中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030415

棋盤切割

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 蘇子軒	洪明瞭

關鍵詞：等差級數、不等式、整數分析

作品名稱：棋盤切割

摘　要

本作品研究並延伸建中通訊解題第五十九期一道題目：將一個8×8的變色棋盤分割成n個矩形，求其最大n值與其實際切割方法。我利用不等式、等差級數、函數等知識求得結果，並推展至一般的正方形與長方形棋盤，試著以方程解與棋盤簡化等方式求得最大n值，且計算出實際切割數的上界，而在最後歸納出正方形與長方形棋盤的通用切割方法。

壹、研究動機

我在建中通訊解題第五十九期看到一道棋盤切割的題目，覺得很有趣。希望能利用所學的第二冊第四章函數、第五章不等式、第四冊第一章等差級數等知識解決問題，找出切割的方法，並改變題目條件，觀察其中規律。

貳、研究目的

一、正方形棋盤

(一) 最大切割值的探討

(二) 實際切割數的研究

(三) 實際切割的具體步驟

二、長方形棋盤

(一) 最大切割值的探討

(二) 實際切割數的研究

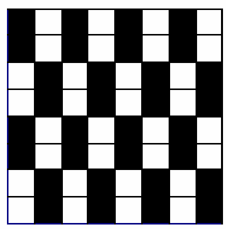
(三) 實際切割的具體步驟

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Visual Basic Express 等

肆、研究過程與方法

一、原題



如圖，將一個8×8的變色棋盤分割成n個矩形，規定不能破壞任何一格，而且必須滿足下列條件：

(一)每一個矩形中白格與黑格的個數相等；

(二)若a_i為第 i 個矩形的面積，則$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_n$。

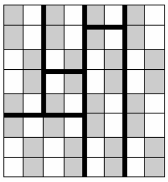
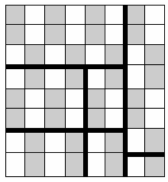
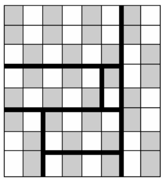
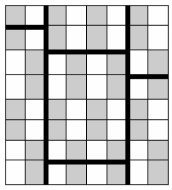
試問：滿足上述分割的最大可能 n 值爲何？同時畫出此 n 值的所有分割。

首先，觀察題目的兩個條件，可以發現以下兩件事實：

(一) 每一個矩形中白格與黑格的個數相等：代表矩形面積一定爲偶數。

(二) 若 a_i 爲第 i 個矩形的面積，則 $a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_n$ ，又棋盤面積爲 $8 \times 8 = 64$ ：代表 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 64$ 。我初步以等差級數來求得 n 的上界；觀察首項爲 2、末項爲 16、公差爲 2 的等差級數： $2+4+6+8+10+12+14+16=72>64$ 。因爲 $n=8$ 時最小可能值 72 已大於棋盤面積，所以 $n<8$ 。

於是，嘗試 $n=7$ 的情況，結果找到了以下 4 種解(數列中的每項代表由小到大矩形的面積，並將相同數列歸爲同解)：

 (2,4,6,10,12,14,16)	 (2,4,6,8,12,14,18)
 (2,4,6,8,10,16,18)	 (2,4,6,8,10,14,20)

所以，8×8 棋盤最大可能分割矩形數是 $n=7$。而在研究過程中就是想找尋一般棋盤中 n 的最大值，所以後文的 n 都直接代表最大值。

解出原題後，我想將 8×8 棋盤推廣至一般的正方形棋盤，進行最大 n 值與實際切割數上界的研究。

二、$r \times r$ 正方形棋盤的 n 值猜想

首先，若 r 爲奇數，則 $r \times r$ 亦爲奇數，此時棋盤的黑格與白格數本身就不相等，所以，r 必須爲偶數。接下來，我仿照 8×8 棋盤找尋 n 值的方式，先求得 $r \times r$ 棋盤的 n 值上界。

假設 g 爲不符合條件的最小切割值，得：

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_g > r^2$$

令 $\frac{a_i}{2} = s_i$ ，即 $$s_1 + s_2 + \cdots + s_g > \frac{r^2}{2} \qquad \text{-------------------------------} \quad \textbf{(*)}$$

當 $\frac{g(1+g)}{2} > \frac{r^2}{2}$ 時，**(*)** 自動成立，

（因 $s_1 + s_2 + \cdots + s_g \geq 1 + 2 + \cdots + g = \frac{g(g+1)}{2}$ ）

又 $$g^2+g-r^2>0$$

$$g<\frac{-1-\sqrt{1+4r^2}}{2}(負不合)或g>\frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2}$$

$$g>\frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2}>\frac{-1+\sqrt{4r^2}}{2}=\frac{-1+2r}{2}$$

$$g>r-\frac{1}{2}$$

$$\therefore g\geq r$$

上面推導告訴我們，當 $g\geq r$，就不可能達成切割的原則，換句話說，$r\times r$ 棋盤可以切割成 n 個矩形的 n 值之上界爲 $n\leq r-1$。其中因爲 $\sqrt{4r^2}$ 在 r 值越大時越接近 $\sqrt{1+4r^2}$，且在 r 值最小時沒有錯誤產生，所以可以省略。於是我猜想：

「在 $r\times r$ 棋盤中，矩形切割的 n 之最大值應爲 $n=r-1$ 。」

以下我要進一步來推導此一猜測是正確的。

三、2×2 棋盤至 16×16 棋盤的實際 n 值

得到 n 的上界並猜想 $n=r-1$ 後，我就開始從 2×2 棋盤逐漸擴大研究到 16×16 棋盤，方法如下：

(一)列出不定方程 $a_1+a_2+\cdots+a_{r-1}=r^2$，因爲每個矩形面積爲偶數，可令 $\frac{a_i}{2}=s_i$ $,i=1,2,...,r-1$，所以，$s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}=\frac{r^2}{2}$。

(二)利用 Visual Basic 程式解此方程。

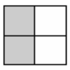
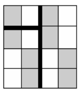
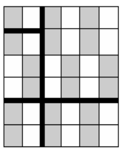
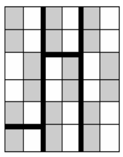
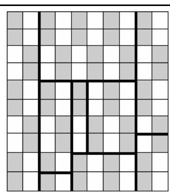
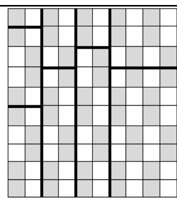
不定方程 $s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}=\frac{r^2}{2}$ 的解列表如下：[以($s_1,s_2,s_3,...,s_{r-1}$)表示方程解。]

