」(上述相鄰兩項相減)共 $n-2$ 個。

【步驟二】: 因爲 $H_n(n-1)$ 可看成

$$H_n(n-1)=2H_n(1)+2H_{n-1}(1)+2H_{n-2}(1)+...+2H_4(1)+H_3(2)$$

又相關邊界條件：

$<H_n(m)>$ ：可產生「差距 2」共 $n-2$ 個 ……………………【選擇 1】

$<H_{n-1}(m)>$ ：可產生「差距 2」共 $n-3$ 個 ……………………【選擇 2】

… … … …

$<H_4(m)>$ ：可產生「差距 2」共 2 個 …………………【選擇 $n-3$】

所以「差距 2」共有 $\dfrac{(n-3)[2+(n-2)]}{2}=\dfrac{n(n-3)}{2}$ 個

連同【選擇 $n-2$】「差距 4」有 1 個

所以，每當盤子數增加 1，可優選產生公差 4 的等差數列，

共 $\dfrac{n(n-3)}{2}+1=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 項。

【步驟三】: 利用【步驟二】得到「差距 4」的項數，連同相關選擇所產生「差距 4」的項數，及【選擇 $n-2$】「差距 8」有 1 個。利用這些數量可優選產生公差 8 的等差數列。如此下去可得 $<H_n(m)>$ 的後續項。

透過上述【步驟一】、【步驟二】、【步驟三】優選產生出 $H_6(m)$ 的數列，如(表 8)：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$H_3(m)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511											
差距	2	4	8	16	32	64	128	256												
$H_4(m)$	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129	161	193	225	257	289
差距	2	2	4	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16	16	32	32	32	32	32	
$H_5(m)$	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111
差距	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
$H_6(m)$	1	3	5	7	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	57	65	73	81	89
差距	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	

(表 8)

上表說明如下：

(1) 橙色區域分別表示 $H_n(m)(3 \le n \le 6)$ 的邊界條件。

(2) 淺藍色區域表示邊界條件所形成的等差數列，相鄰兩項所產生「差距 2」的項數共 $2+3+4=9$ 項。

(3) 黃色區域表示利用【選擇 3】、【選擇 2】、【選擇 1】「差距 2」共 9 項，連同【選擇 4】「差距 4」1 項，共優選產生公差 4 的等差數列 10 項。

※ 藍色圈圈的個數總和有 10 個，所以紅色圈圈當中「差距 4」的會有 10 項。

(4) 綠色區域爲公差 8 的等差數列(表中只列出 5 項，後續還有 15 項未列出)，是由【選擇 3】、【選擇 2】、【選擇 1】「差距 4」共 $3+6+10=19$ 項，連同【選擇 4】「差距 8」1 項，共優選產生公差 8 的等差數列 20 項。

透過上述的操作，優選產生的 $H_n(m)$，顯然有固定的模式。因此，我們猜想 $H_n(m)$ 的通式必存在。至於如何導出呢？

由於 $H_n(m)$ 的產生是透過 $H_n(x_1)$，$H_{n-1}(x_2)$，....，$H_4(x_{n-3})$，$H_3(m-x_1-x_2-...-x_{n-3})$ 優選得到，顯然其間一定存在關聯性。因此，我們先探討其關聯性：

六、$H_n(m)$的關聯性

1、在上述的優選，實際上，即是先由相關[邊界條件]產生「差距 2 」的數量，連同$<H_3(m)>$「差距2^2」1 項，造出等數量，且公差爲2^2的後續項；接著利用「差距2^2」的數量，連同$<H_3(m)>$「差距2^3」1 項，造出等數量，且公差爲2^3的後續項；再利用「差距2^3」的數量，連同$<H_3(m)>$「差距2^4」1 項，造出等數量，且公差爲2^4的後續項；…。顯然，$H_n(m)$後續項的產生與相同「差距」數量有關係。又因爲$<H_3(m)>$相鄰兩項的差距皆不等，分別爲 2 、2^2、2^3、…、2^{m-1}各 1 項。所以，爲了研究方便，我們將[選擇 n-2] $<H_3(m)>$「差距2^{i+1}」1 項，併入「差距2^i」。如此，**每個步驟的優選次數就剛好等於當次「差距2^i」的數量**。因此，我們只要將相同「差距」的數量計算出，即可得後續優選產生的項數。以下我們將(表 8) 相同「差距」的數量計算出，並按其規律列出(表 9)：

公差	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g_3(k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$g_4(k)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$g_5(k)$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
$g_6(k)$	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
$g_7(k)$	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
$g_8(k)$	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003

(表 9)

