中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030418

與二進位法邂逅的數列

學校名稱：臺北縣立樹林高中(附設國中)

作者：	指導老師：
國一 顏嘉佑	胡淑惠 顏榮皇

關鍵詞：遞迴、降階、不等式

摘要

從一個競賽題給的數列$\{d_2(n)\}$出發，在四十九屆的科展已證明該題。本屆由數列$\{d_2(n)\}$折線圖形發現該數列的遞迴並引用降階發展出更簡潔的通項表達式。

設$n=(a_{k-1}a_{k-2}a_{k-3}...a_i...a_2a_1a_0)_2$，$d_2(1)=1$；當$n\geqq 2$則$d_2(n)=1+\sum_{w=1}^{k-1}\left|a_w-a_{w-1}\right|$。

本研究的主要成果在於對該數列$\{d_2(n)\}$做了一般化的探索：奇偶性、重新討論區間極值存在唯一性及數列$\{d_2(n)\}$在正整數中的分布。

同時，對原數列$\{d_2(n)\}$推廣，定義出廣義的數列$\{d_p(n)\}$，觀察數列$\{d_p(n)\}$折線圖，引用$g_p(n,i)$結構發現廣義的數列$\{d_p(n)\}$遞迴：

$d_p(n+s\times p^k)=d_p(n)+h_p(j,s)$。其中，$1\leqq j\leqq p$，$1\leqq s\leqq p-1$，$(j-1)\times p^{k-1}\leqq n\leqq jp^k-1$。

本研究也利用不等式發現$h_p(j,s)$範圍：$0\leqq h_p(j,s)\leqq \dfrac{p(p-1)}{2}+1$。

最後，對於數列$\{d_p(n)\}$的各種性質都推廣到一般化的結果。在網站「整數數列線上大全」的資料庫中，沒有我定義的廣義數列(截至 2010 年 6 月 05 日為止)，因此，這個作品可說是目前在推廣該競賽題數列方面，最新的研究。

壹、前言

一、研究動機

（一）數學競賽題目：

城市數學競賽 2008 秋季賽高級卷國中組第七題(高中組高級卷第四題)如下：

題目一：一個無窮數列$\{d_2(n)\}$，n是 0 和所有正整數，令$q_2(n)$是自然數n的最大奇因數，$d_2(0)=0$，$d_2(n+1)=d_2(n)+g_2(n+1)$。

若$q_2(n)\equiv 1(\bmod\ 4)$則$g_2(n)$=1；

若$q_2(n)\equiv 3(\bmod\ 4)$則$g_2(n)$=-1。

求證這個數列$\{d_2(n)\}$中，「1」會出現無窮多次，

求證明這個數列$\{d_2(n)\}$中，每一個正整數會出現無窮多次。

（二）天使與魔鬼

在國小六年級以《天使與魔鬼》(以下簡稱「前作品」)參加科展，得到下列啟示：

1. 從二進位制來研究$\{d_2(n)\}$。

2. 把正整數n依$q\times 2^k$的型式來分類以利研究，如本作品的$g_2(n,i)$結構。

3. 使用區間極大值與區間及小值證明環球數學競賽題目。

但，前作品仍留下未解決的問題如下：

1. 遞迴關係。

2. 區間極值所對應的n。

3. 數列$\{d_2(n)\}$分布次數證明。

4. 廣義數列$\{d_p(n)\}$對應$\{d_2(n)\}$的各種數學命題

經過一年的努力，我解決了上述問題，因此決定繼續研究去參展。

又，本研究先以二進位法為研究工具，因此本研究被命名『與二進位法邂逅的數列』。

（三）新的推廣

有名的網站「整數數列線上大全」資料庫中已有$\{d_2(n)\}$。

根據定義得到了$\{d_3(n)\}$和$\{d_5(n)\}$的數據，我在該網站分別輸入$\{d_3(n)\}$和$\{d_5(n)\}$的前 20 項，均得到「你的系列不在數據庫裡」回應(附錄一)，所以本作品可說是對$\{d_2(n)\}$最新的推廣研究(截至民國 99 年 6 月 05 日)。

二、研究目的

（一）再證明$\{d_2(n)\}$區間極值的存在性、唯一性、及其對應的n值。

（二）證明前 k 區間的$\{d_2(n)\}$的 1~k 出現次數對稱性。

（三）延伸試探討數列$\{d_p(n)\}$。

三、研究工具：

紙、筆、電腦及微軟 excel 試算軟體。

四、定義

(一)數列$\{d_2(n)\}$的定義：

數列$\{d_2(n)\}$第k區間：$2^{k-1} \leqq n \leqq 2^k - 1$。

數列$\{d_2(n)\}$第k區間第j部分：$2^{k-1}+(j-1)\times 2^{k-2} \leqq n \leqq (2+j)\times 2^{k-2}-1$，$\forall k \geqq 2$。

數列$\{d_2(n)\}$前 k 區間：$0 \le n \le 2^k - 1$，稱n在$\{d_2(n)\}$的前 k 區間，注意這裡包含“0”

(二)數列$\{d_p(n)\}$的定義：

質數$p \ge 2$，n、k及q均為自然數，令$n = q \times p^k$，q和p互質，$d_p(0) = 0$。

規定：$d_p(n+1) = d_p(n) + g_p(n+1)$，其中$g_p(n)$的定義如下：

若q除以p^2後的餘數$r < \dfrac{p^2}{2}$，則$g_p(n) = 1$；

若q除以p^2後的餘數$r > \dfrac{p^2}{2}$，則$g_p(n) = -1$，

數列$\{d_p(n)\}$第k區間：$p^{k-1} \le n \le p^k - 1$為第 k 區間。

(三)數列$\{d_p(n)\}$：

$k \geqq 3$，第$k+1$區間第j部份：$p^k + (j-1)p^k \leqq n \leqq p^k + jp^k - 1$，$1 \leqq j \leqq p-1$。

$k \geqq 3$，第$k+i$區間第j部份：$p^{k+i-1} + (j-1)p^k \leqq n \leqq p^{k+i-1} + jp^k - 1$，$1 \leqq j \leqq p^{i-1}(p-1)$。

貳、研究方法

一、二進位法

所謂二進位法就是把十進位n轉換成二進位後，二進制數碼前，再加 1 個 0，計算當中所有 01 型和 10 型的個數和就是$d_2(n)$值。前作品已經利用數學歸納法證明二進位法。

如：$10=(1010)_2$ 依二進位法寫成(01010)，01 型有 2 個，10 型有 2 個，$d_2(10)=4$。

前作品已經發現數列$\{d_2(n)\}$降階運算：$n\equiv 0 \pmod 4$或$n\equiv 3 \pmod 4$則$d_2([\frac{n}{2}])=d_2(n)$；

$n\equiv 1 \pmod 4$或$n\equiv 2 \pmod 4$則$d_2([\frac{n}{2}])=d_2(n)-1$。

推演成$d_2(n)=d_2([\frac{n}{2}])+|a_1-a_0|$，得到下面命題。

命題一：設$n=(a_{k-1}a_{k-2}a_{k-3}...a_i...a_2a_1a_0)_2$，$d_2(1)=1$；當$n\geqq 2$則$d_2(n)=1+\sum_{w=1}^{k-1}|a_w-a_{w-1}|$。

二、$g_p(n,i)$結構

（一）探討$p=2$，數列$\{g_2(n,i)\}$結構

定義：$g_2(n,i)$：見表一，數列$g_2(n)$結構中，第i欄的$g_2(n)$和。

直觀觀察$d_2(8)=2$，以$q\times 2^{i\text{-}1}$改成$\{g_2(n,i)\}$結構，如下表。

表一、$g_2(n,i)$結構

欄位	第 1 欄	第 2 欄	第 3 欄	第 4 欄	第 5 欄		第i欄
奇數q	$q\times 2^0$	$q\times 2^1$	$q\times 2^2$	$q\times 2^3$	$q\times 2^4$	…	$q\times 2^{i\text{-}1}$
1	$1=1\times 2^0$	$2=1\times 2^1$	$4=1\times 2^2$	$8=1\times 2^3$	$16=1\times 2^4$		$1\times 2^{i-1}$
3	$3=3\times 2^0$	$6=3\times 2^1$	$12=3\times 2^2$	$24=3\times 2^3$	$48=3\times 2^4$		$3\times 2^{i-1}$
5	$5=5\times 2^0$	$10=5\times 2^1$	$20=5\times 2^2$	$40=5\times 2^3$	$80=5\times 2^4$		$5\times 2^{i-1}$
7	$7=7\times 2^0$	$14=7\times 2^1$	$28=7\times 2^2$	$56=7\times 2^3$	$112=7\times 2^4$		$7\times 2^{i-1}$
…							
$g_2(n,i)$	0	0	1	1	0		0

