中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030416

nxn 黑白棋盤面積之最佳分割的研究與推廣

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 林承洋	洪國政
國二 張祐瑄	鄭羽超
國二 林育瑩	
國二 高苕瑄	

關鍵詞：棋盤、等面積分割、最佳分割線

$n\times n$黑白棋盤面積之最佳分割的研究與推廣

摘要

本研究內容為：討論黑、白相間的棋盤方格，經一條直線分割後，取大塊區域的黑色與白色面積，如何尋求最佳分割線與最大值？過程中，我們利用平行移動法以及等面積法，成功的找出的最佳分割線與最大值的通式。再應用2×2、3×3的結果與方法，推導出$2\times m$、$3\times m$相關分割，進一步推廣到$n\times m$的相關結論。

壹、研究動機

曾經在學校資優營隊課程中，老師給我們一些資優試題，有一題為：任選黑、白相間的棋盤方格，求其對角線落在黑色小方格內與白色方格內的線段長度之比值，我們由此聯想：將題目改成任選$n\times m$黑、白相間的棋盤方格，計算其內部黑白面積之比值，作為我們的研究。

貳、研究目的

一、 尋找2×2黑白棋盤的最佳分割線及黑白面積比值之最大值。

二、 尋找3×3黑白棋盤的最佳分割線及黑白面積比值之最大值。

三、 尋找$n\times n$黑白棋盤的最佳分割線及黑白面積比值之最大值。

四、 尋找$n\times m$黑白棋盤的最佳分割線及黑白面積比值之最大值。

參、研究設備器材

紙、筆、GSP 幾何繪圖軟體

肆、研究過程及方法

一、 研究規則：

在黑白相間的$n\times m$棋盤上，任作一分割直線L，將棋盤分成兩塊區域。我們設定取其中較大的面積之區域（當兩區域面積相等，則兩區域皆可取），並計算其內部：黑（簡稱：B）、白（簡稱：W）兩色所占面積之比值，我們稱此比值為$(\frac{B}{W})_L$值，簡記為$(\frac{B}{W})$值。

二、 名稱介紹：

(一) $(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}}$ ：表示分割線 $\overrightarrow{PQ}$ 所形成的 $(\frac{B}{W})$ 值。

(二) $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{對邊}$ ：表示所有對邊分割線所形成的 $(\frac{B}{W})$ 值中的最大。

(三) $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{鄰邊}$ ：表示所有鄰邊分割線所形成的 $(\frac{B}{W})$ 值中的最大。

(四) $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{n\times m}$ ：表示 $n\times m$ 棋盤所有 $(\frac{B}{W})$ 值中的最大。

(五) $L_{n\times m}$ ：對於 $m\times n$ 棋盤，若 L 分割直線，產生 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{n\times m}$ ，則我們稱 L 爲 $n\times m$ 棋盤的最佳分割線，簡稱爲 $L_{n\times m}$ 。

三、研究問題：根據研究規則，由於 $n\times m$ 棋盤內的方格爲黑、白相間，且：

(一) 當 $n\times m$ 爲偶數時，棋盤內黑、白方格數量相同。

(二) 當 $n\times m$ 爲奇數時，棋盤內黑、白方格數量是黑色比白色多一格。

因此，我們有必要將 $n\times m$ 棋盤分成奇、偶數邊格來討論。以下是我們研究的問題：

[問題一]： $L_{2\times2}$ 與 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times2}$ 的尋求？

[問題二]： $L_{3\times3}$ 與 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{3\times3}$ 的尋求？

[問題三]： $L_{n\times n}$ 與 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{n\times n}$ 的尋求？

[問題四]： $L_{n\times m}$ 與 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{n\times m}$ 的尋求？

四、問題的分析與解決：

問題一： $L_{2\times2}$ 與 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times2}$ 的尋求？

由於本問題是要求得 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times2}$ ，所以考慮分割線同時通過兩塊黑色正方形格，

且須分成【對邊分割】與【鄰邊分割】

(一) 【對邊分割】

1. 在 $\overline{OA}$ 、 $\overline{DE}$ 上任取兩動點 P_0 、 Q_0 ，假設 $\overline{P_0Q_0}$ 交 $\overline{BC}$ 於 N (實際上， $\overline{P_0Q_0}$ 可

能與$\overline{BF}$產生交點，但兩種可能討論皆相同。)

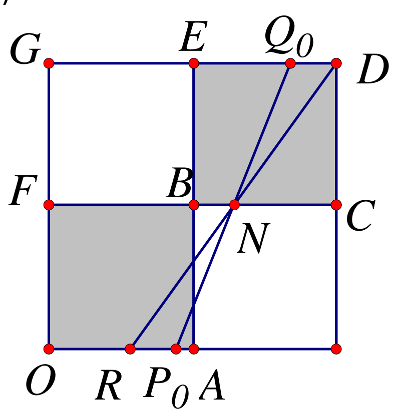
2. 作$\overrightarrow{DN}$交$\overline{OA}$於R

可得$\Delta NDQ_0 \cong \Delta NRP_0$

即四邊形$ORDG$面積=四邊形OP_0Q_0G面積

又從(圖 1-1)中可之四邊形$ORDG$白色面積

較小，所以$(\frac{B}{W})_{\overline{DR}} > (\frac{B}{W})_{\overline{P_0Q_0}}$



（圖 1-1）

3. 由１、２可得：對邊分割之$(\frac{B}{W})$最大值其分割線必過（圖 1-1）頂點D(或O)

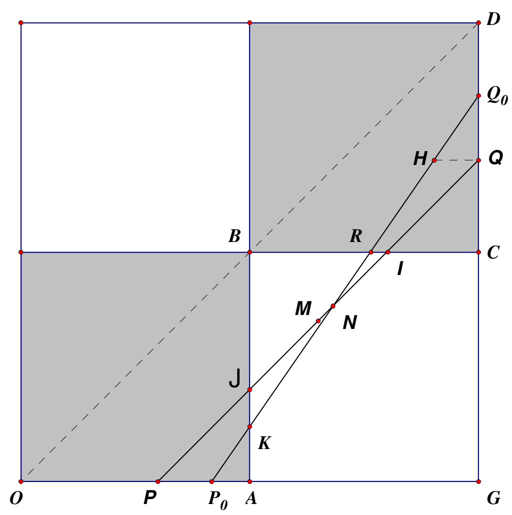
(二)【鄰邊分割】

鄰邊的$(\frac{B}{W})$最大值的分割，並不像對邊最佳分割線必過頂點。

因此需要尋找其他方法。我們想到策略如下：

[步驟一]：**平行移動法**：

令$\overleftrightarrow{PQ}$的斜率=1，P爲動點，當P自O點往A點作移動，很清楚發現：大塊區域黑白兩色面積皆增加，且一開始***黑色增多，白色增少***。至於P在何處才能產生分割線當斜率爲 1 時，$(\frac{B}{W})$值最大，我們並不能看出。但此方式涵蓋過$\overline{OA}$、$\overline{CD}$斜率＝1 的分割線。



（圖 1-2）

[步驟二]：**等面積法**：

對於鄰邊分割線$\overline{P_0Q_0}$ (P_0、Q_0分別在$\overline{OA}$、$\overline{CD}$上，如圖 1-2)

1. 假設$\overleftrightarrow{P_0Q_0}$斜率>1，我們皆可找到$\overline{PQ} // \overline{OD}$，使得：

ΔPQG面積＝ΔP_0Q_0G面積。

2. 作$\overline{QH} // \overline{PP_0}$交$\overline{P_0Q_0}$於$H$可得$\Delta NQH \sim \Delta NPP_0$（$N$爲$\overline{PQ}$、$\overline{P_0Q_0}$的交點）

又 ΔNQH 面積 $< \Delta NQQ_0$ 面積 $= \Delta NPP_0$ 面積

$\therefore \overline{NQ} < \overline{NP}$

即 N 落在 $\overline{MQ}$ 上（M 爲 $\overline{PQ}$ 的中點）

得 $\overline{NI} < \overline{MI} = \overline{MJ} < \overline{NJ}$

3. $\because \overleftrightarrow{P_0Q_0}$ 斜率>1 ，$\therefore \Delta NJK$ 中，$\angle NJK > \angle NKJ$ ，得 $\overline{NK} > \overline{NJ}$

ΔNIR 中，$\angle NRI > \angle NIR$ 得 $\overline{NI} > \overline{NR}$

$\Rightarrow \overline{NK} > \overline{NJ} > \overline{NI} > \overline{NR} \quad \Rightarrow \Delta NJK > \Delta NIR$

可得 $(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}} > (\frac{B}{W})_{\overline{P_0Q_0}}$

當 $\overline{P_0Q_0}$ 之斜率 <1 ，同上述之證明，可得 $(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}} > (\frac{B}{W})_{\overline{P_0Q_0}}$ 。

根據上面的推論結果，得知鄰邊最佳分割線產生於斜率爲1的分割線。又對邊的最佳分割線，實際上可視爲過頂點的鄰邊分割線。因此，可證得：

$L_{2\times2}$(最佳分割線)落在斜率 1 的直線上。

接著，我們同【問題一】的座標化，解析如下：

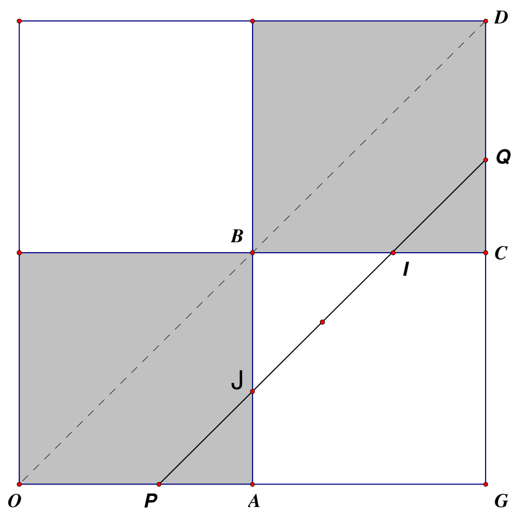
$L_{2\times2}$ 與 $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times2}$ 的尋求？

