# 中華民國 第50屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

國中組　數學科

030414

**虧格與方陣的對話**

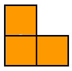
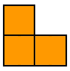
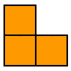
學校名稱：臺中縣立清水國民中學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 國二 李國豪 | 林思嫻 |
| 國二 蔡承志 | 林靖斌 |
| 國二 王琮寓 | |
| 國二 侯瓔旂 | |

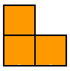
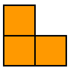

關鍵詞：虧格、方陣、數學歸納法

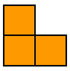
# 作品名稱：虧格與方陣的對話

## 摘要

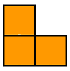
在 $2^n \times 2^n$（n∈N）的方陣中，刪除任何一個位置的方格，剩餘的方格皆能被  填滿，則其規律性為何？如果在 m×m（m∈N，m＞1）的方陣中，刪除任一格方格，剩餘方格是否也皆能被  填滿？本篇研究主要是利用實際操作的過程中來找尋規律，再將發現的結果做歸納分析並深入探討，找出其規則，同時也找到 L 型方格能被  填滿的方式，有助於我們尋找快速的方法來填滿方陣。

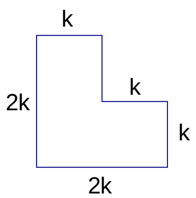
## 壹、研究動機

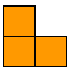
某次上數學課時，老師出了一道數學遊戲讓我們競賽，遊戲規則是將 8×8 的方陣中，刪掉一格，剩下的方格是否能被  填滿？如果可以，看誰的速度最快？經過我們多次試驗後，發現無論是刪除哪一個位置的方格，皆能被  填滿。

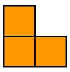
活動結束後，我和幾位同學基於求知的慾望，想深入了解是不是所有正整數的方陣都有相同的結果？急忙地向老師詢問，老師告訴我們高一的數學課本習題，在探討 $2^n \times 2^n - 1$（n∈N）的方陣是否能被  填滿，而其規律性是什麼呢？並建議我們以此為基礎，再推廣至 m×m－1（m∈N，m＞1）的方陣，因此開啟了我們的研究之旅。

## 貳、研究目的

一、觀察 m×m－1（m∈N，m＞1）的方陣是否能被  填滿，並找出規律。

二、證明 

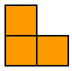
（k∈N） 可被  填滿。

三、探討 m×m－1（m∈N，m＞1）的方陣快速被  填滿的方法。

## 參、研究設備及器材

電腦、筆、方格紙

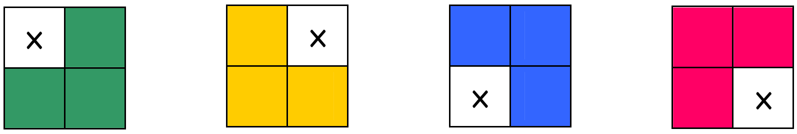
# 肆、研究過程或方法

一、在研究過程中，我們稱這樣的圖形  為「虧格」，刪除的方格用×表示。

（一）m×m－1（m∈N，m＞1）的方陣中，當 m＝3 的倍數時，m×m－1 必不被虧格填滿，因為 m×m－1 為非 3 的倍數，而虧格為 3 的倍數，所以我們不討論 m＝3 的倍數之情形，因此我們從 2x2－1 方陣開始討論。

1. $\boxed{\text{2x2－1 方陣}}$

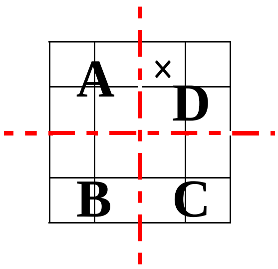
刪除任一個方格，剩下方格可由 1 個虧格填滿 。



2. $\boxed{\text{4x4－1 方陣}}$

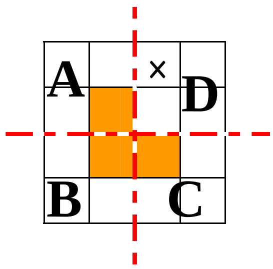
藉由實際操作的過程中，我們有以下的發現：

（1）



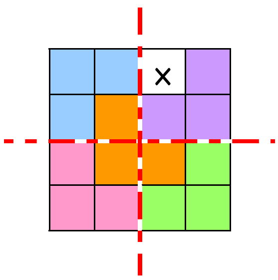

不論缺空在哪一個位置，可以把方陣從中分成 A、B、C、D 四等分。

（2）




A、B、C 三等分先填入一個虧格形成四個 2x2－1 方陣。

（3）

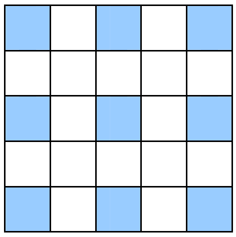


剩下空格填入虧格，即可填滿。

3. 5×5－1 方陣

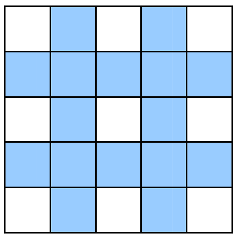
不是刪除任一個方格，剩下方格就能被虧格填滿，有些情況成立，有些情況不成立，整理如下：