說明：(1) $<g_n(k)>$表示上表中，與$<H_n(m)>$產生有關係，其差距爲2^k的項數所形成的數列。

(2) 表中數據如何推出？

例：$g_5(2)$：表示「差距2^2」共 6 項，其產生於

$$g_5(2)=g_3(1)+g_4(1)+g_5(1)=1+2+3=6$$

$$g_7(4)=g_3(3)+g_4(3)+g_5(3)+g_6(3)+g_7(3)$$
$$=1+4+10+20+35=70$$

從表中可得 $g_n(x)=g_3(x-1)+g_4(x-1)+...+g_n(x-1)$ ………………… (I)式

(I) 式是透過移動策略，優選的結果，利用(I)式可快速寫出相關資料。

2、 我們發現上表資料類似巴斯卡三角圖形，如表 10 紅色斜線部分

公差	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
k	1	2	3	4	5
$g_3(k)$	1	1	1	1	1
$g_4(k)$	2	3	4	5	6
$g_5(k)$	3	6	10	15	21
$g_6(k)$	4	10	20	35	56
$g_7(k)$	5	15	35	70	126
$g_8(k)$	6	21	56	126	252

(表 10)

因此我們將$<g_n(k)>$最前面皆補 1 項1，形 成$<f_n(k)>$數列，如(表 11)：

公差		2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_3(k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_4(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_5(k)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
$f_6(k)$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
$f_7(k)$	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
$f_8(k)$	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002

(表 11)

如此，**我們成功的將$H_n(m)$的研究過程連結到巴斯卡三角圖型**。從(表 11)中，可得下列關係式：

(1) $f_n(k)=f_3(k-1)+f_4(k-1)+\cdots+f_n(k-1)$ ………………… (II)式

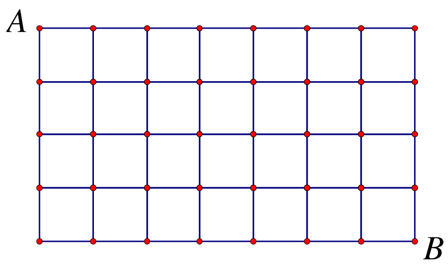
(2) $f_n(k)=f_{n-1}(k)+f_n(k-1)$ ………………… (III)式

(3) $f_n(k)=f_{n-1}(1)+f_{n-1}(2)+\cdots+f_{n-1}(k)$ ………………… (V)式

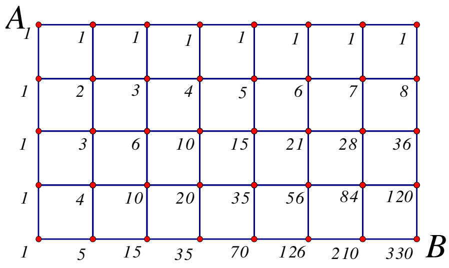
3、 $f_n(k)$的通式：

(1) 棋盤捷徑之連結：

對於$m\times n$棋盤，由左上角A點移動到B點的捷徑之方法數，有下列兩種方法：



【方法一】：**累加法**



【方法二】：**排列組合**

$$\frac{11!}{4!7!}=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

因爲此兩種方法可得相等結果，但累加法顯然較麻煩。因此，我們利用排列組合得分群項數之一般項通式爲

$$f_n(t)=\frac{(t+n-4)!}{(t-1)!(n-3)!}\qquad (n\ge 3,t\ge 1)$$

可得 ① $f_4(t)=t$

② $f_5(t)=\dfrac{t(t+1)}{2}$

③ $f_6(t)=\dfrac{t(t+1)(t+2)}{6}$

④ $f_7(t)=\dfrac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24}$

接下去，我們試著利用 $f_n(t)$ 的通式，推導 $H_n(m)$ 的通式。

七、$H_n(m)$ 通式的推導

由上述的推論，我們要尋求 $H_n(m)$，可從第 1 項利用「差距」累加而成。我們先試著導出 $H_4(m)$ 的公式，如下：

1. $H_4(m)$ 的公式推導：

$$H_4(m)=1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+t\times2^{t-1}+s\times2^t$$

$$=f_4(1)+f_4(2)\times2^1+f_4(3)\times2^2+f_4(4)\times2^3+\cdots+f_4(t)\times2^{t-1}+s\times2^t$$

其中：$m=f_4(1)+f_4(2)+f_4(3)+f_4(4)+\cdots+f_4(t)+s$ ， $0\le s<f_4(t+1)$

令 $P_4(t)=1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+t\times2^{t-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$

$\Rightarrow 2P_4(t)=2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(t-1)\times2^{t-1}+t\times2^t\cdots\cdots②$

②－① 得 $P_4(t)=t\times2^t-(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{t-1})$

$$=t\times 2^t-\frac{2^t-1}{2-1}$$

$$=(t-1)\times 2^t+1$$

又 $m=f_4(1)+f_4(2)+f_4(3)+f_4(4)+\cdots+f_4(t)+s$ ， $0\le s<f_4(t+1)$

所以 $f_4(1)+f_4(2)+\cdots+f_4(t)\le m<f_4(1)+f_4(2)+\cdots+f_4(t)+f_4(t+1)$

$f_5(t)\le m<f_5(t)+f_4(t+1)$ [因為 $f_n(k)=f_{n-1}(1)+f_{n-1}(2)+\cdots+f_{n-1}(k)$]