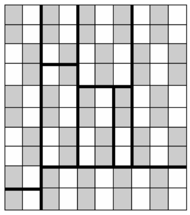
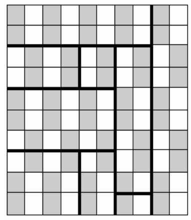
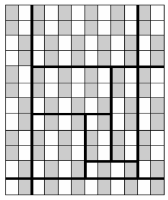
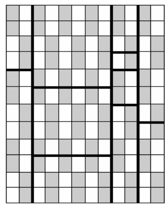
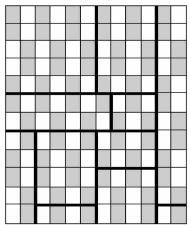
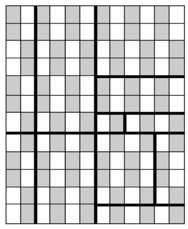
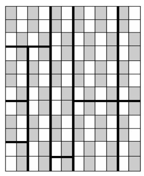
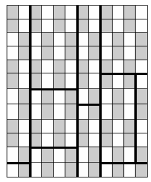
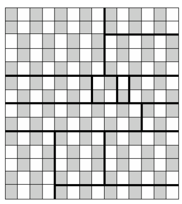
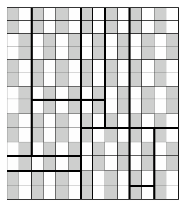
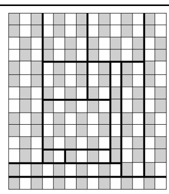
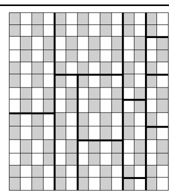
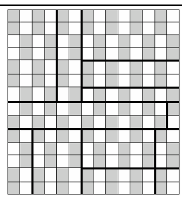
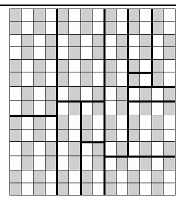
棋盤	方程解
2×2	(2)
4×4	(1,2,5)
	(1,3,4)
6×6	(1,2,3,4,8)
	(1,2,3,5,7)
	(1,2,4,5,6)
8×8	(1,2,3,4,5,6,11)
	(1,2,3,4,5,7,10)
	(1,2,3,4,5,8,9)

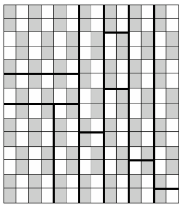
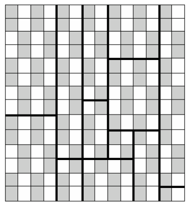
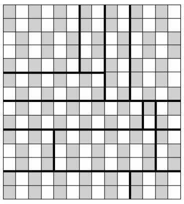
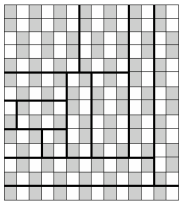
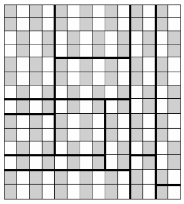
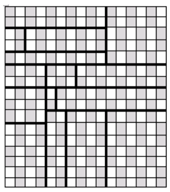
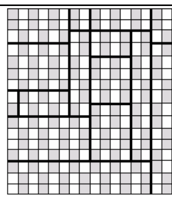
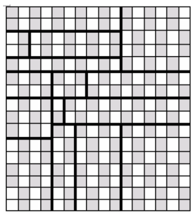
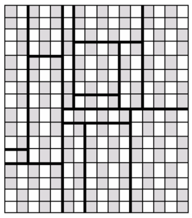
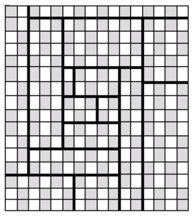
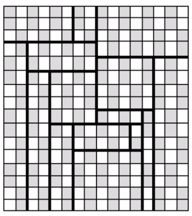
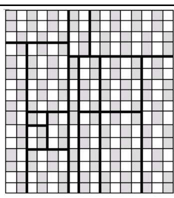
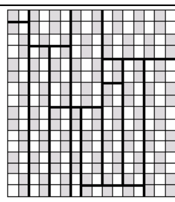
	(1,2,3,4,6,7,9)
	(1,2,3,5,6,7,8)
10×10	(1,2,3,4,5,6,7,8,14)
	(1,2,3,4,5,6,7,9,13,)
	(1,2,3,4,5,6,7,10,12)
	(1,2,3,4,5,6,8,9,12)
	(1,2,3,4,5,6,8,10,11)
	(1,2,3,4,5,7,8,9,11)
	(1,2,3,4,6,7,8,9,10)
12×12	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,16)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,13,14)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,15)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,13)
	(1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,14)
	(1,2,3,4,5,6,7,9,10,12,13)
	(1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13)
	(1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12)
14×14	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,20)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,14,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,15,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,15,16)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,16)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,14,16)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,16)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,14,15)
	(1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,15)
	(1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14)
16×16	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,23)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,22)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,16,21)

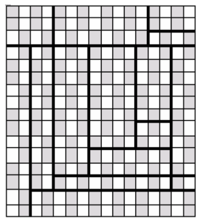
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,17,20)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,18,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,21)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16,20)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,17,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,16,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,17,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,20)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,16,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,17,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,16,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,14,15,16,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,16,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15,16,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16)

（三）接著再進行實際切割，將結果整理成以下表格：

棋盤	*n* 值	實際解法	
2×2	1	 (2)	
4×4	3	 (1,3,4)	
6×6	5	 (1,2,3,4,8)	 (1,2,4,5,6)
8×8	7	(1,2,3,5,6,7,8),(1,2,3,4,6,7,9),(1,2,3,4,5,8,9),(1,2,3,4,5,7,10) 圖解請參照 p.2。	
10×10	9	 (1,2,3,4,5,6,7,10,12)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,14)

		 (1,2,3,4,5,6,8,9,12)	 (1,2,3,4,6,7,8,9,10)
12×12	11	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,16)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,15)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14)
		 (1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,14)	 (1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12)
14×14	13	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,20)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,14,18)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,18)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,15,16)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,16)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,14,16)

		 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,16)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,14,15)	 (1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,15)
		 (1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14)	
16×16	15	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,22)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,16,21)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,21)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16,20)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,20)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,16,18)
		 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,16,18)	 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,18)

		 (1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16)

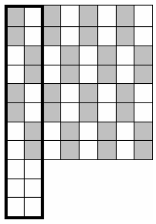
結果：截至16×16棋盤，都符合$n=r-1$。

(四)分析解與切割的關係

1.將無法實際切割的方程解列表如下：

棋盤	方程解
4×4	(1,2,5)
6×6	(1,2,3,5,7)
8×8	(1,2,3,4,5,6,11)
10×10	(1,2,3,4,5,6,7,9,13)
	(1,2,3,4,5,6,8,10,11)
	(1,2,3,4,5,7,8,9,11)
12×12	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,13,14)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,13)
	(1,2,3,4,5,6,7,9,10,12,13)
	(1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13)
14×14	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,15,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,17)
16×16	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,23)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,17,20)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,18,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,17,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,16,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,17,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,16,19)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,17,18)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,14,15,16,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,19)

	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15,16,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17)
	(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17)



觀察上表，發現方程解中只要出現一個數含有大於r的質因數p，則此方程無法進行實際切割。以8×8棋盤中一組不符合的解(1,2,3,4,5,6,11)爲例，有一個矩形面積爲$2\times 11=22$，又22有質因數$11>8$，一定無法切割。因此在後續計算實際切割解數上界時，這些解將被討論。

至於其他方程解，目前皆可以切割。

2.每種棋盤中的最後一個解皆可分割，整理如下：

棋盤	最後一個解
4×4	(1,　3,4)
6×6	(1,2,　4,5,6)
8×8	(1,2,3,　5,6,7,8)
10×10	(1,2,3,4,　6,7,8,9,10)
12×12	(1,2,3,4,5,　7,8,9,10,11,12)
14×14	(1,2,3,4,5,6,　8,9,10,11,12,13,14)
16×16	(1,2,3,4,5,6,7,　9,10,11,12,13,14,15,16)

