中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030419

魔豆連連看

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳宥蓁 國三 林詩縈	洪明瞭

關鍵詞：等差數列、方程式

作品名稱：魔豆連連看

摘要

抽芽遊戲是由兩人在紙上的點輪流連線，最後一個連線的人就勝利了，我們的研究首先尋找抽芽遊戲的規則，跳脫求勝的策略，將步數與塊數的最大與最小範圍找出來；接下來改變抽芽遊戲的玩法，研究連線數與方法，同時將玩法推展爲四面體的遊戲，尋找遊戲的規律。

壹、研究動機

有一天，我們在數學遊戲這本書上看到了抽芽遊戲，這個遊戲是由兩人在紙上的點輪流連線，最後一個連線的人就勝利了，我們在廝殺了幾局之後越玩越有趣，因而萌發研究的動機。我們玩的時候發現，可以下出的步數及圍出的塊數皆有範圍，我們便想研究此遊戲的最大與最小步數及塊數，並改變遊戲方式，觀察其中的變化。

貳、研究目的

一、研究基礎抽芽遊戲的步數、塊數

二、改變玩法並研究步數、塊數

三、發展立體玩法

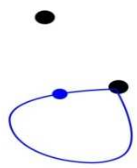
參、研究設備及器材

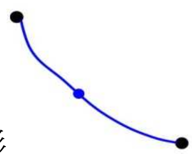
紙、筆、正四面體模型、白板、電腦、Photo Impact 軟體

肆、研究過程與方法

一、玩法簡介：

先在紙上作出任意點，最好是 3-5 點，兩人輪流在點與點之間連線，所連的線必須爲簡單曲線，即無論如何都不會疊過自己或別人，每一個點可有 3 線連出來，每次連時，只能連接兩點，或可包含自己做一個封閉的曲線(如下圖)，並在此線上增加一點。當沒有點可連線的時候，最後一個連線的人獲勝。


←可包含自己連成一封閉圖形


←可連接兩點

我們將研究分爲三種玩法

(1) 玩法一：原始的基本玩法→一個點有三條命，每連一條線增加一個點

(2) 玩法二：改變連線的方法→一個點有四條命，每連一線穿過一點，並增加一個點

(3) 玩法三：簡化遊戲→一個點有 m(m≧2)條命，連線時，不增加點，也不穿過點

二、名詞解釋

n：起始點數

生命（DL）：每一個點可連出的線。例：有 3 個點，每一個點可連出 3 條線，共有 9 條命

步數(S)：玩完一局所畫的線數

S_M：最大步數

S_m：最小步數

塊數(P)：由線所圍出的封閉圖形的總和

P_M：最大塊數

P_m：最小塊數

穿過的點數(TD)：每連一條線所須穿過的點數

經過的面數(TP)：立體玩法中連線的時候所須經過的面

餘點(Ds)：遊戲結束後所剩的點的生命

三、玩法一：原始玩法

一個點有 3 條生命，DL=3，每連一條線可增加一個點

(一)步數

n=1 時，只有一種走法，步數為 1

n=2 時，有兩種走法，步數分別為 4、5

n=3 時，有三種走法，步數分別為 6、7、8

因為連線方式的不同會造成最大與最小的步數不同

我們將起始點與走法步數列表如下：

起始點	S					S_m	Ds	S_M	Ds
1	2					2	1	2	1
2	4	5				4	2	5	1
3	6	7	8			6	3	8	1
4	8	9	10	11		8	4	11	1
5	10	11	12	13	14	10	5	14	1
……									
n						2n	n	3n-1	1

我們發現：

1.每個點有 3 條命

(1) 每連一線可增加一個點，減少 2 生命

(2) 加一點可增加一命

所以　餘點數＝起始總生命數-步數，也就是 Ds＝3n-S

2.起始點為 n 時，要走出 S_m 要留下最多餘點 n，代入規律 n=3n-S，S=2n；同理，要走出 S_M 要留下最少餘點 1，代入規律 1＝3n-S，S=3n-1

符合規律 Ds＝3n-S

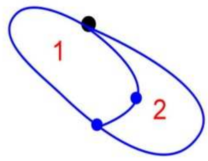
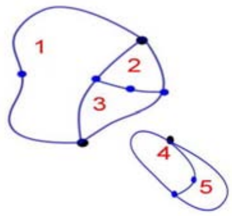
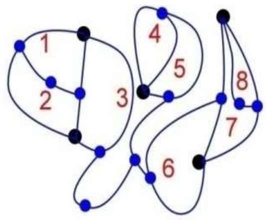
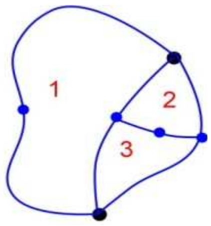
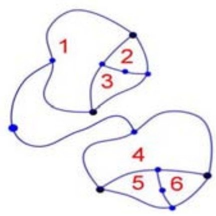
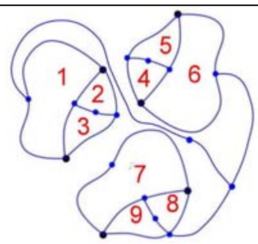
(二)塊數

因為連線方法的不同，造成塊數也不同，我們把起始點數與塊數的關係列表如下：

起始點數	塊數			P_m	P_M	起始點數	塊數				P_m	P_M
1	2			2	2	2	3	4			3	4
3	5	6		5	6	4	6	7	8		6	8

5	8	9	10	8	10	6	9	10	11	12	9	12
……												
奇數				$(\frac{n-1}{2})\times 3+2$	2n	偶數					$\frac{n}{2}\times 3$	2n

1.P_m的分析

n	1	3	5
圖示			
P_m	2	$5=(\frac{3-1}{2})\times 3+2$	$\frac{5-1}{2}\times 3+2=8$
n	2	4	6
圖示			
P_m	3	$6=\frac{4}{2}\times 3$	$\frac{6}{2}\times 3=9$

我們分析上表的圖形，發現：

(1)n 爲奇數，每 2 個起始點爲一組，最後剩下 1 起始點，就可以多畫一個 n=1 的圖形

(2)n 爲偶數，每 2 個起始點爲一組，恰好不留起始點

(3)所以 P_m 在奇數與偶數的情況下，圖形會有所不同，我們將它擴大並推展至 n 發現

當 n 爲奇數時，$P_m=(\frac{n-1}{2})\times 3+2$

當 n 爲偶數時，$P_m=\frac{n}{2}\times 3$

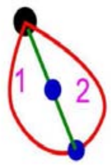
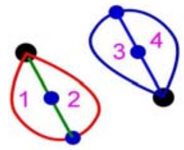
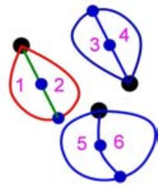
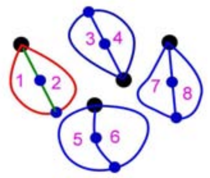
(4)我們試著把更大的數字代進 P_m 的規律

當 n=9 時，P_m=14

當 n=10 時，P_m=15，經畫圖驗證，規律是正確的。

2.P_M 的分析

n	1	2	3	4		n

圖示					……	圖略
P_M	2	4	6	8		2n

每一個起始點最多圍出 2 塊，依此規律推展至 n 個起始點，最多可圍出 2n 塊，所以 P_M=2n

(三)步數與塊數的關聯

1.我們整理步數與塊數種類的關係如下表：

n	S	Ds	P	塊數種類
1	2	1	2	1
2	4	2	3	2
			4	
	5	1	4	1
3	6	3	5	2
			6	
	7	2	5	2
			6	
	8	1	6	1
4	8	4	7	2
			8	
	9	3	6	3
			7	
			8	
	10	2	7	2
			8	
	11	1	8	1
5	10	5	9	2
			10	
	11	4	8	3
			9	
			10	
	12	3	8	3
			9	
			10	
	13	2	9	2
			10	
	14	1	10	1
6	12	6	11	2
			12	
	13	5	10	3
			11	
			12	
	14	4	9	4
			10	
			11	
			12	
	15	3	10	3
			11	
			12	
	16	2	11	2
			12	
	17	1	12	1

2.我們發現：

(1)在 S_M 及 P_M 的狀況下，只有一種類型，也就是 S_M 時，必為 P_M

(2)在 S_m 下，P 未必會最小，P_m 會出現在塊數種類最多的範圍中

(四)必勝：由於勝負的影響太複雜，因此不再探討，而專注於研究步數與塊數的關聯

四、玩法二：改變連線的方法

一個點有 4 條命，DL=4，每連一條線要穿過一個點，並增加一個點

(一)步數

我們將起始點與走的步數列表如下：

起始點	S					S_m	Ds	S_M	Ds
1	1					1	2	1	2
2	2	3				2	4	3	2

3	3	4	5			3	6	5	2
4	4	5	6	7		4	8	7	2
5	5	6	7	8	9	5	10	9	2
……									
n						n	2n	2n-1	2

我們發現：

1.每個點有 4 條命

(1) 每連一線可增加一個點，減少 4 生命

(2) 加一點可增加 2 生命

所以 $\dfrac{\text{起始總生命數}-\text{餘點數}}{2}$ =步數，也就是 $\dfrac{4n-Ds}{2}$ =S

2.起始點為 n 時，要走出 S_m 須留下最多餘點 2n，代入規律 $\dfrac{4n-2n}{2}$ =S，S=n

同理，要走出 S_M 須留下最少餘點 2，代入規律 $\dfrac{4n-2}{2}$ ＝S，S=2n-1

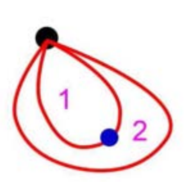
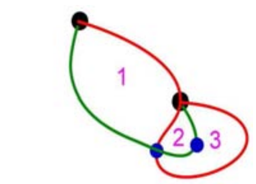
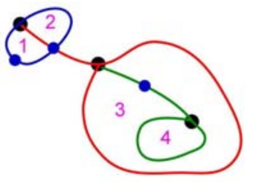
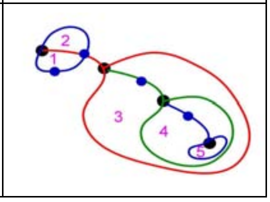
符合規律 $\dfrac{4n-Ds}{2}=S$

