中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030417

揭開方舞數的面紗

學校名稱：臺北縣立積穗國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳亞芯	李宏量
國二 陳冠宇	孫雲龍

關鍵詞：方舞數、完全平方數、奇數的平方

揭開方舞數的面紗

摘要

已知 ***n*** 爲**偶數**，若能夠將 **1**、**2**、**3**、…、***n*** 兩個兩個配對，使得每一對的數字和都是**完全平方數**，那麼這個**偶數 *n*** 就叫做**方舞數**。例如：**8**、**14**、**16** 就是**方舞數**。

本研究是參考「台北縣 97 學年度國民中小學科學展覽」，優等獎作品「**平方之舞－方舞數的研究**」，進行探討與研究，並提出新的方法與結論。

我們得到了不同的結論，也就是除了 **2**、**4**、**6**、**10**、**12**、**20**、**22** 這 **7** 個偶數外，其餘的偶數都是**方舞數**，此外，也找到了**方舞數**有系統的配對方法。

壹、研究動機

去年老師要求我們到漳和國中觀摩「台北縣 97 學年度國民中小學科學展覽」，並選擇一份得獎作品來撰寫研究報告。我們選擇了一份看似簡單且有趣的作品「**平方之舞－方舞數的研究**」作爲研究報告的主題。然而在我們研究這個作品的同時，也發現了這個作品並不完備，仍有再研究與發展的空間，於是燃起了我們想要重新研究**方舞數**的動機，並且應用所學過的**完全平方數**、**不等式**、**平方根**、**函數**、**等差數列**、**等差級數**等概念，來**揭開方舞數的面紗**。

貳、研究目的

一、 證明 **2**、**4**、**6**、**10**、**12**、**20**、**22** 不是**方舞數**。

二、 證明**大於 22** 的所有偶數都是**方舞數**。

三、 找出**方舞數**有系統的配對方法。

參、研究設備及器材

紙、筆、電子計算機、電腦、Microsoft Office Word、Excel。

肆、研究過程或方法

一、**方舞數**的定義

已知 n 為**偶數**，若能夠將 **1、2、3、…、*n*** 兩個兩個配對，使得每一對的數字和都是**完全平方數**，那麼這個**偶數** n 就叫做**方舞數**。

例如：**18** 是**方舞數**，原因如下：

將 **1** 到 **18** 的整數兩個兩個配對成如下 **9** 組，並求其和：

$1+15=4^2$	$4+12=4^2$	$7+18=5^2$
$2+14=4^2$	$5+11=4^2$	$8+17=5^2$
$3+13=4^2$	$6+10=4^2$	$9+16=5^2$

因為每組裡兩個數字的和皆為**完全平方數**，所以 **18** 是**方舞數**。

二、證明 **2、4、6、10、12、20、22** 不是**方舞數**

在「**平方之舞－方舞數的研究**」裡，對於 **2、4、6、10、12、20、22** 不是方舞數的原因並沒有交代清楚，顯然不夠嚴謹和完備，因此我們想用推理的方法來證明這些數不是方舞數。

(一) 證明 2 不是方舞數

因為 $1+2=3$ 不是完全平方數，所以 2 不是方舞數。

(二) 證明 4 不是方舞數

因為 $2+1=3$、$2+3=5$、$2+4=6$ 都不是完全平方數，所以 4 不是方舞數。

(三) 證明 6 不是方舞數

因為 $2+1=3$、$2+3=5$、$2+4=6$、$2+5=7$、$2+6=8$ 都不是完全平方數，所以 6 不是方舞數。

(四) 證明 10 不是方舞數

因為 9 只能與 7 配 $9+7=4^2$，這樣就沒有與 2 配對的數了，所以 10 不是方舞數。

(五) 證明 12 不是方舞數

因為 9 只能與 7 配 $9+7=4^2$，這樣就沒有與 2 配對的數了，所以 12 不是方舞數。

(六) 證明 20 不是方舞數

因為 18 只能與 7 配 $18+7=5^2$，那麼 2 只能與 14 配 $2+14=4^2$、9 只能與 16 配 $9+16=5^2$、11 只能與 5 配 $11+5=4^2$，這樣就沒有與 20 配對的數了，所以 20 不是方舞數。

(七) 證明 22 不是方舞數

與「證明 20 不是方舞數」的情形一樣，所以 22 不是方舞數。

三、證明 26、28、36、38、58、60 是**方舞數**

在「**平方之舞－方舞數的研究**」裡，認爲 26、28、36、38、58、60 不是**方舞數**，但是當我們試圖去證明其真僞時，卻發現這些數其實都是**方舞數**，這正是當初促使我們想重新研究方舞數的最主要原因之一。

下面的**表一**、**表二**、**表三**裡，我們將所找到的實際配對情形列出來，每個數都列出了**兩種**不同的配對方法，這樣便證明了 26、28、36、38、58、60 都是**方舞數**。