最後一組解都是1到r的連續自然數，只是中間少$\dfrac{r}{2}$。

所以，我猜想$r\times r$棋盤恆有一組解（$1,2,3,\ldots,\dfrac{r}{2}-1,\dfrac{r}{2}+1,\dfrac{r}{2}+2,\dfrac{r}{2}+3,\ldots,r$），實際運算如下：

$$(1+2+3+\ldots+r)-\frac{r}{2}=\frac{r^2}{2}$$

結果確實符合條件。

由於已經知道所有棋盤的一個固定解，所以只要證明：

$$\left(1,2,3,\ldots,\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}+1,\frac{r}{2}+2,\frac{r}{2}+3,\ldots,r\right)$$

能夠實際切割，就能確定 $r\times r$ 棋盤的矩形切割數最大n值爲 $n=r-1$。

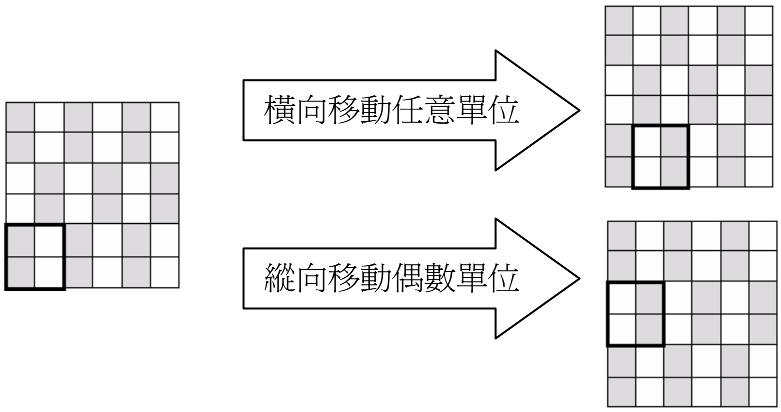
四、$n=r-1$的證明

在證明$n=r-1$之前，我決定先從研究矩形在棋盤中的位置關係著手，希望能夠藉此簡化棋盤，並證明$n=r-1$。因此，我試著將棋盤坐標化，在$u\times v$矩形中，訂定u爲

橫向邊，v 爲縱向邊；棋盤左下角坐標爲 $(0,0)$，且以矩形左下角頂點坐標 (x,y) 表示矩形位置（其中 $x,y\in N$）。我將矩形歸爲以下幾類：

(一) $u\times v$ 爲 4 的倍數

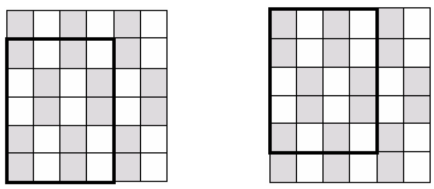
1. u 爲偶數，v 爲偶數



由上圖可知，橫向移動任意單位只是將矩形內的黑白格互換，所以無須探討，縱向移動偶數單位亦然。因此，只要探討最左下角和縱向移動一單位的情況。而在此類中縱向移動一單位仍然黑白格相等，所以此種矩形的 x,y 範圍爲 $0\le x\le r-u,\quad 0\le y\le r-v$。

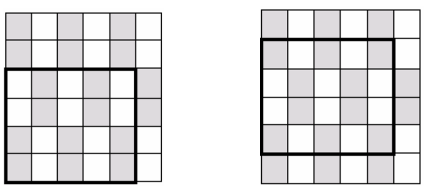
2. u 爲偶數，v 爲奇數

由下圖發現，在左下角和縱移一單位皆黑白格相等，所以 $0\le x\le r-u,$ $0\le y\le r-v$。



3. u 爲奇數，v 爲偶數

由下圖發現，在左下角和縱移一單位皆黑白格相等，所以 $0\le x\le r-u,\quad 0\le y\le r-v$。

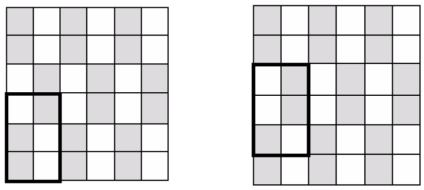


(二) $u\times v$ 非 4 的倍數

1. u 爲偶數，v 爲奇數

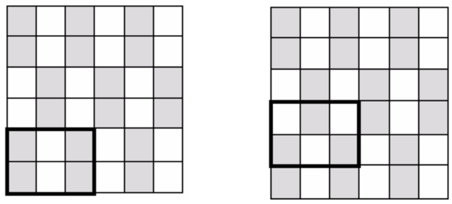
由下圖發現，在左下角和縱移一單位皆黑白格相等，所以

$0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v$ 。



2. u 爲奇數，v 爲偶數

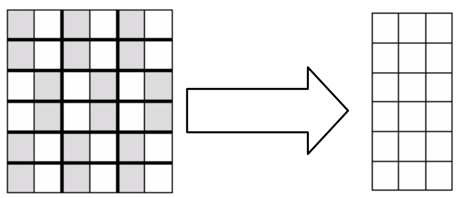
由下圖發現，縱移一單位皆黑白格相等，但在左下角卻不符合條件。因此此類矩形的位置範圍是 $0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v,\quad y$爲奇數 。



(三) 再將幾類的討論整理如下表：

$u \times v$	u	v	位置範圍
$4k$	偶	偶	$0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v$
	偶	奇	$0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v$
	奇	偶	$0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v$
$\ne 4k$	偶	奇	$0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v$
	奇	偶	$0 \le x \le r-u,\quad 0 \le y \le r-v,\quad y$爲奇數

從以上的結果可以發現：u 爲偶數時，矩形一定可在任意位置。因此我想到，把 2×1 小矩形（包含一個黑格與白格）當作一個單位，並以此作爲切割的最小單位，如下圖：



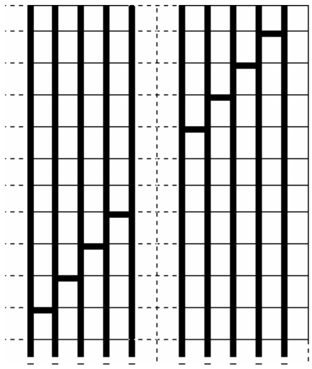
這樣有兩個好處：

1.不管怎麼切割都符合黑白格相等；

2.方程解可以直接代表矩形面積。

於是，可將雙色棋盤簡化爲單色棋盤，且所有棋盤恆有方程解

$$\left(1,2,3,..,\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}+1,\frac{r}{2}+2,\frac{r}{2}+3,...,r \right)。$$



所以，我先將$r\times r$雙色棋盤轉換爲$\frac{r}{2}\times r$ 單色棋盤，並且發現當方程解進行下面的分類時：

$$r,(1,r-1),(2,r-2),(3,r-3),..,(i,r-i),...,(\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}+1)$$

∵每個數對之和都是 r ，代表每一個數對都可以組合 $1\times r$ 的矩形，且共有$(\frac{r}{2}-1)$組數對和一個 r ；所以，共有r個$1\times r$的矩形，即可以完成鋪排出$r\times r$棋盤。

因此，我的猜想得證，即

在$r\times r$棋盤中，最大的n值爲 $n=r-1$。

五、不定方程的簡化

因爲在進行求解工作時未知數太多，我希望能找出「減元」的方法，簡化方程式。首先，觀察之前所有不定方程解，會發現有許多項是固定不變的，所以我可以找出固定的項，然後將原本的方程進行「減元」的工作。以8×8棋盤爲例，以下爲其實際解：

(1,2,3,4,5,7,10)	(1,2,3,4,6,7,9)
(1,2,3,4,5,8,9)	(1,2,3,5,6,7,8)