(二)塊數

1.塊數的切割方式

(1)P_m

我們將一至四點的 P_m 以圖形觀察：

n	1	2	3	4
圖示				

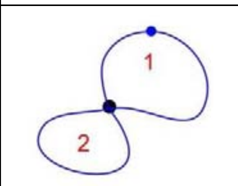
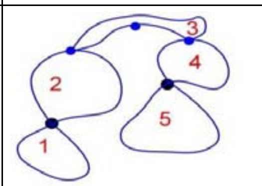
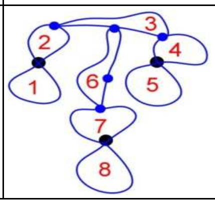
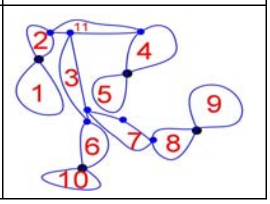
仿照這樣的方法，再繼續擴大，把起始點數與 P_m 的關係列表：

n	1	2	3	4	5	6		n
P_m	2	3	4	5	6	7	……	n+1

從 2 點開始，每增加一起始點，最少增加一塊，因此 n 個起始點就會有 n+1 塊

(2)P_M

我們將一至四點的 P_M 以圖形觀察：

n	1	2	3	4
圖示				

再仿照這樣的方法，繼續擴大，把起始點數與 P_M 的關係列表：

n	1	2	3	4	5	6		n

P_m	2	5	8	11	14	17	……	3n-1

發現 2 點開始，每增加一起始點最多增加 3 塊，因此 n 個起始點最多可圍出 3n-1 塊

(三)步數與塊數的關聯

1.我們將步數與塊數種類的關係列表如下：

n	S	Ds	P	塊數種類
1	1	2	2	1
2	2	4	3	2
			4	
	3	2	4	1
3	3	6	4	3
			5	
			6	
	4	4	6	2
			7	
	5	2	8	1
4	4	8	5	4
			6	
			7	
			8	
	5	6	7	3
			8	
			9	
	6	4	9	2
			10	
	7	2	11	1

n	S	Ds	P	塊數種類
5	5	10	6	5
			7	
			8	
			9	
			10	
	6	8	8	4
			9	
			10	
			11	
	7	6	10	3
			11	
			12	
	8	4	12	2
			13	
	9	2	14	1

n	S	Ds	P	塊數種類
6	6	12	7	6
			8	
			9	
			10	
			11	
			12	
	7	10	9	5
			10	
			11	
			12	
			13	
	8	8	11	4
			12	
			13	
			14	
	9	6	13	3
			14	
			15	
	10	4	15	2
			16	
	11	2	17	1

2.按照玩法一的方式觀察，我們發現：

(1)在 S_M 及 P_M 的狀況下，只有一種類型，也就是 S_M 時，必為 P_M

(2) S_m 及 P_m 必同時存在

三、玩法三：簡化玩法

一個點有 m(m≧2)條命，DL=m，連線時，不增加點，也不穿過點。

(一)步數

我們將起始點數和步數的關係整理成下表：

m	n	S_m	Ds	S_M	Ds	m	n	S_m	Ds	S_M	Ds	m	n	S_m	Ds	S_M	Ds
6	1	3	0	3	0	8	1	4	0	4	0	10	1	5	0	5	0
	2	6	0	6	0		2	8	0	8	0		2	10	0	10	0
	3	8	2	9	0		3	11	2	12	0		3	14	2	15	0
	4	11	2	12	0		4	15	2	16	0		4	19	2	20	0
	5	14	2	15	0		5	19	2	20	0		5	23	4	25	0
7	1	3	1	3	1	9	1	4	1	4	1						
	2	7	0	7	0		2	8	0	9	0						
	3	10	1	10	1		3	13	1	13	1						

	4	13	2	14	0		4	17	2	18	0
	5	17	3	19	1		5	21	3	22	1

我們發現：

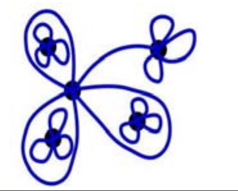
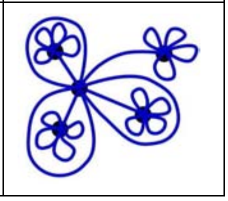
1.S $_m$

(1)因爲每走一步總共減少兩條生命，可推出$\dfrac{m \times n - Ds}{2}$=S

(2)要留下最多的餘點，才能走出 S $_m$ ，故以餘點數來探討，求出最大餘點總生命數後

再以($\dfrac{m \times n - Ds}{2}$=S)，換算出 S $_m$ 。

由於在畫最小步數時，m 爲奇數與 m 爲偶數的圖形畫法不同，如右表：

m 爲奇數	m 爲偶數
	

於是我們將 m 分爲偶數、奇數兩部分來討論：

(3) m 爲偶數

將偶數生命數(m)、起始點數(n)及餘點數(Ds)的關係列表如下：

m / Ds / n	4	6	8		10		12	14		16		18	20		22	
1	0	0	0		0		0	0		0		0	0		0	
2	0	0	0		0		0	0		0		0	0		0	
3	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	3	2		2	2		2		2	2		2	
5	2	2	2		4		4	4		4	2	4	4	2	4	2
6	2	4	4		4	3	4	4	3	4		4	4		4	
7	4	4	4	3	4		4	4		6		6	6		6	2
8	4	4	4		6		6	6	2	6	3	6	6	3	6	
9	4	6	6		6	3	6	6		6		6	6		8	
10	4	6	6	3	6		8	8		8	2	8	8	2	8	3
11	6	6	6		8	2	8	8	3	8		8	8		8	
12	6	8	8		8		8	8		10		10	10	2	10	2
13	6	8	8	3	10		10	10	2	10	3	10	10		10	
14	6	8	8		10	3	10	10		10		12	12		12	2
15	8	10	10		10		12	12		12	2	12	12	3	12	
16	8	10	10	3	12		12	12	3	12		12	12		14	
17	8	10	10		12	3	12	12		14	2	14	14	2	14	3
18	8	12	12		12		14	14	2	14		14	14		14	
19	10	12	12	3	14	2	14	14		16		16	16	2	16	2
20	10	12	12		14		16	16		16	3	16	16		16	
21	10	14	14		16		16	16	3	16		18	18		18	2
22	10	14	14	3	16	3	16	16		18	2	18	18	3	18	
23	12	14	14		16		18	18	2	18		18	18		20	2
24	12	16	16	3	18	3	18	18		20	3	20	20	2	20	
25	12	16	16		18		20	20	3	20		20	20		22	3

26	12	16	16		18		20	20		20		22	22	2	22	
27	14	18	18		20	2	20	20		22	2	22	22		22	
28	14	18	18	3	20		22	22	2	22		24	24		24	2
29	14	18	18		22		22	22		24	2	24	24	3	24	
30	14	20	20		22	3	24	24		24		24	24		26	2
31	16	20	20	3	22		24	24	3	26		26	26	2	26	
32	16	20	20		24		24	24		26	3	26	26		28	
33	16	22	22		24	3	26	26	2	26		28	28	2	28	3
34	16	22	22	3	24		26	26		28	2	28	28		28	
35	18	22	22		26	2	28	28		28		30	30		30	2
36	18	24	24		26		28	28	3	30		30	30	3	30	
37	18	24	24	3	28		28	28		30	3	30	30		32	2
38	18	24	24		28	3	30	30	2	30		32	32	2	32	
39	20	26	26		28		30	30		32	2	32	32		34	2
40	20	26	26	3	30		32	32		32		34	34	2	34	
41	20	26	26		30	3	32	32	3	34	2	34	34		36	3
42	20	28	28	3	30		32	32		34		36	36	3	36	

表格中用紅、藍、黃分別框起來的部分各自有不同的循環規律，而顏色所填滿的部分則區隔開每一次循環，以方便觀察。

觀察上表的規律，發現偶數部分可分爲兩種規律：

a.m=6k 及 m=6k+2　b. m=6k+4

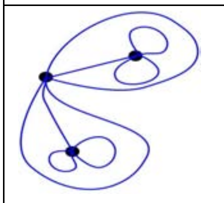
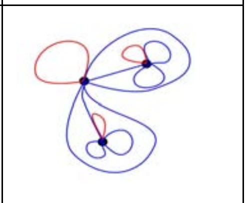
其中 m=6k 和 m=6k+2 的規律是一樣的

因爲以 m=6 和 m=8 爲例，n=3

發現這兩個圖只差三個紅色圈圈，和 Ds 無關

而上頁表格中的 Ds 出現得很有規律

，整理如下：

m=6	m=8
	

m=6k	m=6k+2	規律	m=6k+4	規律
6	8	3	10	233
12	14	23	16	22323
18	20	223	22	2223223
24	26	2223	28	222232223