表一的補充說明：

第 1 欄，$m\times 2^0$ 欄位，1 和 3 的 $g_2(n)$ 對消，5 和 7 的 $g_2(n)$ 對消，$g_2(8,1)=0$。

第 2 欄，$m\times 2^1$ 欄位，2 和 6 的 $g_2(n)$ 對消，$g_2(8,2)=0$。

第 3 欄，$m\times 2^2$ 欄位，多出 $g_2(4)=1$，$g_2(8,3)=1$。

第 4 欄，$m\times 2^3$ 欄位，多出 $g_2(8)=1$，$g_2(8,4)=1$。

$$d_2(8)=\sum_{i=1}^{\infty} g_2(8,i)=\sum_{i=1}^{4} g_2(8,i)=2。$$

q 是奇數，每個正整數 n 和 $q\times 2^{i-1}$ 是一對一對應關係一個正整數 n 可表示唯一的正整數 $q\times 2^{i-1}$，；所以，上表，每個正整數恰出現一次，如上表，$n=q\times 2^{i-1}$，它們的 $g_2(n)=g_2(q)$。

給定第 i 欄，先出現 $g_2(n)=g_2(q)=1$ 後出現 $g_2(n)=g_2(q)=-1$，因此，$d_2(n)\geqq 1$，$\forall n$。

（二）探討 $p=2$，數列 $\{g_3(n,i)\}$ 結構

表二、$g_3(n,i)$ 結構

	第 1 欄	第 2 欄	第 3 欄	第 4 欄		第 i 欄	$g_3(n)$
m	$m\times 3^0$	$m\times 3^1$	$m\times 3^2$	$m\times 3^3$	$\cdots$	$m\times 3^{i-1}$	$=g_3(m)$
1	1×3^0	1×3^1	1×3^2	1×3^3	$\cdots$	$1\times 3^{i-1}$	1
2	2×3^0	2×3^1	2×3^2	2×3^3	$\cdots$	$2\times 3^{i-1}$	1
4	4×3^0	4×3^1	4×3^2	4×3^3	$\cdots$	$4\times 3^{i-1}$	1
5	5×3^0	5×3^1	5×3^2	5×3^3	$\cdots$	$5\times 3^{i-1}$	-1
7	7×3^0	7×3^1	7×3^2	7×3^3	$\cdots$	$7\times 3^{i-1}$	-1
8	8×3^0	8×3^1	8×3^2	8×3^3	$\cdots$	$8\times 3^{i-1}$	-1
10	10×3^0	10×3^1	10×3^2	10×3^3	$\cdots$	$10\times 3^{i-1}$	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	$g_3(8,1)$ $=0$	$g_3(8,2)$ $=2$	$g_3(8,3)$ $=0$	$g_3(8,4)$ $=0$		$g_3(8,i)$	

表二的補充說明：

自然數 $n=m\times 3^{i-1}$，m 和 3 互質，n 和 $m\times 3^{i-1}$ 是 1 對 1 且映成，n 可以被寫入 $g_3(n)$ 結構。

考慮 $d_3(8)$=2 的 $g_3(n)$ 結構：第 1 欄，最小值 1×3^0，最大值 8×3^0，有 6 個，$g_3(8,i)$=0；

第 2 欄，最小值 1×3^1，最大值 2×3^1，有 2 個，$g_3(8,i)$=2；

$$d_3(8)=\sum_{i=1}^{\infty} g_3(8,i)=\sum_{i=1}^{k} g_3(8,i)=0+2=2 \text{。}$$

給定第 i 欄，先出現 $g_3(n)=g_3(m)=1$ 後出現 $g_2(n)=g_2(m)=-1$，因此，$d_3(n)\geqq 1$，$\forall n$。

（三）探討 p 為任意質數的數列$\{g_p(n,i)\}$

表三、$g_p(n,i)$ 結構

m	$m\times p^0$	$m\times p^1$	$m\times p^2$	$m\times p^3$	$\cdots$	$m\times p^k$	同一列的 $g_p(n)=g_p(m)$
1	$1\times p^0$	$1\times p^1$	$1\times p^2$	$1\times p^3$	$\cdots$	$1\times p^k$	1
2	$2\times p^0$	$2\times p^1$	$2\times p^2$	$2\times p^3$	$\cdots$	$2\times p^k$	1
3	$3\times p^0$	$3\times p^1$	$3\times p^2$	$3\times p^3$	$\cdots$	$3\times p^k$	1
……	……	……	……	……	……	……	……
$\frac{p^2-1}{2}$	$(\frac{p^2-1}{2})\times p^0$	$(\frac{p^2-1}{2})\times p^1$	$(\frac{p^2-1}{2})\times p^2$	$(\frac{p^2-1}{2})\times p^3$	$\cdots$	$(\frac{p^2-1}{2})\times p^k$	1
$\frac{p^2+1}{2}$	$(\frac{p^2+1}{2})\times p^0$	$(\frac{p^2+1}{2})\times p^1$	$(\frac{p^2+1}{2})\times p^2$	$(\frac{p^2+1}{2})\times p^3$	$\cdots$	$(\frac{p^2+1}{2})\times p^k$	−1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$g_p(n,i)$							

表三的補充說明：

質數 p 和正整數 m 互質，每個正整數 n 必可寫成 $m\times p^i$，$\forall i\geqq 0$。

每格都填入了一個正整數，且每個正整數皆唯一填入其中一格，即是將正整數重新分類。

因為有 $g_p(p^k\times m)=g_p(m)$，同列的 n 它們的 $g_p(n)=g_p(m)$。

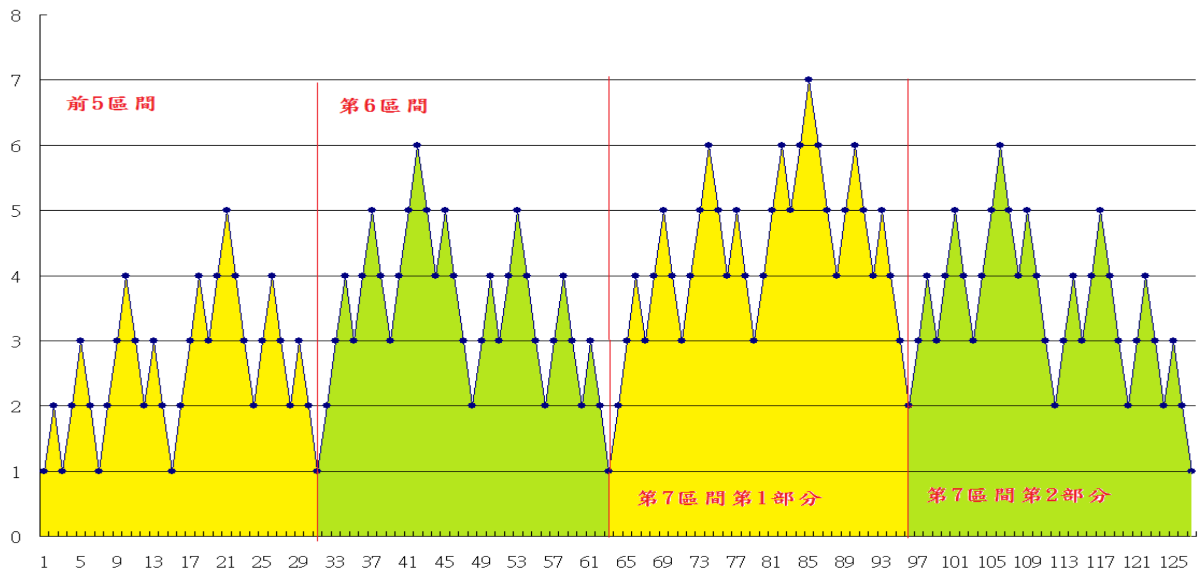
同欄，連續 $p\times(p-1)$ 個 $g_p(n)$ 的和為 0。另外，給定第 i 欄，$0\leqq g_p(n,i)\leqq p$。