如圖 1-3，令 $P(a,0)$ ，過 P 點斜率爲 1 之直線方程式 $\overline{PQ}: y = x - a$

令 $\overline{PQ}$ 分別交 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 於 J 、I ，可得：

$\overline{PA} = \overline{AJ} = \overline{CI} = \overline{CQ} = 1 - a$

$\overline{BI} = \overline{BJ} = a$



（圖 1-3）

$$\therefore \left(\frac{B}{W}\right)_{\overline{PQ}} = \frac{2-\frac{(1-a)^2\times 2}{2}}{1+\frac{1}{2}a^2} = \frac{2-(1-a)^2}{1+\frac{1}{2}a^2} = \frac{2+4a-2a^2}{2+a^2}$$

令$\left(\frac{B}{W}\right)_{\overline{PQ}} = r$，即$r = \frac{2+4a-2a^2}{2+a^2} \Rightarrow (r+2)a^2-4a+(2r-2)=0$

$\because a$有實數解 $\therefore$判別式≥ 0，其中$0<a<1$

即$(-4)^2-4(r+2)(2r-2)\geq 0 \quad \Rightarrow 16-8(r+2)(r-1)\geq 0$

$$\Rightarrow 2-(r^2+r-2)\geq 0 \quad \Rightarrow r^2+r-4\leq 0$$

當等式成立，得$r=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ $\therefore$不等式的解爲$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\leq r\leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

即$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times 2} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

此時$a = \frac{-4}{-2(r+2)} = \frac{4}{2(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}+2)} = \frac{4}{\sqrt{17}+3} = \frac{4(\sqrt{17}-3)}{8} = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$

得$P(\frac{\sqrt{17}-3}{2},0)$

$L_{2\times 2}$ ： $y = x-\frac{\sqrt{17}-3}{2}$

問題二：$L_{3\times 3}$與$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{3\times 3}$的尋求？

(一) 【對邊分割】

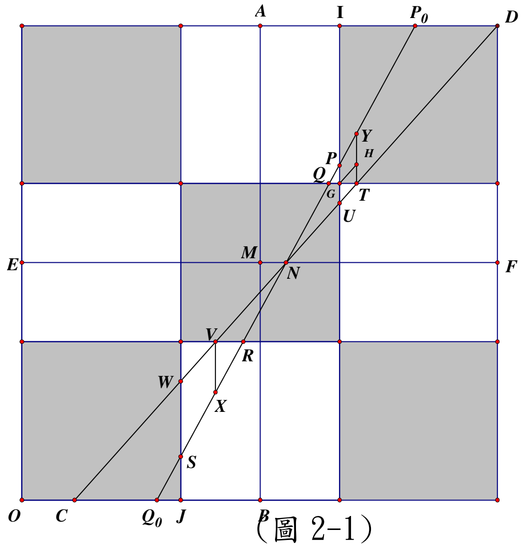
如圖 2-1，在"取較大面積分割比值"的要求下，我們可在$\overline{ID}$ 、$\overline{JO}$上取動點，連接作分割線求$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{對邊}$。我們發現分割面積僅有兩種方式，分別證明如下

3×3棋盤方格對邊最佳分割線的尋找？

由於對邊分割線共分成兩種分割結果，我們分別證明如下

1. <u>第一種分割</u>

(1) 如圖 2-1，分別在$\overline{ID}$、$\overline{JO}$上取動點P_0、Q_0，連接$\overline{P_0Q_0}$與正方格之中線$\overline{EF}$交於 N，並自 D 點作$\overline{DC}$過 N 點交$\overline{JO}$於 C



(圖 2-1)

(2) 分別自 V、T 作$\overline{VX}$、$\overline{TY}$平行中線$\overline{AB}$交$\overline{P_0Q_0}$於X 、Y

$\because \Delta NTY \cong \Delta NVX$ 且 $\Delta NTQ \cong \Delta NVR$

$\therefore \Delta QTY \cong \Delta VRX$

(3) 自G作$\overline{GH}//\overline{UT}$交$\overline{YT}$於$H$，則$\Delta GHT \cong \Delta TUG$

$\because \Delta GHT <$ 四邊形$PGTY$面積

$\therefore \Delta GTU <$ 四邊形$PGTY$面積

又$\because \Delta QGP < \Delta QTY$

$\therefore (\Delta GUT + \Delta QGP) < \Delta QTY$

即$(\Delta GUT + \Delta QGP) < \Delta VRX$

(4) 又$\because \Delta VRX <$ 四邊形$WSRV$面積

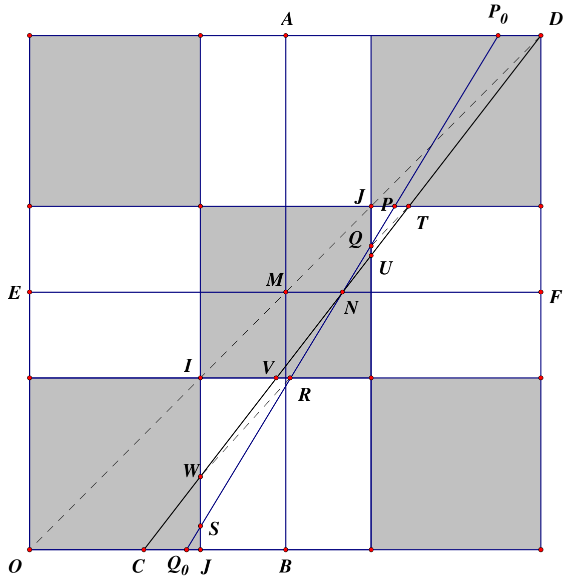
$\therefore (\Delta GUT + \Delta QGP) <$ 四邊形$WSRV$面積

且$\because \Delta NCQ_0 \cong \Delta NDP_0$ $\quad \therefore (\frac{B}{W})_{\overline{P_0Q_0}} < (\frac{B}{W})_{\overline{DC}}$

2. 第二種分割

(1) 連接$\overline{QT}$ 、$\overline{WR}$

$\because \Delta VNR \cong \Delta TNP \quad \therefore \overline{VR} = \overline{PT}$



（圖 2-2）

(2) $\because \Delta WNS \sim \Delta UNQ$ 又 $\Delta WNS > \Delta VNR = \Delta TNP$

$\therefore \overline{WS} > \overline{QU}$

(3) 又 $\overline{IW} > \overline{JU} > \overline{JQ}$，$\overline{IR} > \overline{MN} > \overline{JT}$

$$\therefore \Delta WVR = \frac{\overline{VR} \times \overline{IW}}{2} > \frac{\overline{PT} \times \overline{JQ}}{2} = \Delta QPT$$

$$\Delta WSR = \frac{\overline{WS} \times \overline{IR}}{2} > \frac{\overline{QU} \times \overline{JT}}{2} = \Delta QUT$$

$\Rightarrow$ 故四邊形 $WSRV$ 面積 $>$ $QUTP$ 面積

$$\therefore \left(\frac{B}{W}\right)_{\overline{P_0Q_0}} < \left(\frac{B}{W}\right)_{\overline{DC}}$$

由對邊的兩種分割可以得知：對邊之最佳分割線，必產生於過 D 點的分割線。

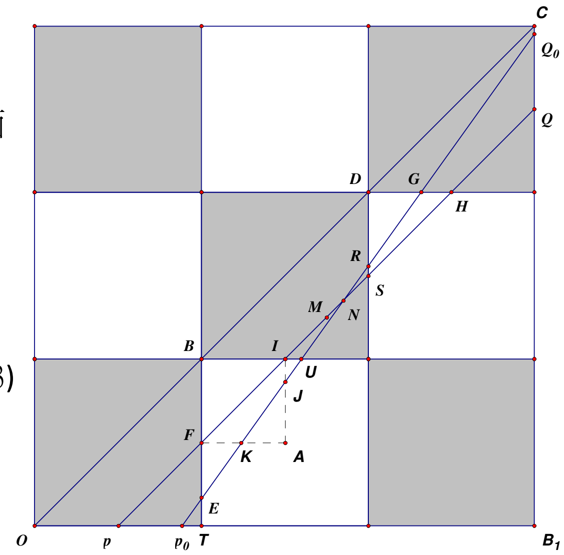
(二) 【鄰邊分割】

如同【問題一】的策略，我們利用等面積法如下：

令 $\overleftrightarrow{PQ}$ 斜率＝1，$\Delta PQB_1 = \Delta P_0Q_0B_1$

$\overline{PQ}$、$\overline{P_0Q_0}$ 與 3×3 格線交點名稱如(圖 2-3)中，若四邊形 $FEUI$ 面積 S，四邊形 $RSHG$ 面積 S'。

$\Rightarrow$ 我們比較 S 和 S'



（圖 2-3）

、

1. $S - S'$

$= (\Delta BEU - \Delta BFI) - (\Delta DSH - \Delta DRG)$

$= (\Delta BEU + \Delta DRG) - (\Delta BFI + \Delta DSH)$

$= (\Delta BEU + \Delta DRG) - 2\Delta BFI$

(1) 作 $\overline{FK} // \overline{GH}$ 交 $\overline{P_0Q_0}$ 於 K，則 $\Delta NFK \sim \Delta NHG$

$\because \overline{NF} > \overline{MF} = \overline{MH} > \overline{NH}$ (M 為 $\overline{PQ}$ 中點)　$\therefore \overline{FK} > \overline{GH}$

(2) 以 $\overline{BI}$ 為邊作正方形 $IBFA$ $\Rightarrow$ 得 $IBFA$ 面積 $= 2\Delta BFI$

(3) $\because \overline{FA} = \overline{BI} = \overline{DH}$，且 $\overline{FK} > \overline{GH}$

$\therefore \overline{KA} < \overline{DG}$ ($\because K$ 在 $\overline{FA}$ 上)

(4) $\because \Delta KAJ \sim \Delta GDR$ (令 $\overline{IA}$ 交 $\overline{P_0Q_0}$ 於 J)