（1）在下圖 9 個位置中，刪除任一個位置的方格，剩餘方格能被虧格填滿。



（圖一）

（2）在下圖 16 個位置中，刪除任一個位置的方格，剩餘方格不能被虧格填滿。



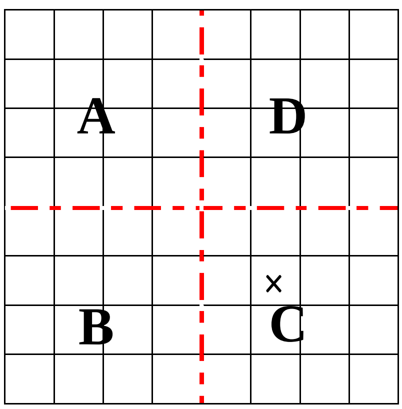
4. 7×7－1 方陣

藉由實際操作的過程中，發現刪除任一方格，剩下方格皆可由虧格填滿。

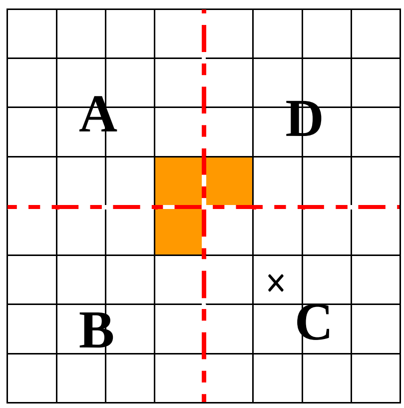
5. 8×8－1 方陣

方法如同 4×4－1 的方陣，我們可以很快的填滿方陣，步驟如下：

（1）



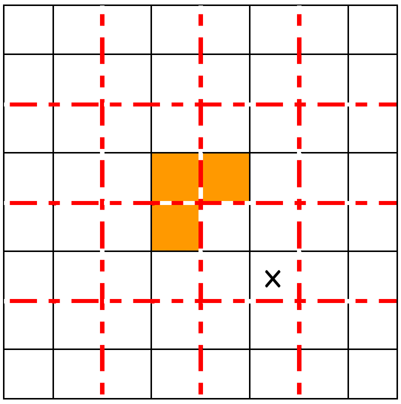

（2）



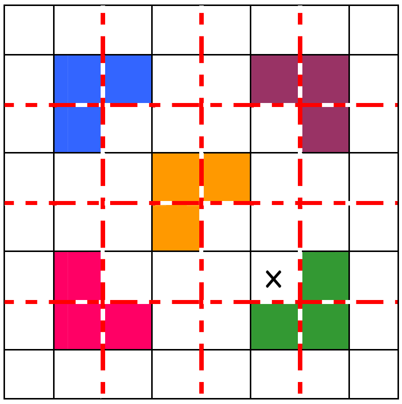

不論缺空在哪一個位置，從中分成 A、B、C、D 四等分。

A、B、D 三等分先填入一個虧格。

（3）



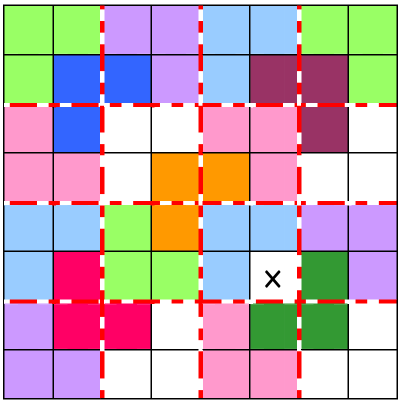
（4）



將 A、B、C、D 四個 4x4 的方陣再平分成十六個 2x2 的方陣。

填入四個虧格，形成十六個 2x2－1 的方陣。

（5）



剩下空格填入虧格，即可填滿。

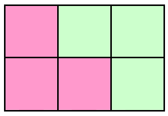
6. $\boxed{2^n\times2^n-1\text{ 方陣}}$

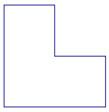
其規律性如下表：

| $2^n\times2^n-1$ 方陣 | 分成四個 $2^{n-1}\times2^{n-1}-1$ 方陣 | 填滿方陣的虧格數（$a_n$ 個） |
|---|---|---|
| $2^1\times2^1-1$ | | 1　　　　（$a_1=1$） |
| $2^2\times2^2-1$ | 分成四個 $2^1\times2^1-1$ | $4\times1+1=\mathbf{5}$　（$a_2=4a_1+1$） |
| $2^3\times2^3-1$ | 分成四個 $2^2\times2^2-1$ | $4\times\mathbf{5}+1=21$（$a_3=4a_2+1$） |
| $2^n\times2^n-1$ | 分成四個 $2^{n-1}\times2^{n-1}-1$ | $a_n=4a_{n-1}+1$ |

註：$a_n=4a_{n-1}+1$，1 是指先填入中間的第一個虧格（詳如上述 4x4 方陣及 8x8 方陣方法）

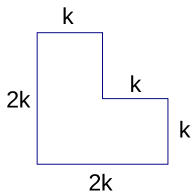
（二）在實際操作的過程中，我們覺得困難度慢慢增加了，10x10 的方陣有 100 個小方格，需要很多時間找出刪掉任一方格，其餘方格能被虧格填滿的方法，爲了尋找規律且快速的方法來填滿方陣，有以下的發現：

1.只要是（2 的倍數）x（3 的倍數）矩形即可被  依序填滿。

2.有很多型如  的圖形出現，引發我們的好奇心，或許大 L 型的方格能促使我們很快的填滿方陣，但所有 L 型方格都能被虧格填滿嗎？

二、老師協助我們找了一本原文書【Mathematical thinking：problem-solving and proofs ，P61-62】當作參考文獻，告訴我們內文意思，對我們要研究是否所有L型方格都能被虧格填滿有所幫助。