$f_5(t)\le m<f_5(t+1)$ [因為 $f_n(k)=f_{n-1}(k)+f_n(k-1)$]

$\frac{t(t+1)}{2}\le m<\frac{(t+1)(t+2)}{2}$ [因為 $f_5(t)=\frac{t(t+1)}{2}$]

得 $t(t+1)\le 2m<(t+1)(t+2)$

$$t^2<2m<(t+\frac{3}{2})^2$$

$$t<\sqrt{2m}<t+\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2m}-\frac{3}{2}<t<\sqrt{2m}$$

因此可得： $H_4(m)=(t-1)\times 2^t+1+s\times 2^t$

$=(t-1)\times 2^t+1+[m-f_5(t)]\times 2^t$ [因為 $s=m-f_5(t)$]

$$=\left[t-1+m-\frac{t(t+1)}{2}\right]\times 2^t+1$$

$$=\left[m-\frac{1}{2}(t^2-t+2)\right]\times 2^t+1$$

[文獻比較]：「三柱輪換之移動策略---雞尾酒法」研究出的 4 柱通式其 t 值範圍為 $\sqrt{2m}-2<t<\sqrt{2m}$ ，本研究，將範圍縮小為 $\Rightarrow \sqrt{2m}-\frac{3}{2}<t<\sqrt{2m}$ 。

【範例 1】：如何計算 $H_4(30)$ ？

以 $m=30$ 代入 $\sqrt{2m+1}$ ，得 $\sqrt{2m+1}=\sqrt{61}=7.7\cdots$

$\Rightarrow 6.2\cdots t<7.7\cdots$

所以 $t=7$ 代入 $H_4(m)=\left[m-\frac{1}{2}(t^2-t+2)\right]\times 2^t+1$

得 ： $H_4(30)=\left[30-\frac{1}{2}(7^2-7+2)\right]\times 2^7+1=1025$ #

2. $\boxed{H_5(m)\text{的公式推導：}}$

$$H_5(m)=1+3\times 2+6\times 2^2+10\times 2^3+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+t)\times 2^{t-1}+s\times 2^t$$

$$=f_5(1)+f_5(2)\times 2^1+f_5(3)\times 2^2+f_5(4)\times 2^3+\cdots+f_5(t)\times 2^{t-1}+s\times 2^t$$

其中：$m=f_5(1)+f_5(2)+f_5(3)+f_5(4)+\cdots+f_5(t)+s$ ， $0\le s<f_5(t+1)$

令 $P_5(t)=1+3\times 2+6\times 2^2+10\times 2^3+\cdots\cdots+\dfrac{t(t+1)}{2}\times 2^{t-1}$ ························ ①

$\Rightarrow 2P_5(t)=2+3\times 2^2+6\times 2^3+\cdots\cdots+\dfrac{t(t-1)}{2}\times 2^{t-1}+\dfrac{t(t+1)}{2}\times 2^t$ ················· ②

②－①得 $P_5(t)=\dfrac{t(t+1)}{2}\times 2^t-(1+2\times 2+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+t\times 2^{t-1})$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{由}H_4(m)\text{的推導中,知 } P_4(t)=1+2\times 2+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+t\times 2^{t-1}\\&=(t-1)\times 2^t+1\end{aligned}}$$

$$=t(t+1)\times 2^{t-1}-[(t-1)\times 2^t+1]$$

$$=t(t+1)\times 2^{t-1}-(t-1)\times 2^t-1$$

$$=(t^2-t+2)\times 2^{t-1}-1$$

又 $m=f_5(1)+f_5(2)+f_5(3)+f_5(4)+\cdots+f_5(t)+s$ ， $0\le s<f_5(t+1)$

所以 $f_5(1)+f_5(2)+\cdots+f_5(t)\le m<f_5(1)+f_5(2)+\cdots+f_5(t)+f_5(t+1)$

$f_6(t)\le m<f_6(t)+f_5(t+1)$ [**因為** $f_n(k)=f_{n-1}(1)+f_{n-1}(2)+\cdots+f_{n-1}(k)$]

$f_6(t)\le m<f_6(t+1)$ [**因為** $f_n(k)=f_{n-1}(k)+f_n(k-1)$]

$\dfrac{t(t+1)(t+2)}{6}\le m<\dfrac{(t+1)(t+2)(t+3)}{6}$ [**因為** $f_6(t)=\dfrac{t(t+1)(t+2)}{6}$]