又 $\overline{KA} < \overline{DG}$ $\therefore \Delta KAJ < \Delta GDR$

(5) 又 $\because S - S' = (\Delta BEU + \Delta DRG) - 2\Delta BFI$

$= \Delta BEU + \Delta DRG -$ 正方形 $IBFA > \Delta GDR - \Delta KAJ > 0$

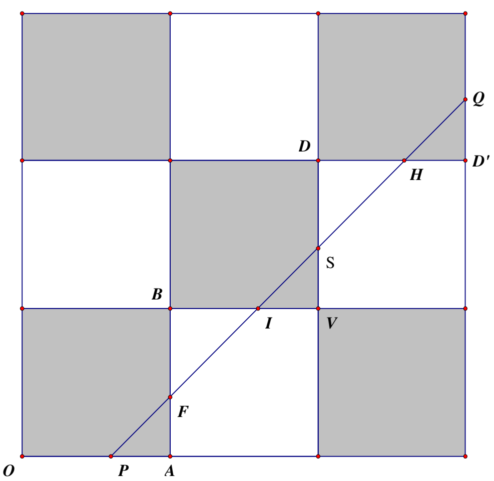
經過 S 與 S' 之比較，我們知道 3×3 棋盤方格的鄰邊最佳分割線，必是斜率為 1 之直線。又對邊的最佳分割線過頂點，可視為鄰邊過頂點的分割線。因此可證得：$L_{3\times3}$ 落在斜率 1 的直線上。

以下是我們的解析：

$L_{3\times3}$ 與 $\begin{Bmatrix} B \\ W \end{Bmatrix}_{3\times3}$ 的尋求？

令 $P(a,0)$，$\overline{PQ}$ 方程式之斜率為1，則

$\overline{PQ}$ ： $y = x - a$



（圖 2-4）

$\Rightarrow F(1,1-a)$、$I(1+a,1)$、$S(2,2-a)$、$H(2+a,2)$、$Q(3,3-a)$

$\because \Delta PAF \cong \Delta IVS \cong \Delta HD'Q$，且 $\Delta BFI \cong \Delta DSH$

$\therefore$ 黑色面積 $B = 1+3(1-\Delta PAF) = \dfrac{3(1+2a-a^2)+2}{2} = \dfrac{5+6a-3a^2}{2}$

白色面積 W =2+2∆BFI$= 2+\dfrac{a^2}{2}\cdot 2 = 2+a^2$

$$\Rightarrow (\frac{B}{W})_{PQ} = \frac{\frac{5+6a-3a^2}{2}}{2+a^2} = \frac{5+6a-3a^2}{4+2a^2}$$

令 r $= \dfrac{5+6a-3a^2}{4+2a^2}$

$\because a$ 之方程式必有實根 $\therefore$ 判別式≥0，其中 $0 < a < 1$

$\therefore (2r+3)a^2-6a+(4r-5)=0 \quad \Rightarrow 36-4(2r+3)(4r-5)\ge 0$

$\Rightarrow 9-(8r^2+2r-15)\ge 0 \quad \Rightarrow 9-8r^2-2r+15\ge 0$

$\Rightarrow 24-8r^2-2r\ge 0 \quad \Rightarrow 8r^2+2r-24\le 0$

$\therefore \dfrac{-1-\sqrt{193}}{8}\le r\le \dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$，故 $r=\dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$ (取最大值)

即：$\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{3\times 3} = \dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$。此時，$a=\dfrac{-(-6)}{2(2r+3)}=\dfrac{3}{2r+3}$，可得 $L_{3\times 3}$：

$y = x-\dfrac{3}{2r+3}$，其中 $r=\dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$。

最後，我們試著將【問題一】、【問題二】的解決方式，擴展到 $n\times n$ 的分割。

問題三：$L_{n\times n}$ 與 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times n}$ 的尋求？

對於本研究 $n\times n$ 的黑白相間棋盤，當 n 是偶數：黑、白數量相同；當 n 是奇數：黑色比白色方格多 1。因此，有必要將【問題三】的研究分成下列兩種討論：

(一) 偶數邊黑白棋盤方格的分割

當 n 為偶數，$n\times n$ 棋盤方格的最佳分割線尋找？

1. 【對邊分割】

因為 n 為任意正偶數，所以將【問題一】的解決方式套用至此問題的研究，必然會複雜很多。我們想到可利用【等面積法】，如下(見圖 3-1)：

對於任意分割線 $\overleftrightarrow{P_0Q_0}$ (P_0 、Q_0 分別在 $\overline{A_1E}$ 、$\overline{C_1R}$ 上)皆可找到過 C_1 的等面積分割線段 $\overline{C_1T}$ ，使得梯形 $A_1P_0Q_0D_1$ 面積 = 梯形 $A_1TC_1D_1$ 面積。

比較兩條分割線所產生的圖形的變化，可得梯形 $A_1TC_1D_1$ 的白色面積減少，即：

$(\frac{B}{W})_{\overline{C_1T}} > (\frac{B}{W})_{\overline{P_0Q_0}}$ 所以，對邊之最佳分割線必過頂點 C_1 。

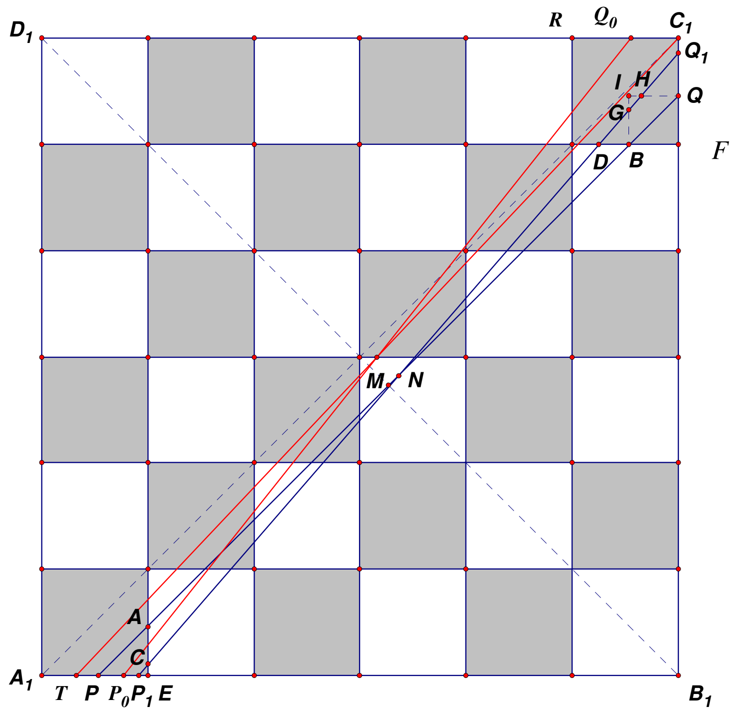
2. 【鄰邊分割】

我們同樣利用【問題二】的策略--- [步驟二]：等面積法。經過分析，我們須先證得下面命題為真:

【命題一】：如圖 3-1 為黑白相間的 $n \times n$ 棋盤($n \geq 2$ ， n 為偶數)當 n 等於 6 的情況下。其中： $\overline{PQ} // \overline{A_1C_1}$ ， M 為 $\overline{PQ}$ 的中點， P_1 在 $\overline{PE}$ 上， Q_1 在 $\overline{QC_1}$ 上，且 $\overline{PQ}$ 、$\overline{P_1Q_1}$ 交於 N 點，使得 ΔPQB_1 面積 = $\Delta P_1Q_1B_1$ 面積，若 $\overline{PQ}$ 、$\overline{P_1Q_1}$ 在黑色單位方格所截出的四邊形，以 $\overline{B_1D_1}$ 為界，依序一下、一上，其面積分別為 S_1 、S_1' ， S_2 、S_2' ， S_3 、S_3' ，則 $S_1 < S_1'$ 、$S_2 < S_2'$ 、$S_3 < S_3'$ 。

證明：

比較 S_3 、S_3'



（圖 3-1）

(1) 作 $\overline{QH} // \overline{PE}$ 交 $\overline{P_1Q_1}$ 於 H ，則

$\Delta NPP_1 \sim \Delta NQH$ 又

$\because \overline{NP} > \overline{MP} = \overline{MQ} > \overline{NQ}$

($\because$ M 為 $\overline{PQ}$ 的中點)

$\therefore \overline{PP_1} > \overline{QH}$

(2) 自 B 作 $\overline{BI} // \overline{FQ}$ 交 $\overline{QH}$ 延長線於 I $\Rightarrow$ 則 $IBFQ$ 為正方形， $\Delta BIQ \cong \Delta BFQ$

(3) $\because \overline{IH} // \overline{P_1E}$ 且 $\overline{IG} // \overline{CE}$ $\angle HIG = \angle P_1EC$ $\therefore \Delta IHG \sim \Delta EP_1C$

又 $\because \Delta PEA \cong \Delta BFQ \cong \Delta QIB$ 且 $\overline{PP_1} > \overline{QH}$

$\therefore \overline{P_1E} < \overline{IH}$ ，即 $\Delta EP_1C < \Delta IHG$

(4) $\because \Delta IHG > \Delta P_1EC$ ，令 $\Delta P_1EC + S_0 = \Delta IHG$ $\therefore S_0 < \Delta IHG$

且 $\because \Delta IHG \sim \Delta QHQ_1$ ，$\overline{IH} < \overline{HQ}$ $\therefore S_0 < \Delta IHG < \Delta HQQ_1$

(5) $\because S_3$ ＝四邊形 PP_1CA ＝四邊形 $QHGB + S_0$

且 $S_3' = \Delta Q_1HQ +$ 四邊形 $QHGB + \Delta DGB$ $\therefore S_3 < S_3'$

同理可證 $S_2 < S_2'$ ，$S_1 < S_1'$

同樣的方式，可將 6×6 棋盤方格推廣至 $n\times n$ (n 爲偶數)，得結論：鄰邊最佳分割線必落在斜率 $=1$ 的分割線上。

綜合 1.、2.可證得：當 n 爲偶數， $L_{n\times n}$ 必落在斜率＝1 的直線上。

同 $L_{2\times2}$ 與 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times2}$ 的尋求，我們將 $n\times n$ 座標化，解析如下：

$L_{n\times n}$ 與 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times n}$ 的尋求

黑色面積 $B = \dfrac{1}{4}n^2 + \dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{2}(1-a^2)\times n$