三、遞迴：

分析數列$\{d_2(n)\}$的數據與折線圖。

表四、數列$\{d_2(n)\}$直觀觀察

n	$d_2(n)$	n	$d_2(n)$	n	$d_2(n)$	n	$d_2(n)$	n	$d_2(n)$
1	1	26	4	51	3	76	4	101	5
2	2	27	3	52	4	77	5	102	4
3	1	28	2	53	5	78	4	103	3
4	2	29	3	54	4	79	3	104	4
5	3	30	2	55	3	80	4	105	5
6	2	31	1	56	2	81	5	106	6
7	1	32	2	57	3	82	6	107	5
8	2	33	3	58	4	83	5	108	4
9	3	34	4	59	3	84	6	109	5
10	4	35	3	60	2	85	7	110	4
11	3	36	4	61	3	86	6	111	3
12	2	37	5	62	2	87	5	112	2
13	3	38	4	63	1	88	4	113	3
14	2	39	3	64	2	89	5	114	4
15	1	40	4	65	3	90	6	115	3
16	2	41	5	66	4	91	5	116	4
17	3	42	6	67	3	92	4	117	5
18	4	43	5	68	4	93	5	118	4
19	3	44	4	69	5	94	4	119	3
20	4	45	5	70	4	95	3	120	2
21	5	46	4	71	3	96	2	121	3
22	4	47	3	72	4	97	3	122	4
23	3	48	2	73	5	98	4	123	3
24	2	49	3	74	6	99	3	124	2
25	3	50	4	75	5	100	4	125	3
								126	2
								127	1
								128	2



圖一、數列$\{d_2(n)\}$前 7 區間遞迴

命題二：數列$\{d_2(n)\}$，情況一：當 $0 \leqq n \leqq 2^k-1$，$d_2(n+2^{k+1})=d_2(n)+2$。

情況二：當 $2^{k-1} \leqq n \leqq 2^k-1$，$d_2(n+2^k)=d_2(n)$。

【證明】

情況一：二進位法：設 $0 \leqq n \leqq 2^{k-1}-1$，$n=(1***)_2$，$n+2^k=(101***)_2$，$d_2(n+2^k)=d_2(n)+2$。

情況二：二進位法：設 $2^{k-2} \leqq n \leqq 2^{k-1}-1$，$n=(1***)_2$，$n+2^{k-1}=(11***)_2$，$d_2(n+2^{k-1})=d_2(n)$。

回想表一，也可考慮 $g_2(n)$ 結構：$g_2(n,k)=1$，$n+2^k$ 的第 k 欄，有 1 和 2 的數字，$g_2(2^{k+1},k)=1$；

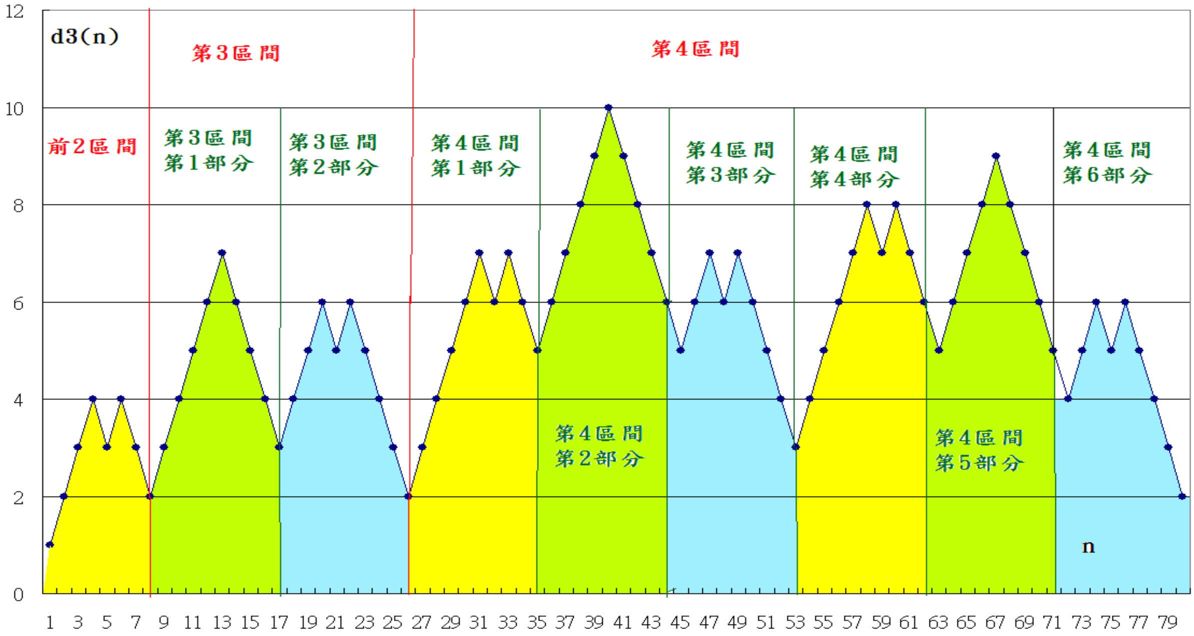
表五、$d_2(n)$與$d_2(n+2^k)$

第 i 欄	1	2	$\cdots$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$
2^{i-1}	2^0	2^1		2^{k-2}	2^{k-1}	2^k	2^{k+1}
$g_2(n,i)$	*	*		*	1	0	0
$g_2(2^k,i)$	0	0	$\cdots$	0	1	1	0
$g_2(n+2^k,i)$	*	*		*	0	1	0

在已經知道 $1 \leqq n \leqq 8$ 的 $d_2(n)$ 值，可以由上面命題得到下面的推理：

情況一可以找到全部的正奇數及正偶數。

情況二則知道任意正奇數和正偶數只要出現一次，就可以出現無窮多次。



圖二、數列$\{d_3(n)\}$前四區間遞迴的直觀觀察

命題三：數列$\{d_3(n)\}$遞迴

情況一：$0 \leqq n \leqq 3^{k-1}-1$，$d_3(n+3^k)=d_3(n)+3$ ；

情況二：$0 \leqq n \leqq 3^{k-1}-1$，$d_3(n+2\times 3^k)=d_3(n)+4$ 。

情況三：$3^{k-1} \leqq n \leqq 2\times 3^{k-1}-1$，$d_3(n+3^k)=d_3(n)+3$ ，

情況四：$3^{k-1} \leqq n \leqq 2\times 3^{k-1}-1$，$d_3(n+2\times 3^k)=d_3(n)+2$ ，

情況五：$2\times 3^{k-1} \leqq n \leqq 3^k-1$，$d_3(n+3^k)=d_3(n)+1$ ，

情況六：$2\times 3^{k-1} \leqq n \leqq 3^k-1$，$d_3(n+2\times 3^k)=d_3(n)$ 。

上面命題：情況一的證明

考慮$g_3(n,i)$結構如下表，發現第k欄和第$k+1$欄發生了變化。

表六、$0 \leqq n \leqq 3^{k-1}-1$，$d_3(n+3^k)=d_3(n)+3$

欄位	第 1 欄	第 2 欄	$\cdots$	第 $k-1$欄	第 k 欄	第 $k+1$欄
3 的次方	3^0	3^1		3^{k-2}	3^{k-1}	3^k
$g_3(n,i)$	*	*		*	0	0
$g_3(3^k,i)$	0	0		0	2	1
$g_3(n+3^k,i)$	*	*		*	2	1