我們發現：

a.當 m=6k 及 m=6k+2 時，每次循環會多出一個 2

b.當 m=6k+4 時，每次循環會多出兩個 2

整理了上面的規律後歸納出以下規律：

下表：Q 爲所求 Ds 所位於的第 Q 次循環

x 爲第 Q 次循環的第 x 個數

（除了 m=４時，不遵守以下的規則，其他的生命數皆可用方程式表達）

當 m=6k 及 m=6k+2， 起始點數=n 時	例一：求 m=24　n=42 k=4

<table>
<tr><td rowspan="2">每 2k+1 循環一次
(n-2)=(2k+1)Q+x
其中 2k+1≧x＞0
2+Q×2k+t=Ds
x 爲奇數時，t=x-1
x 爲偶數時，t=x-2
x= 2k+1 時，t=x-3
∵x 剛好爲一次循環</td><td>40=9Q+x ，Q=4，x=4
2+4x8+2=36(x 爲偶數，t=x-2=2)
∴m=24 n=42 時，最大餘點爲 36，S_m=486</td></tr>
<tr><td>例二：求 m=26 n=30
k=4
28=9Q+x ，Q=3，x=1
2+3x8+0=26(x 爲奇數，t=x-1=0)
∴m=26 n=30 時，最大餘點爲 26，S_m=377</td></tr>
<tr><td>當 m=6k+4，起始點數=n 時
每 4k+4 循環一次
(n-2)=(4k+4)Q+x 其中 4k+4≧x＞0
2+ (4k+2)Q +t=Ds
若 x≦2k+2 且爲奇數 則 x-1=t
且爲偶數 則 x-2=t
若 x=2k+3 則 x-3=t
若 2k+3<x≦4k+3
且爲奇數 則 x-3=t
且爲偶數 則 x-2=t
若 x=4k+4 則 x-4=t
∵x 剛好爲一次循環</td><td>例如：求 m=28 n=28
k=4
26=20Q+y
Q=1 x=6
2+18×Q +t
∵6≦2×4+2 且 6 爲偶數∴t=x－2=4
2+18×1 +4=24
∴m=28 n=28 時，最大餘點爲 24，S_m=380</td></tr>
</table>

(4)m 爲奇數

將奇數生命數(m)、起始點數(n)及餘點數(Ds)的關係列表如下：

Ds \ m n	3	5	7	9	11	13
1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2	2
5	3	3	3	3	3	3
6	2	4	4	4	4	4
7	3	5	5	5	5	5
8	4	4	6	6	6	6
9	5	5	7	7	7	7
10	4	6	6	8	8	8
11	5	7	7	9	9	9
12	6	8	8	8	10	10
13	7	9	9	9	11	11
14	6	8	10	10	10	12
15	7	9	11	11	11	13
16	8	10	12	12	12	12
17	9	11	13	13	13	13
18	8	12	12	14	14	14

19	9	13	13	15	15	15
20	10	12	14	16	16	16
21	11	13	15	17	17	17
22	10	14	16	16	18	18
23	11	15	17	17	19	19
24	12	16	18	18	20	20
25	13	17	19	19	21	21
26	12	16	18	20	20	22
27	13	17	19	21	21	23
28	14	18	20	22	22	24
29	15	19	21	23	23	25
30	14	20	22	24	24	24
31	15	21	23	25	25	25
32	16	20	24	24	26	26
33	17	21	25	25	27	27
34	16	22	24	26	28	28
35	17	23	25	27	29	29
36	18	24	26	28	30	30
37	19	25	27	29	31	31
38	18	24	28	30	30	32
39	19	25	29	31	31	33
40	20	26	30	32	32	34
41	21	27	31	33	33	35
42	20	28	30	32	34	36
43	21	29	31	33	35	37

將每一次循環的規律用顏色區隔開來，發現：

a. 除了第一項之外，以後皆爲 m+1 個數爲一循環，每次循環皆重複前兩個數字。

b. 根據上面的規則，我們可以推知生命數爲 m，起始點爲 n 時餘點的規律：

1,(0,1,2,3,……,m),(m-1,m,m+1,……, 2m-2,2m-1),(2m-2,2m-1,……,3m-3,3m-2)

(a)除第一個 1 不加入循環外，每 m+1 個數爲一次循環

(b)每次循環開頭的規律 0,m-1,2m-2,3m-3……

(c)每次循環結尾的規律 m,2m-1,3m-2,4m-3……

(d) $\left\lceil \frac{n-1}{m+1} \right\rceil$ 爲 n 所在的那一次循環　（$\lceil x \rceil$：上高斯符號，表示≧x 的最小數值)

便可得出計算餘點方法：(n-1)-h(m+1)+h(m-1)-1=n-2h-2

其中 h 爲最靠近但不超過 n 的第 h 次循環 $\therefore h=\left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$

（$\lfloor x \rfloor$：下高斯符號，表示≦x 的最大數值)

最後再利用 $\frac{m \times n - Ds}{2}$=S，即可求得 S_m

c.例 m=21 循環如下：

1,(0,1,2,………20,21),(20,21,22,………40,41),(40,41,42,………60,61),60,61…

(a)若要求第 25 個點的餘點數，n=25，m=21，h=$\left\lfloor \frac{24}{22} \right\rfloor$=1

代入規律可求出 Ds=21，S_m=252

(b)若要求第 46 個點的餘點數，n=46，m=21，h=$\left\lfloor \frac{45}{22} \right\rfloor$=2

代入規律可求出 Ds=40，S_m=463

2.S_M

在每一點都確實連到的情況下，每走一步總共減少兩條生命，因此：

$S_M = \left\lfloor \frac{n \times m}{2} \right\rfloor$

(二)塊數

我們將 m=6 到 10 時的起點數和塊數的關係列表如下：

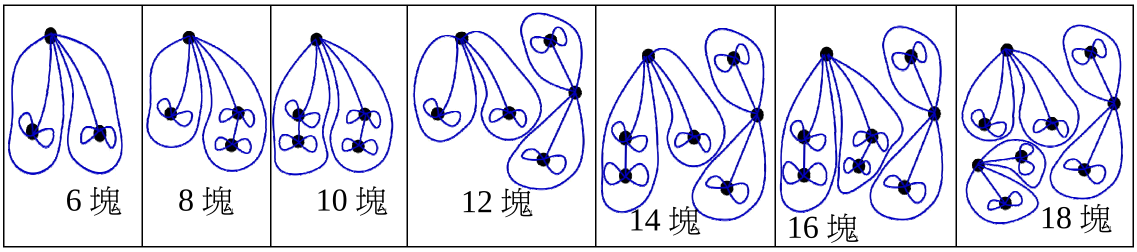
m	n	P_m	P_M	m	n	P_m	P_M	m	n	P_m	P_M
6	1	3	3	8	1	4	4	10	1	5	5
	2	5	6		2	7	8		2	9	10
	3	6	9		3	9	12		3	12	15
	4	8	12		4	12	16		4	16	20
	5	10	15		5	15	20		5	19	25
	6	12	18		6	18	24		6	23	30
	7	14	20		7	21	28		7	27	35
7	1	3	3	9	1	4	4				
	2	6	6		2	8	8				
	3	8	9		3	12	12				
	4	11	12		4	15	16				
	5	13	15		5	19	20				
	6	16	18		6	23	24				
	7	18	21		7	25	28				

觀察上列表格發現，由於規律複雜不易深入探討塊數變化，所以只用圖形尋找循環規律

1.P_m

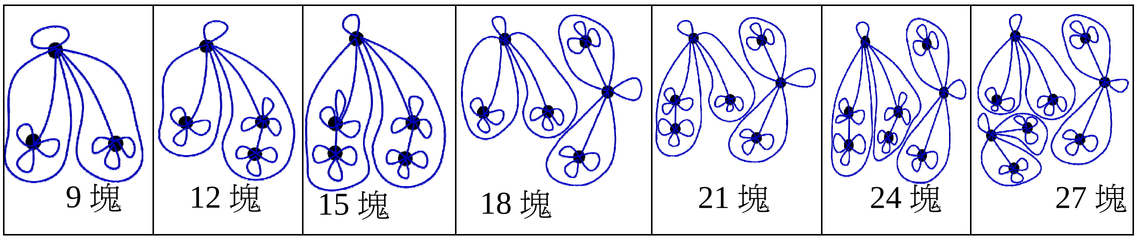
(1)m 為偶數

a. 當 m=6 時，我們把圖形的規律列表如下：



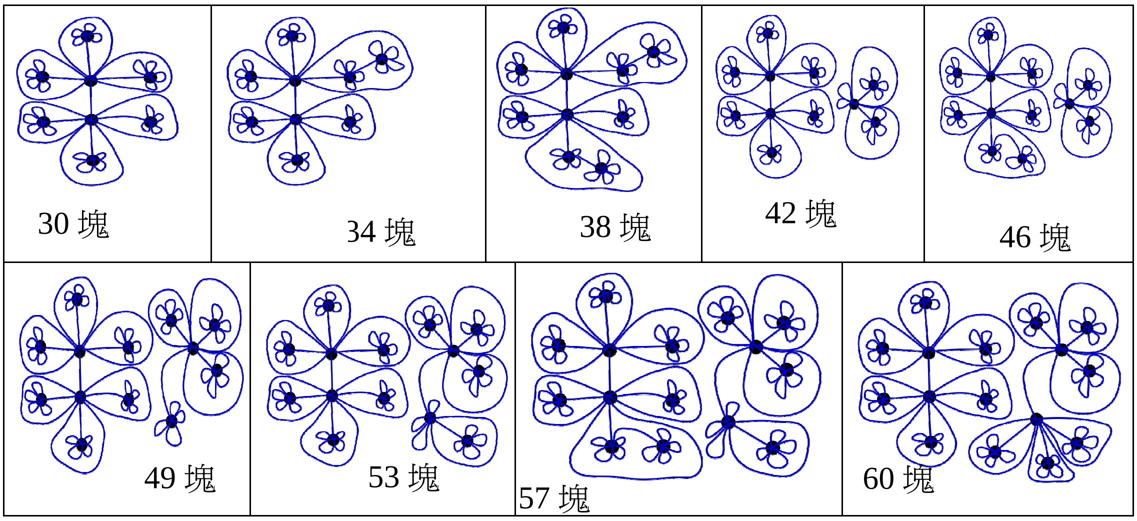
每 3 點剛好為一個完整的獨立圖形，也就是每 3 個點會循環一次，循環點數為 3