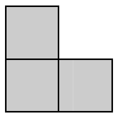
（一）試証：




（k∈N），可被虧格填滿。

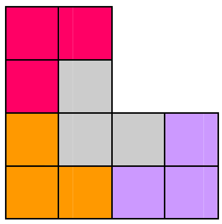
証明：

1. k＝1



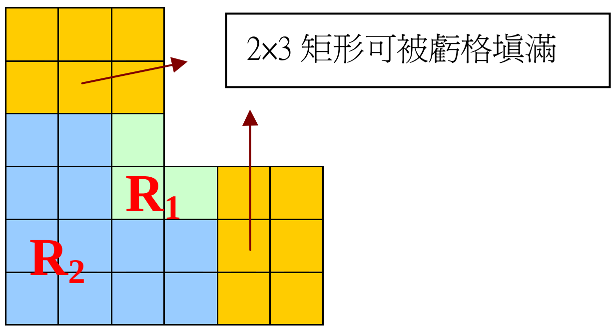
$R_1$成立

2. k＝2



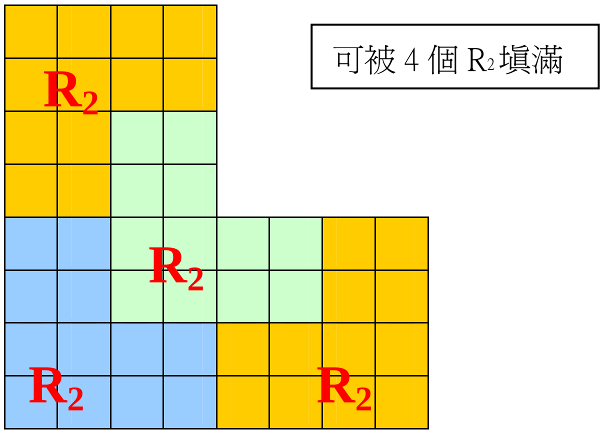
$R_2$成立

3. k＝3



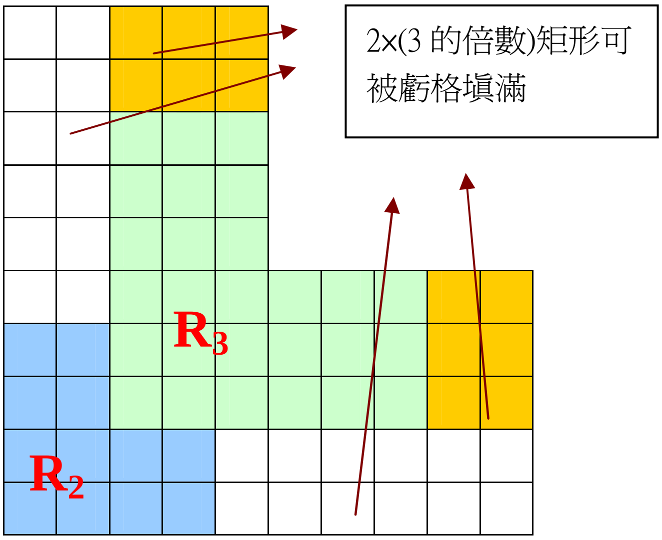

$R_3$成立

4.　k＝4



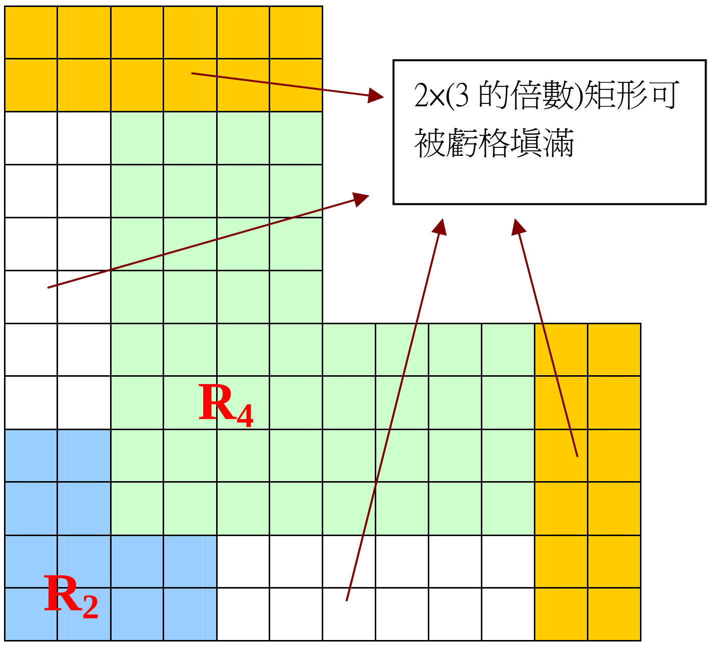

$R_4$成立

5.　k＝5



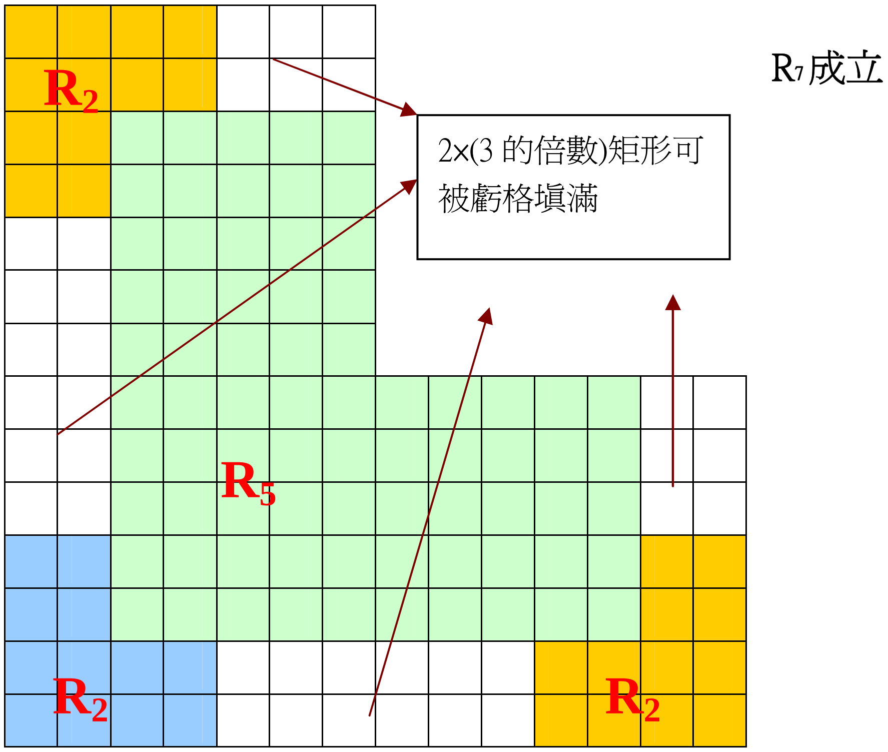

$R_5$成立

6.　k＝6

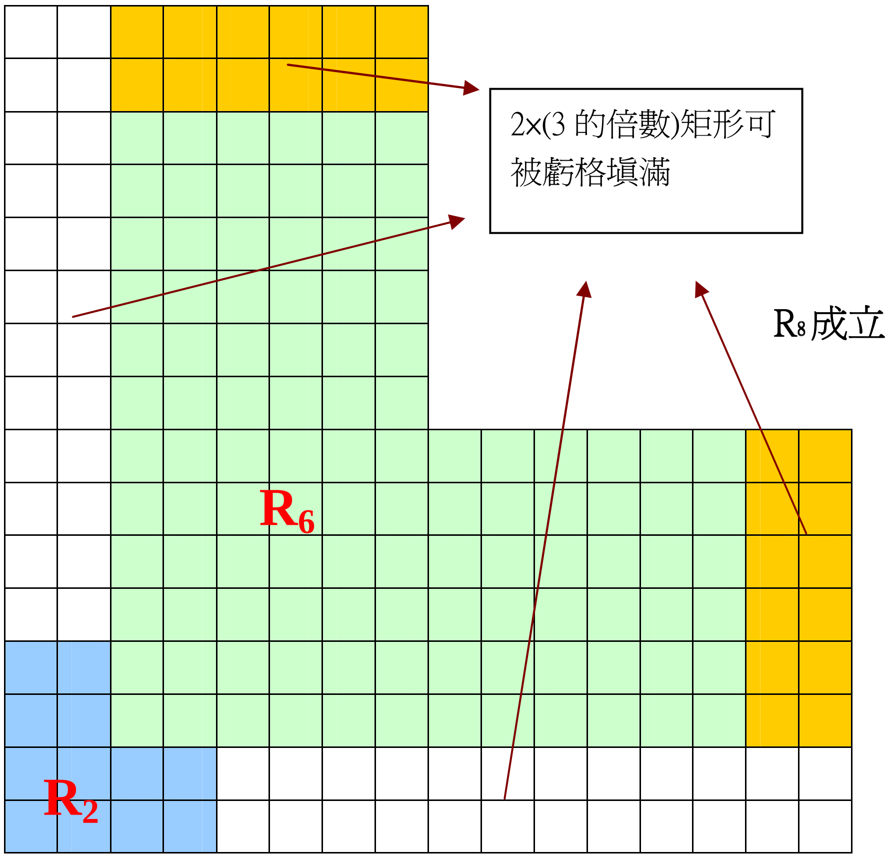



$R_6$成立

7. k ＝ 7




8. k=8



9.由上述 8 點所列，可歸納出三種類型（$k \geq 3$）：

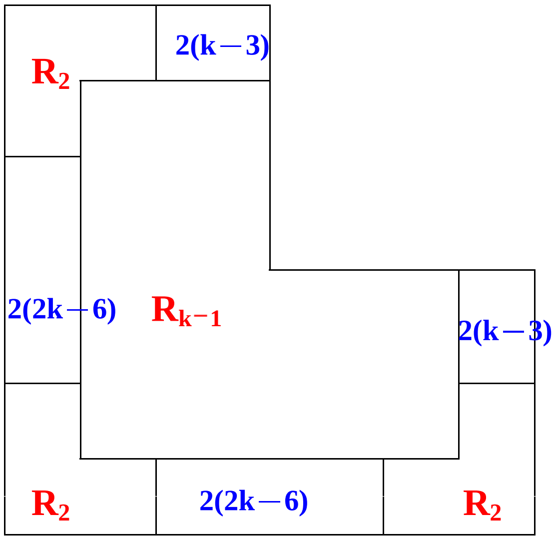
（1）k 是 3 的倍數：$R_3$、$R_6$……

（2）k 被 3 除餘 1：$R_4$、$R_7$……

（3）k 被 3 除餘 2：$R_5$、$R_8$……

10.假設 $R_{k-1}$、 $R_k$成立（k 是 3 的倍數）

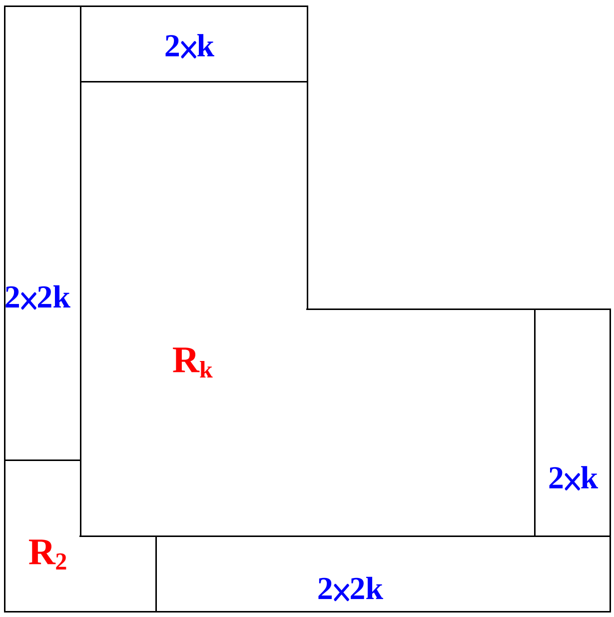
則：(1) $R_{k+1}$




2（2k－6）和 2（k－3）皆是 2×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿

故 $R_{k+1}$成立

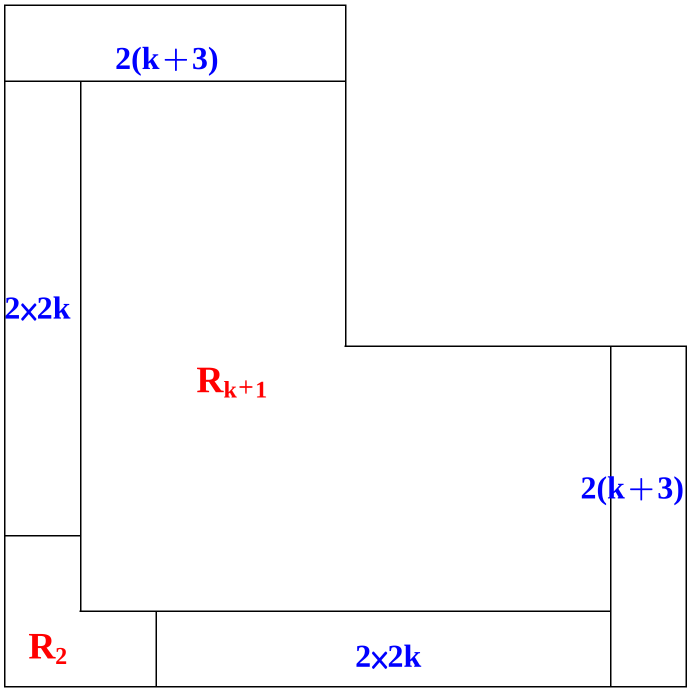
（2）$R_{k+2}$




2×2k 和 2×k 皆是 2×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿

故 $R_{k+2}$成立

（3）$R_{k+3}$

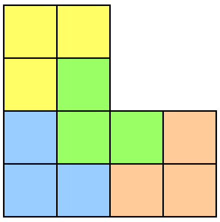



2×2k 和 2（k＋3）皆是 2×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿
故 $R_{k+3}$成立