表一

26 是方舞數		28 是方舞數	
第一種	第二種	第一種	第二種
$1+24=25$	$1+24=25$	$1+24=25$	$1+15=16$
$2+14=16$	$2+14=16$	$2+23=25$	$2+14=16$
$3+22=25$	$3+22=25$	$3+6=9$	$3+22=25$
$4+21=25$	$4+12=16$	$4+5=9$	$4+12=16$
$5+20=25$	$5+20=25$	$7+18=25$	$5+11=16$
$6+19=25$	$6+19=25$	$8+28=36$	$6+19=25$
$7+18=25$	$7+18=25$	$9+27=36$	$7+18=25$
$8+17=25$	$8+17=25$	$10+26=36$	$8+17=25$
$9+16=25$	$9+16=25$	$11+25=36$	$9+27=36$
$10+15=25$	$10+26=36$	$12+13=25$	$10+26=36$
$11+25=36$	$11+25=36$	$14+22=36$	$13+23=36$
$12+13=25$	$13+23=36$	$15+21=36$	$16+20=36$
$23+26=49$	$15+21=36$	$16+20=36$	$21+28=49$
		$17+19=36$	$24+25=49$

表二

36 是方舞數		38 是方舞數	
第一種	第二種	第一種	第二種
$1+35=36$	$1+8=9$	$1+35=36$	$1+15=16$
$2+14=16$	$2+14=16$	$2+14=16$	$2+34=36$
$3+33=36$	$3+13=16$	$3+33=36$	$3+33=36$
$4+32=36$	$4+21=25$	$4+32=36$	$4+21=25$
$5+20=25$	$5+20=25$	$5+20=25$	$5+31=36$
$6+10=16$	$6+10=16$	$6+10=16$	$6+10=16$
$7+29=36$	$7+18=25$	$7+29=36$	$7+18=25$
$8+17=25$	$9+16=25$	$8+17=25$	$8+28=36$
$9+16=25$	$11+25=36$	$9+16=25$	$9+27=36$
$11+25=36$	$12+24=36$	$11+38=49$	$11+38=49$
$12+24=36$	$15+34=49$	$12+37=49$	$12+37=49$
$13+36=49$	$17+32=49$	$13+36=49$	$13+36=49$
$15+34=49$	$19+30=49$	$15+34=49$	$14+22=36$
$18+31=49$	$22+27=49$	$18+31=49$	$16+20=36$
$19+30=49$	$23+26=49$	$19+30=49$	$17+32=49$
$21+28=49$	$28+36=64$	$21+28=49$	$19+30=49$
$22+27=49$	$29+35=64$	$22+27=49$	$23+26=49$
$23+26=49$	$31+33=64$	$23+26=49$	$24+25=49$
		$24+25=49$	$29+35=64$

表三

58 是方舞數		60 是方舞數	
第一種	第二種	第一種	第二種
$1+35=36$	$1+35=36$	$1+35=36$	$1+35=36$
$2+14=16$	$2+34=36$	$2+14=16$	$2+34=36$
$3+22=25$	$3+22=25$	$3+22=25$	$3+33=36$
$4+21=25$	$4+32=36$	$4+21=25$	$4+32=36$
$5+44=49$	$5+44=49$	$5+44=49$	$5+31=36$
$6+10=16$	$6+19=25$	$6+10=16$	$6+10=16$
$7+9=16$	$7+29=36$	$7+9=16$	$7+29=36$
$8+56=64$	$8+17=25$	$8+56=64$	$8+28=36$
$11+25=36$	$9+55=64$	$11+25=36$	$9+55=64$
$12+37=49$	$10+39=49$	$12+37=49$	$11+53=64$
$13+51=64$	$11+38=49$	$13+51=64$	$12+37=49$
$15+49=64$	$12+37=49$	$15+49=64$	$13+36=49$
$16+33=49$	$13+51=64$	$16+33=49$	$14+50=64$
$17+32=49$	$14+50=64$	$17+32=49$	$15+49=64$
$18+46=64$	$15+49=64$	$18+46=64$	$16+20=36$
$19+30=49$	$16+20=36$	$19+30=49$	$17+47=64$
$20+29=49$	$18+46=64$	$20+29=49$	$18+46=64$
$23+58=81$	$19+45=64$	$23+58=81$	$19+45=64$
$24+57=81$	$21+43=64$	$24+57=81$	$21+60=81$
$26+55=81$	$23+26=49$	$26+55=81$	$22+42=64$
$27+54=81$	$24+57=81$	$27+54=81$	$23+58=81$
$28+53=81$	$25+56=81$	$28+53=81$	$24+40=64$
$31+50=81$	$27+54=81$	$31+50=81$	$25+39=64$
$34+47=81$	$28+36=64$	$34+47=81$	$26+38=64$
$36+45=81$	$31+33=64$	$36+45=81$	$27+54=81$
$38+43=81$	$40+41=81$	$38+43=81$	$30+51=81$
$39+42=81$	$42+58=100$	$39+42=81$	$41+59=100$
$40+41=81$	$47+53=100$	$40+60=100$	$43+57=100$
$48+52=100$	$48+52=100$	$41+59=100$	$44+56=100$
		$48+52=100$	$48+52=100$