由上表觀察到，每一組解的前三項都是 1,2,3，因爲當第三項若爲 4 的話，最小值爲$1+2+4+5+6+7+8=33>32$ ，一定不符合。

所以，類比到$r\times r$棋盤，假設一定不能改變的最大數爲d ，則可列式：

$$[1+2+3+...+(d-1)]+[(d+1)+(d+2)+...+(d+r-1-d+1)]>\frac{r^2}{2}$$

$$d^2-d+r^2-d^2+r-d>r^2$$

$$r>2d$$

$$d<\frac{r}{2}$$

$$\because\ r\text{爲偶數}$$

$$\therefore\ \frac{r}{2}\text{爲整數}$$

$$\text{故}\ d\le\frac{r}{2}-1\ \text{。}$$

因爲得到最大的d值爲$d=\frac{r}{2}-1$，代表在不定方程中，$s_k=k,\quad k=1,2,...,d=\frac{r}{2}-1$。因此

不定方程 $s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}=\frac{r^2}{2}$ 可以簡化成

$$s_{\frac{r}{2}}+s_{\frac{r}{2}+1}+\cdots+s_{r-1}=\frac{r^2}{2}-\frac{\frac{r}{2}(\frac{r}{2}-1)}{2}=\frac{3r^2+2r}{8}$$

的 $\frac{r}{2}$ 元不定方程，這種簡化過程有利於後續的求解。

六、正方形棋盤實際切割數上界

接下來我想探討方程解數的規律，觀察是否能夠以公式來表示所有棋盤的方程解數，並求出實際切割數的上界。

首先，在 8×8 棋盤每一組解（$s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7$）中，我試著將每個 s_w 同減去 w 進行觀察。以其中一組解(1,2,3,4,5,7,10)爲例，則

$$\begin{aligned}
s_1-1&=1-1=0\\
s_2-2&=2-2=0\\
s_3-3&=3-3=0\\
s_4-4&=4-4=0\\
s_5-5&=5-5=0\\
s_6-6&=7-6=1\\
s_7-7&=10-7=3
\end{aligned}$$

因此原來的解變爲(0,0,0,0,0,1,3)。8×8 棋盤每一組解轉換結果如下：

(1,2,3,4,5,6,11)	⇒	(0,0,0,0,0,0,4)
(1,2,3,4,5,7,10)		(0,0,0,0,0,1,3)
(1,2,3,4,5,8,9)		(0,0,0,0,0,2,2)
(1,2,3,4,6,7,9)		(0,0,0,0,1,1,2)
(1,2,3,5,6,7,8)		(0,0,0,1,1,1,1)

由上表，因爲每組解都是同減去 1 到 7 的連續自然數，所以若將解中的 0 去掉，每組解剩下的數之和一定爲 $\frac{8^2}{2}-\frac{(1+7)\times7}{2}=4$，且每組解構成的方程相當於

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_i=4 \text{ 滿足 } 0<x_1\le x_2\le x_3\le\ldots\le x_i \text{ 的整數解 } (i\le4)\text{。}$$

因此，推至 $r\times r$ 棋盤，原方程即相當於

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_i=\frac{r^2}{2}-\frac{(1+r-1)(r-1)}{2}=\frac{r}{2},$$

$$\text{滿足 } 0<x_1\le x_2\le x_3\le\ldots\le x_i \text{ 的整數解 } (i\le\frac{r}{2})\text{。}$$

關於這種整數解的問題與尤拉(Euler)的分拆數有密切的關係，我在網站「The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences」查到此方程稱爲「整數分拆」(Integer Partition)，通常以 $p(N)$代表 $x_1+x_2+x_3+...+x_i=N$ 滿足 $0<x_1\le x_2\le x_3\le ...\le x_i$ 整數解的個數。

所以，我可以得到結論：

$\mathbf{s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}=\frac{r^2}{2}}$ **的方程解數爲** $\mathbf{p(\frac{r}{2})}$ **，且**
實際切割數≤方程解數－含大於 $\boldsymbol{r}$ **的質因數之數的方程數　。**

其中，要扣除掉含大於 r 的質因數之數的方程數，原因爲先前研究得到，含大於 r 的質因數之數的解中必有矩形會超出棋盤範圍。

另外，關於分拆數 $p(N)$的求法，可以透過以下的遞迴關係來計算每一個 $p(N)$值：

$$p(N)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\{p(N-f(k))+p(N-f(-k))\},$$

其中， $p(z)=1,$當z爲負整數或0時，而$f(k)=\frac{k(3k-1)}{2},k\in N,$稱爲五邊形數。

以 8×8 棋盤爲例說明如下：以 $N=\frac{8}{2}=4$ 計算 $p(4)$ ，得到

$$p(4)=[p(3)+p(2)]-[p(-1)+p(-3)]+[p(-8)+p(-11)]-...=5-2+2-...=5;$$

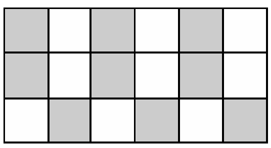
又含大於 8 的質因數之數的解有：(1,2,3,4,5,6,11)，共 1 組，因此得到：

實際切割數≤ $5-1=4$ ，符合之前的研究結果。

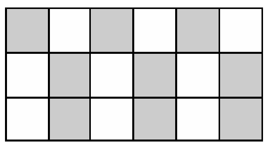
七、 $r\times t$ 長方形棋盤的探討

探討完正方形棋盤 n 值的情況，我想推展至長方形棋盤 $r\times t$ 。在長方形棋盤中，將其分成 $2m\times t$ 和 $(2m-1)\times t$ (其中 $m\in N$)來研究。

1.首先探討棋盤的黑白格配置。觀察 $2m\times t$ 棋盤，當 t 爲奇數時，會發現最上方兩列爲或不爲黑白交錯的情況是相同的，只是棋盤顛倒，如圖**(a)**和圖**(b)**；

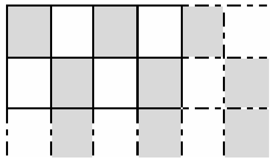


圖**(a)**



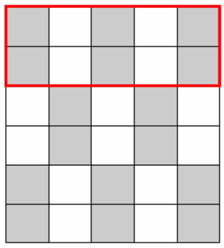
圖**(b)**

而 t 為偶數時，兩者情形不同，但與切割特例有關，將在後面討論。因此目前為方便研究，先探討最上方兩列不為黑白交錯的情況。



圖**(c)**

2. $(2m-1)\times t$ 棋盤中最上方的兩列必須黑白交錯，如圖**(c)**。原因是當 $(2m-1)\times t$ 棋盤最上方兩列不是黑白交錯時，以兩列為一個單位觀察，因為棋盤的橫邊為奇數，所以每一單位的黑白格數不相等，如圖**(d)**；此時當有奇數單位，即縱邊 t 不為 4 的倍數，棋盤本身就不是黑白格相等。



圖**(d)**

設 g 為不符合條件的最小值，求得 n 的上界：

得 $$a_1+a_2+\cdots+a_g>rt$$

令 $\dfrac{a_i}{2}=s_i$，即 $$s_1+s_2+\cdots+s_g>\frac{rt}{2} \qquad \text{-------------------------------} \quad \textbf{(*)}$$