得 $t(t+1)(t+2)\le 6m<(t+1)(t+2)(t+3)$

$$(t+\frac{1}{2})^3<6m<(t+2)^3$$

$$t+\frac{1}{2}<\sqrt[3]{6m}<t+2$$

$$\sqrt[3]{6m}-2<t<\sqrt[3]{6m}-\frac{1}{2}$$

因此可得：$H_5(m)=(t^2-t+2)\times 2^{t-1}-1+s\times 2^t$

$=(t^2-t+2)\times 2^{t-1}-1+[m-f_6(t)]\times 2^t$ [**因為** $s=m-f_6(t)$]

$$=\left[m-\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)+\frac{1}{2}(t^2-t+2)\right]\times 2^t-1$$

$$=\left[m-\frac{1}{6}(t^3+5t-6)\right]\times 2^t-1$$ #

【範例 2】：如何計算 $H_5(30)$ ？

以 $m=30$ 代入 $\sqrt[3]{6m}$ ，得 $\sqrt[3]{6m}=\sqrt[3]{180}=5.6\cdots$

$\Rightarrow\ 3.6\cdots<t<5.1\cdots$

則 (1) 以 $t=4$ 代入 $s=m-\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)$

$$=30-\frac{4\times5\times6}{6}=10$$

$s=10$ 滿足 $0\le s<\frac{(t+1)(t+2)}{2}\Rightarrow 0\le s<15$

(2) 以 $t=5$ 代入 $s=m-\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)$

$$=30-\frac{1}{6}(5\times6\times7)=-5$$

$s=-5$ 並未滿足 $0\le s<\frac{(t+1)(t+2)}{2}\Rightarrow 0\le s<21$

所以 $t=5$ 不合。

因此得到： $t=4$ ， $s=10$

代入 $H_5(m)=\left[m-\frac{1}{6}(t^3+5t-6)\right]\times 2^t-1$

可得 $H_5(30)=\left[30-\frac{1}{6}(4^3+5\cdot4-6)\right]\times 2^4-1=271$ 步 #

【範例 3】：如何計算 $H_5(40)$ ？

以 $m=40$ 代入 $\sqrt[3]{6m}$ ，得 $\sqrt[3]{6m}=\sqrt[3]{240}=6.2\cdots$

$\Rightarrow\ 4.2\cdots<t<5.7\cdots$

$\Rightarrow t=5$ 代入 $s=m-\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)=40-\frac{5\times6\times7}{6}=5$

代入 $H_5(m)=\left[m-\frac{1}{6}(t^3+5t-6)\right]\times 2^t-1$

可得 $H_5(40)=\left[40-\frac{1}{6}(5^3+5\cdot5-6)\right]\times 2^5-1=511$

3. $\boxed{H_6(m)\text{的公式推導：}}$

$H_6(m)=f_6(1)+f_6(2)\times 2+f_6(3)\times 2^2+\cdots+f_6(t)\times 2^{t-1}+s\times 2^t$

其中：$m=f_6(1)+f_6(2)+f_6(3)+f_6(4)+\cdots+f_6(t)+s$ ， $0\le s<f_6(t+1)$

令 $P_6(t)=f_6(1)+f_6(2)\times 2+f_6(3)\times 2^2+\cdots+f_6(t)\times 2^{t-1}$ …………………… ①

$\Rightarrow 2P_6(t)=f_6(1)\times 2+f_6(2)\times 2^2+f_6(3)\times 2^3+\cdots+f_6(t-1)\times 2^{t-1}+f_6(t)\times 2^t$ ……②

②－① 得 $P_6(t)=f_6(t)\times 2^t-\{f_6(1)+[f_6(2)-f_6(1)]\times 2+[f_6(3)-f_6(2)]\times 2^2+\cdots$

$+[f_6(t)-f_6(t-1)]\times 2^{t-1}\}$

$=f_6(t)\times 2^t-[f_5(1)+f_5(2)\times 2+f_5(3)\times 2^2+\cdots+f_5(t)\times 2^{t-1}]$

$=f_6(t)\times 2^t-P_5(t)$

$=\dfrac{t(t+1)(t+2)}{6}\times 2^t-[(t^2-t+2)\times 2^{t-1}-1]$

$=\dfrac{t(t+1)(t+2)}{3}\times 2^{t-1}-[(t^2-t+2)\times 2^{t-1}-1]$

$=\dfrac{t^3+5t-6}{3}\times 2^{t-1}+1$

又 $m=f_6(1)+f_6(2)+f_6(3)+f_6(4)+\cdots+f_6(t)+s$ ，

$0\le s<f_6(t+1)$

所以 $f_6(1)+f_6(2)+\cdots+f_6(t)\le m<f_6(1)+f_6(2)+\cdots+f_6(t)+f_6(t+1)$

$f_7(t)\le m<f_7(t)+f_6(t+1)$ [**因為** $f_n(k)=f_{n-1}(1)+f_{n-1}(2)+\cdots+f_{n-1}(k)$]

$f_7(t)\le m<f_7(t+1)$ [**因為** $f_n(k)=f_{n-1}(k)+f_n(k-1)$]

因爲 $f_7(t)=\dfrac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24}$

則 $\dfrac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24}\le m<\dfrac{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{24}$

得 $t(t+1)(t+2)(t+3)\le 24m<(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$