四、這裡是一個**已知結論**：若 $s>1$ 且 s 是**奇數的平方**，則 $s-1$ 是**方舞數**。

證明：

將 1 與 $s-1$ 配、2 與 $s-2$ 配、3 與 $s-3$ 配、⋯、$\frac{1}{2}(s-1)$ 與 $\frac{1}{2}(s+1)$ 配，則每一對的數字和皆爲 s，因爲 s 是奇數的平方，所以 $s-1$ 是方舞數。

例如：$8=3^2-1$、$24=5^2-1$、$48=7^2-1$、$80=9^2-1$、$120=11^2-1$、$168=13^2-1$、⋯ 皆是方舞數，而這類方舞數的配對方法，只要按照上述證明的「**頭尾配對法**」即可完成。

五、尋找方舞數的配對方法

前面「證明 26、28、36、38、58、60 是方舞數」裡，每個數的配對方法，並非都是那麼一目了然或是一蹴可幾，經常需要不斷的反覆實驗，最後才能成功完成配對。很顯然，如果每個數都要歷經如此的過程，必然是曠日廢時，沒有效率，甚至最後可能會徒勞無功。因此有必要發展出一套有系統、有規則的配對方法。

我們希望將一些數的配對方法，直接建立在已知的方舞數上，而不是每個數都從頭開始，進行漫無方向的配對。於是我們就從一些垂手可得的方舞數出發，也就是在前面「第四點」所指出的 8、24、48、80、120、168、⋯ 這類方舞數，看看是否有辦法，藉由這些方舞數「**生產**」或「**製造**」出其他的方舞數。經觀察發現，這種「**頭尾配對法**」是可以「分段」進行的。下面是一些實際的例子：

(一) 以方舞數 8 爲配對基礎的方舞數：

1. 方舞數 16

   $1+8=2+7=3+6=4+5=3^2$ (1 到 8 的配對)

   $9+16=10+15=11+14=12+13=5^2$ (9 到 16 的配對)

2. 方舞數 40

   $1+8=2+7=3+6=4+5=3^2$ (1 到 8 的配對)

   $9+40=10+39=11+38=\cdots=23+26=24+25=49$ (9 到 40 的配對)

3. 方舞數 72

   $1+8=2+7=3+6=4+5=3^2$ (1 到 8 的配對)

   $9+72=10+71=11+70=\cdots=39+42=40+41=9^2$ (9 到 72 的配對)

4. 方舞數 112

   $1+8=2+7=3+6=4+5=3^2$ (1 到 8 的配對)

   $9+112=10+111=11+110=\cdots=59+62=60+61=11^2$ (9 到 112 的配對)

(二) 以方舞數 24 爲配對基礎的方舞數：

1. 方舞數 56

$1+24=2+23=3+22=\cdots=11+14=12+13=5^2$ (1 到 24 的配對)

$25+56=26+55=27+54=\cdots=39+42=40+41=81$ (25 到 56 的配對)

2. 方舞數 96

$1+24=2+23=3+22=\cdots=11+14=12+13=5^2$ (1 到 24 的配對)

$25+96=26+95=27+94=\cdots=59+62=60+61=11^2$ (25 到 96 的配對)

3. 方舞數 144

$1+24=2+23=3+22=\cdots=11+14=12+13=5^2$ (1 到 24 的配對)

$25+144=26+143=27+142=\cdots=83+86=84+85=13^2$ (25 到 144 的配對)

(三) 以方舞數 48 爲配對基礎的方舞數：

1. 方舞數 72

$1+48=2+47=3+46=\cdots=23+26=24+25=7^2$ (1 到 48 的配對)

$49+72=50+71=51+70=\cdots=59+62=60+61=11^2$ (49 到 72 的配對)

2. 方舞數 120

$1+48=2+47=3+46=\cdots=23+26=24+25=7^2$ (1 到 48 的配對)

$49+120=50+119=51+118=\cdots=83+86=84+85=13^2$ (49 到 120 的配對)

3. 方舞數 176

$1+48=2+47=3+46=\cdots=23+26=24+25=7^2$ (1 到 48 的配對)

$49+176=50+175=51+174=\cdots=111+114=112+113=15^2$ (49 到 176 的配對)

(四) 以方舞數 80 爲配對基礎的方舞數：

1. 方舞數 88

$1+80=2+79=3+78=\cdots=39+42=40+41=9^2$ (1 到 80 的配對)