當 $$\frac{g(1+g)}{2}>\frac{rt}{2}$$ 時，**(*)**自動成立，

（因 $s_1+s_2+\cdots+s_g\geq 1+2+\cdots+g=\dfrac{g(g+1)}{2}$ ）

又 $$g^2+g-rt>0$$

$$g<\frac{-1-\sqrt{1+4rt}}{2}\ (負不合)\ 或\ g>\frac{-1+\sqrt{1+4rt}}{2}$$

$$g>\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}$$

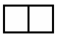
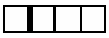
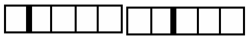
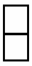
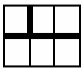
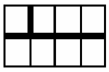
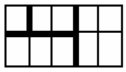
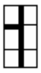
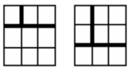
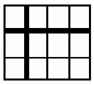
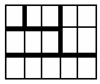
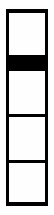
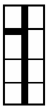
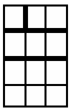
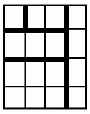
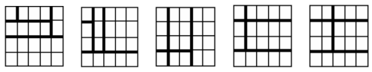
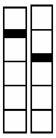
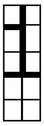
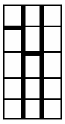
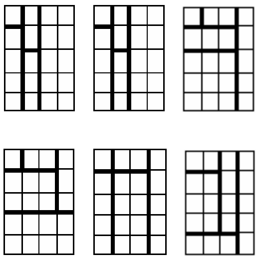
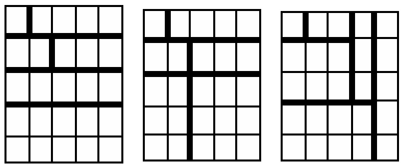
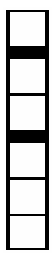
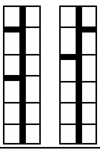
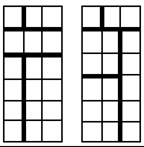
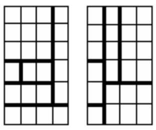
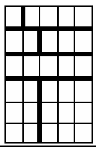
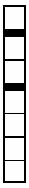
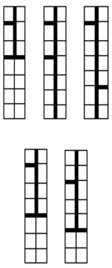
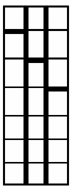
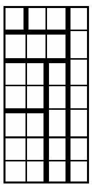
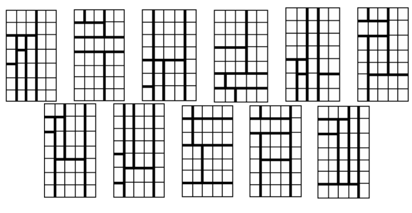
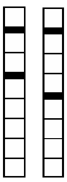
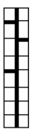
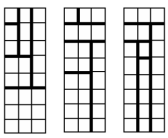
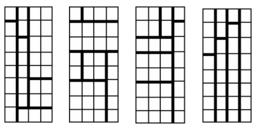
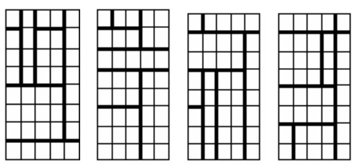
$$\therefore g>\left[\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$$ （[ ]為高斯符號）

上面推導告訴我們，當 $g>\left[\dfrac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$ 不可能達成切割，所以，我目前可以得到：

「在 $r\times t$ 棋盤中，最大 n 值的上界為 $n\leq\left[\dfrac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$。」

八、$2m\times t$ 的 n 值

之前找到將雙色棋盤簡化成單色棋盤的方式，$2m\times t$ 的雙色棋盤轉換為 $m\times t$ 單色棋盤較容易著手。所以，我將 $m=1,2,3,4,5$，$t=1,2,3,\ldots,8$ 的實際 n 值列成下表(下文皆以 $m\times t$ 單色棋盤表示)：

t \ m	1	2	3	4	5
1	$n=1$ 	$n=1$ 	$n=2$ 	$n=2$ 	$n=2$ 
2	$n=1$ 		$n=3$ 	$n=3$ 	$n=4$ 
3	$n=2$ 	$n=3$ 	$n=3$ 	$n=4$ 	$n=5$ 
4	$n=2$ 	$n=3$ 	$n=4$ 	$n=5$ 	$n=5$ 
5	$n=2$ 	$n=4$ 	$n=5$ 	$n=5$ 	$n=6$ 
6	$n=3$ 	$n=4$ 	$n=5$ 	$n=6$ 	$n=7$ 
7	$n=3$ 	$n=4$ 	$n=6$ 	$n=7$ 	$n=7$ 
8	$n=3$ 	$n=5$ 	$n=6$ 	$n=7$ 	$n=8$ 

發現2×2不能切割，變回4×2雙色棋盤後亦同，所以2×2棋盤時$n=1$，不符合

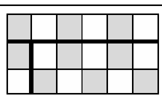
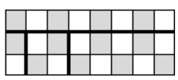
$n = \left[\dfrac{\sqrt{1+4rt}-1}{2} \right]$。至於其他棋盤符合，因此目前將其視爲計算 n 值時的一個特例。

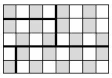
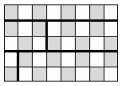
同樣地，將無法切割的不定方程 $s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n = \dfrac{2mt}{2} = mt$ 的解列表如下：

棋盤	方程解	可否實際切割
2×2	(1,3)	X
2×4	(1,2,5)	X
3×3	(1,3,5)	X
3×4	(1,2,4,5)	X
3×6	(1,2,3,5,7)	X
4×2	(1,2,5)	X
4×3	(1,2,4,5)	X
4×5	(1,2,4,6,7)	X
	(1,3,4,5,7)	X
4×6	(1,2,3,5,6,7)	X
4×8	(1,2,3,4,5,6,11)	X
5×4	(1,2,4,6,7)	X
	(1,3,4,5,7)	X
5×5	(1,2,4,5,6,7)	X
5×6	(1,2,3,4,5,7,8)	X
5×7	(1,2,3,4,5,7,13)	X
	(1,2,3,4,5,9,11)	X
	(1,2,3,4,6,8,11)	X
	(1,2,3,5,6,7,11)	X
5×8	(1,2,3,4,5,6,8,11)	X

由上表可得知，同樣地方程解中只要出現一數含有質因數 p ，且 $p > m$ ， $p > t$ ，則此方程無法進行實際切割。可是紅色的 X 卻爲特例，如果把單色棋盤轉換回雙色棋盤就可以切割，原因是該方程解中，$2m > p > m$ ，代表當一邊爲 m 的單色棋盤轉換回一邊爲 $2m$ 的雙色棋盤時，矩形就不會超出範圍。

以下爲特例轉換回雙色棋盤的切割方法：

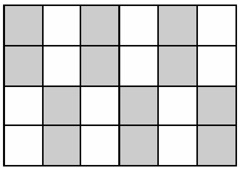
6×3	8×3
 (1,3,5)	 (1,2,4,5)

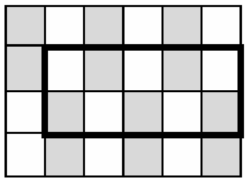
8×5	8×5
 (1,2,4,6,7)	 (1,3,4,5,7)

以3×3單色棋盤不符合的解(1,3,5)爲例，因爲解中有$5>3$，所以無法進行切割；但變回雙色棋盤時$5<6$，又可以進行切割。

2×2	(1,3)
3×4	(1,2,4,5)
4×2	(1,2,5)
4×6	(1,2,3,5,6,7)