白色面積 $W = \dfrac{1}{4}n^2 + \dfrac{1}{2}a^2(n-1)$

$$\left(\frac{B}{W}\right) = \frac{\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1-a)^2\times n}{\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}a^2(n-1)} = \frac{\frac{1}{4}\left[n^2 + 2n - 2(1-a)^2 n\right]}{\frac{1}{4}n^2\left[n^2 + 2a^2(n-1)\right]} = \frac{-2na^2 + 4na + n^2}{2(n-1)a^2 + n^2}$$

令 $r = \dfrac{-2na^2 + 4na + n^2}{2(n-1)a^2 + n^2}$ $\Rightarrow \left[2(n-1)r + 2n\right]a^2 - 4na + n^2(r-1) = 0$

$$D = (-2n)^2 - \left[2(n-1)r + 2n\right]\times n^2(r-1) \geq 0 \quad \Rightarrow 2n^2 - \left[(n-1)r + n\right]\times n^2(r-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 2-\left[(n-1)r+n\right](r-1)\geq 0 \qquad \Rightarrow 2-\left[(n-1)r^2-(n-1)r+nr-n\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow -(n-1)r^2-r+n+2\geq 0 \qquad \Rightarrow (n-1)r^2+r-(n+2)\leq 0$$

當等式成立，得 $r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(n-1)(n+2)}}{2(n-1)}$

$\Rightarrow$ 不等式的解為 $\dfrac{-1-\sqrt{1+4(n-1)(n+2)}}{2(n-1)}\leq r\leq\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n-1)(n+2)}}{2(n-1)}$

可得 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times n}=\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n-1)(n+2)}}{2(n-1)}$ ；

此時 $a=-\dfrac{-4n}{2\left[2(n-1)r+2n\right]}=\dfrac{n}{(n-1)r+n}$

得 $L_{n\times n}$ (n 為偶數)： $y=x-\dfrac{n}{(n-1)r+n}$ ，

其中 $r=\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n-1)(n+2)}}{2(n-1)}$

(二) 奇數邊黑白棋盤方格的分割

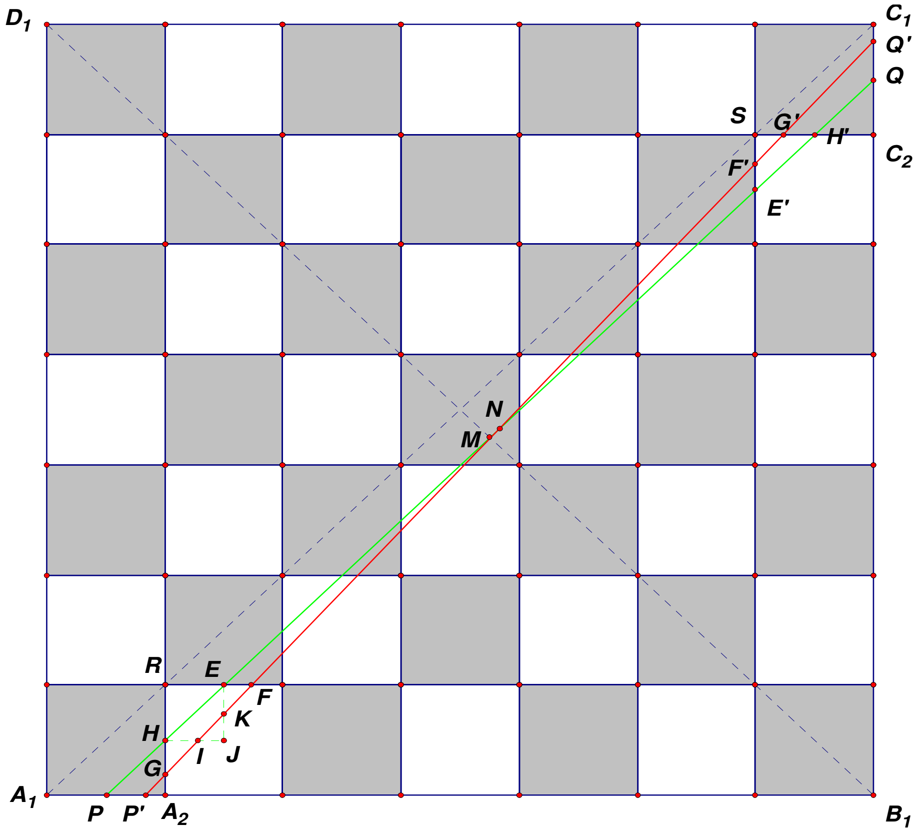
當 n 為奇數，$n\times n$ 棋盤方格最佳分割線的尋找？

與偶數邊的尋找模式相同，我們先提出以下命題：

【命題二】：

如圖 3-2 為黑白相間的 $n\times n$ 棋盤($n\geq 3$ 、 n 為奇數)當 n 等於 7 的情況下。

其中： $\overline{PQ}//\overline{A_1C_1}$ ， M 為 $\overline{PQ}$ 的中點， P_1 在 $\overline{PA_2}$ 上， Q' 在 $\overline{C_1Q}$ 上，且 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{P'Q'}$ 交於 N 點，使得 ΔB_1PQ 面積＝ $\Delta B_1P'Q'$ 面積。若 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{P'Q'}$ 在白色單位方格上所截出的四邊形，以 $\overline{B_1D_1}$ 為界，依序一下、一上，其面積分別為 S_1 、 S_1' 、 S_2 、 S_2' 、 S_3 、 S_3' ，則 $S_1>S_1'$ 、 $S_2>S_2'$ 、 $S_3>S_3'$ 。



（圖 3-2）

證明：

比較 S_3 、 $S_3^{'}$

(1) $S_3 - S_3^{'} = (\Delta RGF - \Delta RHE) - (\Delta SE^{'}H^{'} - \Delta SF^{'}G^{'})$

$= \Delta RGF + \Delta SF^{'}G^{'} - (\Delta RHE + \Delta SE^{'}H^{'})$

$= \Delta RGF + \Delta SF^{'}G^{'} - 2\Delta RHE$ ($\because \Delta RHE \cong \Delta SE^{'}H^{'}$)

(2)作 $\overline{HI} // \overline{G^{'}H^{'}}$ 交 $\overline{P^{'}Q^{'}}$ 於 I，則 $\Delta NHI \sim \Delta NH^{'}G^{'}$

又因爲 $\overline{NH} > \overline{MH} = MH^{'} > \overline{NH^{'}}$ ($\because$ M 爲 $\overline{PQ}$ 的中點)　所以 $\overline{HI} > \overline{G^{'}H^{'}}$

(3)以 $\overline{RE}$ 爲邊作正方形 $ERHJ$ $\Rightarrow$ 得正方形 $ERHJ$ 面積= $2\Delta RHE$ 面積

(4)因爲 $\overline{HJ} = \overline{RE} = \overline{SH'}$ ， $\overline{HI} > \overline{G'H'}$ ，所以 $\overline{IJ} < \overline{SG'}$ ($\because$ I 在 $\overline{HJ}$ 上)

(5) $\because$ $\Delta IJK \sim \Delta G'SF'$ ，　(令 $\overline{EJ}$ 交 $\overline{P'Q'}$ 於 K)

又 $\overline{IJ} < \overline{SG'}$ $\therefore$ $\Delta IJK < \Delta G'SF'$ 面積

(6)又 $\because$ $S_3 - S'_3 = \Delta RGF + \Delta SF'G' - 2\Delta RHE$

$= \Delta RGF + \Delta SF'G' -$ 正方形 $ERIJ > \Delta G'SF' - \Delta IJK > 0$

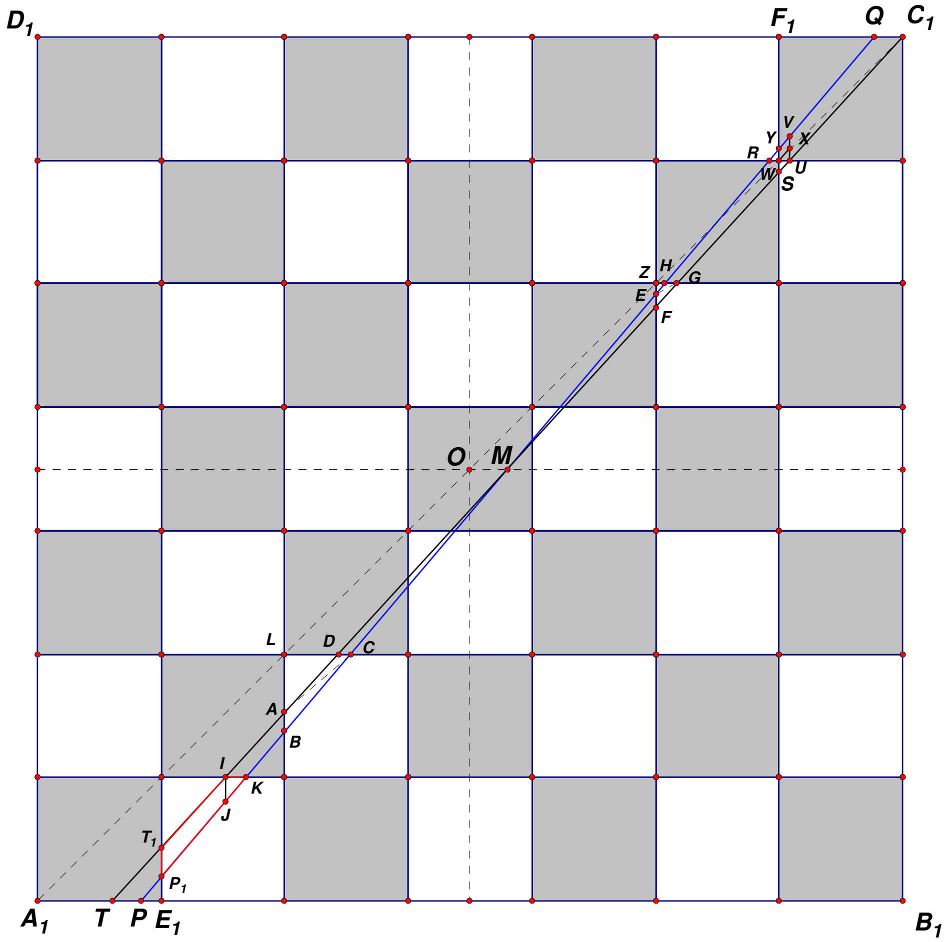
$\therefore S_3 > S'_3$ 同理可證明 $\Rightarrow S_1 > S'_1$, $S_2 > S'_2$