$81+88=82+87=83+86=84+85=13^2$ (81 到 88 的配對)

2. 方舞數 144

$1+80=2+79=3+78=\cdots=39+42=40+41=9^2$ (1 到 80 的配對)

$81+144=82+143=83+142=\cdots=111+114=112+113=15^2$ (81 到 144 的配對)

3. 方舞數 208

$1+80=2+79=3+78=\cdots=39+42=40+41=9^2$ (1 到 80 的配對)

$81+208=82+207=83+206=\cdots=143+146=144+145=17^2$ (81 到 208 的配對)

六、觀察前面這些數的配對情形，我們發現這些數彼此之間存在下面的關係：

以 8 爲配對基礎	以 24 爲配對基礎	以 48 爲配對基礎	以 80 爲配對基礎
$(8+1)+16=5^2$ $(8+1)+40=7^2$ $(8+1)+72=9^2$ $(8+1)+112=11^2$	$(24+1)+56=9^2$ $(24+1)+96=11^2$ $(24+1)+144=13^2$	$(48+1)+72=11^2$ $(48+1)+120=13^2$ $(48+1)+176=15^2$	$(80+1)+88=13^2$ $(80+1)+144=15^2$ $(80+1)+208=17^2$

於是我們歸納出：若 n 是 **(奇數的平方**-1**)** 之類的方舞數，s 是**奇數的平方**，那麼 $s-(n+1)$ 是方舞數。

七、**結論**：若 n 是 **(奇數的平方**-1**)** 之類的方舞數，s 是**奇數的平方**，且 $s>2n+1$，那麼 $s-(n+1)$ 是方舞數。

證明：

因爲 n 是方舞數，所以 1 到 n 的整數可以兩個兩個配對，使得每一對的數字和皆爲完全平方數。接著，將 $n+1$ 到 $s-(n+1)$ 的整數，使用「**頭尾配對法**」來配對：$n+1$ 與 $s-(n+1)$ 配、$n+2$ 與 $s-(n+2)$ 配、$n+3$ 與 $s-(n+3)$ 配、…、$\frac{1}{2}(s-1)$ 與 $\frac{1}{2}(s+1)$ 配，則每一對的數字和皆爲 s，因爲 s 爲**奇數的平方**，所以 $s-(n+1)$ 爲方舞數。另外，因爲 $s-(n+1)>n$，所以 $s>2n+1$。

在上面的證明過程裡，並沒有用到「n 是 (奇數的平方-1) 之類的方舞數」這個條件，也就是說，n 只要是方舞數即可，於是我們得到了更一般化的結果。

八、**引理**：若 n 是方舞數，s 是**奇數的平方**，且 $s>2n+1$，那麼 $s-(n+1)$ 是方舞數。

九、特別要強調的是：這裡不僅說明了 $s-(n+1)$ 是方舞數外，也同時交代了這個方舞數的**配對方法**。

伍、研究結果

一、現在若是要證明一個偶數數 m 是否為方舞數時，我們可以利用前面這個引理，也就是看是否存在一個**奇數的平方** s 和一個已知的方舞數 n，且 $s > 2n+1$，使得 $m = s-(n+1)$。下面是一些例子：

(一) $30 = 49-(18+1)$，因為 18 是方舞數，所以 30 是方舞數

(二) $32 = 49-(16+1)$，因為 16 是方舞數，所以 32 是方舞數

(三) $34 = 49-(14+1)$，因為 14 是方舞數，所以 34 是方舞數

(四) $36 = 49-(12+1)$，因為 12 不是方舞數，所以無法判斷 36 是否為方舞數。

(五) $38 = 49-(10+1)$，因為 10 不是方舞數，所以無法判斷 38 是否為方舞數。

(六) $40 = 49-(8+1)$，因為 8 是方舞數，所以 40 是方舞數

(七) $42 = 81-(38+1)$，因為 38 是方舞數，所以 42 是方舞數

(八) $44 = 81-(36+1)$，因為 36 是方舞數，所以 44 是方舞數

二、反過來，我們也可以利用前面的引理來「**生產**」或「**製造**」出其他的方舞數。為方便起見，我們定義一個二變數函數 f，$f(s,n) = s-(n+1)$，n 是方舞數，s 是**奇數的平方**，且 $s > 2n+1$。於是我們便可以透過這個函數 f，由一些符合條件的 s 和 n，來「生產」或「製造」出其他的方舞數，而且更重要的是，它們的**配對方法**也同時知道了。