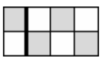
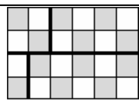
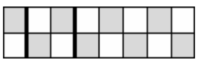
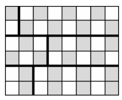
但表中綠色的 X，雖然該組方程解滿足$2m>p>m$，轉換回雙色棋盤卻無法成功切割，共有四組，如右表。可以發現它們的t都爲偶數，表示最下面兩列不是黑白交錯，又$2m\times t$棋盤最上面兩列亦之，即棋盤上、下兩列都不是黑白交錯。如下圖：





因爲方程解中有一數爲質數p（$p>2$），且$p\geq t$，代表該矩形一定爲$p\times2$的形式；又p爲奇數，表示矩形在不是黑白交錯的情況下，黑白格數一定不相等。因此該矩形不能靠在非黑白交錯的棋盤邊緣切割，此時也分散其他矩形的切割空間，如右圖。

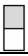
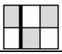
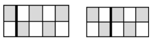
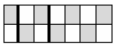
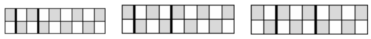
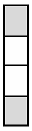
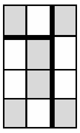
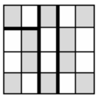
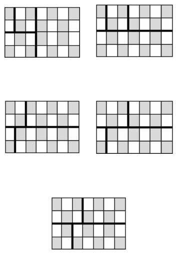
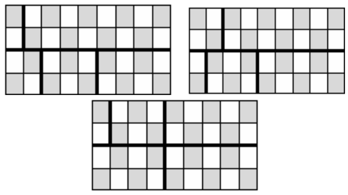
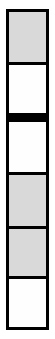
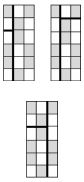
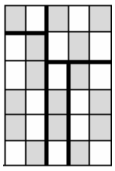
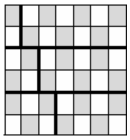
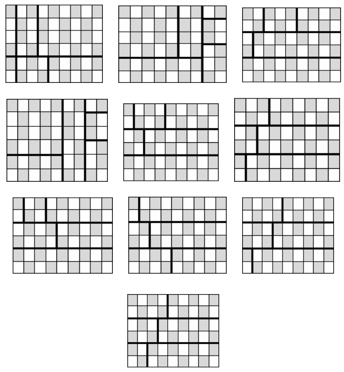
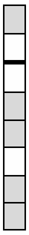
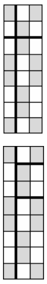
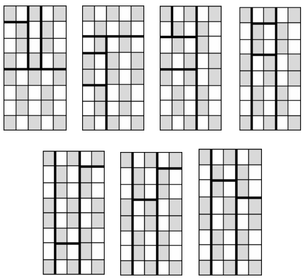
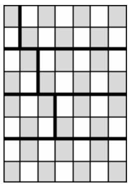
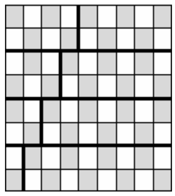
不過若這些棋盤爲最上面兩列爲黑白交錯的形式，就可以進行切割，如下：

4×2	6×4
 (1,3)	 (1,2,4,5)
8×2	8×6
 (1,2,5)	 (1,2,3,5,6,7)

雖然經以上探討有兩種實際切割的特例，但仍可得知，方程解只要出現一質因數p，且$p>2m$，$p>t$，則無法進行實際切割。這些不能切割的解數將在後續進行討論。

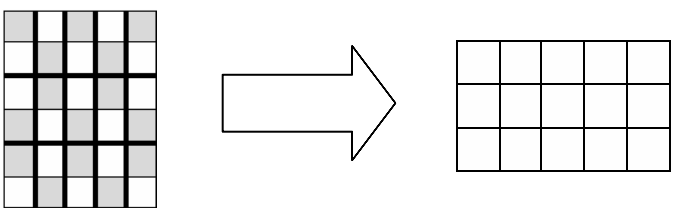
九、$(2m-1)\times t$的n值

觀察$m=1,2,3,4,5$，$t=2,4,\ldots,8$時的情況，列表如下：

t \ m	1	2	3	4	5
2	$n=1$ 	$n=2$ 	$n=2$ 	$n=3$ 	$n=3$ 
4	$n=1$ 	$n=3$ 	$n=4$ 	$n=4$ 	$n=5$ 
6	$n=2$ 	$n=3$ 	$n=5$ 	$n=6$ 	$n=6$ 
8	$n=2$ 	$n=4$ 	$n=5$ 	$n=7$ 	$n=8$ 

發現截至目前爲止，實際n值都爲$n=\left[\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$。

另外，在進行$(2m-1)\times t$棋盤的研究時，我發現棋盤也可以進行簡化，如下圖：



即$(2m-1)\times t$雙色棋盤可簡化爲$(2m-1)\times\frac{t}{2}$單色棋盤。

將無法實際切割的不定方程$s_1+s_2+s_3+...+s_n=\frac{(2m-1)t}{2}$的解列表如下：

棋盤	方程解	可否實際切割
9×6	(1,2,3,4,6,11)	X

由上表可得知，$(2m-1)\times t$ 棋盤中，方程解同樣只要出現一質因數 p ，且 $p>2m-1$，

$p>t$ ，則此無法進行實際切割。這些解將在計算實際切割數的上界時被討論。

十、$r\times t$ 長方形棋盤實際切割數上界

現在探討 $s_1+s_2+s_3+...+s_n=\frac{rt}{2}$ 的不定方程解數，希望求得長方形棋盤實際切割數的上界。依先前推出正方形棋盤方程解的方式，將每個s_w同減去w。因此原本的方程相當於：

$$x_1+x_2+x_3+...+x_i=\frac{rt}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{rt-n(n+1)}{2},$$

滿足 $0<x_1\le x_2\le x_3\le...\le x_i$ 的整數解 $(i\le\frac{rt-n(n+1)}{2})$。

此即爲「整數分拆」中，$N=\frac{rt-n(n+1)}{2}$的情況。所以得到結論：

$s_1+s_2+\cdots+s_n=\frac{rt}{2}$的方程解數爲 $p(\frac{rt-n(n+1)}{2})$ ，且

實際切割數≤方程解數− 含大於r的質因數之數的方程數 。

其中，要扣除含大於r和t的質因數之數的方程數，原因爲先前研得到，含大於r和t的質因數之數的解中必有矩形會超出棋盤範圍。

以$rt=6$的情況進行說明，符合的矩形有1×6 、2×3、3×2、6×1。
計算方程解數爲

$$p(\frac{6-\left[\frac{\sqrt{1+4\times 6}-1}{2}\right](\left[\frac{\sqrt{1+4\times 6}-1}{2}\right]+1)}{2})=p(0)=1;$$

然後列出含大於 r 和 t 的質因數之數的解：共 0 組。因此，得到

實際切割數≤$1-0=1$，符合先前研究結果。

伍、研究結果

一、正方形棋盤

(一) 在 $r\times r$ 棋盤中，最大 n 值為 $n=r-1$。

(二) $r\times r$ 棋盤中恆有解（$1,2,3,...,\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}+1,\frac{r}{2}+2,\frac{r}{2}+3,...,r$）。

(三) $r\times r$ 雙色棋盤可以轉換成 $\frac{r}{2}\times r$ 單色棋盤，有利於實際切割：

1. 不管怎麼切割都符合黑白格相等。
2. 方程解可以直接代表矩形面積。

(四) 不定方程 $s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}=\frac{r^2}{2}$ 可以簡化成 $s_{\frac{r}{2}}+s_{\frac{r}{2}+1}+\cdots+s_{r-1}=\frac{3r^2+2r}{8}$ 的 $\frac{r}{2}$ 元不定方程，有利於求解。