b. 當 m=8 時，我們把圖形的規律列表如下：



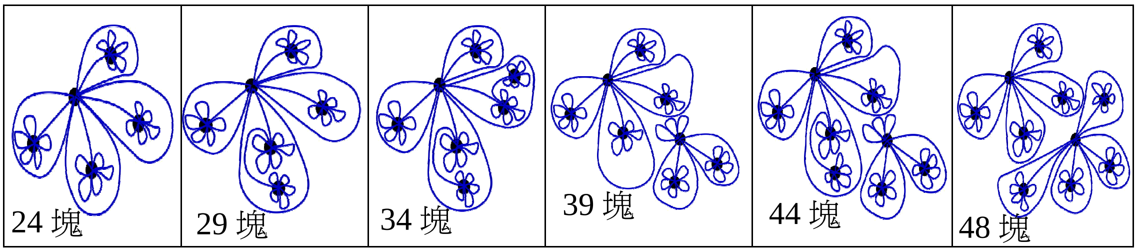
每 3 點剛好爲一個完整的獨立圖形，也就是每 3 個點會循環一次，循環點數爲 3

c. m=10 時，我們把圖形的規律列表如下：



每 8 個點剛好爲一個完整的獨立圖形，所以每 8 個點循環一次，循環點數爲 8

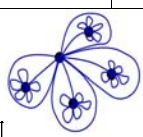
d. 當 m=12 時，我們把圖形的規律列表如下：



每 5 個點剛好爲一個完整的獨立圖形，所以每 5 個點循環一次，循環點數爲 5

e. 我們將 m 值依 6k、6k+2 及 6k+4 分別列表觀察 P_m 與循環點數的關係：

6k			6k+2			6k+4		
m	循環點數的 P_m	循環點數	m	循環點數的 P_m	循環點數	m	循環點數的 P_m	循環點數
6	6	3	8	9	3	10	30	8
12	24	5	14	29	5	16	80	12
18	54	7	20	61	7	22	154	16
24	96	9	26	105	9	28	252	20
……			……			……		
m	$\frac{m^2}{6}$	$\frac{m}{3}+1$	m	$\frac{(m-2)^2}{6}+\frac{m+1}{3}$	$\frac{m+1}{3}$	m	$m\times(\frac{m-1}{3})$	$2(\frac{m+2}{3})$

f. m 爲偶數時，圖形上都會畫出如  的花瓣型

(a)每長出一朵花瓣，會減少中心點的三條生命，所以$\frac{m}{3}$就可知道此點長出多少

花瓣：當$\frac{m}{3}$整除時，循環點數為$\frac{m}{3}+1$

當$\frac{m}{3}$餘 1 時，循環點數為 $2(\frac{m+1}{3})$

當$\frac{m}{3}$餘 2 時，循環點數為$\frac{m+1}{3}$

(b)因此計算塊數時，只要算出一朵花瓣所圍出的塊數，再乘上$\frac{m}{3}$就可知道塊數

g. 當 m=6k 時，循環點數的 $P_m=\frac{m^2}{6}$

當 m=6k+2 時，循環點數的 $P_m=\frac{(m-2)^2}{6}+\frac{m+1}{3}$

當 m=6k+4 時，循環點數的 $P_m=m\times(\frac{m-1}{3})$

h. 利用循環點數的 P_m，再加上多出的點所增加的 P，計算出所有起始點數的 P_m，如下：

令多出的起始點數為 T，完整的花朵的個數為 A，所以 $A=\left\lfloor\frac{n}{\text{循環點數}}\right\rfloor$

我們發現在 A=0 及 A＞0 時，會有不同的結果，因此我們將它分開討論。

m=6k 時 $A=\left\lfloor\frac{n}{\frac{m}{3}+1}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{3n}{m+3}\right\rfloor$

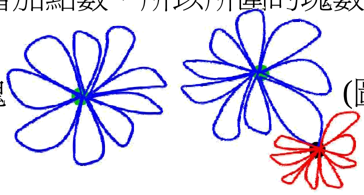
我們將 m=18 及 m=24 和起始點數、P_m的關係列表：

A=0			A＞0		
P_m \ m / n	18	24	P_m \ m / n	18	24
0	0	0	7	54	
1	9	12	8	62	
2	17	23	9	70	
3	24	33	10	78	107
4	32	44	11	86	118
5	39	54	12	93	129
6	47	65	13	101	140
7		75	14	108	150
8		86	15	116	161
9		96	16	124	171
			17	132	182
			18	140	192

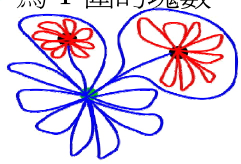
表格中塗色部份代表完整的循環點數

觀察圖形可發現：

A=0 時

P 是由一個點逐漸增加點數，所以所圍的塊數就從$\frac{m}{2}$往上增加每多出一個點時，就可多圍出$\frac{m-2}{2}$塊(圖中藍線爲中心點圍的塊數，紅線爲 T 圍的塊數，綠色的點中心點)

T=2 時，雖然多的點所圍出的塊數沒變，
但中心點圍出的 P 卻少了一塊



因此可發現表格中塊數增加的變化，會因爲 n 的奇偶，呈+$\frac{m-2}{2}$及+$\frac{m-2}{2}$-1 的 2 種循環變化：

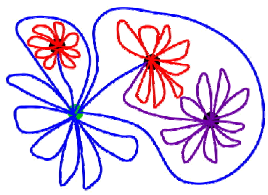
當 n 爲奇數時，自 1 點開始每次增加$\frac{m-2}{2}+\frac{m-2}{2}$-1=m-3 塊

所以 $P_m=\frac{m}{2}+\frac{(n-1)}{2}(m-3)$

當 n 爲偶數時，也會每次增加$\frac{m-2}{2}+\frac{m-2}{2}$-1=m-3 塊，但塊數會從第一個點的塊數($\frac{m}{2}$)，所往回推算的循環塊數($\frac{m-2}{2}$-1)開始增加， $P_m=2+\frac{n}{2}(m-3)$

A＞0 時

由於圖形可以「串燒」，所以在 T=1 時
只增加了$\frac{m-2}{2}$塊，而不是$\frac{m}{2}$塊。



(紫色的線爲串燒)

觀察表格可發現：

在只增加 1 個點及 2 個點時，增加的塊數 A＞0 的情形會比 A=0 少 1，
在增加 3 點以後，由於點數的增加，用多出的點自己圍出的塊數就是最小塊數，所以在 T＞2 後，A=0 與 A＞0 比完整圖形所增加的塊數就會相同。

從每多一個點所增加塊數的差值發現：

在 T＜5 的情況下，每次固定增加$\frac{m-2}{2}$塊，P_m=完整的花朵 P_m+T 圍出的 P_m

$$=A(\frac{m^2}{\ })+n\times\frac{m-2}{\ }$$

T≧5 的情況下，塊數的增加則呈 +$\frac{m-2}{2}$及 +$\frac{m-2}{2}$-1 的 2 種循環變化，

(a)n 爲奇數

P_m=完整的花朵 P_m+T 爲 3 時圍出的 P_m+往後每增加 2 點多圍的 P_m

$$=A(\frac{m^2}{6})+3\times\frac{m-2}{2}+\frac{n-3}{2}\times(m-3)$$

(b)n 為偶數

P_m=完整的花朵 P_m+T 為 4 時圍出的 P_m+往後每增加 2 點多圍的 P_m

$$=A(\frac{m^2}{6})+4\times\frac{m-2}{2}+\frac{n-4}{2}\times(m-3)$$

m=6k+2 時

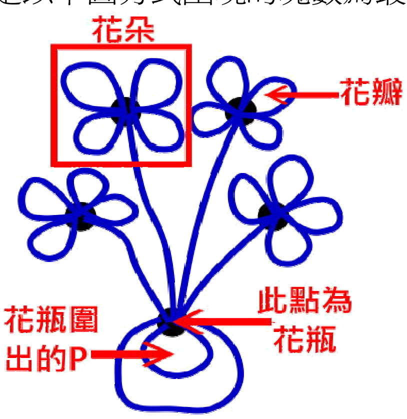
由於 m=6k 與 m=6k+2 的循環點數是一樣的，所以規律相同

只要將 m=6k+2 的循環點數 P_m 規律 $(\frac{(m-2)^2}{6}+\frac{m+1}{3})$及循環點數$\frac{m+1}{3}$代進 m=6k 的方程式中即可。我們將所有推論整理如下表：

	m=6k		m=6k+2	
A	$\left\lfloor\frac{3n}{m+3}\right\rfloor$		$\left\lfloor\frac{3n}{m+1}\right\rfloor$	
A=0	n=奇數	n=偶數	n=奇數	n=偶數
	$P_m=\frac{m}{2}+\frac{(n-1)}{2}(m-3)$	$P_m=2+\frac{n}{2}(m-3)$	$P_m=\frac{m}{2}+\frac{(n-1)}{2}(m-3)$	$P_m=2+\frac{n}{2}(m-3)$
A>0	T<5			
	$P_m=A(\frac{m^2}{6})+\frac{n(m-2)}{2}$		$P_m=A\frac{(m-2)^2}{6}+\frac{m+1}{3}+\frac{n(m-2)}{2}$	
	T≥5			
	n=奇數	n=偶數	n=奇數	n=偶數
	$P_m=A(\frac{m^2}{6})+3\times\frac{m-2}{2}+\frac{(n-3)(m-3)}{2}$	$P_m=A(\frac{m^2}{6})+4\times\frac{m-2}{2}+\frac{(n-4)(m-3)}{2}$	$P_m=A\frac{(m-2)^2}{6}+\frac{m+1}{3}+3\times\frac{m-2}{2}+\frac{(n-3)(m-3)}{2}$	$P_m=A\frac{(m-2)^2}{6}+\frac{m+1}{3}+4\times\frac{m-2}{2}+\frac{(n-4)(m-3)}{2}$

(2)m 為奇數

奇數圖形以花瓣方式仍無法找出 P_m，反而是以下圖方式出現的塊數為最小，我們將其稱為花瓶圖，以下是我們的計算方式。



計算 P_m：

a. 先算花瓣數=$\frac{m-1}{2}$

花瓶數=$\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil$

花朵數=n－$\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil$

b. 再算花瓣總數=$\frac{m-1}{2}\left\{n-\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil\right\}$