三、下面分別依 s = 25、49、81、121、169、225 的情形來「**生產**」或「**製造**」出其他的方舞數：

(一) $s = 25$

$f(25,8) = 16$

(二) $s = 49$

$f(49,18) = 30$、$f(49,16) = 32$、$f(49,14) = 34$、$f(49,8) = 40$

(三) $s = 81$

$f(81,38) = 42$、$f(81,36) = 44$、$f(81,34) = 46$、$f(81,32) = 48$、$f(81,30) = 50$

$f(81,28) = 52$、$f(81,26) = 54$、$f(81,24) = 56$

$f(81,18) = 62$、$f(81,16) = 64$、$f(81,14) = 66$

$f(81,8) = 72$

(四) $s = 121$

$f(121,58) = 62$、$f(121,56) = 64$、$f(121,54) = 66$、$f(121,52) = 68$、$f(121,50) = 70$

$f(121,48) = 72$、$f(121,46) = 74$、$f(121,44) = 76$、$f(121,42) = 78$、$f(121,40) = 80$

$f(121,38) = 82$、$f(121,36) = 84$、$f(121,34) = 86$、$f(121,32) = 88$、$f(121,30) = 90$

$f(121,28) = 92$、$f(121,26) = 94$、$f(121,24) = 96$

$f(121,18) = 102$、$f(121,16) = 104$、$f(121,14) = 106$

$f(121,8) = 112$

(五) $s = 169$

$f(169,82) = 86$、$f(169,80) = 88$、$f(169,78) = 90$

$f(169,76) = 92$、$f(169,74) = 94$、$f(169,72) = 96$、$f(169,70) = 98$、$f(169,68) = 100$

$f(169,66) = 102$、$f(169,64) = 104$、$f(169,62) = 106$、$f(169,60) = 108$、$f(169,58) = 110$

$f(169,56) = 112$、$f(169,54) = 114$、$f(169,52) = 116$、$f(169,50) = 118$、$f(169,48) = 120$

$f(169,46) = 122$、$f(169,44) = 124$、$f(169,42) = 126$、$f(169,40) = 128$、$f(169,38) = 130$

$f(169,36) = 132$、$f(169,34) = 134$、$f(169,32) = 136$、$f(169,30) = 138$、$f(169,28) = 140$

$f(169,26) = 142$、$f(169,24) = 144$、$f(169,18) = 150$

$f(169,16) = 152$、$f(169,14) = 154$、$f(169,8) = 160$

(六) $s = 225$

$f(225,110) = 114$、$f(225,108) = 116$、$f(225,106) = 118$、$f(225,104) = 120$

$f(225,102) = 122$、$f(225,100) = 124$、$f(225,98) = 126$、$f(225,96) = 128$、$f(225,94) = 130$

$f(225,92) = 132$、$f(225,90) = 134$、$f(225,88) = 136$、$f(225,86) = 138$、$f(225,84) = 140$

$f(225,82) = 142$、$f(225,80) = 144$、$f(225,78) = 146$、$f(225,76) = 148$、$f(225,74) = 150$

$f(225,72) = 152$、$f(225,70) = 154$、$f(225,68) = 156$、$f(225,66) = 158$、$f(225,64) = 160$

$f(225,62) = 162$、$f(225,60) = 164$、$f(225,58) = 166$、$f(225,56) = 168$、$f(225,54) = 170$

$f(225,52) = 172$、$f(225,50) = 174$、$f(225,48) = 176$、$f(225,46) = 178$、$f(225,44) = 180$

$f(225,42) = 182$、$f(225,40) = 184$、$f(225,38) = 186$、$f(225,36) = 188$、$f(225,34) = 190$

$f(225,32) = 192$、$f(225,30) = 194$、$f(225,28) = 196$、$f(225,26) = 198$、$f(225,24) = 200$