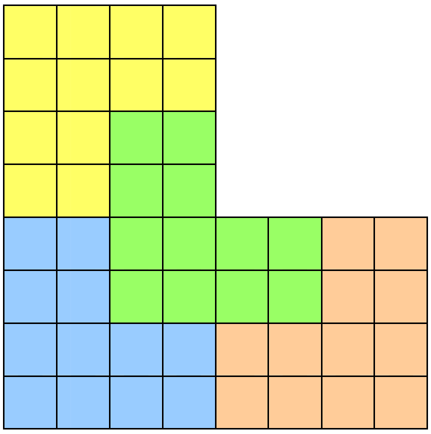
（二）除了上述三種類型，我們還有其他不同的想法，發現可由圖形推導出關係式。

1.偶數圖形：

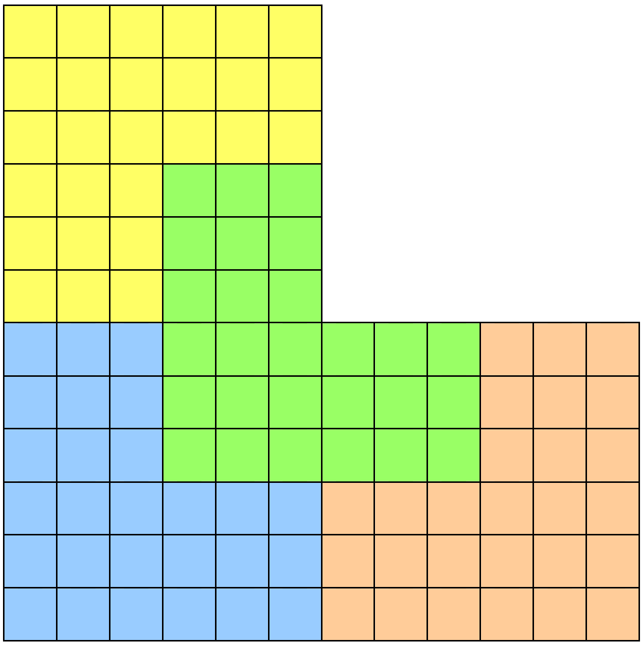
（1）$R_2$



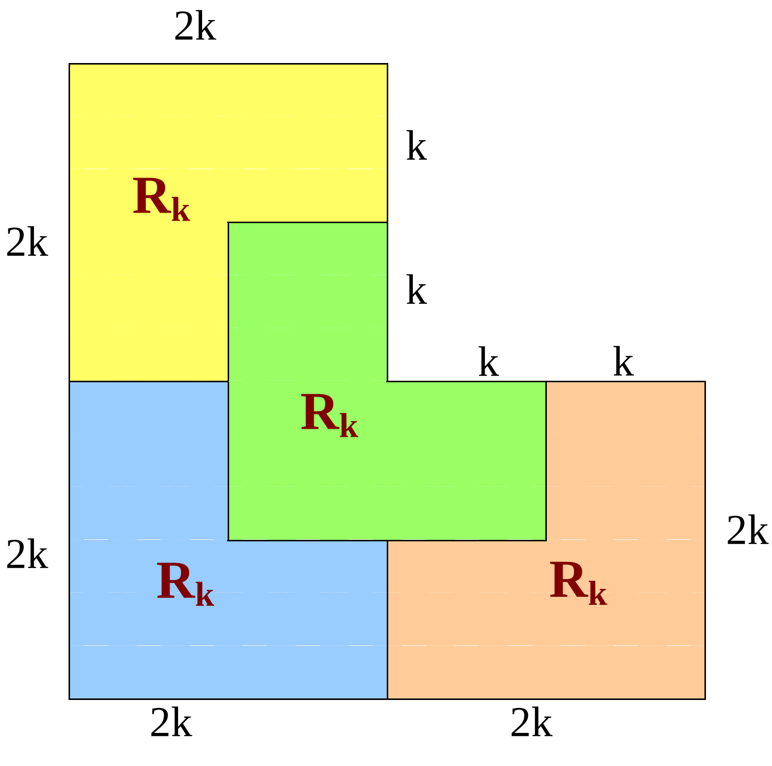
（2）$R_4$



（3）$R_6$



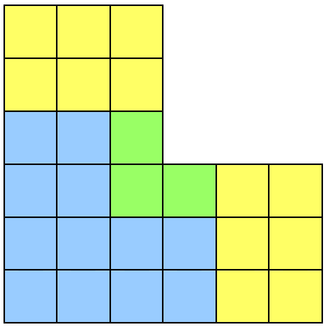
（4）假設 $R_k$ 成立（$k\in N$）



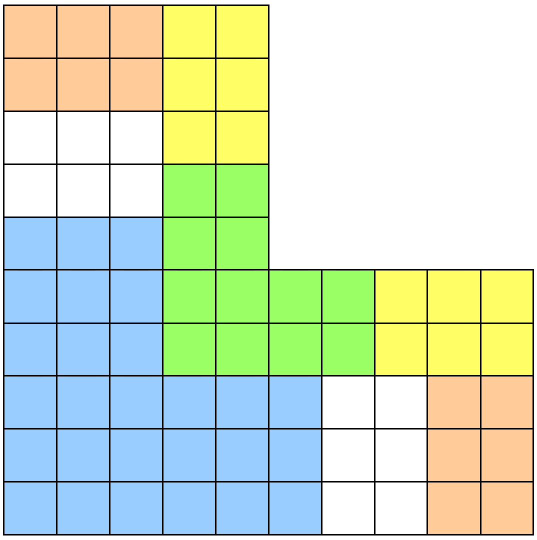

則可推導出偶數圖形關係式： $R_{2k}=4\times R_k$

2.奇數圖形：

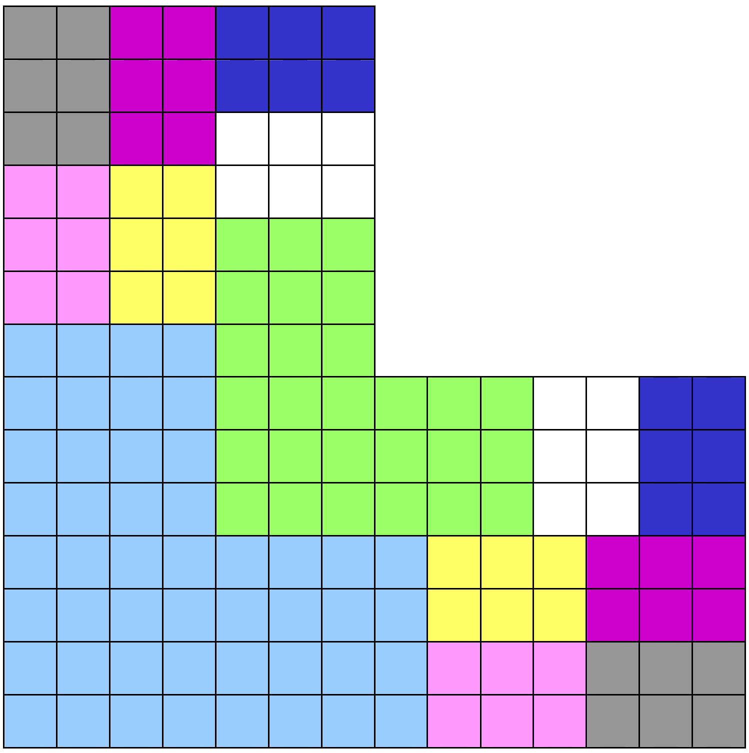
（1）$R_3$



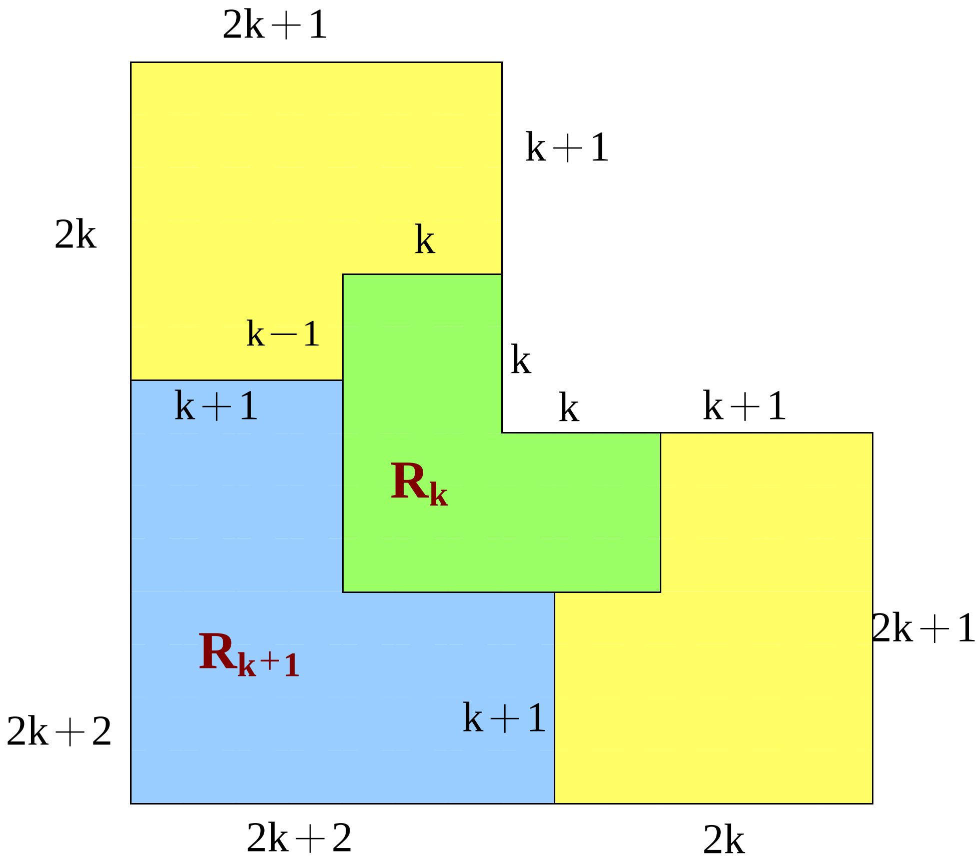
（2）$R_5$



（3）$R_7$



（4）假設 $R_k$、$R_{k+1}$成立（$k\in N$）




2 個黃色區域面積總和＝2[（k＋1）（2k＋1）＋（k－1）（k＋1）]=2（$2k^2$＋3k＋1＋$k^2$－1）＝2（$3k^2$+3k）＝2x3（$k^2$+k）＝2x3xk（k＋1）

亦即有 k（k＋1）個 2x3 矩形，2x3 矩形可被虧格填滿。

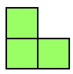
則可推導出奇數圖形關係式：

$$R_{2k+1}=R_k+R_{k+1}+k(k+1)\text{ 個 }(2\times3)\text{ 的矩形}$$