$(t+1)^4<24m<(t+\frac{5}{2})^4$

$t+1<\sqrt[4]{24m}<t+\dfrac{5}{2}$

$\sqrt[4]{24m}-\dfrac{5}{2}<t<\sqrt[4]{24m}-1$

因此得：$H_6(m)=\dfrac{t^3+5t-6}{3}\times 2^{t-1}+1+s\times 2^t$

$$=\frac{t^3+5t-6}{3}\times 2^{t-1}+1+\left[m-f_7(t)\right]\times 2^t \qquad [\textbf{因為}\ s=m-f_7(t)]$$

$$=\frac{t^3+5t-6}{3}\times 2^{t-1}+1+\left[m-\frac{1}{24}t(t+1)(t+2)(t+3)\right]\times 2^t$$

$$=\left[2m-\frac{1}{12}(t^4+2t^3+11t^2-14t+24)\right]\times 2^{t-1}+1$$ #

【範例 4】：如何計算 $H_6(30)$ ？

以 $m=30$ 代入 $\sqrt[4]{24m}$ ，得 $\sqrt[4]{24m}=\sqrt[4]{720}=5.18\cdots$

$\Rightarrow\ 2.68\cdots<t<4.18\cdots$

則

(1) 以 $t=3$ 代入 $s=m-\dfrac{1}{24}t(t+1)(t+2)(t+3)$

$$=30-\frac{3\times4\times5\times6}{24}=15$$

$t=3$ 、 $s=15$ 滿足 $0\le s<\dfrac{(t+1)(t+2)(t+3)}{6}\Rightarrow 0\le s<20$

(2) 以 $t=4$ 代入 $s=m-\dfrac{1}{24}t(t+1)(t+2)(t+3)$

$$=30-\frac{4\times5\times6\times7}{24}=-5$$

$t=4$ 、 $s=-5$ 並未滿足 $0\le s<35$

因此得到： $t=3$ ， $s=15$

代入 $H_6(m)=\left[2m-\dfrac{1}{12}(t^4+2t^3+11t^2-14t+24)\right]\times 2^{t-1}+1$

得 $H_6(30)=\left[60-\dfrac{1}{12}(3^4+2\cdot3^3+11\cdot3^2-14\cdot3+24)\right]\times 2^{3-1}+1=169$ #

4. $\boxed{H_n(m)\text{的公式推導：}}$

$$H_n(m)=f_n(1)\cdot 2^0+f_n(2)\cdot 2^1+f_n(3)\cdot 2^2+\ldots+f_n(t)\cdot 2^{t-1}+s\cdot 2^t$$

其中： $0\le s<f_n(t+1)\Rightarrow 0\le s<\dfrac{(t+n-3)!}{t!(n-3)!}$

令 $P_n(t)=f_n(1)\cdot 2^0+f_n(2)\cdot 2^1+f_n(3)\cdot 2^2+\cdots\cdots+f_n(t)\cdot 2^{t-1}$ ……………… ①

①×2 $\Rightarrow 2P_n(t)=f_n(1)\cdot 2^1+f_n(2)\cdot 2^2+f_n(3)\cdot 2^3+\cdots\cdots+f_n(t)\cdot 2^t$ ……………… ②

②－①可得

$$P_n(t)=f_n(t)\cdot 2^t-\{f_n(1)\cdot 2^0+[f_n(2)-f_n(1)]\cdot 2^1+[f_n(3)-f_n(2)]\cdot 2^2+\cdots+[f_n(t)-f_n(t-1)]\cdot 2^{t-1}\}$$

$$=f_n(t)\cdot 2^t-[f_{n-1}(1)\cdot 2^0+f_{n-1}(2)\cdot 2^2+f_{n-1}(3)\cdot 2^3+\ldots+f_{n-1}(t)\cdot 2^{t-1}]$$

$$=f_n(t)\cdot 2^t-P_{n-1}(t)$$

又 $m=f_n(1)+f_n(2)+f_n(3)+f_n(4)+\cdots+f_n(t)+s$ ， $0\le s<f_n(t+1)$

所以 $f_n(1)+f_n(2)+\cdots+f_n(t)\le m<f_n(1)+f_n(2)+\cdots+f_n(t)+f_n(t+1)$

$f_{n+1}(t)\le m<f_{n+1}(t)+f_n(t+1)$ [**因為** $f_n(k)=f_{n-1}(1)+f_{n-1}(2)+\cdots+f_{n-1}(k)$]

$f_{n+1}(t)\le m<f_{n+1}(t+1)$ [**因為** $f_n(k)=f_{n-1}(k)+f_n(k-1)$]

因此可得： $H_n(m)=f_n(t)\cdot 2^t-P_{n-1}(t)+s\times 2^t$

$=f_n(t)\cdot 2^t-P_{n-1}(t)+[m-f_{n+1}(t)]\times 2^t$ [**因為** $s=m-f_{n+1}(t)$]

$=[m-f_{n+1}(t)+f_n(t)]\times 2^t-P_{n-1}(t)$

其中 $f_n(t)=\dfrac{(t+n-4)!}{(t-1)!(n-3)!}$ $(n\ge 3\,,t\ge 1)$ #

5. $\boxed{H_n(m)\text{的公式的利用}}$

在 $H_n(m)$ 的公式中，我們需要知道 t 值與 $P_{n-1}(t)$ ，才能計算出 $H_n(m)$ 。如果同樣以 $H_4(m)$ 、 $H_5(m)$ 、 $H_6(m)$ 公式推導過程的 t 值求法，顯然困難重重。因此，我們需要尋找其他方式。