花瓶總生命數=$m\left\lceil \dfrac{n}{m+1} \right\rceil$

c. 花瓶剩餘生命數= $m\left\lceil \dfrac{n}{m+1} \right\rceil - \left\{ n - \left\lceil \dfrac{n}{m+1} \right\rceil \right\}$

d. 花瓶所能圍出的塊數

(a)花瓶剩餘生命數爲偶數：花瓶 P=$\dfrac{m\left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil - \left\{ n - \left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil \right\}}{2}$

(b)花瓶剩餘生命數爲奇數：花瓶 P=$\dfrac{m\left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil - \left\{ n - \left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil \right\} - 1}{2}$

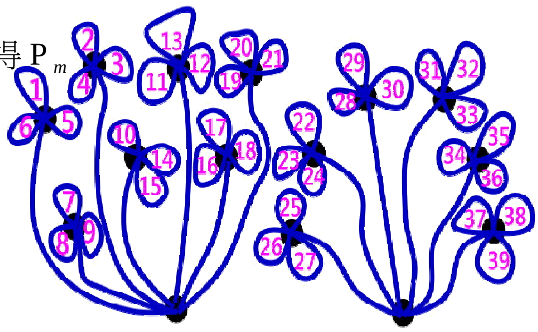
e.

f. 最後將花瓣數及花瓶 P 相加，即可求得 P_m

例如：當 n=15，m=7 時

總花瓣數=3×(15-2)=39 花瓶 P=$\dfrac{1-1}{2}$=0

P_m =52+2=54



2.P_M

每走一步最多可以圍成一塊：

在 m=偶數時，每條線皆可剛好圍成封閉圖形而不留下餘點

在 m=奇數時，則會多出一條線，而那條線因不構成封閉圖形所以不計算在內

因此，m 爲偶數： $P_M = \dfrac{m \times n}{2}$ ，例：m=6，P_M=6

m 爲奇數： $P_M = \dfrac{(m-1)\times n}{2}$ ，例：m=5，P_M=4

四、平面總規則：

我們將平面的三種玩法的步數總規律列表：

玩法一	玩法二	玩法三
Ds＝3n-S	Ds=4n-2S	Ds=m×n-2S

綜合以上這三種玩法，我們找到了

(一)步數的規律（任何玩法皆適用）

Ds= DL×n＋[-2(TD＋1)＋加的點數×(DL－2)]×S

(二) S_M 的計算規則（任何玩法皆適用）

DL×n－2(TD＋1)×S_M ＋加的點數×(DL－2)×S_M ≧0

(因爲要先連線才可加點，計算時要先減後加)

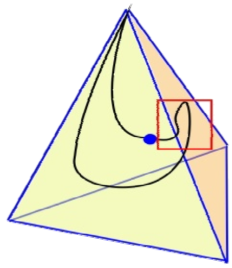
於是，平面抽芽遊戲研究告一段落，我們將遊戲立體化，而最簡單的多面體就是四面體，因此就從四面體開始發展：

五、四面體的抽芽遊戲

(一)四面體抽芽遊戲的玩法皆與平面玩法一二相同，只改變了計算塊數的方法，連同四面體的面也算在內，所以遊戲未開始時，就有 4 個基本面。

(二)同時做了以下的限制：

紅框圈起來之部分視爲無意義，因爲這樣的連線方法和不穿面的連線是一樣的，故在本玩法中不能使用，只要從起始面出發到另外一個面，就必須要穿過點才能再次回到已經經過的面



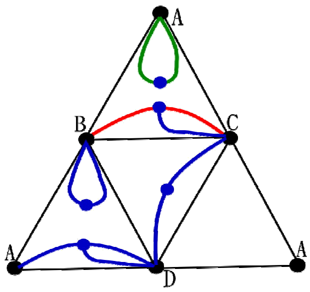
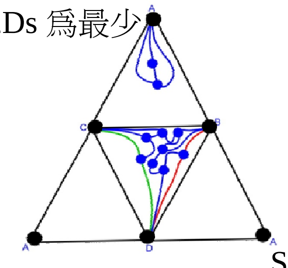
(三)立體玩法 1

以平面玩法一爲基礎：(DL=3)，每連一條線可增加一個點，規則爲 $3n-Ds=S$，變形爲四面體，並改變經過的面數，再細分爲以下 4 種玩法。

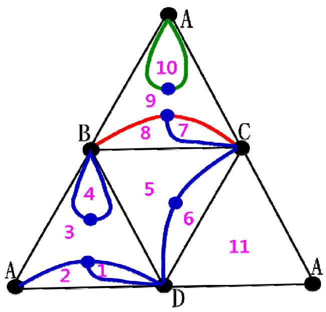
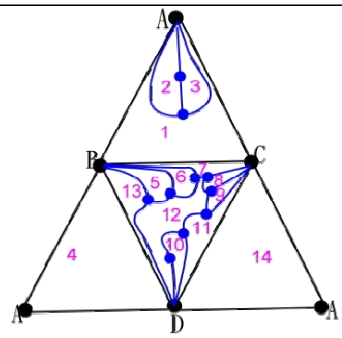
1 .玩法 1－1：連線時須經過一個面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

(1)步數

S_m 要留下最多 Ds，所以要將餘點隔開  S_m ： 7 (5Ds)	將剩餘的 Ds 限制在最少，因爲不能越過面，所以剩餘 2Ds 爲最少  S_M ：10(2Ds)

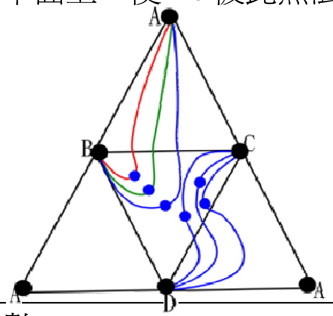
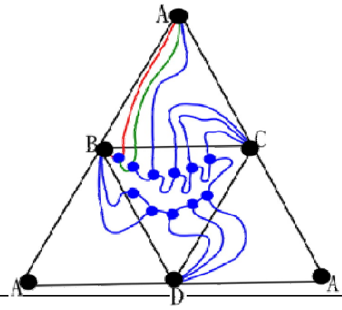
(2)塊數

 P_m ：11	 P_M ：14

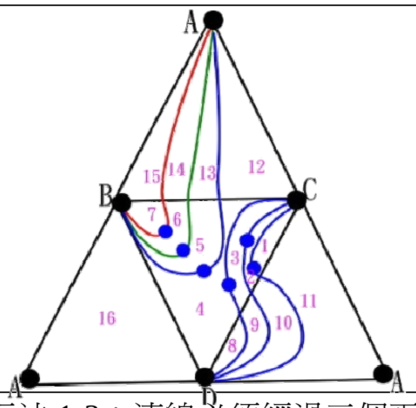
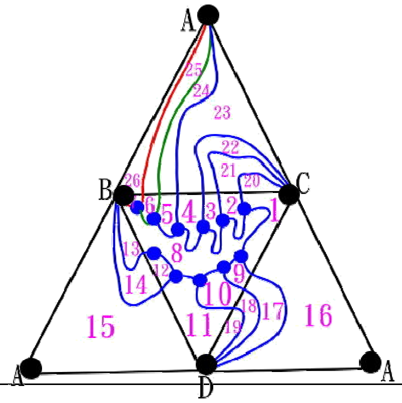
2.玩法 1-2：連線必須經過兩個平面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

(1)步數

<table>
<tr><td>S_m 要留下最多餘點，因此將 6Ds 集中至同一平面上，使 Ds 彼此無法互相連線

S_m ：6(6Ds)</td><td>爲了走出 S_M ，要留下最少餘點，因此要將 ABCD 四點連至同一平面上

S_M ：11(1Ds)</td></tr>
</table>

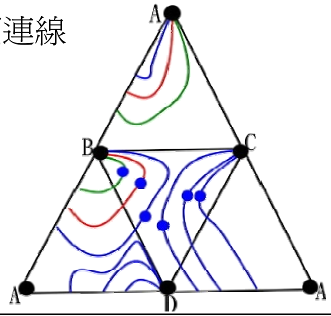
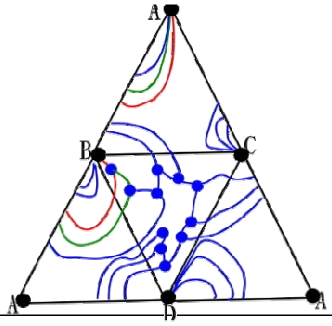
(2)塊數

<table>
<tr><td>
P_m ：16</td><td>
P_M ：26</td></tr>
</table>

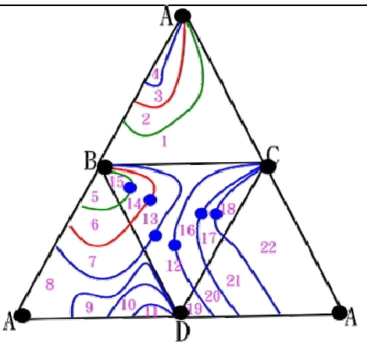
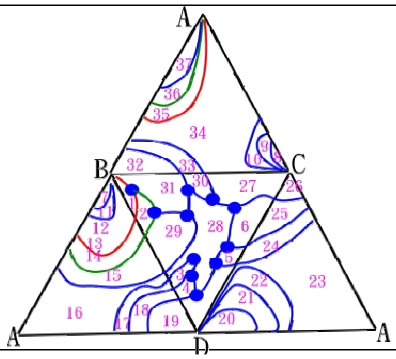
3.玩法 1-3：連線必須經過三個平面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