同樣的方式，可將 7×7 棋盤方格推廣至 $n \times n$ (n 爲奇數)，得結論：鄰邊最佳分割線必落在斜率 $=1$ 的分割線上。

接下來，我們尋求對邊的最佳分割線，方法如下：

1. 【對邊分割】

我們試著將 3×3 棋盤 $\left\{\frac{B}{W}\right\}$ 對邊最佳分割線的尋求，擴展到 $n \times n$ (n 爲奇數)。



（圖 3-3）

如圖 3-3，當 $n \times n$ 且 n 爲奇數時，我們以 $n=7$ 爲例：

若 $\overline{PQ}$ 爲對邊任意分割線，其中，P 、Q 分別爲 $\overline{A_1E_1}$ 、$\overline{F_1C_1}$ 上的動點，且交 7×7 棋盤方格中線於 M 點，則必可自 C_1 作 $\overline{C_1T}$ 過 M 點，使得梯形 A_1PQD_1 面積＝梯形 $A_1TC_1D_1$ 面積。

若以M 爲中心觀察ΔMTP和ΔMC_1Q內部白色面積的變化，依序一下、一上將區塊編號爲S_1、S_1'，S_2、S_2'，S_3、S_3'我們發現對邊分割如同3×3棋盤方格一般僅有兩種分割方式。

我們利用S_3、S_3'來說明第一種分割，S_2、S_2'說明第二種分割。

(1) 比較S_3'、S_3

I. 分別自I、U作平行$\overline{B_1C_1}$之直線交$\overline{PQ}$於J、V則$\Delta MIJ \cong \Delta MUV$

又$\because \Delta MIK \cong \Delta MUR$ $\quad \therefore \Delta IJK \cong \Delta UVR$

II. 自W作$\overline{WX}$ // $\overline{SU}$交$\overline{UV}$於X，則$\Delta WSU \cong \Delta UXW$

III. $\because$ $(\Delta RWY + \Delta WSU) = (\Delta RWY + \Delta WSU) < \Delta RUV < \Delta IJK <$四邊形$ITPK$面積 $\therefore$可得$S_3' < S_3$------------------------①

(2) 比較S_2、S_2'

I. 連接$\overline{EG}$、$\overline{AC}$ $\because \Delta MDC \cong \Delta MGH$ $\quad \therefore \overline{CD} = \overline{GH}$

II. $\because \Delta MAB \sim \Delta MFE$

又$\Delta MAB > \Delta MDC = \Delta MGH > \Delta AEF$ $\quad \therefore \overline{AB} > \overline{EF}$

III. 又$\overline{LA} > \overline{ZF} > \overline{ZE}$，$\overline{IR} > \overline{OH} > \overline{ZG}$

$$\therefore \Delta ADC = \frac{\overline{CD}\times\overline{LA}}{2} > \frac{\overline{HG}\times\overline{ZE}}{2} = \Delta EHG$$

$$\Delta ABC = \frac{\overline{AB}\times\overline{LC}}{2} > \frac{\overline{EF}\times\overline{ZG}}{2} = \Delta EFG$$

故四邊形$ABCD$面積$>$ $EFGH$ 面積 $\Rightarrow S_2' < S_2$------------------②

綜合①、②結果，當$n\times n$棋盤方格，n爲奇數時，皆可分爲此二種分割區域且

$(S_1 + S_2 + ... + S_m) > (S_1' + S_2' + ... + S_m')$

故對邊最佳分割線必過頂點C_1。

由上面結論以及【命題二】，我們即可證明下面結論：$n\times n$ (n 爲奇數)棋盤的最佳分割線落在斜率爲 1 的直線上。

利用此結論，我們解析如下：

當 n 爲奇數，$n\times n$ 棋盤方格 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times n}$ 的尋求？

$$B=(n+1)\times\frac{(n+1)}{2}\times\frac{1}{2}-n\cdot\frac{(1-a)^2}{2}=\frac{n^2+2n+1}{4}-\frac{n}{2}(1-2a+a^2)$$

$$=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}n+na-\frac{1}{2}na^2=-\frac{1}{2}na^2+na+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}$$

$$W=\left[(n-1)+2\right]\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{(n+1)(n-1)}{4}+\frac{a^2(n-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{4}+\frac{(n-1)}{2}\cdot a^2=\frac{(n-1)}{2}\cdot a^2+(\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{4})$$

$$(\frac{B}{W})=\frac{-2na^2+4na+(n^2+1)}{2(n-1)a^2+(n^2-1)}=r$$

$$\Rightarrow 2(n-1)\cdot ra^2+(n^2-1)r=-2na^2+4na+(n^2+1)$$

$$\Rightarrow\left[2(n-1)r+2n\right]a^2-4na+\left[(n^2-1)r-(n^2+1)\right]=0$$

$$D=16n^2-8\left[(n-1)r+n\right]\left[(n^2-1)r-(n^2+1)\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow 2n^2-\left[(n-1)r+n\right]\left[(n^2-1)r-(n^2+1)\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow 2n^2-\left[(n-1)(n^2-1)r^2-(n^2+1)(n-1)r+n(n^2-1)r-n(n^2+1)\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow 2n^2-\left\{(n-1)\left(n^2-1\right)r^2+\left[n\left(n^2-1\right)-\left(n^2+1\right)\left(n-1\right)\right]r-n\left(n^2+1\right)\right\}\geq 0$$

$$\Rightarrow\left(n-1\right)\left(n^2-1\right)r^2+\left(n-1\right)^2r-n\left(n^2+1\right)-2n^2\leq 0$$

$$\Rightarrow\left(n-1\right)\left(n^2-1\right)r^2+\left(n-1\right)^2r-n\left(n+1\right)^2\leq 0$$

$$\therefore\ \frac{-\left(n-1\right)-\sqrt{4n^4+12n^3+13n^2+2n+1}}{2\left(n^2-1\right)}\leq r\leq\frac{-\left(n-1\right)+\sqrt{4n^4+12n^3+13n^2+2n+1}}{2\left(n^2-1\right)}$$

即 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times n}=\dfrac{-(n-1)+\sqrt{4n^4+12n^3+13n^2+2n+1}}{2(n^2-1)}$，$n$ 爲奇數

此時 $a=-\dfrac{-4n}{2[2(n-1)r+2n]}=\dfrac{n}{(n-1)r+n}$

可得最佳分割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ ： $y=x-\dfrac{n}{(n-1)r+n}$

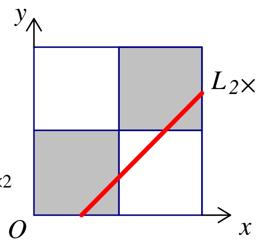
其中 $r=\dfrac{-(n-1)+\sqrt{4n^4+12n^3+13n^2+2n+1}}{2(n^2-1)}$

[問題四]： $n\times n$ 最佳分割線的推廣--- $L_{n\times m}$ 與 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times m}$ 的尋求？

由於 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{m\times n}=\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{n\times m}$ 。所以，我們只須討論 $n\times m$ (m>n)的分割即可。

又 $n\times m$ 可視為由一正方形 nxn 與一長方形 $n\times(m-n)$ 拼接而成。因此，以下我們試著將前面的研究結果應用到 [問題四]

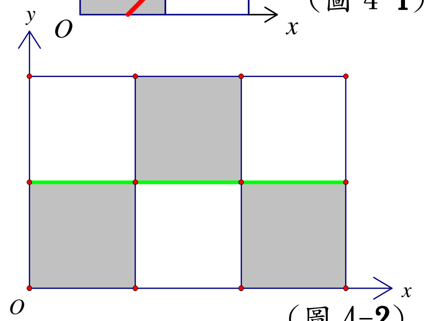
$L_{2\times2}$ 的應用:



(圖 4-1)

1. 由 [問題一]可得 2x2 最佳分割線 $L_{2\times2}$ 的位置及 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times2}$

$L_{2\times2}: y=x-\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times2}=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$



(圖 4-2)

2. 2×3 ： 顯然可得， $L_{2\times3}: y=1$ ， $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times3}=2$

3. 2×4 ： 可視為兩個 2×2 拼接而成。

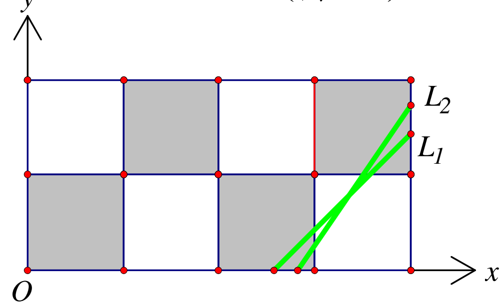
由 2×2 的研究結果，可知： $L_{2\times2}$: $y=x-\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$

本想 $L_{2\times4}$ 只是將 $L_{2\times2}$ 向右平移 2 單位即可得到，

但結果是否定的。我們比較 L_1 與 L_2 兩分割線

在 2×2 棋盤上所形成的 $(\dfrac{B}{W})_{2\times2}$ 值，(其中 L_1 、

L_2 為通過兩黑色正方形的鄰邊分割)：



(圖 4-3)

① w_1、w_2 分別為 L_1、L_2 、在 2×2 棋盤上所分割出大塊區域的白色面積。

r_1 、 r_2 分別表示 L_1 、 L_2 在 2×2 的分割值，即 $r_1=(\dfrac{B}{W})_{L_1}$ ，$r_2=(\dfrac{B}{W})_{L_2}$ 。