由於 $G.S.P.$ 軟體具有繪圖與計算功能，所以，以下我們利用 $G.S.P.$ 來尋找 t 值及計算 $H_n(m)$ 。以 $H_7(m)$ 爲例：

(1) t 值的尋找：

從 $H_n(m)$ 的公式推導中，可知 t 值的尋找，需透過不等式 $f_{n+1}(t)\le m<f_{n+1}(t+1)$

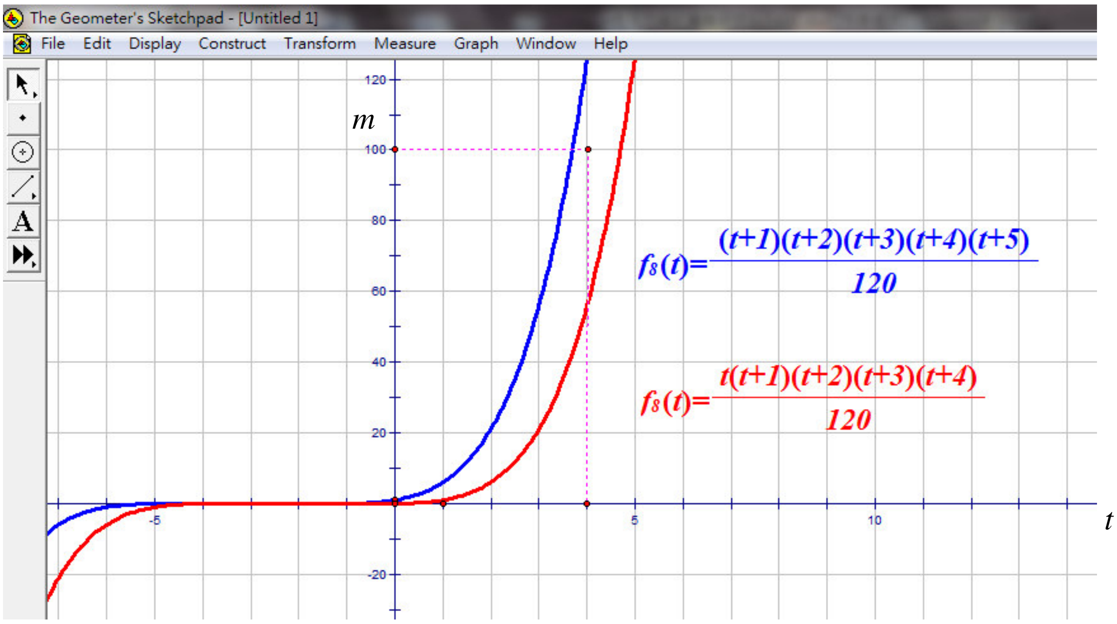
因爲 $n=7$ 所以t值滿足 $f_8(t)\le m < f_8(t+1)$

(2) 因爲 $f_n(t)=\dfrac{(t+n-4)!}{(t-1)!(n-3)!}$

所以 $f_8(t)=\dfrac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}$

$$f_8(t+1)=\frac{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{5!}$$

利用$G.S.P.$繪出兩函數圖形如下：



註：橫軸爲 t，縱軸爲 m

(3) 我們以$m=100$爲例，從上圖中，可知$t=4$

又 $P_6(t)=\dfrac{t^3+5t-6}{3}\times 2^{t-1}+1$

得 $P_6(4)=\dfrac{4^3+5\times 4-6}{3}\times 2^{4-1}+1=209$

且 $f_7(4)=\dfrac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{4!}=35$

$$f_8(4)=\frac{4(4+1)(4+2)(4+3)(4+4)}{5!}=56$$

由 $H_n(m)=\left[m-f_{n+1}(t)+f_n(t)\right]\times 2^t-P_{n-1}(t)$

可得 $H_7(100)=\left[100-f_8(4)+f_7(4)\right]\times 2^4-P_6(4)=[100-56+35]\times 2^4-209=1055$ #

伍、討論

從上述本研究的推導過程，我們確信『**n柱河內塔的通式存在」**。檢視國外文獻「Explorations in 4-peg Tower of Hanoi」，文中提及**百年來河內塔 4 柱的移動是不能証明最優化**。但其移動策略與本研究相同(見 $p26$)，然而最後結果，我們卻可証明出：『**n柱河內塔是可最優化』，並可推導出通式**。其原因，我們認爲是：

(1) 本研究先確立前提正確。因為對於任意n柱河內塔，皆可確定某些數量盤子的移動完成是最少步數，即【邊界條件】。(文獻並未做此前提的確立，並且我們找到文獻用電腦跑出的數據明顯錯誤(見附錄 $p28$)，致使文中的最少移動次數產生無規律現象。因此，我們猜測此原因，讓作者仍確信百年來河內塔 4 柱的移動是不能証明最優化的。)