(1)步數

<table>
<tr><td>爲了走出 S_m ，留下最多餘點，因此將六個 Ds 集中至同一平面，使 Ds 彼此無法再互相連線

S_m ：6(6Ds)</td><td>爲了走出 S_M ，要留下最少餘點，因此要將 ABCD 四點連至同一平面上

S_M ：11(1Ds)</td></tr>
<tr><td colspan="2">與玩法 1-2 沒有差異</td></tr>
</table>

(2)塊數

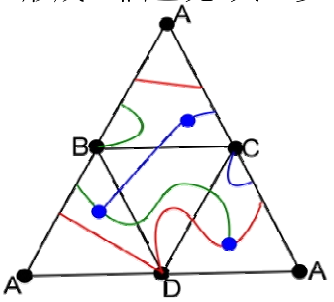
<table>
<tr><td>
P_m ：22</td><td>
P_M ：37</td></tr>
</table>

4.玩法 1-4：連線必須經過四個平面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

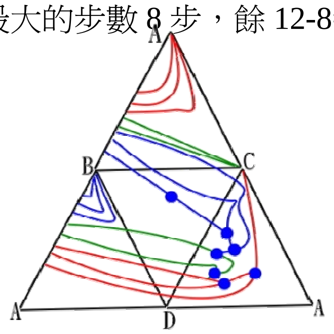
(1)步數

前兩步各將一個點圍住，第三步把兩線連起來，形成三個區塊，共三步，餘 12-3=9Ds



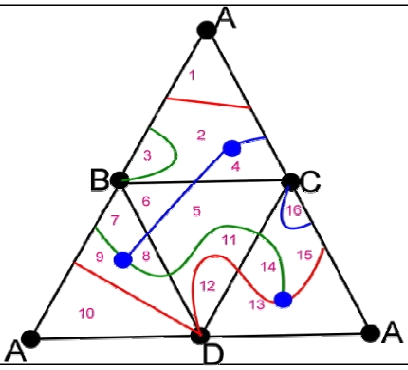
S_m ：3(9Ds)

將一個點隔絕，令其他三個點互相連線，可走出最大的步數 8 步，餘 12-8=4 Ds

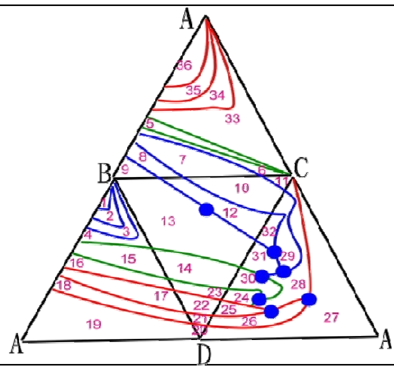


S_M ：8(4Ds)

(2)塊數



P_m ：16



P_M ：36

因爲立體 1-1 到 1-4 的玩法中，起始點數皆已固定爲 4，所以 S_m 、S_M 只有一種情況

5.我們將不同的玩法與其步數、塊數整理如下：

玩法	1-1		1-2		1-3		1-4	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min
S	10(2Ds)	7(5Ds)	11(1Ds)	6(6Ds)	11(1Ds)	6(6Ds)	8(4Ds)	3(9Ds)
P	14	11	26	16	37	22	36	16
備注	Ds=12－S P =S+4		Ds=12－S P=S×2+4		Ds=12－S P=S×3+4		Ds=12－S P=S×4+4	

發現：

(1)步數

a. 起始點爲 4，每個點有 3 條命

b. 每連一線可增加一個點，減少 2 生命

c. 加一點可增加一命

所以　餘點數＝起始總生命數-步數，也就是 Ds＝3×4-S

(2)塊數

由於就算不畫任何線也有基本面 4 面，且每多走一步一定會分割所經過的面，所以可得以下規律：(TP=經過的面數)

$$P=S\times TP+4$$

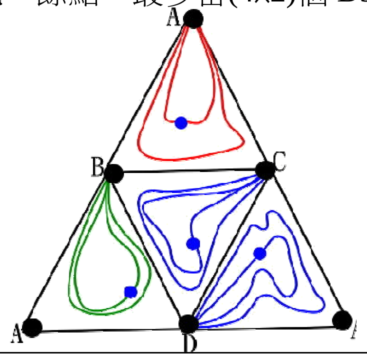
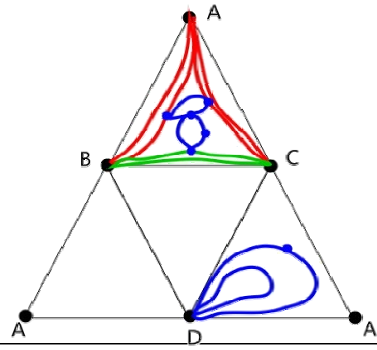
(四)立體玩法 2

以平面玩法 2 爲基礎(DL=4)，每連一線須穿一個點，增加一個點，規律爲 $\frac{4n-Ds}{2}=\mathrm{S}$ ，變形爲四面體，並改變經過的面數

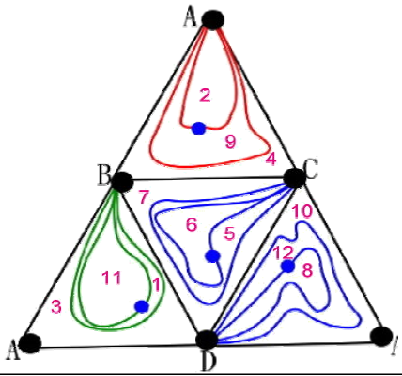
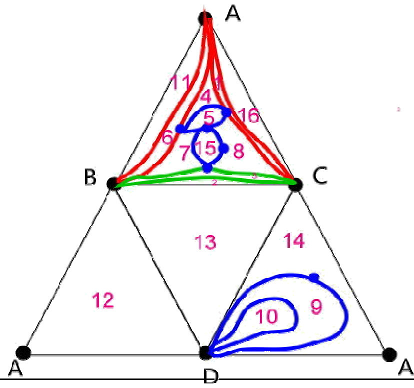
1.玩法 2-1：連線只能在同一平面上

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

(1)步數

4 面體有 4 個點 4 個面，平均分配，每面配一餘點，最多留(4×2)個 Ds(4 步)  S_m：4(8Ds)	可將 A 點拉至 B 點上(可視爲 4 個點在一個面上)所以 最少剩下 4Ds (7 步)  S_M：6(4Ds)

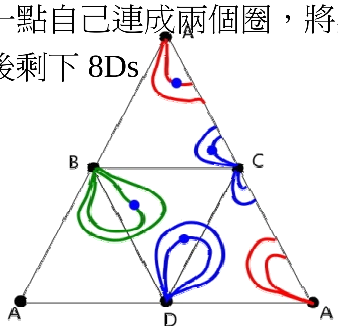
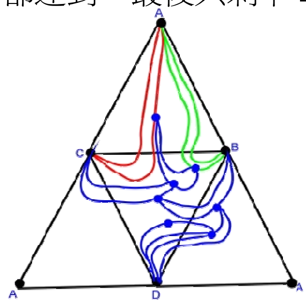
(2) 塊數

 P_m：12	 P_M：16

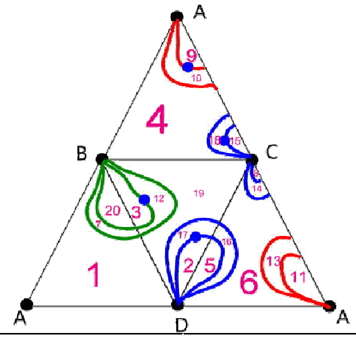
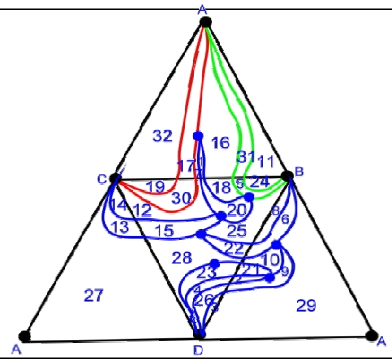
2.玩法 2-2：　連線需經過兩個平面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

(1)步數

每一點自己連成兩個圈，將點加在內圈，最後剩下 8Ds  S_m：4(8Ds)	每個點都連到，最後只剩下 2Ds  S_M：7(2Ds)

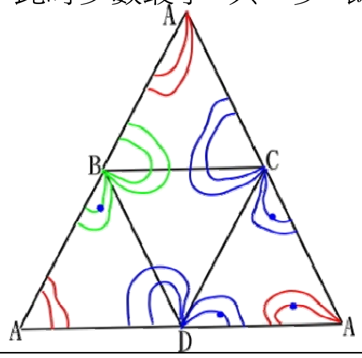
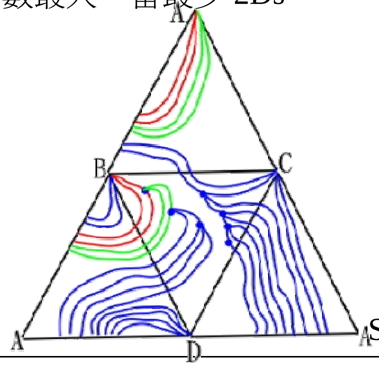
(2)塊數

 P_m：20	 P_M：32

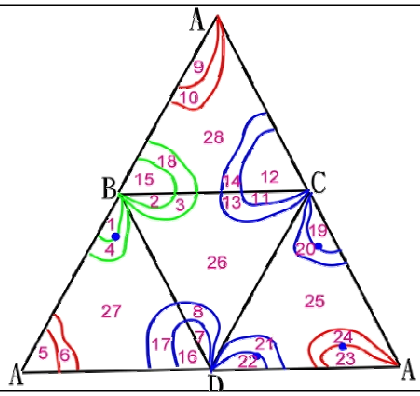
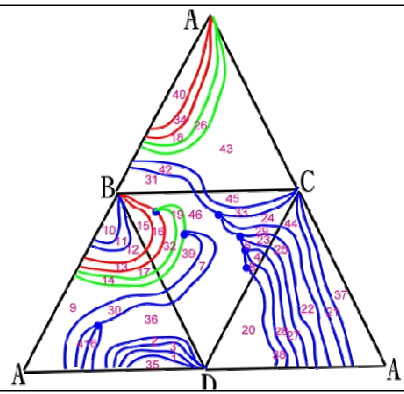
3.玩法 2-3：連線須經過三個平面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的圖解列表如下：