3.**結論**：偶數圖：$R_{2k}$＝4 $R_k$，奇數圖：$R_{2k+1}$＝$R_k$＋$R_{k+1}$＋k（k＋1）個(2x3)的矩形

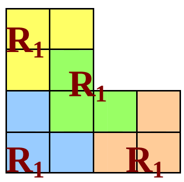
（三）上述主要研究結果的証明如下：

1. k＝1



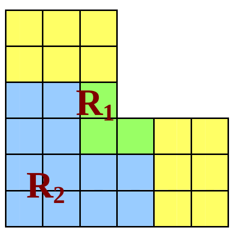
$R_1$成立

2. k＝2



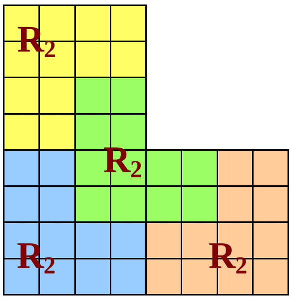

$R_2$＝4 $R_1$，故 $R_2$成立

3. k＝3



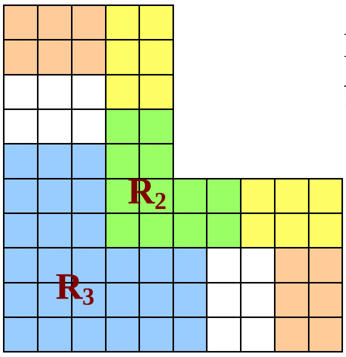

$R_3$＝$R_1$＋$R_2$＋1x2 個（2x3）矩形，故 $R_3$成立

4. k＝4



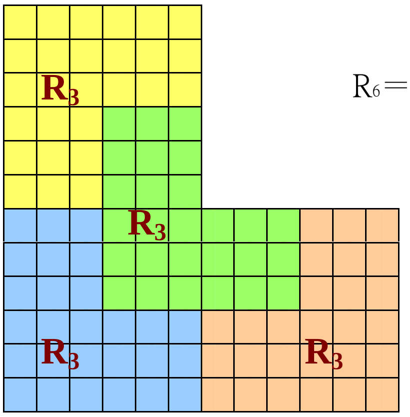

$R_4=4R_2$，故 $R_4$ 成立

5. k＝5




$R_5=R_2+R_3+$2x3 個（2x3）矩形，故 $R_5$ 成立

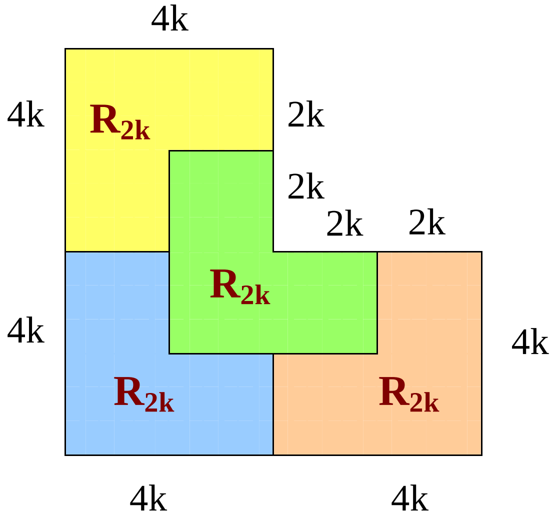
6. k＝6




$R_6=4R_3$，故 $R_6$ 成立

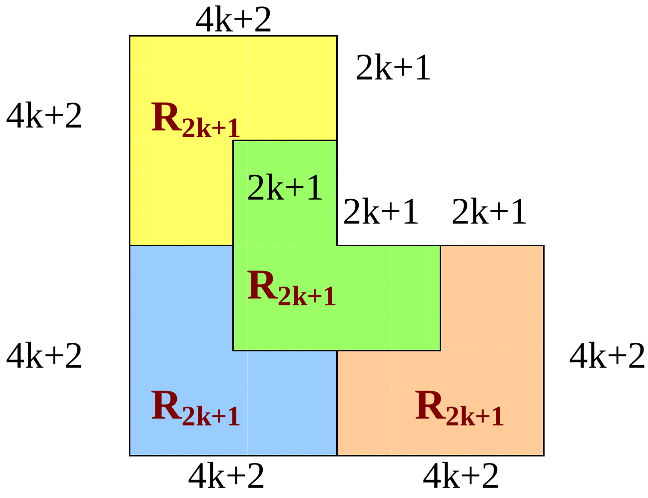
7.因爲 $R_4$ 由 $4R_2$ 填滿，$R_6$ 由 $4R_3$ 填滿，其中 $R_2$ 爲偶數圖形，但 $R_3$ 爲奇數圖形，所以偶數圖形可再分成 $R_{4K}$ 與 $R_{4K+2}$ 二類來證明：