(2) n柱河內塔的移動策略必定是

$$H_n(m)=2H_n(x_1)+2H_{n-1}(x_2)+\cdots+2H_4(x_{n-3})+H_3(m-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3})$$

共有$(n-2)$種策略的選擇。

(3) 每當盤子增加 1 個，其最少步數的完成(即優選)，必然要透過上述$(n-2)$種策略的選擇。因此，只要前提確定，我們必可從中做出優選，如此下去，必可得到每一個後續項，皆是優選過程產生。

綜合上述，可証明出：n柱河內塔是可最優化，並可推導出通式。

陸、結論

1. n柱河內塔的移動策略：

$$H_n(m)=2H_n(x_1)+2H_{n-1}(x_2)+\cdots+2H_4(x_{n-3})+H_3(m-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3})$$

2. $H_n(m)$的優選：

【步驟一】：先產生邊界條件，即第一群公差 2 的數列，共$n-1$項

即$H_n(1)=1$，$H_n(2)=3$，$H_n(3)=5$，……，$H_n(n-1)=2n-3$

【步驟二】：由，$H_n(m)=2H_n(x_1)+2H_{n-1}(x_2)+\cdots+2H_4(x_{n-3})+H_3(m-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3})$

共$(n-2)$種策略的選擇，利用優選尋找下一項。

3. 從優選的結果，得到n柱河內塔相同「差距」的數量，所構成的數列$<g_n(k)>$列，並將其轉換成$<f_n(k)>$數列，形成巴斯卡三角圖型。

4. 利用$<f_n(k)>$數列中的關係式，我們導出$H_n(m)$的通式：

(1) $H_4(m)=\left[m-\frac{1}{2}(t^2-t+2)\right]\times 2^t+1$ 其中 $\sqrt{2m}-\frac{3}{2}<t<\sqrt{2m}$

(2) $H_5(m)=\left[m-\frac{1}{6}(t^3+5t-6)\right]\times 2^t+1$ 其中 $\sqrt[3]{6m}-2<t<\sqrt[3]{6m}-\frac{1}{2}$

(3) $H_6(m)=\left[2m-\frac{1}{12}(t^4+2t^3+11t^2-14t+24)\right]\times 2^{t-1}+1$ 其中 $\sqrt[4]{24m}-\frac{5}{2}<t<\sqrt[4]{24m}-1$

(4) $H_n(m)=[m-f_{n+1}(t)+f_n(t)]\times 2^t-P_{n-1}(t)$

柒、參考資料：

1. 作者：陳璿、林亮辰、曹瑀、吳侑璋 (民 98)

   中華民國第 49 屆中小學科學展覽國中組數學---作品「三柱輪換之移動策略---雞尾酒法」。

2. 作者：Ben Houston & Hassan Masu (2004) “ Explorations in 4-peg Tower of Hanoi ”

捌、附錄

Explorations in 4-peg Tower of Hanoi

Ben Houston Hassan Masum

exocortex.org hmasum.com

November 29, 2004

Abstract

Finding an optimal solution to the 4-peg version of the classic Tower of Hanoi problem has been an open problem since the 19th century, despite the existence of a _presumed-optimal_ solution. We verify that the presumed-optimal Frame-Stewart algorithm for 4-peg Tower of Hanoi is indeed optimal, for up to 20 discs. We also develop a distributed Tower of Hanoi algorithm, and present 2D and 3D representations of the state transition graphs. Finally, two variants (k-out-of-order and k-at-a-time) and an analogy with distributed agent software are suggested.

1 Introduction: History and Overview

The Tower of Hanoi is a well known problem in recreational mathematics; it has also been widely used in computer science as a paradigmatic teaching example for recursive solution methods. In the basic version, a stack of discs of mutually distinct sizes is arranged on one of three pegs, with the size restriction that no larger disc is atop a smaller disc. The problem is then to move the entire stack of discs to another of the three pegs by moving one disc at a time, and always maintaining the size restriction.

As the instruction sheet for the puzzle (_rst sold in 1883) said: "*According to an old Indian legend, the Brahmins have been following each other for a very long time on the steps of the altar in the Temple of Benares, carrying out the moving of the Sacred Tower of Brahma with sixty-four levels in _ne gold, trimmed with diamonds from Golconde. When all is _nished, the Tower and the Brahmins will fall, and that will be the end of the world*"

It is well known that this basic version is solvable in 2_n-1 moves. But in generalizing the problem to four or more pegs, the analysis gets much harder. (Details and variants of the 4-peg problem can be found in [Stockmeyer 1994].) There is a solution method - the Frame-Stewart algorithm or _presumed-optimal solution_ - which is the best known for 4 pegs, but has not been proved to be optimal. A lower bound to the order of magnitude of moves required is given in [Szegedy 1999], and these results are sharpened in[Chen and Shen 2004] to show that the presumed-optimal solution has the same order of magnitude as the actual optimal solution.