(1)步數

以各點爲中心自己繞兩圈，將點加在內圈，此時步數最小，共 4 步，餘 16-4=12Ds  S_m：4(8Ds)	仿照 1-3 的方法，將點連至同一平面上，此時步數最大，留最少 2Ds  S_M：7(2Ds)

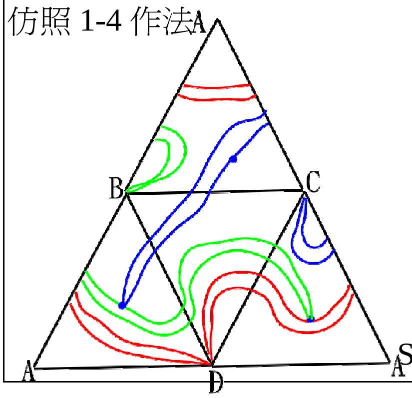
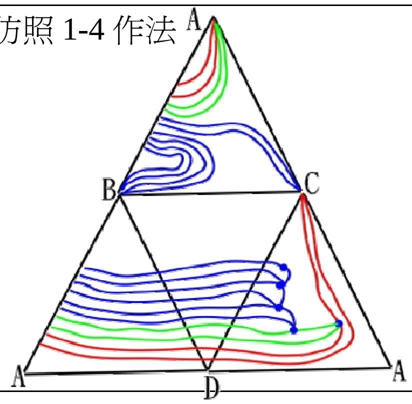
(2)塊數

 P_m：28	 P_M：46

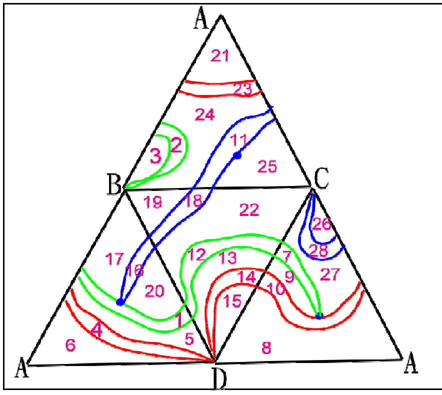
4.玩法 2-4：連線需經過四個平面

只有一種玩法，分別將步數與塊數的結果列表如下：

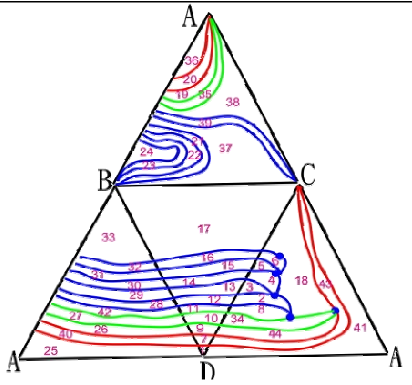
(1)步數

仿照 1-4 作法  S_m：3(10Ds)	仿照 1-4 作法  S_M：5(6Ds)

(2)塊數



P_m ：28



P_M ：44

我們發現 1-4 和 2-4 的玩法中所畫出來的圖只差在是否多繞一圈，所以只要仿照前面 1-4 的畫法就可以找出與 S_m 及 S_M

5.我們將不同的玩法與其步數、塊數整理如下：

玩法	2-1		2-2		2-3		2-4	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min
步數	6(4Ds)	4(8Ds)	7(2Ds)	4(8Ds)	7(2Ds)	4(8Ds)	5(6Ds)	3(10Ds)
塊數	16	12	32	20	46	28	44	28
備注	$\frac{16-Ds}{2}=S$ P=S×2+4		$\frac{16-Ds}{2}=S$ P=S×4+4		$\frac{16-Ds}{2}=S$ P=S×6+4		$\frac{16-Ds}{2}=S$ P=S×8+4	

發現：

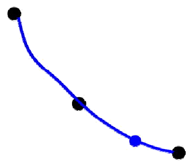
(1)步數

a. 起始點為 4，每個點有 4 條命

b. 每連一線要穿過一個點，減少 4 生命

c. 加一點可增加 2 命，總共減少 2 生命

所以　餘點數＝起始總生命數-步數，也就是 $\frac{4\times 4-Ds}{2}=S$



(2)塊數

因為，每一條線須穿過 1 點，相當於立體玩法 1 的 2 步，

所以每走 1 步塊數加 2xTP　　規則為 P=SxTPx2＋4

而無論是玩法 1 或玩法 2，塊數皆可由　Sx每走一步所分割出的塊數＋4　來計算

(五)綜合玩法 1 和玩法 2：

玩法	1-1	1-2	1-3	1-4	2-1	2-2	2-3	2-4
S_m	7	6	6	3	4	4	4	3
S_M	10	11	11	8	6	7	7	5
P_m	11	16	22	16	12	20	28	28
P_M	14	26	37	36	16	32	46	44
備註	$P_m=S_m$×TP+4　；$P_M=S_M$×TP+4				$P_m=S_m$×TP×2+4　；$P_M=S_M$×TP×2+4			

我們找到了共同規則：(TD=穿過的點數)

P=S×TP×TD+4

將此規則擴展至多面體，發現每走一步所增加的塊數，仍然和步數、經過的面數、穿過的點數有關，只要在最後加上原本就有的基本面，就會是此局遊戲所圍出的塊數，因此可推出規律：　　　　　　P=S×TP×TD+基本面

伍、研究結果

一、平面玩法：

(一)玩法一：原始的基本玩法→一個點有三條命，每連一條線增加一個點

1.我們整理 n、S、P 的關係列表如下：

點數	S_m	S_M	P_m		P_M
n	2n	3n-1	偶數	$\frac{n}{2}\times 3$	2n
			奇數	$(\frac{n-1}{2})\times 3+2$	

2.玩法一步數與塊數的關聯性

(1)在 S_M　P_M下，只有一種類型，也就是 S_M 時，必為 P_M

(2)在 S_m 中，P 未必會最小，P_m 會出現在塊數種類最多的範圍中

(二)玩法二：改變連線的方法→一個點有四條命，每連一線穿過一點，並增加一個點

1.我們整理 n、S、P 的關係列表如下：

點數	S_m	S_M	P_m	P_M
n	n	2n-1	n+1	3n-1

2.玩法二步數與塊數的關聯性

(1)在 S_M 及 P_M的狀況下，只有一種類型，也就是 S_M 時，必為 P_M

(2)S_m 及 P_m必同時存在

(三)玩法三：簡化遊戲→一個點有 m(m≧2)條命，連線時，不增加點，也不穿過點

1.我們整理 n、S、P 的關係列表如下：

(1)m 為奇數

點數	S_m	S_M	P_m	P_M
n	先求 Ds： $n-2\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor-2$ 再求 S_m ： $\frac{m\times n-Ds}{2}=S$	$\left\lfloor\frac{n\times m}{2}\right\rfloor$	花瓶所能圍出的 P： 為偶數：$\frac{m\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil-\left\{n-\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil\right\}}{2}$ 為奇數：$\frac{m\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil-\left\{n-\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil\right\}-1}{2}$ 花瓣總數$\frac{m-1}{2}\left\{n-\left\lceil\frac{n}{m+1}\right\rceil\right\}$+花瓶 P=$P_m$	起始總生命值 偶數：$\frac{m\times n}{2}$ 奇數：$\frac{(m-1)\times n}{2}$

2.m 為偶數

(1)P_m 可由花瓣型觀察，結果如下：

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">m=6k</td><td colspan="2">m=6k+2</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">$\left\lfloor \frac{3n}{m+3} \right\rfloor$</td><td colspan="2">$\left\lfloor \frac{3n}{m+1} \right\rfloor$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A = 0</td><td>n=奇數</td><td>n=偶數</td><td>n=奇數</td><td>n=偶數</td></tr>
<tr><td>$P_m = \frac{m}{2} + \frac{(n-1)}{2}(m-3)$</td><td>$P_m = 2 + \frac{n}{2}(m-3)$</td><td>$P_m = \frac{m}{2} + \frac{(n-1)}{2}(m-3)$</td><td>$P_m = 2 + \frac{n}{2}(m-3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">A > 0</td><td colspan="4">T<5</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P_m = A(\frac{m^2}{6}) + \frac{n(m-2)}{2}$</td><td colspan="2">$P_m = A\frac{(m-2)^2}{6} + \frac{m+1}{3} + \frac{n(m-2)}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">T≥5</td></tr>
<tr><td>n=奇數</td><td>n=偶數</td><td>n=奇數</td><td>n=偶數</td></tr>
<tr><td>$P_m = A(\frac{m^2}{6}) + 3\times\frac{m-2}{2} + \frac{(n-3)(m-3)}{2}$</td><td>$P_m = A(\frac{m^2}{6}) + 4\times\frac{m-2}{2} + \frac{(n-4)(m-3)}{2}$</td><td>$P_m = A\frac{(m-2)^2}{6} + \frac{m+1}{3} + 3\times\frac{m-2}{2} + \frac{(n-3)(m-3)}{2}$</td><td>$P_m = A\frac{(m-2)^2}{6} + \frac{m+1}{3} + 4\times\frac{m-2}{2} + \frac{(n-4)(m-3)}{2}$</td></tr>
</table>