② 假設 $r_1>r_2>1$

比較 $(\frac{B}{W})_{L_1}-(\frac{B}{W})_{L_2}=\frac{k+r_1w_1}{k+w_1}-\frac{k+r_2w_2}{k+w_2}$ (其中 $k=2$)

$$=\frac{k^2+kw_2+kr_1w_1+r_1w_1w_2-k^2-kr_2w_2-kw_1-r_2w_1w_2}{(k+w_1)(k+w_2)}$$

$$=\frac{k(w_2-w_1)+k(r_1w_1-r_2w_2)+w_1w_2(r_1-r_2)}{(k+w_1)(k+w_2)}$$

$$=\frac{k[w_1(r_1-1)-w_2(r_2-1)]+w_1w_2(r_1-r_2)}{(k+w_1)(k+w_2)}$$

從上面可得知：

(i) $w_1\geq w_2$，可確定 2x4 的 $(\frac{B}{W})_{L_1}>(\frac{B}{W})_{L_2}$ 。

(ii) 當 $w_1<w_2$，不能判斷出 2x4 的 $(\frac{B}{W})_{L_1}$ 與 $(\frac{B}{W})_{L_2}$ 的大小。

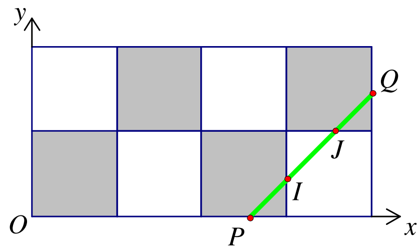
即 $L_{2\times4}$ 不能確定是否可由 $L_{2\times2}$ 向右平移 2 單位產生。

又對於 2×2 的等面積分割，其 $(\frac{B}{W})$ 最大值必產生於斜率 1 之直線上。

所以，我們只要考慮斜率 1 通過兩黑色正方形的鄰邊分割即可。

2×4的 $L_{2\times4}$ 與 $\{\frac{B}{W}\}_L$ 尋求？

同[問題一]產生 $L_{2\times2}$ 的方法：



(圖 4-4)

令 $\overleftrightarrow{PQ}: y=x+k$

$\Rightarrow P(-k,0)\ I(3,3+k)\ J(1-k,1)\ Q(4,4+k)$

$\therefore$ B： $4-\frac{(3+k)^2}{2}\times2=-k^2-6k-5$ $\qquad W:3+\frac{[(1-k)-3]^2}{2}=\frac{1}{2}k^2-2k+5$

令 $\frac{B}{W}=\frac{-k^2-6k-5}{\frac{1}{2}k^2+2k+5}=r \qquad \Rightarrow\left(\frac{1}{2}r+1\right)k^2+(2r+6)k+5r+5=0$

$\because k$ 必須存在

$\therefore (2r+6)^2-4\left(\frac{1}{2}r+1\right)(5r+5)\geq0 \qquad \Rightarrow (r+3)^2-\left(\frac{1}{2}r+1\right)(5r+5)\geq0$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}r^2-\frac{3}{2}r+4\geq0 \qquad \Rightarrow 3r^2+3r-8\leq0$

當 $3r^2+3r-8=0$ $\qquad$ 得 $r=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{6}$

即 $\frac{-3-\sqrt{105}}{6}\leq r\leq\frac{-3+\sqrt{105}}{6}$ $\qquad \therefore$ r 最大值 $=\frac{-3+\sqrt{105}}{6}$

即 $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times4}=\dfrac{-3+\sqrt{105}}{6}$ ， $L_{2\times4}: y=x+k$:

此時 $k=-\dfrac{2r+6}{2\left(\dfrac{1}{2}r+1\right)}=-\dfrac{2r+6}{r+2}=-\dfrac{2\left(\dfrac{-3+\sqrt{105}}{6}\right)+6}{\dfrac{-3+\sqrt{105}}{6}+2}=\dfrac{5-\sqrt{105}}{2}$

4. 2×5 ： 顯然可得，$L_{2\times5}: y=1$ ， $\{\dfrac{B}{W}\}_{2\times5}=1.5$

∵ 若考慮圖中 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之分割，

可得知 $(\dfrac{B}{W})_{\overleftrightarrow{PQ}}<\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times4}=\dfrac{-3+\sqrt{105}}{6}\approx1.21$

$\therefore\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times5}=1.5$

5. 2×6 ： $L_{2\times6}$ 必通過中央 2×2 兩黑色正方形 。

又[過 $\overline{DE}$ 、$\overline{GF}$ 的分割]可看成 2x4（矩形 OHDC）的分割，由[問題一]可得：最佳分割線必過頂點 D。所以只需考慮過 $\overline{GF}$ 、$\overline{DI}$ 分割線。但此條件下的分割線與 2×4 的分割比較會多出白色 ΔDJQ ，所以 $L_{2\times6}$ 與 $L_{2\times4}$ 位置不同。

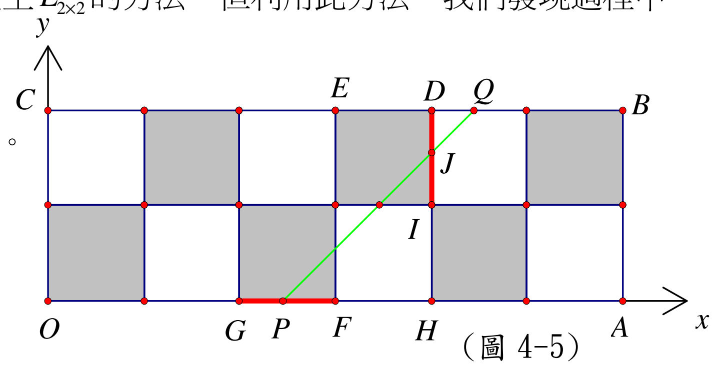
接著我們同樣利用[問題一]產生 $L_{2\times2}$ 的方法，但利用此方法，我們發現過程中，所要求的 $L_{2\times6}$ 存在兩個變數：

即 ① 斜率未知 ② 定點未知。

我們找不到 $L_{2\times6}$ 。

但是可確定

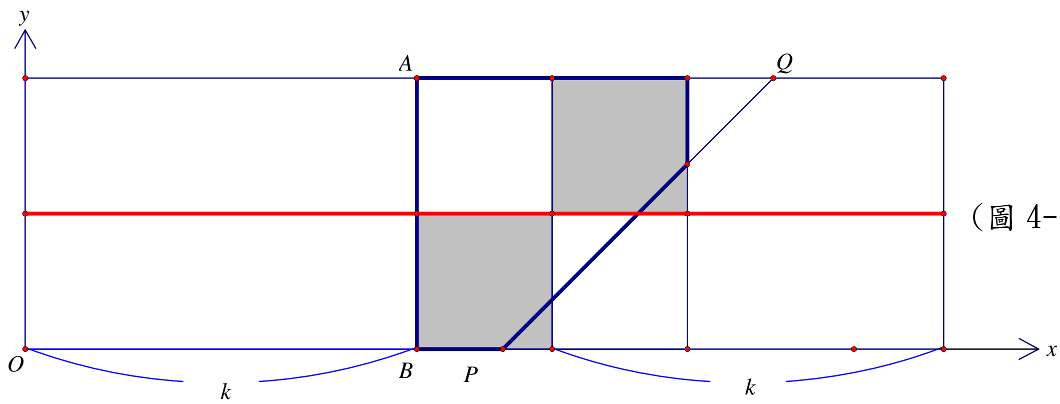
$L_{2\times6}$ 必通過(圖 4-5) $\overline{GF}$ ，$\overline{DI}$ 。



（圖 4-5）

6. $2\times m$ ：從上式 1~5 的推論中，我們發現最佳分割線必存在於三種情況：

[case1]： $L_{2\times(2k+1)}: y=1,\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times(2k+1)}=\dfrac{k+1}{k}$ 其中 k 爲正整數



（圖 4-6）

證明 ： 如圖，考慮兩種分割線:

① $\overleftrightarrow{PQ}:(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}}=\frac{k+b_1}{k+w_1}$

其中： w_1 表梯形 $ABPQ$ 內的白色面積

b_1 表梯形 $ABPQ$ 內的黑色面積 ，顯然 $1<w_1<b_1<2$

② $y=1:(\frac{B}{W})_{y=1}=\frac{k+1}{k}$

可得 $\frac{k+1}{k}-\frac{k+b_1}{k+w_1}=\frac{k^2+kw_1+k+w_1-k^2-kb_1}{k(k+w_1)}=\frac{k(w_1+1-b_1)}{k(k+w_1)}>0$

$(\because 1+w_1>b_1)$ $\therefore (\frac{B}{W})_{y=1}>(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}}$

即 $L_{2\times(2k+1)}:y=1$ ， $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times(2k+1)}=\frac{k+1}{k}$

[case2]： $L_{2\times4}:y=x+k\left(\text{其中 } k=\frac{5-\sqrt{105}}{2}\right)$ ， $\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times4}=\frac{-3+\sqrt{105}}{6}$

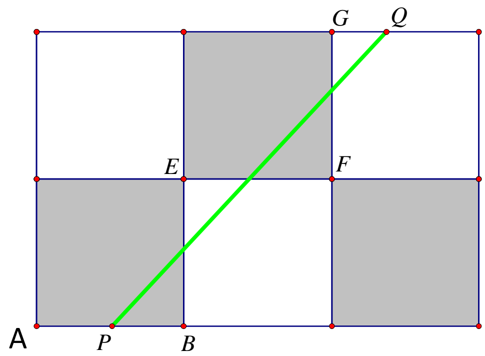
[case3]： $L_{2\times2k}$ 必通過正中央 2×2 正方形，k＞2 且 k 爲正整數。以下我們以 k 爲奇數的情況加以證明，若 k 爲偶數只需考慮其相對稱位置即可。

證明： ① 如圖，若 $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲通過 $\overline{AB}$，$\overline{FG}$ 的最佳分割線，