$f(225,18) = 206$、$f(225,16) = 208$、$f(225,14) = 210$

$f(225,8) = 216$

四、我們將前面的結果，依數字的大小，將相同的方舞數放在同一格裡 (只列出 200 以內的數)：

表四

2	4	6	**8**	10
12	**14**	$f(25,8)=16$	**18**	20
22	**24**	**26**	**28**	$f(49,18)=30$
$f(49,16)=32$	$f(49,14)=34$	**36**	**38**	$f(49,8)=40$
$f(81,38)=42$	$f(81,36)=44$	$f(81,34)=46$	$f(81,32)=$ **48**	$f(81,32)=50$
$f(81,28)=52$	$f(81,26)=54$	$f(81,24)=56$	**58**	**60**
$f(81,18)=62$ $f(121,58)=62$	$f(81,16)=64$ $f(121,56)=64$	$f(81,14)=66$ $f(121,54)=66$	$f(121,52)=68$	$f(121,50)=70$
$f(81,8)=72$ $f(121,48)=72$	$f(121,46)=74$	$f(121,44)=76$	$f(121,42)=78$	$f(121,40)=$ **80**
$f(121,38)=82$	$f(121,36)=84$	$f(121,34)=86$ $f(169,82)=86$	$f(121,32)=88$ $f(169,80)=88$	$f(121,30)=90$ $f(169,78)=90$
$f(121,28)=92$ $f(169,76)=92$	$f(121,26)=94$ $f(169,74)=94$	$f(121,24)=96$ $f(169,72)=96$	$f(169,70)=98$	$f(169,68)=100$
$f(121,18)=102$ $f(169,66)=102$	$f(121,16)=104$ $f(169,64)=104$	$f(121,14)=106$ $f(169,62)=106$	$f(169,60)=108$	$f(169,58)=110$
$f(121,8)=112$ $f(169,56)=112$	$f(169,54)=114$ $f(225,110)=114$	$f(169,52)=116$ $f(225,108)=116$	$f(169,50)=118$ $f(225,106)=118$	$f(169,48)=$ **120** $f(225,104)=$ **120**
$f(169,46)=122$ $f(225,102)=122$	$f(169,44)=124$ $f(225,100)=124$	$f(169,42)=126$ $f(225,98)=126$	$f(169,40)=128$ $f(225,96)=128$	$f(169,38)=130$ $f(225,94)=130$
$f(169,36)=132$ $f(225,92)=132$	$f(169,34)=134$ $f(225,90)=134$	$f(169,32)=136$ $f(225,88)=136$	$f(169,30)=138$ $f(225,86)=138$	$f(169,28)=140$ $f(225,84)=140$
$f(169,26)=142$ $f(225,82)=142$	$f(169,24)=144$ $f(225,80)=144$	$f(225,78)=146$	$f(225,76)=148$	$f(169,18)=150$ $f(225,74)=150$
$f(169,16)=152$ $f(225,72)=152$	$f(169,14)=154$ $f(225,70)=154$	$f(225,68)=156$	$f(225,66)=158$	$f(169,8)=160$ $f(225,64)=160$
$f(225,62)=162$	$f(225,60)=164$	$f(225,58)=166$	$f(225,56)=$ **168**	$f(225,54)=170$
$f(225,52)=172$	$f(225,50)=174$	$f(225,48)=176$	$f(225,46)=178$	$f(225,44)=180$
$f(225,42)=182$	$f(225,40)=184$	$f(225,38)=186$	$f(225,36)=188$	$f(225,34)=190$
$f(225,32)=192$	$f(225,30)=194$	$f(225,28)=196$	$f(225,26)=198$	$f(225,24)=200$

黃色：表示**非方舞數**。

綠色：表示無法藉由其他方舞數所「**生產**」或「**製造**」出來的方舞數。

紅色數字：表示 **(奇數的平方−1)** 之類的方舞數。

五、在「**平方之舞－方舞數的研究**」裡，除了認為 26、28、36、38、58、60 不是**方舞數**外，也將 42、52、54、78、82、84、108、110、114、116、140 都歸類為**非方舞數**，現在我們根據**表四**，證明了這些數都是方舞數。

六、前面我們運用**函數 f** 來「生產」或「製造」其他方舞數的方法，雖然大幅降低所需花費的時間，但是對於「**連續**」的方舞數的證明仍嫌不夠有效率。下面我們運用不等式來「**連續**」證明 200 到 3000 的偶數皆是方舞數：

(一) 200 到 300 的偶數皆是方舞數

令 $s=([\sqrt{300}]+2)^2=19^2=361$，則　　$[\sqrt{x}]$ 表示小於或等於 x 的最大整數

$200 \le 361-(n+1) \le 300$

$-161 \le -(n+1) \le -61$

$160 \ge n \ge 60$

因為 60 到 160 的偶數皆是方舞數，所以 200 到 300 的偶數皆是方舞數。

(二) 300 到 500 的偶數皆是方舞數

令 $s=([\sqrt{500}]+1)^2=23^2=529$，則

$300 \le 529-(n+1) \le 500$

$-229 \le -(n+1) \le -29$

$228 \ge n \ge 28$

因為 28 到 228 的偶數皆是方舞數，所以 300 到 500 的偶數皆是方舞數。

(三) 500 到 900 的偶數皆是方舞數

令 $s=([\sqrt{900}]+1)^2=31^2=961$，則

$500 \le 961-(n+1) \le 900$

$-461 \le -(n+1) \le -61$

$460 \ge n \ge 60$

因為 60 到 460 的偶數皆是方舞數，所以 500 到 900 的偶數皆是方舞數。

(四) 900 到 1600 的偶數皆是方舞數

令 $s=([\sqrt{1600}]+1)^2=41^2=1681$，則

$900 \le 1681-(n+1) \le 1600$

$-781 \le -(n+1) \le -81$

$780 \ge n \ge 80$

因為 80 到 780 的偶數皆是方舞數，所以 900 到 1600 的偶數皆是方舞數。

(五) 1600 到 3000 的偶數皆是方舞數

令 $s=([\sqrt{3000}]+1)^2=55^2=3025$ ，則

$1600 \le 3025-(n+1) \le 3000$

$-1425 \le -(n+1) \le -25$

$1424 \ge n \ge 24$

因爲 24 到 1424 的偶數皆是方舞數，所以 1600 到 3000 的偶數皆是方舞數。

七、前面這種「**連續**」證明方舞數的方法，每次增加的「**範圍**」可以逐漸擴大，如此繼續進行下去，勢必可以證明**大於 3000 的所有偶數都是方舞數**。