(2) S_m、S_M 及 P_M

a. m=6k、m=6k+2

<table>
<tr><td>點數</td><td>S_m</td><td>S_M</td><td>P_M</td></tr>
<tr><td>n</td><td>先求 Ds：
每 2k+1 循環一次
(n-2)=(2k+1)Q+x 其中 2k+1≧x＞0
2+Q×2k+t=Ds
x 爲奇數時，t=x-1
x 爲偶數時，t=x-2
x= 2k+1 時，t=x-3
再求 S_m ：$\frac{m\times n - Ds}{2}$=S</td><td>$\left\lfloor \frac{n\times m}{2} \right\rfloor$</td><td>起始總生命值
偶數：$\frac{m\times n}{2}$
奇數：$\frac{(m-1)\times n}{2}$</td></tr>
</table>

b. m=6k+4

<table>
<tr><td>點數</td><td>S_m</td><td>S_M</td><td>P_M</td></tr>
<tr><td>n</td><td>先求 Ds：
每 4k+4 循環一次
(n-2)=(4k+4)Q+x
其中 4k+4≧x＞0
2+ (4k+2)Q +t=餘點數
若 x≦2k+2 且爲奇數 則 x-1=t
且爲偶數 則 x-2=t
若 x=2k+3 則 x-3=t
若 2k+3<x≦4k+3 且爲奇數 則 x-3=t
且爲偶數 則 x-2=t</td><td>$\left\lfloor \frac{n\times m}{2} \right\rfloor$</td><td>起始總生命值
偶數：$\frac{m\times n}{2}$
奇數：$\frac{(m-1)\times n}{2}$</td></tr>
</table>

	若 x=4k+4 則 x-4=t 再求 S_m ：$\frac{m \times n - Ds}{2}$=S		

(四) 平面步數規律：

$$DL \times n + [-2(TD+1) + \text{加的點數} \times (DL-2)] \times S = Ds$$

(五) 平面 S_M 計算規則：

$$DL \times n - 2(TD+1) \times S_M + \text{加的點數} \times (DL-2) \times S_M \geqq 0$$

二、立體玩法：

(一)四面體玩法規律：

$$P = S \times TP \times TD + 4$$

(二)將四面體玩法的規律擴展至多面體：

$$P = S \times TP \times TD + \text{基本面}$$

陸、討論

一、文獻探討：

(一)參考維基百科 Sprouts (game)：抽芽遊戲在 1967 年由 J.Conway 和 M.Paterson 發明，當時，就已經有人研究出以下公式

S_M 、S_m 及步數公式：(n 為起始點數、m 為步數、p 為不構成餘點的死點)

$$3n - m \geq 1，所以\ m \leqq 3n-1 = S_M$$

$$n+m = 3n-m + 2(3n-m) + p$$

起始點+步數=終局後的點數=餘點數+構成餘點的死點+不構成餘點的死點

整理後可得： $m = 2n + p/4$

$$\text{因此}\ m \leqq 2n = S_m$$

文獻中把封閉圖形外的部分也當作一塊，所以可得尤拉公式 n-m+f=2(n 為起始點數，m 為邊數，f 為塊數)

(二)公式的差異性：

1.文獻中式是利用點數來進行計算，而我們研究出的規律，則是使用生命數及步數，因此在計算上，就不需要區分構成餘點的死點，和不構成餘點的死點

2.由於必勝狀況須以電腦運算方式求出，且許多點都須跑很長的時間，因此我們跳過必勝策略的研究，探討 S 與 P 的極限範圍

二、平面玩法三的分析：

(一)m 為偶數的 P_m

我們發現光是計算 m=6k 及 m=6k+2 的 P_m 就會分成許多條件，須考慮 A=0 及 A>0 且還細分奇數及偶數，十分複雜，而 m=6k+4 則分為七種情況，須考慮 A=0 及 A>0，而 n 也分為三種範圍並細分奇偶，十分複雜，論證尚未完成。

(二)步數與塊數的關聯性

m	n	S_M	P_M	S_m	P_m	m	n	S_M	P_M	S_m	P_m
5	1	2	2	2	2	6	1	3	3	3	3
	2	5	4	5	4		2	6	6	6	5
	3	7	6	7	5		3	9	9	8	6
	4	10	7	9	8		4	12	12	11	8
	5	12	9	11	9		5	15	15	14	10
	6	15	10	13	12		6	18	18	16	12
	7	17	12	15	13		7	21	21	19	14

我們將以上表格整理如下：

m=5		S_m	S_M	P_m	P_M	備註
n	奇數	按照+5、+4、+4 的循環順序增加	$2+5\times\frac{n-1}{2}$	2n	$\frac{n+1}{2}\times3$	除第一項外
	偶數	按照+4、+4、+5 的循環順序增加	$5\times\frac{n}{2}$	2n	$1+\frac{n}{2}\times3$	除第二項外
m=6		S_m	S_M	P_m	P_M	備註
n	奇數	按照+5、+6、+5 的循環順序增加	3n	2n	3n	除第一項外
	偶數	按照+5、+5、+6 的循環順序增加	3n	2n	3n	除第二項外

觀察上面的規律我們試著把更大的數字代進規律；但由於玩法三會因 m 的奇、偶數不同而有很大的差異，而光是 m 爲偶數就有各種不同的規律，仍須花很多的時間探究，我們仍在努力中

(三)玩法三與玩法一、二的關聯性

玩法三因爲沒有增加點也沒有限制 DL，故 S 及 P 皆和玩法一、二沒有關聯

(四)規則三的塊數：

規則三的塊數雖可用規律來計算，但由於循環的規律太過複雜，因此在計算時，有許多條件的限制，十分繁複，因此我們將它跳過。我們認爲玩法三的規則中，不再加點並不會使遊戲更有規律，而不限制 DL 則使遊戲的規則分爲許多種情況，增加複雜性，所以玩法三並不理想

四、立體玩法的異同：

(一)立體玩法是由平面玩法延伸而來，所以走法與規律皆與平面相同

(二) S_M 與 S_m 畫法相似，但步數則因 DL 與每走一步所減少的生命數不同而有差別

五、立體玩法與平面玩法的關係：

(一)立體和平面玩法一、立體和平面玩法二的 S_M 關聯性：

1.立體玩法 1-2 和 1-3(S_M =11)的 TP 恰巧可讓 Ds 爲 1，與平面玩法一中 n=4 的 S_M 相同

2.立體玩法 2-2 和 2-3 (S_M =7)的 TP 恰巧可讓 Ds 爲 2，與平面玩法二中 n=4 的 S_M 相同

(二)立體玩法二和平面玩法二的 S_m 的關聯性：

因爲畫法相同，所以每一個起始點最多留下 2Ds，因此立體玩法二和平面玩法二中皆有相同的 S_m (S_m =4)

六、未來展望：

發展到此，我們雖然找到了一些規則，但仍有許多未完成的部分：

(一)在平面玩法中，要走出 S_m ，必須留下最多的餘點，但相同的點數的玩法不同，留下的餘點數會改變，所以我們對 S_m 一直無法突破。

(二)平面玩法塊數，則因爲 P_M 及 P_m 在平面玩法中每走一步增加的塊數不一定，也尚未推測出規律。

(三)立體玩法中的 S_m 也因爲無法確定留下的 Ds 數所以無法找到立體玩法的 S_m 規律。

(四)於是我們未來希望朝以下方向研究：

1.找出平面玩法 S_m 規律

2.找出平面玩法塊數規律

3.論證規則三 m=6k+4 的 P_m

4.研究所有塊數與步數的關係

5.將立體玩法發展成正六面體及多面體

柒、結論

一、平面玩法一和玩法二

(一)我們將玩法整理如下：

<table>
<tr><th></th><th>起始點</th><th>S_m</th><th>S_M</th><th colspan="2">P_m</th><th>P_M</th></tr>
<tr><td rowspan="2">玩法一</td><td rowspan="3">n</td><td rowspan="2">2n</td><td rowspan="2">3n-1</td><td>偶數</td><td>$\frac{n}{2}\times 3$</td><td rowspan="2">2 n</td></tr>
<tr><td>奇數</td><td>$(\frac{n-1}{2})\times 3+2$</td></tr>
<tr><td>玩法二</td><td>n</td><td>2n-1</td><td colspan="2">n+1</td><td>3n-1</td></tr>
</table>

(二)步數與塊數的關聯性：

1.玩法一及玩法二中， 在 S_M 及 P_M 的狀況下，皆只有一種狀況

2.在 S_m 下，玩法一中，P 未必會最小，P_m 會出現在塊數種類最多的範圍中；玩法二中 S_m 及 P_m 必同時存在

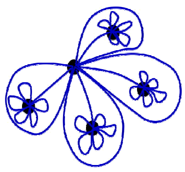
二、玩法三

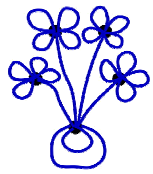
(一) S_m：先求 Ds，再代入 $\frac{m\times n-Ds}{2}$=S 求 S_m

(二) $S_M=\left\lfloor \frac{n\times m}{2} \right\rfloor$

(三) P_m：m 爲偶數時使用花瓣型

m 爲奇數時使用花瓶圖





(四) P_M：當 m=奇數，$P_M=\frac{(m-1)\times n}{2}$

當 m=偶數，$P_M=\frac{m\times n}{2}$

三、平面步數規律：任何玩法皆適用

$$DL\times n+[-2(TD+1)+\text{加的點數}\times(DL-2)]\times S=Ds$$

四、平面 S_M 計算規則：任何玩法皆適用

$$DL\times n-2(TD+1)\times S_M+\text{加的點數}\times(DL-2)\times S_M\geqq 0$$

五、立體玩法規則

(一) 四面體玩法規則：

$$P=S\times TP\times TD+4$$

(二)其他立體塊數規律：任何的多面體都適用

$$P=S\times TP\times TD+\text{基本面}$$

捌、參考資料及文獻

一、凡異編輯部。數學遊戲。1999 年。新竹 凡異出版社

二、李信仲 等。翰林版國中數學課本第四冊。民國 97 年。台北市 翰林出版社。

三、李信仲 等。翰林版國中數學課本第一冊。民國 96 年。台北市 翰林出版社。

四、Sprouts (game) 維基百科。

取自：http://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game)

五、豆芽遊戲 數學遊戲。

取自：http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/carnival/game/302.htm

【評語】030419

本作品利用抽芽遊戲進行深度分析並加深加廣，獲得非常不錯的規律性，值得觀摩。

此外，本作品從平面進入正四面體亦作相當的研究，值得嘉許。