很顯然，遞迴最大關鍵在於$g_3(n,i)$結構中第k欄和第$k+1$欄的變化。

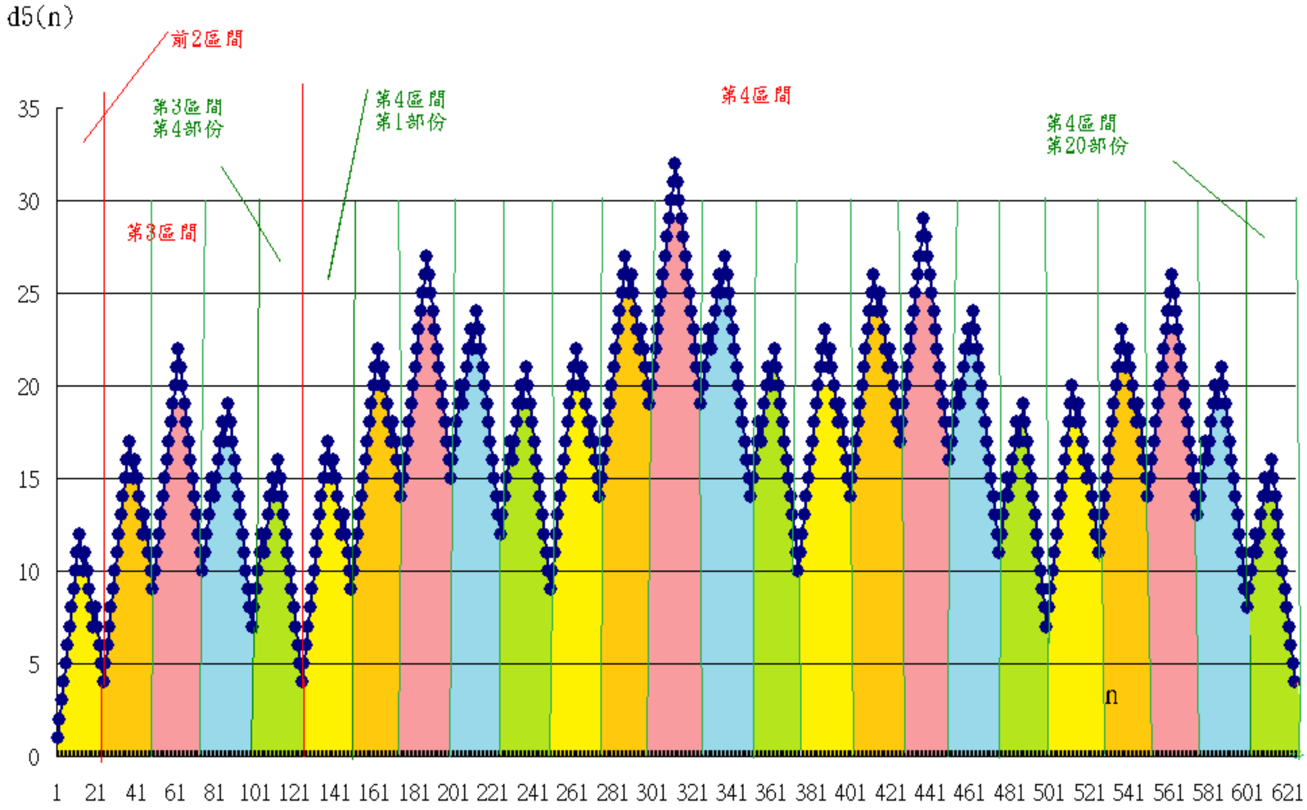
定義：假設 $1 \leqq j \leqq p$，$1 \leqq s \leqq p-1$，$(j-1) \times p^{k-1} \leqq n \leqq jp^{k}-1$。

$h_p(j,s)$：$d_p(n+s \times p^k)=d_p(n)+\ h_p(j,s)$。

直觀觀察 $h_2(j,s)$ 及 $h_3(j,s)$ 如表

表七、$h_2(j,s)$ 及 $h_3(j,s)$

$h_2(j,s)$	$h_2(1,1)=2$	$h_2(2,1)=0$				
$h_3(j,s)$	$h_3(1,1)=3$	$h_3(1,2)=4$	$h_3(2,1)=3$	$h_3(2,2)=2$	$h_3(3,1)=1$	$h_3(3,2)=0$



圖三、直觀觀察數列 $\{d_5(n)\}$ 前四區間遞迴

直觀觀察數列 $\{d_5(n)\}$ 如圖三，$h_5(j,s)$ 如下表：

表八、$h_5(j,s)$

$h_5(1,1)=5$	$h_5(2,1)=5$	$h_5(3,1)=5$	$h_5(4,1)=5$	$h_5(5,1)=5$
$h_5(1,2)=10$	$h_5(2,2)=10$	$h_5(3,2)=10$	$h_5(4,2)=8$	$h_5(5,2)=6$
$h_5(1,3)=11$	$h_5(2,3)=9$	$h_5(3,3)=7$	$h_5(4,3)=5$	$h_5(5,3)=3$
$h_5(1,4)=8$	$h_5(2,4)=6$	$h_5(3,4)=4$	$h_5(4,4)=2$	$h_5(5,4)=0$

定義：判別函數：$y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}$。

命題四：判別函數，情況一：若 $s\leqq\dfrac{p-3}{2}$ 則 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}<0$；

情況二：若 $s\geqq\dfrac{p+1}{2}$ 則 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}>0$；

情況三：若 $s=\dfrac{p-1}{2}$ 且 $1\leqq j\leqq\dfrac{p+1}{2}$ 則 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}<0$；

情況四：若 $s=\dfrac{p-1}{2}$ 且 $\dfrac{p+3}{2}\leqq j\leqq p$ 則 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}>0$。

整理如下表。

表九、判別函數：$y_p(j,s)$

	$s\leqq\dfrac{p-3}{2}$	$s=\dfrac{p-1}{2}$	$s\geqq\dfrac{p+1}{2}$
$j\leqq\dfrac{p+1}{2}$	$y_p(j,s)<0$	$y_p(j,s)<0$	$y_p(j,s)>0$
$\dfrac{p+3}{2}\leqq j$	$y_p(j,s)<0$	$y_p(j,s)>0$	$y_p(j,s)>0$

命題五：

$d_p(n+s\times p^k)=d_p(n)+\ h_p(j,s)$。其中，$1\leqq j\leqq p$，$1\leqq s\leqq p-1$，$(j-1)\times p^{k-1}\leqq n\leqq jp^k-1$。

若 $y_p(j,s)<0$ 則 $h_p(j,s)=ps$；

若 $y_p(j,s)>0$ 則 $h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s$。

【證明】

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}<0$ 則 $g_p(n+sp^k,k)$ 不發生進退位的情形，$h_p(j,s)=ps$；如表十。

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\dfrac{p^2}{2}>0$ 則 $g_p(n+sp^k,k)$ 發生進退位的情形，如表十及圖四。。

$g_p(n+sp^k,k)$ 範圍：$p^2>p^2-1\geqq j-1+ps>\dfrac{p^2}{2}$；

$g_p(n+sp^k,k)$ 增加後 $g_p(n)=1$ 有 A 個，A=$\dfrac{p(p-1)}{2}-(j-1)$；

$g_p(n+sp^k,k)$ 增加後 $g_p(n)=-1$ 有 B 個，B=$s(p-1)-(\dfrac{p(p-1)}{2}-(j-1))$。

A−B $=\dfrac{p(p-1)}{2}-(j-1)-(s(p-1)-(\dfrac{p(p-1)}{2}-(j-1)))=(p-1)(p-s)-2(j-1)$。

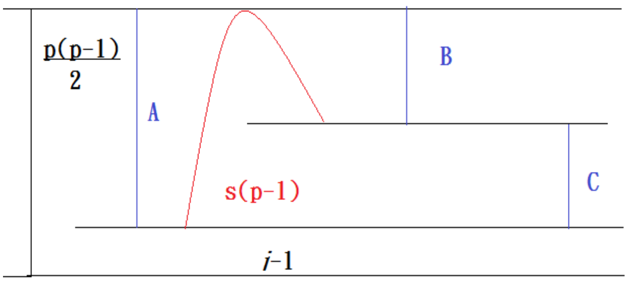
$g_p(n+sp^k,k+1)$ 增加 s。

$h_p(j,s)$ 為 $g_p(n+sp^k,k)$ 增加量加上 $g_p(n+sp^k,k+1)$ 增加量。

$h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s$。

表十、$g_p(n+sp^k,i)$ 結構

第 i 欄	…	k	$k+1$
		p^{k-1}	p^k
$g_p(n,i)$		$j-1$	0
$g_p(sp^k,i)$		$s(p-1)$	s
$g_p(n+sp^k,i)$		$j-1+h_p(j,s)-s$	s



圖四、$j-1+ps>\dfrac{p^2}{2}$，$g_p(n+sp^k,k)$ 變化

■

根據表七及表八：$h_2(2,1)=0$，$h_3(3,2)=0$，$h_5(5,4)=0$ 猜測 $h_p(p,p-1)=0$。

$h_2(1,1)=2$，$h_3(1,2)=4$，$h_5(1,3)=11$ 猜測 $h_p(1,\frac{p+1}{2})=\frac{p(p-1)}{2}+1$。