八、方舞數配對方法的唯一性

由**表四**，我們發現在所有的方舞數裡面 8、14、18、24、26、28、36、38、58、60 這 10 個方舞數是比較特別的，因爲它們無法藉由一些已知的方舞數「生產」或「製造」出來。相反的，其他的方舞數只要藉由這 10 個方舞數，就可以「生產」或「製造」出來。所以這 10 個方舞數的**配對方法數**，當然也決定了其他方舞數的**配對方法數**。

表一、**表二**、**表三**已經分別列出了方舞數 26、28、36、38、58、60 這 6 個數的**兩種**配對方法，下面我們將證明方舞數 8、14、18、24 只存在**一種**配對方法。

(一) 8 只存在一種配對方法

因爲 8 只能與 1 配、7 只能與和 2 配、6 只能與 3 配、5 只能與 4 配。

(二) 14 只存在一種配對方法

因爲 9 只能與 7 配、10 只能與 6 配、8 只能與 1 配，這樣 2 只能與 14 配、11 只能與 5 配、4 只能與 12 配、13 只能與 3 配。

(三) 18 只存在一種配對方法

因爲 18 只能與 7 配、17 只能與 8 配、16 只能與 9 配，這樣 2 只能與 14 配、11 只能與 5 配、4 只能與 12 配、13 只能與 3 配、1 只能與 15 配、6 只能與 10 配。

(四) 24 只存在一種配對方法

因爲 18 只能與 7 配，這樣 9 只能與 16 配、20 只能與 5 配、11 只能與 14 配、22 只能與 3 配、2 只能與 23 配、13 只能與 12 配、24 只能與 1 配、8 只能與 17 配、19 只能與 6 配、4 只能與 21 配、10 只能與 15 配。

九、從前面**表四**可以統計得到：

(一) 當 $s=25$ 時，可以「生產」或「製造」出 1 個方舞數。

(二) 當 $s=49$ 時，可以「生產」或「製造」出 4 個方舞數。

(三) 當 $s=81$ 時，可以「生產」或「製造」出 12 個方舞數。

(四) 當 $s=121$ 時，可以「生產」或「製造」出 22 個方舞數。

(五) 當 $s=169$ 時，可以「生產」或「製造」出 34 個方舞數。

(六) 當 $s=225$ 時，可以「生產」或「製造」出 48 個方舞數。

我們觀察到數列 1、4、12、22、34、48 從第二項開始是一個「**二階等差數列**」，這是因爲 $12-4=8$ 、 $22-12=10$ 、 $34-22=12$ 、 $48-34=14$ 是公差爲 2 的等差數列。
於是我們便猜想：當 $s=17^2=289$ 時，「應該」可以「生產」或「製造」出 $48+16=64$ 個方舞數。經過實際「生產」或「製造」，這個猜想是正確的。
下面列出實際的情形：

$s=289$

$f(289,142)=146$、$f(289,140)=148$、$f(289,138)=150$

$f(289,136)=152$、$f(289,134)=154$、$f(289,132)=156$、$f(289,130)=158$、$f(289,128)=160$

$f(289,126)=162$、$f(289,124)=164$、$f(289,122)=166$、$f(289,120)=168$、$f(289,118)=170$

$f(289,116)=172$、$f(289,114)=174$、$f(289,112)=176$、$f(289,110)=178$、$f(289,108)=180$

$f(289,106)=182$、$f(289,104)=184$、$f(289,102)=186$、$f(289,100)=188$、$f(289,98)=190$

$f(289,96)=192$、$f(289,94)=194$、$f(289,92)=196$、$f(289,90)=198$、$f(289,88)=200$

$f(289,86)=202$、$f(289,84)=204$、$f(289,82)=206$、$f(289,80)=208$、$f(289,78)=210$

$f(289,76)=212$、$f(289,74)=214$、$f(289,72)=216$、$f(289,70)=218$、$f(289,68)=220$

$f(289,66)=222$、$f(289,64)=224$、$f(289,62)=226$、$f(289,60)=228$、$f(289,58)=230$

$f(289,56)=232$、$f(289,54)=234$、$f(289,52)=236$、$f(289,50)=238$、$f(289,48)=240$

$f(289,46)=242$、$f(289,44)=244$、$f(289,42)=246$、$f(289,40)=248$、$f(289,38)=250$

$f(289,36)=252$、$f(289,34)=254$、$f(289,32)=256$、$f(289,30)=258$、$f(289,28)=260$

$f(289,26)=262$、$f(289,24)=264$、$f(289,18)=270$

$f(289,16)=272$、$f(289,14)=274$、$f(289,8)=280$

十、**結論**：當 $s=7^2$、9^2、11^2、13^2、15^2、17^2、19^2、$\cdots$ 時所「生產」或「製造」出的方舞數的個數 4、12、22、34、48、64、82、$\cdots$ 是一個**二階等差數列**。