(五) 實際切割數 $\le$ 方程解數 $-$ 含大於 r 的質因數之數的方程數，其中方程解數 $=p(\frac{r}{2})$，

$$p(N)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left\{p(N-f(k))+p(N-f(-k))\right\}$$

（定義 $p(z)=1,$ 當 z 為負整數或 0 時，且 $f(k)=\frac{k(3k-1)}{2},k\in N,$ 為五邊形數。

二、長方形棋盤

(一) 在 $r\times t$ 棋盤中，最大 n 值的上界為 $n\le\left[\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$。（[ ]為高斯符號）

(二) $2m\times t$ 雙色棋盤可轉換為 $m\times t$ 單色棋盤，有利於實際切割。

(三) $(2m-1)\times t$ 雙色棋盤可轉換為 $(2m-1)\times\frac{t}{2}$ 單色棋盤，有利於實際切割。

(四) 實際解數 $\le$ 方程解數 $-$ 含大於 r 和 t 的質因數的數之方程數，其中方程解數 $=p(\frac{rt-n(n+1)}{2})$。

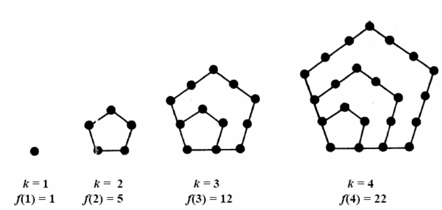
陸、討論

一、文獻探討

現在探討「整數分拆」方程。根據網路資料，作者提到 $p(N)$ 也可以表示爲

$$p(N)=p(N-1)+p(N-2)-p(N-5)-p(N-7)+p(N-12)+p(N-15)-...$$

（其中 $1,2,5,7,12,15,22...$ 爲五邊形數，即以右圖形式排成正五邊形的點數。定義函數 $f(k)$ 表示五邊形的一邊有 k 個點時的總點數，並將 k 爲負數的情況列入討論，得到 $f(k)=\frac{k(3k-1)}{2}$ 。）



關於上式，文中沒有完整證明，但大略描述過程，提及尤拉的(1)生成函數與(2)五邊形數定理（Euler's petagonal number theorem），分別如下：

$$(1)\quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n \qquad (2)\quad \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{[\frac{n(3n-1)}{2}]}$$

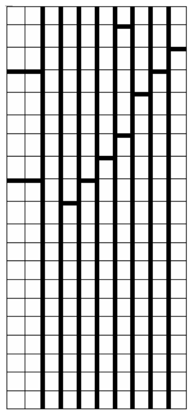
經由上面兩式的推導，即可推得

$$p(N)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\{p(N-f(k))+p(N-f(-k))\}。$$

二、實際切割的步驟

在找尋正方形、長方形棋盤的最大 n 值與實際切割數的上界後，我想歸納出一個通用、簡便的切割方法。

(一) 正方形棋盤



1. 我認爲可將證明 $n=r-1$ 時，組合 $1\times r$ 矩形的方式應用在實際解上。
2. 以 20×20 棋盤的一組解 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,20,24)爲例，將其作下列分組：
   (2,18),(3,17),(4,16),(1,5,14),(7,13),(8,12),(9,11),(20),(6,10,24)；
   分組拼出 1×20 的矩形，剩下的數字爲最後一組，進行切割，如右圖。
3. 另外，最後一組的最大公因數愈大愈好，因爲可以該公因數爲共同邊。而偶數間一定有公因數 2，因此奇數盡量配對成 $1\times r$ 的矩形。
4. 綜合以上結果，可以歸納出以下切割正方形棋盤的步驟：

(1) 計算最大n值爲$n = r - 1$。

(2) 列出$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \frac{r^2}{2}$的所有解，扣除含有質因數大於$r$的數之解。

(3) 將雙色棋盤轉換爲單色棋盤。

(4) 進行分組，將奇數拼成$1 \times r$的矩形，最後一組盡量爲偶數。

(5) 依分組實際進行切割；如果失敗，則在分組間進行微調，重新嘗試。

(二) 長方形棋盤

1. 因爲長方形棋盤可能爲不等長的兩邊，所以可選擇組合$r \times 1$或是$1 \times t$的矩形。
2. 又長方形棋盤分爲$2m \times t$和$(2m-1) \times t$，而這兩類棋盤轉換成單色棋盤的方法不同：$2m \times t$ 轉換爲$m \times t$，$(2m-1) \times t$轉換爲$(2m-1) \times \frac{t}{2}$。（$2m \times t$棋盤中，當$t$爲偶數時，也可以轉換成$2m \times \frac{t}{2}$單色棋盤。）
3. 歸納出切割長方形棋盤的步驟：

(1) 計算最大n值的上界爲$n \le \left[\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2} \right]$。

(2) 列出$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \frac{rt}{2}$的所有解，扣除含有質因數大於$r$和$t$的數之解。

(3) 將雙色棋盤轉換爲單色棋盤。

(4) 進行分組：$m \times t$單色棋盤中，拼成$1 \times t$的矩形；$r \times \frac{t}{2}$單色棋盤中，拼成$r \times 1$的矩形。

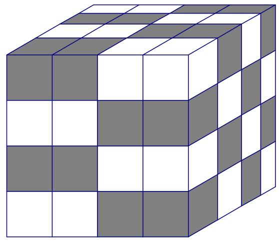
(5) 依分組實際進行切割；如果失敗，則在分組間進行微調，或者轉換回雙色棋盤進行嘗試。

三、未來展望

(一)長方形棋盤

在長方形棋盤的研究中得到最大的n值上界爲$n \le \left[\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2} \right]$，且目前爲止除

了4×2雙色棋盤，其他皆符合$n=\left[\dfrac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$，希望未來能完成最大$n$值的證明。



(二)立體棋盤

1.立方體棋盤

(1) $4\times 4\times 4$棋盤

我想改變題目條件，將平面棋盤改變爲立體棋盤研究。

假設g爲不符合條件的最小值，求得n的上界：

得 $$a_1+a_2+\cdots+a_g>r^3$$

令$\dfrac{a_i}{2}=s_i$，即 $$s_1+s_2+\cdots+s_g>\frac{r^3}{2} \quad \text{---------------------} \quad \textbf{(*)}$$

當 $\dfrac{g(1+g)}{2}>\dfrac{r^3}{2}$ 時，**(*)**自動成立，

（因 $s_1+s_2+\cdots+s_g\geq 1+2+\cdots+g=\dfrac{g(g+1)}{2}$ ）

又 $$g^2+g-r^3>0$$

$$g<\frac{-1-\sqrt{1+4r^3}}{2}(負不合)或g>\frac{-1+\sqrt{1+4r^3}}{2}$$

$$g>\frac{\sqrt{1+4r^3}-1}{2}>\frac{\sqrt{4r^3}-1}{2}=\sqrt{r^3}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore g>\left[\sqrt{r^3}-\frac{1}{2}\right]$$ （[ ]爲高斯符號）

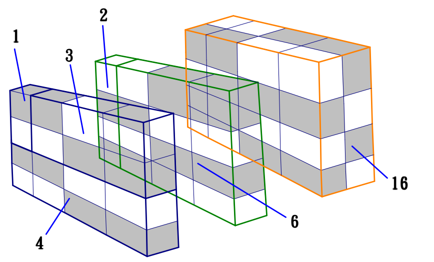
上面推導告訴我們，當$g>\left[\sqrt{r^3}-\dfrac{1}{2}\right]$，不可能達成切割，於是我猜想：