假設梯形內白色面積 $=w$ ，

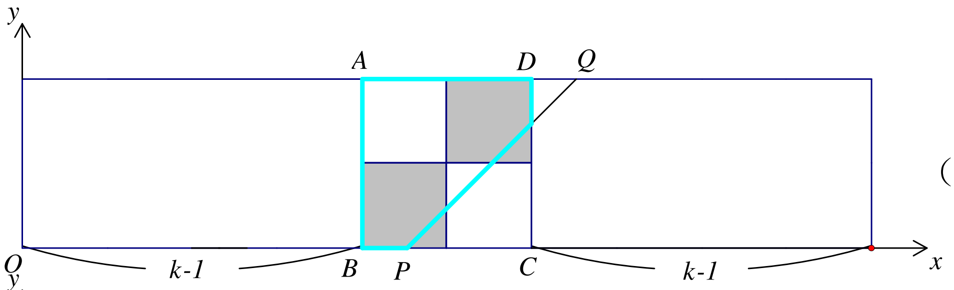
黑色面積 $=rw$ ，

顯然 $1<r<2$

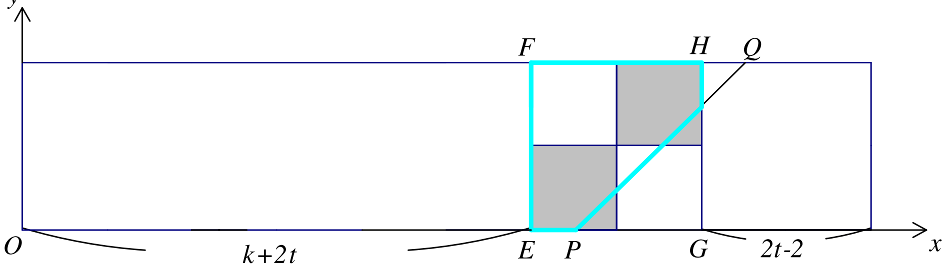


（圖 4-7）

② 比較（圖 4-8）、（圖 4-9）之$(\frac{B}{W})$值



（圖 4-8）



（圖 4-9）

$$\frac{k-1+rw}{k-1+w}-\frac{k+2t+rw}{k+2t+w}$$

$$=\frac{k(k+2t)+kw-(k+2t)-w+krw-rw^2+rw(k+2t)+rw^2}{(k-1+w)(k+2t+w)}-$$

$$\frac{k(k+2t)-krw+(k+2t)+rw-w(k+2t)-rw^2}{(k-1+w)(k+2t+w)}$$

$$=\frac{kw-w+2trw+rw-kw-2tw}{(k-1+w)(k+2t+w)}=\frac{w(r-1)+2tw(r-1)}{(k-1+w)(k+2t+w)}$$

$$=\frac{w(r-1)(1+2t)}{(k-1+w)(k+2t+w)}>0$$

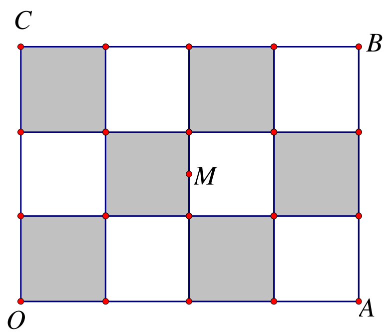
即$L_{2\times 2k}$必通過正中央2×2正方形

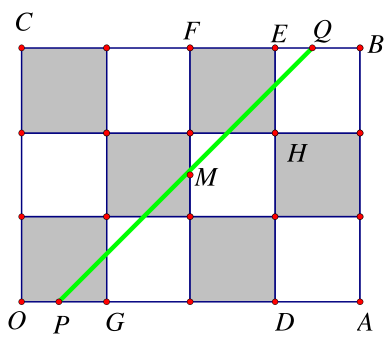
$\boxed{L_{3\times3}\text{的應用}}$:

1. 由 [問題二]可得 3x3 最佳分割線$L_{3\times3}$的位置及$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{3\times3}$

$L_{3\times3}$ ： $y=x-\dfrac{3}{2r+3}$ ，（其中$r=\dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$） ， $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{3\times3}=\dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$ 。

2. 3×4 ：





（圖 4-10）　　　　　　　　　　　　　　（圖 4-11）

對於 3×4 的棋盤，可視爲 3×3 與 3×1 拼接。但由 3×3 得到的 $L_{3\times3}$，我們發現 3×4 中心點位於 L 的右下方。也就是直線 L 所分割出的左上半區域，其面積並不到 3×4 的一半。因此，我們選擇較靠近 L 線，且能滿足所分割出的左上半面積不小於 3×4 的一半。基於此想法，所以考慮過 3×4 中心點 M 的分割，分析如下：

(1) 過 $\overline{OG}$、$\overline{EF}$ 的分割：若以 3×3 (正方形 $ODEC$)的分割來看，由[問題二]的結論，可知過 M 的分割線其 $(\frac{B}{W})$ 最大值產生於 3×3 的頂點 (E)，即 $\overleftrightarrow{QM}$ 爲過 M、$\overline{EF}$ 分割中的最佳分割線。

(2) 由(1)可知過中心 M 的最佳分割線必產生於過 $\overline{EH}$ 的直線。

但是 3x4 的最佳分割是否一定過中心點?以下是我們的比較證明:

證明: ① 對於任意過 M、$\overleftrightarrow{EF}$ 的一條分割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 我們皆可作出一條分割線

$\overleftrightarrow{P'Q'} // \overleftrightarrow{PQ}$（其中 P' 在 $\overline{PG}$ 上）

② 作出 $\overline{IJ} // \overline{MN} // \overline{TU} // \overline{PP'}$ (如圖 4-12)

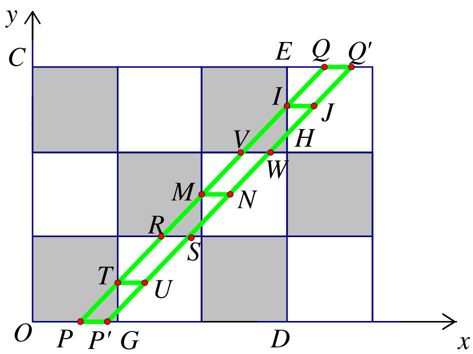
③ 比較平行四邊形 $PQQ'P'$ 內截出的小平四邊形，

$\because M$ 爲中心點

$\therefore$ ① 平行四邊形 $MNWV \cong$ 平行四邊形 $RSNM$

② 平行四邊形 $VWJI \cong$ 平行四邊形 $TUSR$

③ 平行四邊形 $IJQ'Q \cong$ 平行四邊形 $PP'UT$



（圖 4-12）

④ 由①②③可比較出：在平行四邊形 $PQQ'P'$ 內白色面積＞黑色面積。

可推得 $(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}} > (\frac{B}{W})_{\overline{P'Q'}}$　即 3×4 最佳分割線產生於過中心點 M。

$L_{3\times4}$ 的推導：

令 $\overleftrightarrow{PQ}: y=m(x-2)+\frac{3}{2} \quad \Rightarrow P(-\frac{3}{2m}+2,0)$ ， $A(1,-m+\frac{3}{2})$, $B(-\frac{1}{2m}+2,1)$,

$C(\frac{1}{2m}+2,2)$, $D(3,m+\frac{3}{2})$

$$B:4-\frac{\left[1-(-\frac{3}{2m}+2)\right](-m+\frac{3}{2})}{2}-\frac{\left[2-(-\frac{1}{2m}+2)\right]\times\frac{1}{2}}{2}-\frac{\left[3-(\frac{1}{2m}+2)\right]\left[(m+\frac{3}{2})-2\right]}{2}$$

$$=4-\frac{(\frac{3}{2m}-1)(-m+\frac{3}{2})}{2}-\frac{\frac{1}{2m}\times\frac{1}{2}}{2}-\frac{(1-\frac{1}{2m})(m-\frac{1}{2})}{2}$$

$$=4-\frac{-\frac{3}{2}+\frac{9}{4m}+m-\frac{3}{2}}{2}-\frac{\frac{1}{4m}}{2}-\frac{m-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4m}}{2}$$

$$=4-\frac{\frac{9}{4m}-3+m+\frac{1}{4m}+\frac{1}{4m}+m-1}{2}=4-\frac{2m+\frac{11}{4m}-4}{2}$$

$$=\frac{-2m-\frac{11}{4m}+12}{2}=\frac{-8m^2+48m-11}{8m}$$

$$W:\ 2+\frac{\left[1-(-m+\frac{3}{2})\right]\left[(-\frac{1}{2m}+2)-1\right]}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2m}+2-2)}{2}+\frac{\left[3-(m+\frac{3}{2})\right]\left[(\frac{3}{2m}+2)-3\right]}{2}$$

$$=2+\frac{(m-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2m}+1)}{2}+\frac{\frac{1}{4m}}{2}+\frac{(\frac{3}{2}-m)(\frac{3}{2m}-1)}{2}$$

$$=2+\frac{-\frac{1}{2}+m+\frac{1}{4m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4m}+\frac{9}{4m}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+m}{2}$$

$$=2+\frac{2m+\frac{11}{4m}-4}{2}=\frac{2m+\frac{11}{4m}}{2}=\frac{8m^2+11}{8m}$$

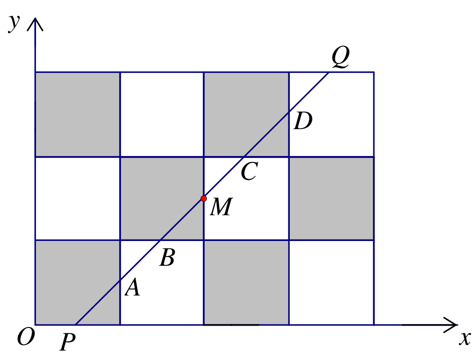
令 $r=(\frac{B}{W})_{\overline{PQ}}=\frac{-8m^2+48m-11}{8m^2+11} \Rightarrow (8r+8)m^2-48m+11r+11=0$

$\because m$ 有解

$\therefore (-48)^2-4(8r+8)(11r+11)\geq 0 \Rightarrow 72-11(r+1)^2\geq 0$

$\Rightarrow (r+1)^2\leq\frac{72}{11} \Rightarrow -\frac{6\sqrt{22}}{11}\leq r+1\leq\frac{6\sqrt{22}}{11}$

$\Rightarrow -1-\frac{6\sqrt{22}}{11}\leq r\leq -1+\frac{6\sqrt{22}}{11}$



（圖 4-13）

得 r 最大值 $=-1+\dfrac{6\sqrt{22}}{11}$

即 $L_{3\times3}$ ： $y=\dfrac{3}{r+1}(x-2)+\dfrac{3}{2}$ ，(其中 $r=-1+\dfrac{6\sqrt{22}}{11}$) ， $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{3\times4}=-1+\dfrac{6\sqrt{22}}{11}$ 。