證明：

兩個**連續**的**奇數的平方**可以表示爲：$(2k+1)^2$、$(2k+3)^2$，$k=3$、4、5、6、$\cdots$

它們的差爲 $(2k+3)^2-(2k+1)^2=8(k+1)$

因爲 $8(k+1)$，當 $k=3$、4、5、6、$\cdots$ 時是一個**等差數列**，所以當 $s=7^2$、9^2、11^2、13^2、15^2、17^2、19^2、$\cdots$ 時所「生產」或「製造」出來的方舞數的個數 4、12、22、34、48、64、82、$\cdots$ 是一個**二階等差數列**。

十一、根據上面的結論，我們可以推得當 $s=7^2$、9^2、11^2、13^2、15^2、17^2、19^2、$\cdots$ 時，所「生產」或「製造」出來的方舞數的個數爲 $c_s=4+\dfrac{s-49}{4}$。

陸、討論

一、在使用「若 n 是方舞數，s 是奇數的平方，且 $s>2n+1$，那麼 $s-(n+1)$ 是方舞數。」這個結論時，我們是先選定**奇數的平方** s (25、49、81、121、169、225、$\cdots$)，因爲 n 必須滿足 $s>2n+1$，所以只能選定符合這個條件的已知方舞數 n，這樣每選定一個**奇數的平方** s，就只能「生產」或「製造」出**有限個數**的方舞數，我們也推得這個**個數**爲 $c_s=4+\dfrac{s-49}{4}$，$s=7^2$、9^2、11^2、13^2、15^2、17^2、19^2、$\cdots$。

二、反過來，如果我們先給定一個已知的方舞數 n 當「**種子**」，只要選定不同的**奇數的平方** s，就可以「生產」或「製造」出**無限個數**的方舞數來。例如：以 8 當「**種子**」，就可以「生產」或「製造」出 16、40、72、112、160、216、280、352、$\cdots$ 這些方舞數。

三、由**表四**，我們發現在所有的方舞數裡面，8、14、18、24、26、28、36、38、58、60 這 10 個方舞數是比較特別的，因爲它們無法藉由一些已知的方舞數「生產」或「製造」出來。相反的，其他的方舞數都可藉由這 10 個方舞數「生產」或「製造」出來，所以這 10 個數可稱之爲「**方舞數之母**」。

四、較大的方舞數可以建構在「**好幾層**」較小的方舞數之上，例如：由**表四**我們可以看到，8「產生」16、16「產生」32、32「產生」48、48「產生」72、72「產生」96、96「產生」128，也就是 128 的配對法可以建構在 8、16、32、48、72、96 這「**六層**」的方舞數上面。

柒、結論

一、最小的方舞數是 8。

二、若 n 是方舞數，s 是**奇數的平方**，且 $s > 2n+1$，則 $s-(n+1)$ 是方舞數。

三、只有 2、4、6、10、12、20、22 這 7 個偶數不是方舞數，其餘的偶數都是方舞數。

四、所有的方舞數都可藉由 8、14、18、24、26、28、36、38、58、60 這 10 個「**方舞數之母**」,「生產」或「製造」出來。

五、「**方舞數之母**」中，8、14、18、24 只存在**一種**配對法，而 26、28、36、38、58、60 這 6 個數**至少**有**兩種**配對法。

六、當 $s=7^2$、9^2、11^2、13^2、15^2、17^2、19^2、⋯ 時所「生產」或「製造」出的方舞數的個數 4、12、22、34、48、64、82、⋯ 是一個**二階等差數列**。

七、我們可以推得當 $s=7^2$、9^2、11^2、13^2、15^2、17^2、19^2、⋯ 時，所「生產」或「製造」出來的方舞數的個數為 $c_s = 4+\dfrac{s-49}{4}$。

捌、參考資料及其他

一、劉怡妏、張盛閎、蔡閎聿，平方之舞－方舞數的研究，台北縣 97 學年度國民中小學科學展覽，國中組數學科，優等獎作品

二、國中數學課本，第一、二、三、四冊，康軒文教事業

三、陸思明編著，高中新數學教室，單元系列 7，數列與級數，建弘出版社

【評語】030417

一個有趣的數字問題。就由簡單的配對規則和對一些小例子的分析，作者完整的解決了這個問題。能藉由簡單的想法處理看似複雜的問題，十分難得。比較可惜的是，在說明大於或等於 24 的所有正整數均為方舞數時，使用了一個比較不直接的歸納法。如果能將這部分複雜的說明進一步簡化，會是更好的作品。