（1）假設 $R_{2k}$ 成立（$k\in N$），則：




$R_{4k}=4\times R_{2k}$　成立

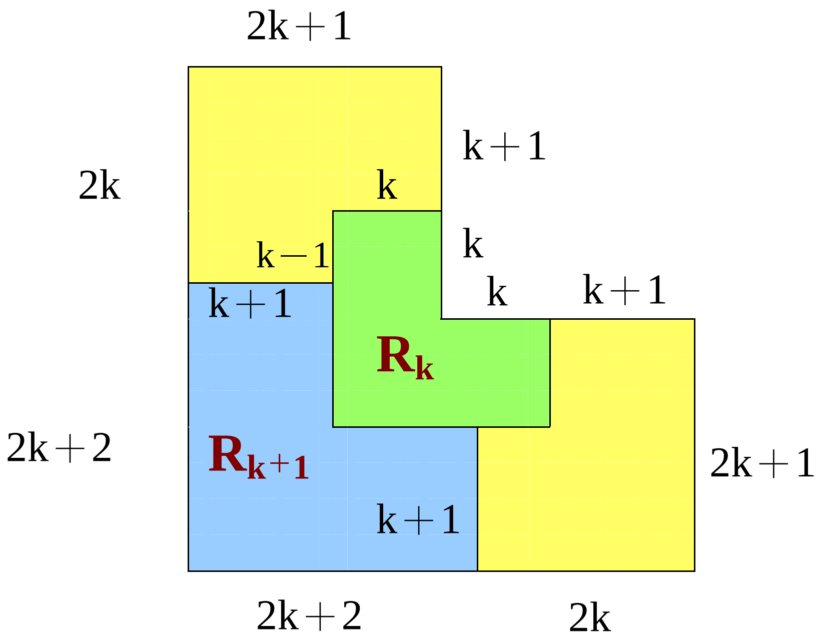
（2）假設 $R_{2k+1}$ 成立（k∈N），則：




$R_{4k+2}=4\times R_{2k+1}$ 成立

8.奇數圖形：

假設 $R_k$、$R_{k+1}$ 成立（k∈N），則：




$R_{2k+1}＝R_k＋R_{k+1}＋k（k＋1）$個（2×3）的矩形，前面已推導出此關係式，故成立

（四）結論：

1.藉由上述研究我們知道所有大 L 型方格皆能被虧格填滿，一種是參考文獻資料所歸納出的三種類型，另一種是我們藉由實作中發現圖形的規律性，優點在於：分類的方法比參考資料更簡單易懂。

2.整理出大 L 型方格被虧格填滿的個數，如下表：

| $R_k$ | 虧格個數 | $R_k$ | 虧格個數 |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 1 | $R_6$ | 36 |
| $R_2$ | 4 | $R_7$ | 49 |
| $R_3$ | 9 | $R_8$ | 64 |
| $R_4$ | 16 | $R_k$ | $k^2$ |
| $R_5$ | 25 | | |

三、探討 m×m－1 的方陣（m∈N 且 m＞1）是否能被虧格填滿，並找出快速填滿方法：

（一）m＜10，經由第一部分的研究與觀察，我們整理出下表：

| m×m－1 方陣 | 被虧格填滿與否 |
|---|---|
| 2×2－1 | 可填滿 |
| 3×3－1 | 3×3－1 不是 3 的倍數，不可能成立 |
| 4×4－1 | 可填滿 |
| 5×5－1 | 只有刪除特定 9 個方格之一才可填滿 |
| 6×6－1 | 同 3×3－1 |
| 7×7－1 | 可填滿 |
| 8×8－1 | 可填滿 |
| 9×9－1 | 同 3×3－1 |

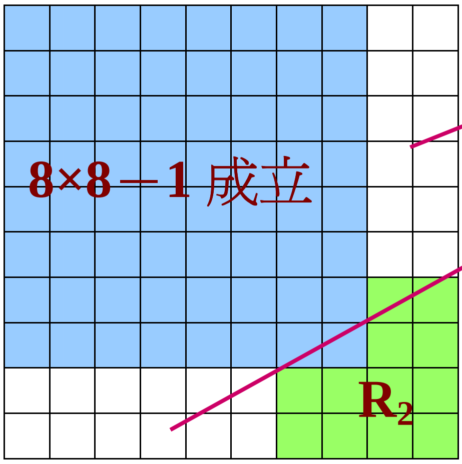
（二）m≥10，且排除 3 的倍數後，可將 m 分成四種情況，討論是否能被虧格填滿：

| | m×m－1 方陣（p∈N） |
|---|---|
| 偶數 | m＝6p＋4 ，例如：10、16、22、28… |
| | m＝6p＋8 ，例如：14、20、26、32… |
| 奇數 | m＝6p＋5 ，例如：11、17、23、29… |
| | m＝6p＋7 ，例如：13、19、25、31… |

1. 偶數：

（1）m＝6p＋4，p＝1 時

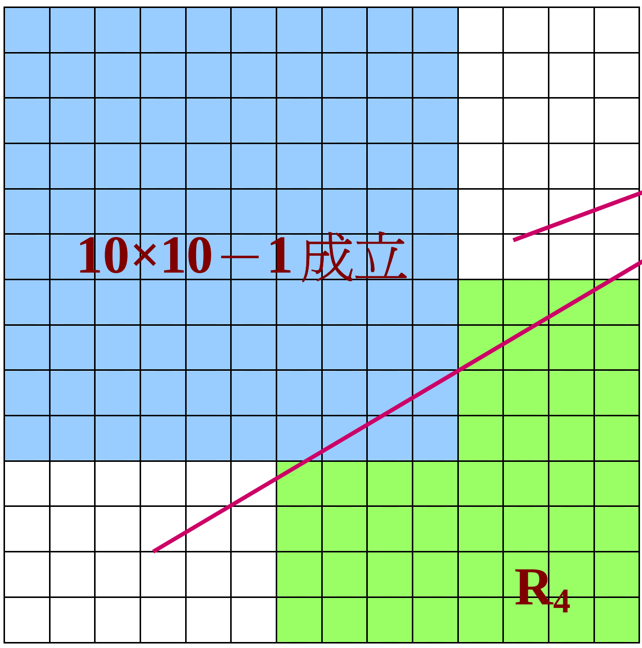
10×10－1 方陣




(1) 2×(3 的倍數)矩形可被虧格填滿。
(2) 8×8－1 方陣只能移動於 10×10 方陣的四個角落。
(3) 10×10 方陣刪除任一格皆能被虧格填滿。

（2）m＝6p＋8，p＝1 時

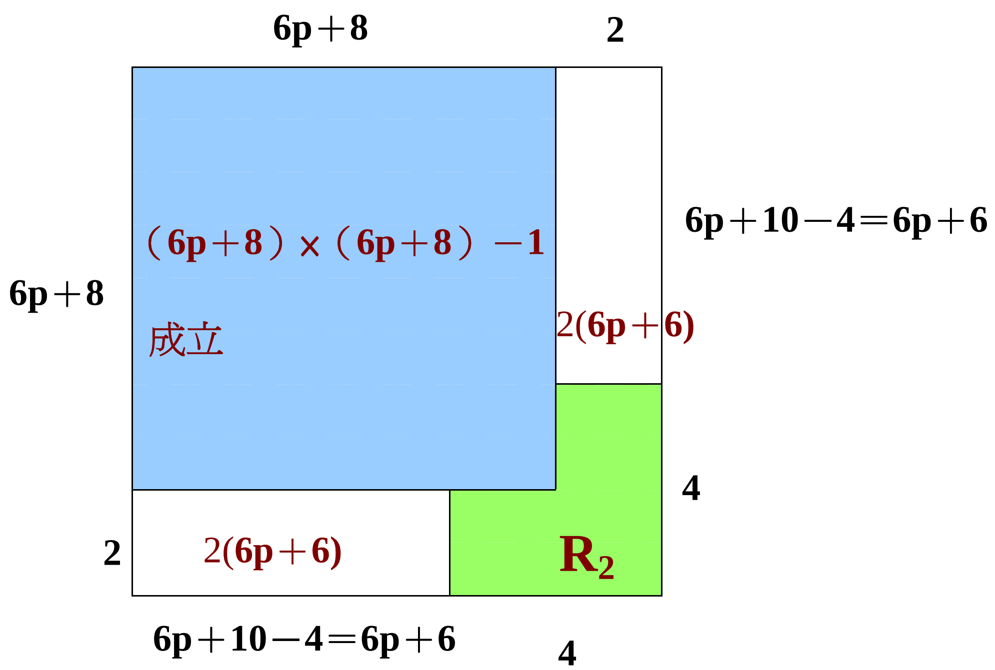
14×14－1 方陣




(1) (2 的倍數)×(3 的倍數)矩形可被虧格填滿。
(2) 10×10－1 方陣只能移動於 14×14 方陣的四個角落。
(3) 14×14 方陣刪除任一格皆能被虧格填滿。