「在$r\times r\times r$棋盤中，最大n值爲$n=\left[\sqrt{r^3}-\dfrac{1}{2}\right]$。」

但在嘗試找出$4\times 4\times 4$棋盤的解法時，卻發現$n=\left[\sqrt{4^3}-\dfrac{1}{2}\right]=7$時排不出來，於是觀察所有$n=7$時的可能解法：

(1,2,3,4,$\underline{5}$,6,$\underline{11}$)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,$\underline{7}$,10)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,8,9)
(1,2,3,4,6,$\underline{7}$,9)	(1,2,3,$\underline{5}$,6,$\underline{7}$,8)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,6,$\underline{7}$,8,$\underline{14}$)
(1,2,3,4,$\underline{5}$,6,8,9,12)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,6,8,$\underline{10}$,$\underline{11}$)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,$\underline{7}$,8,9,$\underline{11}$)
(1,2,3,4,6,$\underline{7}$,8,9,$\underline{10}$)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,6,$\underline{7}$,$\underline{10}$,12)	(1,2,3,4,$\underline{5}$,6,$\underline{7}$,9,$\underline{13}$)

因為$4\times4\times4$的棋盤中，每一個切割的長方體的長、寬、高都要小於等於4，但是觀察上面的表格，每一組解都出現了含有大於4的質因數的數，即無法切割出該長方體。而換成$n=6$的情況後，找到一組解：(1,2,3,4,6,16)，如右圖。



(2) $r\times r\times r$棋盤

由$4\times4\times4$棋盤可知，立體棋盤的情況比平面棋盤複雜很多，目前發現尋找$r\times r\times r$棋盤切割方法的具體步驟為：

i. 計算最大n值上界為$n\le\left[\sqrt{r^3}-\frac{1}{2}\right]$。

ii. 列出$s_1+s_2+\cdots+s_n=\frac{r^3}{2}$的所有解。

iii. 觀察每一組解，剔除含有大於r的質因數之數的解。如果所有的解都被剔除，則使n值減1，同前面方法嘗試，以此類推。

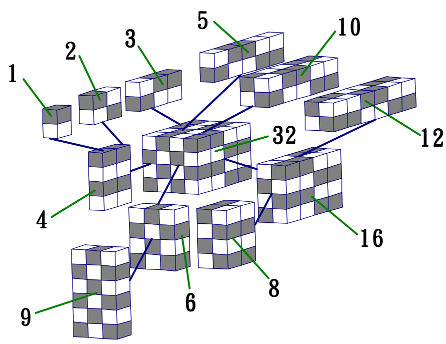
iv. 根據符合條件的方程解實際操作，找出切割方法。

以$6\times6\times6$棋盤為例：

i. 計算最大n值上界$n\le\left[\sqrt{6^3}-\frac{1}{2}\right]=14$。

ii. 經由一一檢驗剔除，得到實際n值為 12。

iii. 找到一解為(1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,16,32)，切割方法如右圖。



所以初步得到$n\le\left[\sqrt{r^3}-\frac{1}{2}\right]$，但是目前實際$n$值都不等於$\left[\sqrt{r^3}-\frac{1}{2}\right]$。而在過程中發現，方程解是否可進行切割與解中的質因數有所關聯，希望未來能夠找出其中的規律，求得實際n值，並歸納出立方體棋盤的切割方法。

2. 長方體棋盤

如果完成立方體棋盤的研究，希望能更進一步推展至長方體棋盤，同樣找尋其實際 n 值，並歸納出棋盤的切割方法。

柒、結論

一、正方形棋盤結論

(一) 在 $r \times r$ 棋盤中，最大 n 值爲 $n = r - 1$。

(二) $r \times r$ 棋盤中恆有解（$1,2,3,..,\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}+1,\frac{r}{2}+2,\frac{r}{2}+3,...,r$）。

(三) $r \times r$ 雙色棋盤可以轉換成 $\frac{r}{2} \times r$ 單色棋盤。

(四) 不定方程 $s_1 + s_2 + \cdots + s_{r-1} = \frac{r^2}{2}$ 可以簡化成 $s_{\frac{r}{2}} + s_{\frac{r}{2}+1} + \cdots + s_{r-1} = \frac{3r^2 + 2r}{8}$ 的 $\frac{r}{2}$ 元不定方程。

(五) 實際切割數 $\leq$ 方程解數 $-$ 含大於 r 的質因數之數的方程數，其中方程解數 $= p(\frac{r}{2})$。

二、長方形棋盤結論

(一) 在 $r \times t$ 棋盤中，最大 n 值的上界爲 $n \leq \left[\frac{\sqrt{1+4rt}-1}{2} \right]$。（[ ]爲高斯符號）

(二) $2m \times t$ 雙色棋盤可轉換爲 $m \times t$ 單色棋盤。

(三) $(2m-1) \times t$ 雙色棋盤可轉換爲 $(2m-1) \times \frac{t}{2}$ 單色棋盤。

(四) 實際切割數 $\leq$ 方程解數 $-$ 含大於 r 和 t 的質因數之數的方程數，其中方程解數 $= p(\frac{rt - n(n+1)}{2})$。

三、正方形、長方形棋盤比較

	正方形棋盤	長方形棋盤
n 值	$r-1$	$\left[\dfrac{\sqrt{1+4rt}-1}{2}\right]$（上界）
實際切割步驟	（一）列出 $s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}=\dfrac{r^2}{2}$ 的所有解，扣除含有質因數大於 r 的數之解。 （二）將雙色棋盤轉換爲單色棋盤。 （三）進行分組，將奇數拼成 $1\times r$ 的矩形，最後一組盡量爲偶數。 （四）依分組實際進行切割；如果失敗，則在分組間進行微調，重新嘗試。	（一）列出 $s_1+s_2+\cdots+s_n=\dfrac{rt}{2}$ 的所有解，扣除含有質因數大於 r 和 t 的數之解。 （二）將雙色棋盤轉換爲單色棋盤。 （三）進行分組：$m\times t$ 單色棋盤中，拼成 $1\times t$ 的矩形；$r\times\dfrac{t}{2}$ 單色棋盤中，拼成 $r\times 1$ 的矩形。 （四）依分組實際進行切割；如果失敗，則在分組間進行微調，或者轉換回雙色棋盤進行嘗試。
實際切割數上界	$p(\dfrac{r}{2})-$ 含大於 r 的質因數之數的方程數	$p(\dfrac{rt-n(n+1)}{2})$ $-$ 含大於 r 和 t 的質因數之數的方程數

捌、參考資料及其他

一、**建中通訊解題第五十九期第四題**。台北市：建國高級中學。

二、李信仲等（民 97）。**翰林版國中數學課本第二冊**。台北市：翰林出版社。

三、李信仲等（民 98）。**翰林版國中數學課本第四冊**。台北市：翰林出版社。

四、**整數分拆**。維基百科，取自：
http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%95%B4%E6%95%B8%E5%88%86%E6%8B%86

五、*A000041*[Database], The On-Line Encyclopedia of Integer Sequence, from
http://www.research.att.com/~njas/sequences/A000041

六、Abdulkadir Hassen, Thomas J. Osler. *Playing With Partitions On The Computer.* Rowan University, from http://www.math.temple.edu/~melkamu/html/partition.pdf

【評語】030415

本作品探討棋盤切割問題，先以較小邊數實際分割，觀察實際分割數之現象，推測分析實證並作若干推廣，分析解題有條理，具趣味性與數學價值。