Since no optimal solution is known, we have veri_ed that the presumedoptimal solution is indeed optimal for up to 20 discs, via an exhaustive search of the possible moves. Our work builds on that of [Hinz and Bode 1999],who found that the presumed-optimal solution was in fact best for up to 17 discs. We verify and extend their results, and give results for 5 and 6 pegs as well.

Two further approaches toward solving the problem are discussed. First, the solution method can be modi_ed to work on a distributed network of machines, which could allow veri_cation for larger numbers of discs. Second, we construct 2D and 3D representations of the state transition graphs for various Tower of Hanoi puzzles, which may help point out symmetries and suggest potential lines of attack on the general problem. Finally, we close with suggestions for k-out-of-order and k-at-a-time variants, and an analogy between the Hanoi problem and future distributed agent software.

2 Verifying 4-peg Tower of Hanoi

2.1 The Presumed-Optimal Solution

The presumed-optimal solution for 4-peg Tower of Hanoi (henceforth referred to as 4-peg ToH) has the following general form:Step 0 Number the pegs from 0 to 3. Our goal is to move all discs frompeg 0 to peg 3, respecting the constraints that only one disc moves at a time, and a smaller disc is never under a larger disc.

Step 1 Move the smallest d-k discs from peg 0 to peg 1, using all 4 pegs.

Step 2 Move the largest k discs from peg 0 to peg 3, without using peg1. (In other words, move these discs using the optimal 3-peg method,which is already known.)

Step 3 Move the smallest d-k discs from peg 1 to peg 3, using all 4 pegs.Denoting by T(d, p) the minimal number of moves for a d-disc problem on p pegs, we see that the above method implies a recursive solution:$T(d; 4) = 2 * T(d ¡ k; 4) + T(k; 3)$

Analysis of this recursion results in a closed-form solution for the minimizing value of k. One can also derive closed-form expressions for the total number of moves required (see [Stockmeyer 1994] and [Klavzar and Milutinovic 2002]).

However, this solution is only an answer to the original problem(how many moves does a 4-peg ToH require) under the assumption that theoptimal solution has the general structure given above. Despite a century of exploration into the problem, the optimality of the above solution has not been proven. It is therefore worthwhile to actually try all possible solutions to 4-peg ToH, to verify by demonstration that no shorter method exists.

以下為作者以電腦程式得到的資料：

# Discs	# Moves	Time (secs)	Mem (Mb)
1	1	0.02	0.02
2	3	0.02	0.02
3	5	0.02	0.02
4	9	0.02	0.02
5	13	0.03	0.02
6	17	0.03	0.02
7	25	0.03	0.02
8	33	0.05	0.02
9	41	0.07	0.03
10	49	0.10	0.05
11	65	0.32	0.13
12	81	1.09	0.37
13	97	3.10	0.76
14	113	9.28	1.68
15	129	24.91	5.54
16	161	135.28	19.19
17	193	563.89	66.17
18	225	1888.41	201.21
19	257	-	-
20	289	-	-

Table 1: 4-peg Tower of Hanoi Results

# Discs	# Moves	Time (secs)	Mem (Mb)
1	1	0.64	0.17
2	3	0.65	0.17
3	5	0.71	0.17
4	7	0.71	0.17
5	11	0.73	0.17
6	15	0.75	0.17
7	19	0.76	0.17
8	23	0.81	0.19
9	27	0.89	0.22
10	31	1.03	0.34
11	39	1.97	1.10
12	**43**	3.51	2.26
13	**47**	7.00	4.88
14	**53**	19.88	16.06

Table 2: 5-peg Tower of Hanoi Results

本研究提出：

綠框內為錯誤資料，明顯錯誤在於 $H_5(14)-H_5(13)=6$ **，其差距應為** 2^i **。**

正確為：47、55、63

# Discs	# Moves	Time (secs)	Mem (Mb)
1	1	0.62	0.17
2	3	0.67	0.17
3	5	0.72	0.17
4	7	0.74	0.17
5	9	0.77	0.17
6	13	0.78	0.17
7	17	0.83	0.17
8	21	0.88	0.20
9	25	1.01	0.34
10	29	1.44	0.74
11	33	2.69	2.09
12	37	6.99	6.64

Table 3: 6-peg Tower of Hanoi Results

【評語】030420

河內塔問題是一個有趣的問題，對於三柱河內塔問題的最佳移動策略其實早已廣為人知。但，就如作者們所引述的資料，四柱以上河內塔問題的最佳移動策略其實是沒有結果的。作者認為他們所提出的移動策略一定是最佳策略，對於前人無法解釋這事件，認為是他們忽略了一些簡單的事實，這一點其實存在著一些問題。以四柱問題為例，作者認為先將部份圓盤移至一柱，再依循三柱的最佳移動策略，即可得出四柱的最佳移動策略，這其實忽略了在移動剩下的圓盤時，有可能會出現在三柱問題中不合法的移動方式的可能性。雖然沒能對問題給出突破性的想法，但對國中生而言，能給出可行解已屬不易，很不錯的結果。