2.（1）假設 m＝6p＋4，m×m－1 的方陣可被虧格填滿。
（2）假設 m＝6p＋8，m×m－1 的方陣可被虧格填滿。

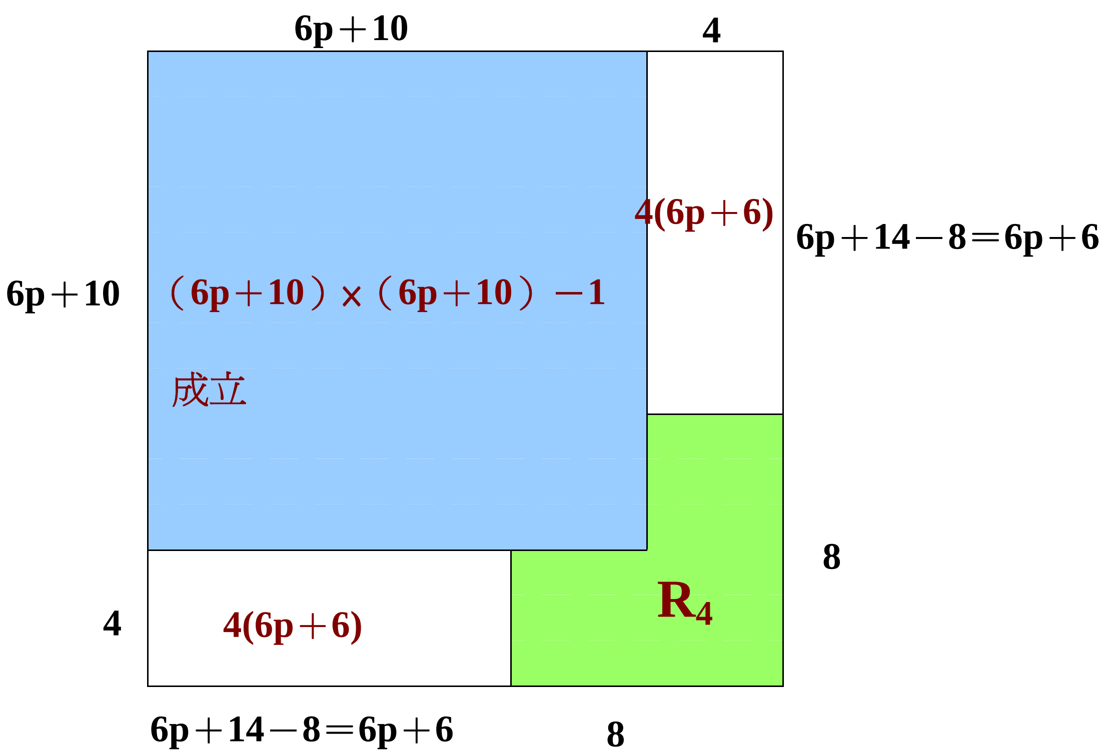
3. 證明：m＝6(p＋1)＋4，m×m－1 的方陣可被虧格填滿。




（1） 2（6p＋6）是 2×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿，故證明成立。

（2）（6p＋8）×（6p＋8）－1 方陣只能移動於（6p＋10）×（6p＋10）方陣的四個角落。

4. 證明：m＝6(p＋1)＋8，m×m－1 的方陣可被虧格填滿。



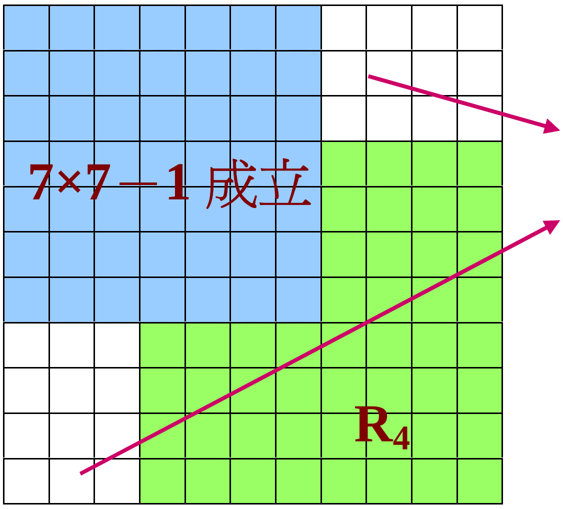

（1） 4（6p＋6）是(2 的倍數)×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿，故證明成立。