命題六：$h_p(j,s)\geqq 0$，若且唯若等號成立則 $j=p=s+1$。

【證明】

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\frac{p^2}{2}<0$，$h_p(j,s)=ps>0$；

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\frac{p^2}{2}>0$，$h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s\geqq(p-1)(p-s-2)+s\geqq 0$。

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\frac{p^2}{2}>0$，當 $j=p=s+1$時，$h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s=0$。

■

命題七：$h_p(j,s)\leqq\frac{p(p-1)}{2}+1$；若且唯若等號成立則則 $j=1,s=\frac{p+1}{2}$。

【證明】

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\frac{p^2}{2}<0$ 則 $(j-1)+ps<\frac{p^2}{2}$，兩邊除以 p 再移項，$s<\frac{p}{2}-\frac{j-1}{p}\leqq\frac{p}{2}$，

$$s\leqq\frac{p-1}{2}\text{，}h_p(j,s)=ps\leqq\frac{p(p-1)}{2}\text{。}$$

若 $y_p(j,s)=(j-1)+sp-\frac{p^2}{2}>0$，$(j-1)+ps>\frac{p^2}{2}$ 則 $h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s$。

①因為 $h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s>(p-1)(p-s)-2[(j+1)-1)]+s$……(1)

可知固定 s，若 j 愈大則 $h_p(j,s)$ 愈小。

再考慮 $h_p(j,s)=(p-1)(p-s)-2(j-1)+s$

$$\begin{aligned}&=(p-1)(p-(s+1))-2(j-1)+s+(p-1)\\&\geqq(p-1)(p-(s+1))-2(j-1)+(s+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

(注意(2)等號成立若且唯若 $p=2$，因此，當 $p>2$ 則(2)僅“大於”符號成立。)

由(2)可知：固定 j，若 s 愈大則 $h_p(j,s)$ 愈小。

所以分別固定 j、s 其中之一，算出另一個的最小值，以求得最大的 $h_p(j,s)$ 值。

②依表九，因 j 和 s 都要儘量小，$h_p(j,s)$ 值才會最大，比較 $h_p(\frac{p+3}{2},\frac{p-1}{2})$ 及 $h_p(1,\frac{p+1}{2})$ 值。

$$h_p(\frac{p+3}{2},\frac{p-1}{2})=(p-1)(p-\frac{p-1}{2})-2(\frac{p+3}{2}-1)+\frac{p-1}{2}=\frac{p(p-1)}{2}-2$$

$$h_p(1,\frac{p+1}{2})=(p-1)(p-\frac{p+1}{2})-2(1-1)+\frac{p+1}{2}=\frac{p(p-1)}{2}+1$$

可得等號成立若且唯若 $j=1,s=\frac{p+1}{2}$。

■

由命題 $h_p(j,s)$ 是非負函數。再考慮命題三如下，可以定義 P 進位表示法。

定義：

設 $n=(a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_i...a_2a_1a_0)_p$ 則 $d_p(n)=h_p(a_{k-2}+1,a_{k-1})+\cdots+h_p(a_1+1,a_2)+h_p(a_0+1,a_1)+a_0$。

也就是 $d_p(n)=\sum_{w=1}^{k-1}h_p(a_{w-1}+1,a_w)+a_0$。

命題八：當 $n=(a_{k-1}\cdots a_2a_1a_0)_p$ 則 $d_p(\left[\frac{n}{p}\right])=d_p(n)+a_1-a_0-h_p(a_0+1,a_1)$

【證明】

$n=(a_{k-1}\cdots a_2a_1a_0)_p$ 依定義 $d_p(n)=h_p(a_{k-2}+1,a_{k-1})+\cdots+h_p(a_1+1,a_2)+h_p(a_0+1,a_1)+a_0$，

$\left[\frac{n}{p}\right]=(a_{k-1}\cdots a_2a_1)_p$ 則 $d_p(\left[\frac{n}{p}\right])=h_p(a_{k-2}+1,a_{k-1})+\cdots+h_p(a_1+1,a_2)+a_1$；

比較得到 $d_p(\left[\frac{n}{p}\right])=d_p(n)+a_1-a_0-h_p(a_0+1,a_1)$

■

容易檢驗出 $d_2(\left[\frac{n}{2}\right])$ 的降階公式即為上式當 $p=2$ 的情形。

叁、研究結果

一、數列$\{d_2(n)\}$

（一）奇偶性質：

命題九：若且唯若n為奇數則$d_2(n)$為奇數；若且唯若n為偶數則$d_2(n)$為偶數。

【證明】

方法一：由二進位法，奇數n化成二進位時，10 型比 01 型多 1 個，$d_2(n)$為奇數；

偶數n化成二進位時，10 型和 01 型數目相等，$d_2(n)$為偶數。

方法二：以數學歸納法證明。

若且為若$n=1$奇數則$d_2(n)=1$為奇數；若且為若$n=2$偶數則$d_2(n)=2$為偶數；

假設$n=k$時和$d_2(n)$奇偶性相同；即$n=k$時則$n\equiv d_2(n) \mod 2$；

當$n=k+1$時， $d_2(k+1)=d_2(k)+g_2(k+1)$，依定義$g_2(k+1)=1$或$g_2(k+1)=-1$；

$d_2(k+1)\equiv d_2(k)\pm1\equiv k\pm1\equiv k+1 \pmod 2$，依數學歸納法得證。

■

（二）區間極值

命題十：數列$\{d_2(n)\}$第k區區間極小值與第k區區間極大值均唯一存在。

【證明】

第k區間，$n=2^k-1=(111...111)_2$，$d_2(n)=1+\sum_{w=1}^{k-1}|a_w-a_{w-1}|=1$，極小值唯一存在。

奇數k取$n=(10..101)_2$；偶數k取$n=(10...10)_2$，$d_2(n)=1+\sum_{w=1}^{k-1}|a_w-a_{w-1}|=k$，極大值唯一存在。

■

（三）區間極值反函數

因為區間極值唯一存在，可以定義區間極值反函數。

定義：第 k 區間極小值反函數 $Min_2(k)$，第 k 區間極大值反函數 $Max_2(k)$ 。

命題十一：數列 $d_2(n)$ 第 k 區間極值反函數

$Min_2(k)\ 2^k-1$；奇數 k 則 $Max_2(k)=\dfrac{2^{k+1}-1}{3}$；偶數 k 則 $Max_2(k)=\dfrac{2^{k+1}-2}{3}$ 。

（四）映射數列

定義：函數 $d_2(n)$ ：$d_2(0)=0$ ，$d_2(n+1)=d_2(n)+g_2(n+1)$ ，$g_2(n+1)$ 依據前面的定義。

數列$\{d_2(n)\}$是一個映射數列。由自然數 n 經由函數 $d_2(n)$ 映射到 $d_2(n)$ 值。根據文獻(張忠輔和楊士明，1998）映射數列均有週期。因此，可以由命題十得知函數 $d_2(n)$ 的性質。

命題十二：數列$\{d_2(n)\}$，當 $2^{k-1}\leqq n\leqq 2^k-1$，第 k 區間範圍 $1\leqq d_2(n)\leqq k$ 。

函數 $d_2(n)$ 週期：$d_2(2^k-1)=1$ 。

$d_2(n)$ 函數不是 1 對 1 函數，但 $d_2(n)$ 函數映成整個自然數。

（五）環球數學競賽證明：

命題十三：數列$\{d_2(n)\}$裡所有正整數都能出現無窮多次。

【證明】

方法一：由表一得到 $1\leqq n\leqq 8$ 的 $d_2(n)$ 值，適當取 n 值，再由命題一：

情況一：當 $0\leqq n\leqq 2^k-1$，$d_2(n+2^{k+1})=d_2(n)+2$，可以得到所有正奇數和正偶數。

情況二：當 $2^{k-1}\leqq n\leqq 2^k-1$，$d_2(n+2^k)=d_2(n)$ ，給定正整數都能出現無窮多次。

方法二：命題八，數列$\{d_2(n)\}$第 k 區區間範圍：$1\leqq d_2(n)\leqq k$ ，$g_2(n)=\pm 1$ ，得證。

■

（六）數列$\{d_2(n)\}$分佈次數的對稱性

引用前作品，第 28 頁圖三，再直觀觀察數列$\{d_2(n)\}$前十六區間如下表。

表十一、直觀觀察數列$\{d_2(n)\}$前十六區間分佈次數

區間 \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
前 1 區間	1	1															
前 2 區間	1	2	1														
前 3 區間	1	3	3	1													
前 4 區間	1	4	6	4	1												
前 5 區間	1	5	10	10	5	1											
前 6 區間	1	6	15	20	15	6	1										
前 7 區間	1	7	21	35	35	21	7	1									
前 8 區間	1	8	28	56	70	56	28	8	1								
前 9 區間	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
前 10 區間	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
前 11 區間	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					
前 12 區間	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				
前 13 區間	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
前 14 區間	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		
前 15 區間	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	
前 16 區間	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1