2. 3×5：可視爲3×2與3×3的拼接，由[問題二]可得知：最佳分割線其斜率=1。

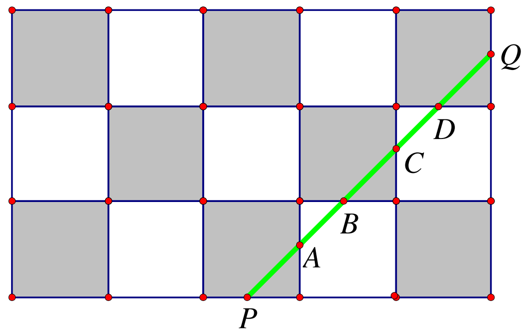
推導如下：

令 $\overrightarrow{PQ}: y=x+k$

$\Rightarrow p(-k,0), A(3,3+k), B(1-k,1), C(4,4+k), D(2-k,2), Q(5,5+k)$

$B: 7-\dfrac{(3+k)^2}{2}\times3=7-\dfrac{3k^2+18k+27}{2}=\dfrac{-3k^2-18k-13}{2}$

$W: 5+\dfrac{[1-(3+k)]}{2}\times2=5+\dfrac{k^2+4k+4}{2}\times2=k^2+4k+9$



(圖 4-14)

令 $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{W}}=\dfrac{-3k^2-18k-B}{2k^2+8k+18}=r$

$\Rightarrow (2r+3)k^2+(8r+18)k+18r+13=0$

$\because k$ 存在

$\therefore (8\mathrm{r}+18)^2-4(2r+3)(18r+13)\geq0 \qquad \Rightarrow (4r+9)^2-(2r+3)(18r+13)\geq0$

$\Rightarrow 16r^2+72r+81-36r^2-80r-39\geq0 \qquad \Rightarrow -20r^2-8r+42\geq0$

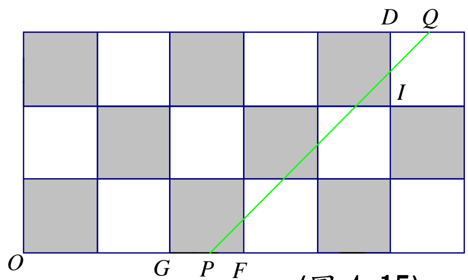
$\Rightarrow 10r^2+4r-21\leq0$

當 $10r^2+4r-21=0 \qquad \Rightarrow r=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+210}}{10}=\dfrac{-2\pm\sqrt{214}}{10}$

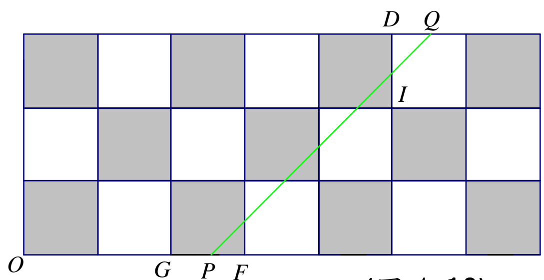
$\dfrac{-2-\sqrt{214}}{10}\leq r\leq\dfrac{-2+\sqrt{214}}{10} \qquad r$ 最大值 $=\dfrac{-2+\sqrt{214}}{10}$

3. 3×6：面臨與2×6的分割情況，我們找不到解決的方式。但仍可確定 $L_{3\times6}$ 必過

$\overline{GF}$ 、 $\overline{DI}$ 。(如圖 4-15)



(圖 4-15)



(圖 4-16)

4. 3×7 同 3×6 我們只能確定 $L_{3\times7}$ 必過 $\overline{GF}$ 、 $\overline{DI}$ 。(如圖 4-16)

5. 3×8 ：顯然此對稱圖形 $L_{3\times8}$ 可利用 $L_{3\times4}$ 向右平移 2 單位得到。

接下去，會產生類似情況。

6. $3\times m(m\geq4)$ ：綜合上式 1~5，共可得 $3\times m$ 的最佳分割線分成三種情況：

1.<case1>特殊型 3×4 、 3×5 可求得最佳分割線與最大值。

2.<case2> $m=4k$ ：其最佳分割線可通過 $L_{3\times4}$ 向右平移 $2(k-1)$ 單位得到。

3.<case3>：不屬於<case1>、<case2>，其最佳分割線，我們找不出解決的方法。

只能確定最佳分割線必會穿越哪兩個黑色正方形。

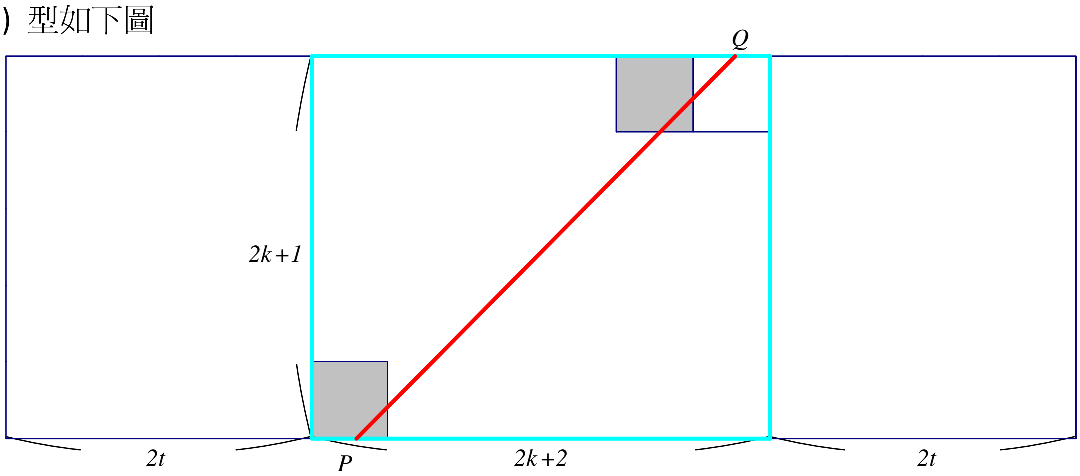
從上面的研究，我們發現 $n\times m$ 棋盤的分割：

*當最佳分割線的**斜率或必通過的定點**，兩者能知其一。則我們可透過前面的方法，求得 $L_{n\times m}$ 及 $\left\{\frac{W}{B}\right\}_{n\times m}$ 。*

至於在何種情況，可以讓我們確定最佳分割線的斜率或定點？

(1) 當 $m=n+2$ ，則可確定 $L_{n\times m}$ 的斜率 $=1$

(2) 型如下圖



即當 $n=2k+1$ ，則 $m=2k+2+4t=(2k+1)+(4t+1)$ (圖 4-17)

此時中心點爲 $(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$

對於此兩種條件，我們皆可利用座標化推導出$L_{n\times m}$。

伍、結論：

根據研究中逐一解決的結果，我們有以下幾點結論：

一、　對於$n\times n$黑白相間棋盤，當我們找尋對邊分割的最佳分割線時，分割線必定通過對角線的頂點。

二、　對於$n\times n$黑白相間棋盤

1. 當n為偶數，

(1) 當n ＝2 時，我們求得最佳分割線為鄰邊分割時斜率為 1 的直線：

$$y = x - \frac{\sqrt{17}-3}{2}$$；且此最佳分割線的$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{2\times 2} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

(2) 當我們推廣至一般化$n\times n$時，所得之最佳分割線亦為鄰邊分割時斜率為 1 之直線：$y = x - \dfrac{n}{(n-1)r+n}$；且得最佳分割線的

$$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{n\times n} = \frac{-1+\sqrt{1+4(n-1)(n+2)}}{2(n-1)}$$

2. 當n為奇數

(1) 當n ＝3 時，我們求得最佳分割線為鄰邊分割時斜率為 1 的直線：

$$y = x - \frac{3}{2r+3}$$其中$r = \dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$；且此最佳分割線的$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{3\times 3} = \dfrac{-1+\sqrt{193}}{8}$

(2) 當我們推廣至一般化$n\times n$時，所得之最佳分割線亦為鄰邊分割時斜率為 1 之直線：$y = x - \dfrac{1}{(n-1)r+n}$；且得最佳分割線的

$$\left\{\frac{B}{W}\right\}_{n\times n} = \frac{-(n-1)+\sqrt{4n^4+12n^3+13n^2+2n+1}}{2(n^2-1)}$$

三、對於$n\times m$黑白相間棋盤

1. 當$n=2$，$m=2k+1$，則：

① $L_{2\times(2k+1)}: y=1$ ② $\left\{\dfrac{B}{W}\right\}_{2\times(2k+1)} = \dfrac{k+1}{k}$

2. 當 $m=n+2$ ，則 $L_{n\times(n+2)}$ 之斜率=1

3. 當 $n=2k+1$ ， $m=(2k+1)+(4t+1)$ ，則： $L_{n\times m}$ 必過 $n\times m$ 中心點 $(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$

4. 除了上述 1~3 的條件，其餘我們皆導不出最佳分割線的方程式，只能確定其大概位置。

陸、參考文獻

1. 2008,青少年數學國際城市邀請賽,個人數學競賽試題
2. 國中數學第二冊第二章(2007). 直角座標平面. 南一出版社.
3. 國中數學第二冊第四章(2007). 函數及其圖形. 南一出版社.
4. 國中數學第三冊第四章(2007). 一元二次方程式. 南一出版社.
5. 國中數學第四冊第二章(2007). 簡單幾何圖形. 南一出版社.
6. 國中數學第五冊第三章(2007). 幾何證明. 南一出版社.
7. 國中數學第六冊第一章(2007). 二次函數及其圖形. 南一出版社.

【評語】030416

針對〝尋找 N×N 黑白棋盤的最佳分割線及黑白面積比值之最大值〞的相關問題，做了有系統地整理與論述，也得到一般化的推廣結果。雖然對於 N×M（N≠M）黑白相間棋盤的問題尚無法獲致完整的解答，但仍不失為一篇值得嘉許的好作品。