命題十四：對於 $0 \leqq d_2(n) = m \leqq k$，前 k 區間的 m 共出現 C_m^k 次，分布次數呈現對稱現象。

【證明】

$0 \leqq n \leqq 2^k - 1$ 則 $0 \leqq d_2(n) = m \leqq k$，$d_2(n)$ 值是取決於 01 型和 10 型變化數目總和 m。

$d_2(n) = m$ 分布次數是任意 k 個不同物品取 m 個也就是 C_m^k 次，呈現巴斯卡三角型的型式。

$C_m^k = \dfrac{k!}{m!(k-m)!} = \dfrac{k!}{(k-m)!\,m!} = C_{k-m}^k$，$d_2(n) = m$ 出現次數等於 $d_2(n) = k - m$ 出現次數呈現對稱。

■

命題十五：

$0 \leqq n \leqq 2^k - 1$ 時，$0 \leqq d_2(n) = m \leqq k$ 的分布次數：

奇數 k ，數列$\{d_2(n)\}$前 k 區間分布次數呈高原狀態。

偶數 k ，數列$\{d_2(n)\}$前 k 區間分布次數呈高峰狀態。

【證明】

奇數 k 時，取 $m = \dfrac{k-1}{2}$ ，$C_m^k = C_{k-m}^k$ ，但 $m+1 = k-m$ ，前 k 區間分布次數呈高原狀態。

偶數 k 時，取 $m = \dfrac{k}{2} = k-m$ ，$C_m^k = C_{k-m}^k$ ，前 k 區間分布次數呈高峰狀態。。

■

（七）遞迴的圖形

定義： $\forall$ 質數 p ，若 $d_p(n) = d_p(n+2) < d_p(n+1)$ 則稱為一個山峰。

$g_2(4m+1) = 1$，$g_2(4m+3) = -1$，每 4 個數碼必然有 1 個山峰，$\dfrac{2^{k-1}}{4} = 2^{k-3}$ ，得到下面命題。

命題十六：數列$\{d_2(n)\}$：$k \geqq 3$ 區間，第 k 區間有 2^{k-3} 個山峰。

由圖形一及命題一，數列$\{d_2(n)\}$遞迴的圖形意義如下：

$k \geqq 2$，數列$\{d_2(n)\}$第 $k+2$ 區域第 1 部份的圖形**似乎**是第 1~k 區間(包含 0)“上升『2』”；

$k \geqq 2$，數列$\{d_2(n)\}$第 $k+2$ 區域第 2 部份的圖形與第 $k+1$ 區間的圖形全等。

二、數列$\{d_p(n)\}$

（一）奇偶性質

命題十七：$d_p(n) \equiv n$（mod 2）

【證明】

當$n=1$，顯然$d_p(1)=1\equiv 1$（mod　2）；

設$n=k$，$d_p(n)\equiv n$（mod　2)成立；依定義$g_p(k+1)=1$　或$g_p(k+1)=-1$，

當$n=k+1$，$d_p(k+1)\equiv d_p(k)\pm 1\equiv k\pm 1\equiv k+1$　(mod　2）

■

（二）區間極值

數列$\{d_3(n)\}$：第 2 區間極大值$d_3(4)=4=d_3(6)$。

數列$\{d_p(n)\}$：第 1 區間極小值$d_p(1)=1$，極大值$d_p(p-1)=p-1$。

命題十八：質數$p\geqq 3$，數列$\{d_p(n)\}$，$k\geqq 2$區間極小值唯一存在。

【證明】

方法一：$k\geqq 2$，取$n=p^k-1$，$g_p(n,k)=p-1$，$g_p(n,i)=0$，$\forall i\neq k$；$d_p(p^k-1)=p-1$。

方法二：當$k=2$，由$g_p(n,i)$結構，可以發現$d_p(p^2-1)=p-1$。

設$d_p(p^k-1)=p-1$，$h_p(p,p-1)=0$，$d_p(p^{k+1}-1)=p-1$。

■

命題十九：除數列$\{d_3(n)\}$第 2 區間外，

質數$p\geqq 3$，數列$\{d_p(n)\}$，$k\geqq 2$區間極大值唯一存在。

【證明】

方法一：當$k\geqq 2$，第k區間，$i\leqq k-1$，$g_p(n,i)$之最大值為$\frac{1}{2}p(p-1)$，

$$g_p(n,k)\leqq\left[\frac{p(p-1)}{2p}\right]=\frac{p-1}{2}，d_p(n)=(k-1)\times\frac{p(p-1)}{2}+\frac{p-1}{2}=k\times\frac{p(p-1)}{2}-\frac{(p-1)^2}{2}。$$

方法二：P進位法，由表八得知，取$a_{i-1}=\frac{p+1}{2}$，$a_i=\frac{p-1}{2}$，

$$h_p(a_{i-1}+1,a_i)=\frac{p(p-1)}{2}\text{為最大值。}$$

■

$h_p(1,\frac{p+1}{2})=h_p(a_{i-1}+1,a_i)$，需要 $a_{i-1}+1=1$，$a_{i-1}=0$ 才有辦法達到 $h_p(1,\frac{p+1}{2})=h_p(j,s)$ 上界。

（四）區間極值反函數

數列$\{d_p(n)\}$第 k 區間區間極值唯一存在則第 k 區間極值反函數存在。

定義：區間極小值反函數 $Min_p(k)$，區間極大值反函數 $Max_p(k)$。

直觀觀察 $Min_p(1)=1$，$Max_p(1)=p-1$。

數列$\{d_3(n)\}$：第 2 區間極大值 $d_3(4)=4=d_3(6)$，沒有 $Max_3(2)$；

命題二十：當 $k\geqq 3$ 則 $Max_3(k)=\frac{3^k-1}{2}$。

命題二十一：$k\geqq 2$，$Min_p(k)=p^k-1$。

命題二十二：質數 $p\geqq 5$，$k\geqq 2$，$Max_p(k)=\frac{p^k-1}{2}$。

【證明】

第 1 區間的 $g_p(n)=1$，$\forall\ n$，$Max_p(1)=p-1$；

第二區間依定義，$n\leqq\frac{p^2-1}{2}$ 則 $g_p(n)=1$；所以，$d_p(\frac{p^2-1}{2})=\frac{p^2-1}{2}$，$Max_p(2)=\frac{p^2-1}{2}$。

設 $Max_p(k-1)=\frac{p^{k-1}-1}{2}$ 成立，

$$\frac{p^k-1}{2}-\frac{p^{k-1}-1}{2}=\frac{p^k-p^{k-1}}{2}=\frac{p^{k-2}\times p(p-1)}{2}=\frac{p^{k-2}-1}{2}\times p(p-1)+\frac{1}{2}p(p-1)$$ 。

$d_p(\frac{p^k-1}{2})=d_p(\frac{p^{k-1}-1}{2})+\frac{p(p-1)}{2}=k\times\frac{p(p-1)}{2}-\frac{(p-1)^2}{2}$，因此 $Max_p(k)=\frac{p^k-1}{2}$。

■

（五）映射數列$\{d_p(n)\}$

數列$\{d_p(n)\}$是由自然數n經由函數$d_p(n)$映射到$d_2(n)$值。

命題二十三：數列$\{d_p(n)\}$，$k≧2$，第k區間範圍：$p-1 ≦ d_p(n) ≦ k \times \frac{p(p-1)}{2} - \frac{(p-1)^2}{2}$。

函數$d_p(n)$週期：$k≧2$，$d_p(p^k-1)=p-1$。

由命題十一及命題二十三得到下面命題：

命題二十四：$d_p(n)$為映成函數，非 1 對 1 函數。

(七)競賽題的廣義版

命題二十五：

除了$1 ≦ d_p(n) ≦ p-2$只出現一次，數列$\{d_p(n)\}$裡不小於$p-1$的正整數出現無窮多次。

（八）數列$\{d_3(n)\}$分布次數不出現對稱關係。

先直觀觀察數列$\{d_3(n)\}$前 6 區間分布次數表。

表十二、數列$\{d_3(n)\}$前 6 區間分布次數表

$d_3(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8
出現次數	1	6	15	24	50	80	95	117
$d_3(n)$	9	10	11	12	13	14	15	16
出現次數	122	91	62	40	16	5	3	1

從上表僅知分布次數沒有對稱性，但$\{d_3(n)\}$中的正整數分布是否有其它規律，仍沒有結果。

故對於$d_p(n)$中的正整數分布還沒有確定是否有規律。

（九）遞迴的圖形意義

觀察圖二及圖三，山峰個數：數列$\{d_3(n)\}$是第 4 區間開始，每3^3個數碼就有 5 個山峰。
數列$\{d_5(n)\}$是第 3 區間開始，每5^2個數碼就有 1 個山峰。

命題二十六：數列$\{d_3(n)\}$： 第 1 區間沒有山峰；第 2 區間有 2 個山峰：
第 3 區間有 3 個山峰：$k\geqq 4$ 區間有$10\times 3^{k-4}$個山峰。

【證明】

$k\leqq 3$ 區間，直觀觀察可以得知。

設$n\equiv u(\mathrm{mod}\,3^3)$，直觀觀察 $0\leqq u\leqq 26$，$d_3(u)$如圖二，3^3個數碼有 5 個山峰。

依遞迴$d_3(n+s\times 3^k)=d_3(n)+h_3(j,s)$的$h_3(j,s)$數值是在於$g_3(n,i)$結構第$k$欄和第$k+1$欄。

當$k\geqq 4$，第k區間，每3^3個數碼有 5 個山峰。

$k\geqq 4$ 區間，第k區間有$2\times 3^{k-1}$個數碼，$\dfrac{2\times 3^{k-1}}{3^3}\times 5=10\times 3^{k-4}$個山峰。

■

命題二十七：數列$\{d_p(n)\}$：質數$p\geqq 5$，第 1 區間沒有山峰；
第 2 區間 1 個山峰，$k\geqq 3$ 區間有（$p-1$）p^{k-3}個山峰。

【證明】

$k\leqq 2$ 區間，直觀觀察可以得知。$k\geqq 3$ 區間，每p^2個數碼有 1 個山峰，

$k\geqq 3$ 區間，第k區間有$(p-1)p^{k-1}$個數碼，$\dfrac{(p-1)\times p^{k-1}}{p^2}=10\times 3^{k-4}$個山峰。

■

先考慮命題二，數列$\{d_3(n)\}$遞迴的圖形意義。

情況一：數列$\{d_3(n)\}$，$k\geqq 2$，第$k+2$區間第 1 部分圖形是前k區間（此時包含 0）上升『3』。

情況二：數列$\{d_3(n)\}$，$k\geqq 2$，第$k+2$區間第 4 部分圖形是前k區間（此時包含 0）上升『4』。

情況三：數列$\{d_3(n)\}$，$k\geqq 2$，第$k+2$區間第 2 部分是第$k+1$區間第 1 部份上升『3』。

情況四：數列$\{d_3(n)\}$，$k\geqq 2$，第$k+2$區間第 5 部分是第$k+1$區間第 1 部分上升『2』。

情況五：數列$\{d_3(n)\}$，$k\geqq 2$，第$k+2$區間第 3 部分是第$k+1$區間第 2 部份上升『1』。

情況六：數列$\{d_3(n)\}$，$k\geqq 2$，第$k+2$區間第 6 部分和第$k+1$區間第 2 部分圖形『全等』。

再直觀觀察圖一、圖二及圖三。

圖形結構相同，但數值依照圖形遞迴的 $d_p(n+s\times p^k)=d_{\mathrm{p}}(n)+\ h_p(j,s)$。

命題二十八：

數列$\{d_p(n)\}$：質數 $p\geqq 3$，給定 $k\geqq 2$：

第 $k+2$ 區間第 j 部份和前 k 區間（包含 0）山峰圖形結構相同，$j\equiv 1(\mathrm{mod}\ \ p)$。

第 $k+2$ 區間第 j 部份和第 $k+1$ 區間第 v 部分圖形結構相同，$j-1\equiv v(\mathrm{mod}\ \ p)$。

【證明】

考慮遞迴一般式 $d_p(n+s\times p^k)=d_{\mathrm{p}}(n)+\ h_p(j,s)$。

比較 $g_p(n,i)$ 和 $g_p(n+sp^k,i)$

當 $i=k$ 或 $i=k+1$ 時，$g_p(n,i)$ 與 $g_p(n+sp^k,i)$ 發生變化。

當 $i\neq k$ 或 $i\neq k+1$ 時，

第 $k+2$ 區間第 j 部份和前 k 區間（包含 0）的 $g_p(n,i)$ 與 $g_p(n+sp^k,i)$ 不發生變化。

當 $i\neq k$ 或 $i\neq k+1$ 時，

第 $k+2$ 區間第 j 部份和第 $k+1$ 區間第 v 部分 $g_p(n,i)$ 與 $g_p(n+sp^k,i)$ 不發生變化。

■

（八）$d_p(n)$ 非積性函數

命題二十九：$d_p(n)$ 非積性函數

【證】下面兩個例子即可說明，

$d_2(15)=1\neq d_2(3)\times d_2(5)=1\times 3$

$d_3(8)=2\neq d_3(2)\times d_3(4)=2\times 4$

（九）定義 $\{d_m(n)\}$，m 是合數。

1. 定義：$n=q\times m^k$，m 不整除 q，$d_m(0)=0$，並規定：

$$d_m(n+1)=d_m(n)+g_m(n+1)\text{，其中 } g_m(n) \text{ 的定義如下：}$$

$$\text{若 } q \text{ 除以 } m^2 \text{ 後餘數小於 } \frac{m^2}{2}\text{，則 } g_m(n)=1\text{；}$$

$$\text{若 } q \text{ 除以 } m^2 \text{ 後餘數大於 } \frac{m^2}{2}\text{，則 } g_m(n)=-1\text{，}$$

2.設 $p=2,q=3$，$d_6(4)=4$，另外 $d_2(4)=2$, $d_3(4)=4$，可得：$d_6(4)\neq d_2(4)\times d_3(4)=8$，因

此，$\forall$ **質數** p,q，$d_{pq}(n)=d_p(n)\times d_q(n)$ **不成立。**

肆、結論

一、研究方法

本研究增加遞迴，找到一般式 $d_p(n+s\times p^k)=d_p(n)+\ h_p(j,s)$ 並證明 $h_p(j,s)$ 的範圍：

$$0\leqq h_p(j,s)\leqq\frac{p(p-1)}{2}+1$$

進而發現 p 進位表示法。

本研究利用遞迴得到降階及對數列 $\{d_2(n)\}$ 第 k 區間極值和數列 $\{d_p(n)\}$ 第 k 區間極值提出存在性與唯一性的證明。

尤其是在數列 $\{d_2(n)\}$ 第 k 區間極值證明方式有所不同。

前作品，取 $n=2^k-1=(111...111)_2$，化成二進位法 01 型有 1 個，區間極小值唯一存在。

為了保證第 k 區間極大值唯一存在，取 $n=(101010...)_2$，10 依序出現。

奇數 k，01 型有 $\frac{k+1}{2}$ 個，10 型有 $\frac{k-1}{2}$ 個，$d_2(n)=\frac{k+1}{2}+\frac{k-1}{2}=k$。

偶數 k，01 型有 $\frac{k}{2}$ 個而 10 型有 $\frac{k}{2}$ 個，$d_2(n)=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=\ k$。

本研究，$n\geqq 2$，$n=(a_{k-1}a_{k-2}...a_i...a_3a_2a_1a_0)_2$，今年新發現 $d_2(n)=1+\sum_{w=1}^{k-1}\left|a_w-a_{w-1}\right|$。

二、環球數學競賽

延續前作品，數列 $\{d_2(n)\}$ 第 k 區間：$1\leqq d_2(n)\leqq k$，$g_2(n)=\pm1$，自然數在數列 $\{d_2(n)\}$ 可以出現無窮多次外；本研究利用遞迴去證明數列 $\{d_2(n)\}$ 中可以包含含所有正奇數及所有正偶數；同時，所有正奇數及所有正偶數都會出現無窮多次。

數列 $\{d_p(n)\}$ 第 k 區間極值唯一存在，所以，環球數學競賽推廣：除了 $1\leqq d_p(n)\leqq p-2$ 只出現一次，數列 $\{d_p(n)\}$ 裡不小於 $p-1$ 的正整數出現無窮多次。

三、數列$\{d_2(n)\}$與數列$\{d_p(n)\}$比較

（一）奇偶性：利用$g_2(n)=\pm1$和$g_p(n)=\pm1$證明n與$d_2(n)$同奇同偶，n與$d_p(n)$同奇同偶。

（二）數列週期：依定義2^{k-1}：$d_2(2^k-1)=1$；依定義p^{k-1}，$d_p(p^k-1)=p-1$。

（三）數列範圍：數列$\{d_2(n)\}$，$2^{k-1}\leqq n\leqq 2^{k-1}-1$則$1\leqq d_2(n)\leqq k$；

數列$\{d_p(n)\}$，$p^{k-1}\leqq n\leqq p^k-1$則$p-1\leqq d_p(n)\leqq \dfrac{p(p-1)}{2}\times k-\dfrac{(p-1)^2}{2}$。

（四）映射數列：每個自然數n均可映射$d_2(n)$；每個自然數n均可映射$d_p(n)$。

（五）函數$d_2(n)$及函數$d_p(n)$都是映成整個自然數但都不是 1 對 1 函數。

（六）數列$\{d_2(n)\}$分布次數具有對稱性，但無法找到數列$\{d_p(n)\}$分布次數具有對稱性。

（七）數列的折線圖呈現圖形結構相同，但數值依照遞迴的一般式。

1. 數列$\{d_2(n)\}$：

$k\geqq2$，第$k+2$區域第 1 部份的圖形**似乎**是第 1~k區間(包含 0)“上升『2』”；

$k\geqq2$，第$k+2$區域第 2 部份的圖形與第$k+1$區間的圖形全等。

2. 數列$\{d_p(n)\}$：質數$p\geqq3$，給定$k\geqq2$：

第$k+2$區間第j部份和前k區間（包含 0）山峰圖形結構相同，$j\equiv1(\mathrm{mod}\ \ p)$。

第$k+2$區間第j部份和第$k+1$區間第v部分圖形結構相同，$j-1\equiv v(\mathrm{mod}\ \ p)$。

（八）$d_p(n)$非積性函數。

（九）定義了$\{d_m(n)\}$，m是合數，並得出$\forall$**質數**p,q，$d_{pq}(n)=d_p(n)\times d_q(n)$**不成立。**

參考文獻

1. 環球城市數學競賽 2008 秋季賽國中組高級卷。民 98 年 1 月 2 日，取自：

www.chiuchang.org.tw/download/tt/2008/Junioralevel.pdf。

2. 孫文先(民 98 年 1 月 12 日)。環球城市數學競賽 2008 秋季賽高級卷高中組第五題【討論訊息】(編號 1)

3. www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=3128&forum=7&4。
顏嘉佑，2009，天使與魔鬼，第 49 屆全國科學展覽會，國立台灣科學教育館。

4. 張忠輔和楊士明。(1998) 映射數列問題。數學傳播 22 卷 2 期。

5. 整數數列線上大全。民 99 年 6 月 05 日，取自
http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html?language=chinese

命題索引

附錄一、整數數列線上大全的回應

$\{d_3(n)\}$的前 20 項未在「整數數列線上大全」的數據庫裡

你好， 歡迎到 整數數列線上大全

1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 4, 5 搜索 提示

搜索: 1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 4, 5

對不起，你的系列不在數據庫裡

如果你的數列有一般的興趣，請用所 提供的表 送給我， 我可能會這個數據中

Search completed in 0.061 seconds

Lookup | Welcome | Find friends | Music | Plot 2 | Demos | Index | Browse | More | WebCam

Contribute new seq. or comment | Format | Transforms | Puzzles | Hot | Classics

More pages | Superseeker | The OEIS Foundation | 尼爾 . 斯洛恩 維護本網頁 (njas@research.att.com)

Last modified June 5 00:40 EDT 2010. Contains 176885 sequences.

AT&T Labs Research

Legal Notice

$\{d_5(n)\}$的前 20 項未在「整數數列線上大全」的數據庫裡

你好， 歡迎到 整數數列線上大全

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 11, 10, 11, 10, 9, 8, 7, 8 搜索 提示

搜索: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 11, 10, 11, 10, 9, 8, 7, 8

對不起，你的系列不在數據庫裡

如果你的數列有一般的興趣，請用所 提供的表 送給我， 我可能會這個數據中

Search completed in 0.068 seconds

Lookup | Welcome | Find friends | Music | Plot 2 | Demos | Index | Browse | More | WebCam

Contribute new seq. or comment | Format | Transforms | Puzzles | Hot | Classics

More pages | Superseeker | The OEIS Foundation | 尼爾 . 斯洛恩 維護本網頁 (njas@research.att.com)

Last modified June 5 00:40 EDT 2010. Contains 176885 sequences.

AT&T Labs Research

Legal Notice

附錄二：角谷猜想

前作品曾經提到角谷猜想。

定義：$T^m(n)$ 為自然數 n 經過角谷猜想 m 次運算後的結果。

$T_f(n)$：自然數 n，經角谷猜想運算後，第一次 $T^m(n)=1$ 的運算次數 m。

$Max\,T^m(n)$：自然數 n，經角谷猜想運算後，最大的 $T^m(n)$ 數值。

國內數學網站署名 bubupin 提出角谷猜想的證明可以做以下嘗試：

1. 使用二進位法做運算。
2. 證明任何奇數經角谷運算所得的奇數有極大值。
3. 證明任何一個奇數經角谷運算後皆能找到一個比只自己小的奇數即可。
4. 證明除 1 以外任何奇數經角谷運算皆不可能回到原數。

查詢網路資料時，有網友在【參考文獻 2】從處理「角谷猜想」的手法來處理本研究的競賽題，因而引起我的好奇心，也因此，去年，前作品發現三個現象：

1. 數列 $\{d_2(n)\}$ 奇數 k 區間，區間極大值經一次奇運算後變成 2^{k+1}；
2. 數列 $\{d_2(n)\}$ 偶數 k 區間，區間極大值經一次偶運算再經一次奇運算變成 2^{k+1}；
3. 若 $n\equiv 4(\text{mod } 8)$，$T^3(n)=T^3(n+1)$。

原先打算區間極小值出發，應用數列 $d_2(n)$ 的特性討論角谷猜想 $T^m(Min_2(k))$。

取 $n=2^{16}-1=65535$，$Max\,T^{31}(2^{16}-1)=86093440$，$\dfrac{Max\,T^{31}(2^{16}-1)}{2^{16}-1}=1313.70$。

這種現象讓我體會到數學系教授們均勸告我不要碰「角谷猜想」。

同時，國外學者 Jeffrey C. Lagarias（2009），曾經說明截至 2009 年 7 月 3 日尚沒有完整證明，而我辛苦一整年卻只能發現 $T^{4k+4}(Min_2(2k+1))=T^{4k+5}(Min_2(2(k+1)))$ 數學現象，實在不甘心。當然，全國科展作品說明板也不打算列出「角谷猜想」部份。

期待評審教授的體諒。

參考資料：

1. bubupin（民國九十九年三月七日）角谷猜想，九章數學教育基金會網站。
www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=2210&forum=1&1

2. Jeffrey C. Lagarias（2009）The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography, II (2000-2009)，民國九十九年三月七日取自 arxiv.org/abs/math/0608208

【評語】030418

這是一個有趣的問題。作者之前也曾針對此一問題做了討論。在之前的作品中，作者其實已經得出了處理這個問題的一些關鍵性的技巧。透過之前的結論，已經能清楚且完整的說明此一問題。問題本身並不容易，作者所給的解答也頗具巧思。但可惜的是，這些處理技巧在前一個作品中都已經給出了。對已有的結果作進一步的延伸不是不可以，但是如果沒有更進一步突破性的想法，就很難說有多大的意義。或許，考慮一些全新的問題，對於擴展自己的視野會更有助益。