（2）（6p＋10）×（6p＋10）－1 方陣只能移動於（6p＋14）×（6p＋14）方陣的四個角落。

5. 奇數：

（1）m＝6p＋5，p＝1 時

11x11－1 方陣



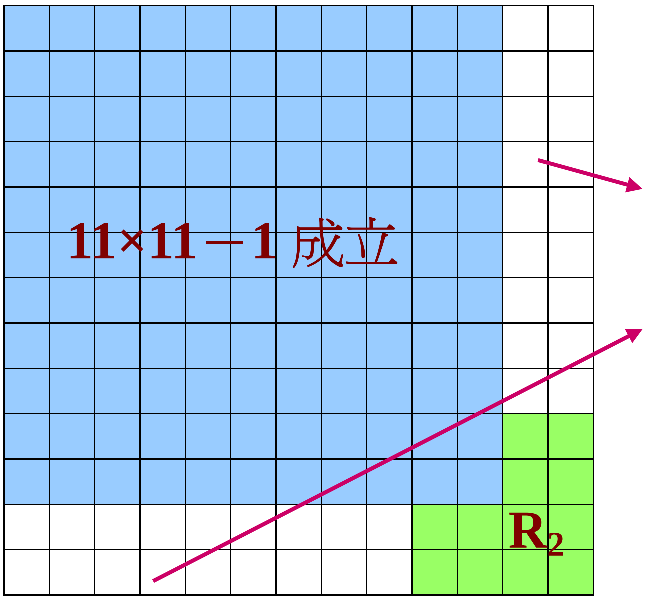

(1) (2 的倍數)x3 矩形可被虧格填滿。

(2) 7x7－1 方陣只能移動於 11x11 方陣的四個角落。

(3) 11x11 方陣刪除任一格皆能被虧格填滿。

（2）m＝6p＋7，p＝1 時

13x13－1 方陣




(1) 2x(3 的倍數)矩形可被虧格填滿。

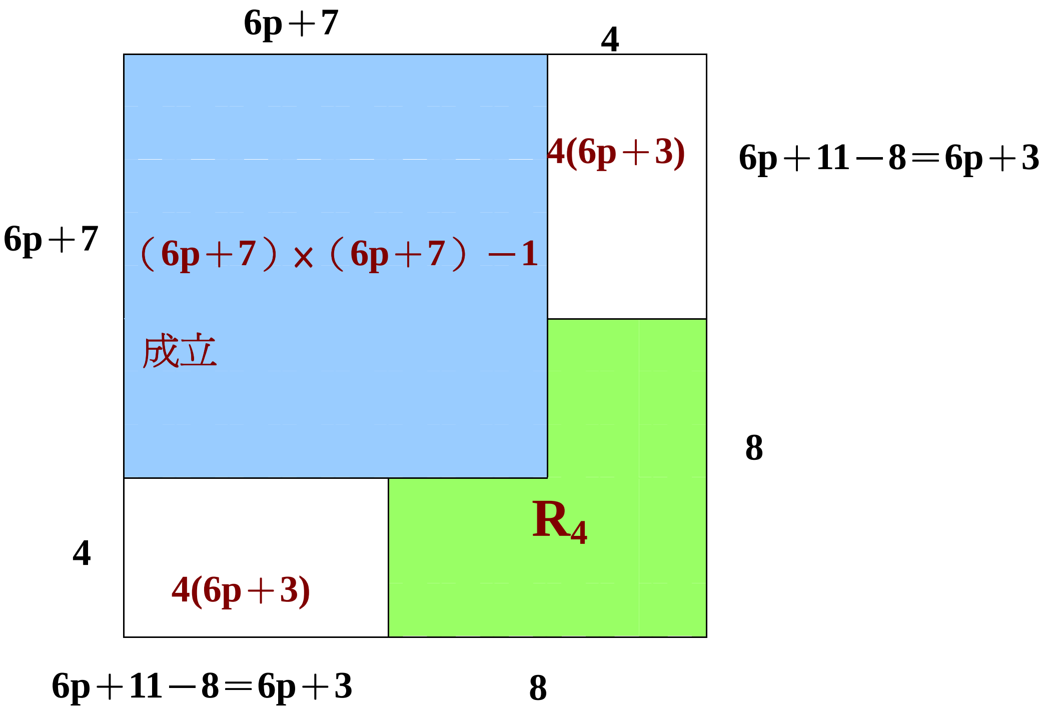
(2) 11x11－1 方陣只能移動於 13x13 方陣的四個角落。

(3) 13x13 方陣刪除任一格皆能被虧格填滿。

6.（1）假設 m＝6p＋5，mxm－1 的方陣可被虧格填滿。

（2）假設 m＝6p＋7，mxm－1 的方陣可被虧格填滿。

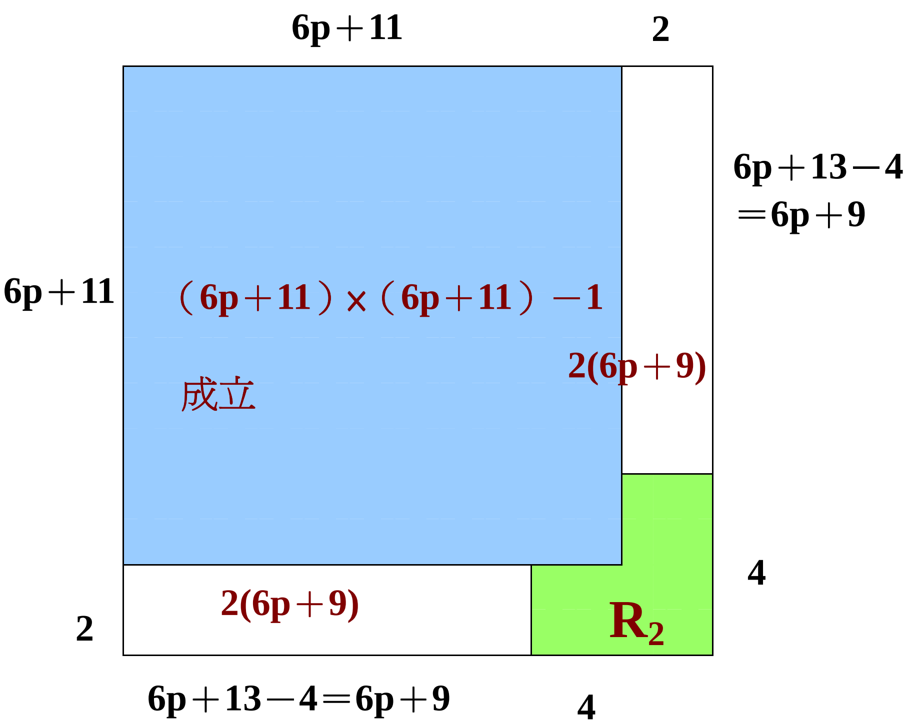
7. 證明：m＝6(p＋1)＋5，m×m－1 的方陣可被虧格填滿。




（1） 4（6p＋3）是(2 的倍數)×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿，故證明成立。

（2）（6p＋7）×（6p＋7）－1 方陣只能移動於（6p＋11）×（6p＋11）方陣的四個角落。

8. 證明：m＝6(p＋1)＋7，m×m－1 的方陣可被虧格填滿。




（1） 2（6p＋9）是 2×(3 的倍數)矩形，可被虧格填滿，故證明成立。

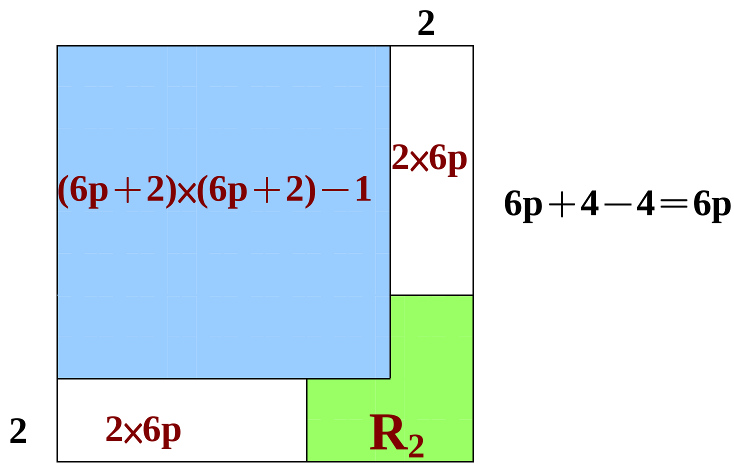
（2）（6p＋11）×（6p＋11）－1 方陣只能移動於（6p＋13）×（6p＋13）方陣的四個角落。

（三）我們已經證明出上述四種情況的方陣能被虧格填滿，接下來整理出可以快速填滿的方式：

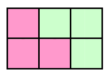
| | m×m－1 方陣（p∈N） | 填滿的方式 | t×t－1 方陣 ＋ $R_k$ ＋（2x3）矩形虧格個數 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 偶數 | m＝6p＋4 | | t＝6p＋2 | $R_2$ | 8p |
| | m＝6p＋8 | | t＝6p＋4 | $R_4$ | 16p |
| 奇數 | m＝6p＋5 | | t＝6p＋1 | $R_4$ | 16p－8 |
| | m＝6p＋7 | | t＝6p＋5 | $R_2$ | 8p＋4 |

說明如下：

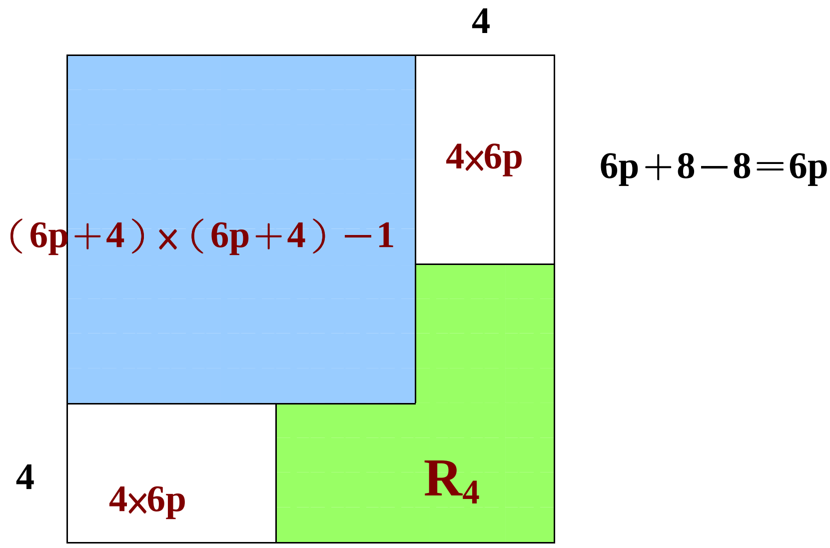
1. m＝6p＋4



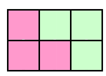

**6p＋4－4＝6p**

2x2x6p＝4x2x3xp＝4p 個（2x3）矩形  ＝8p 個虧格

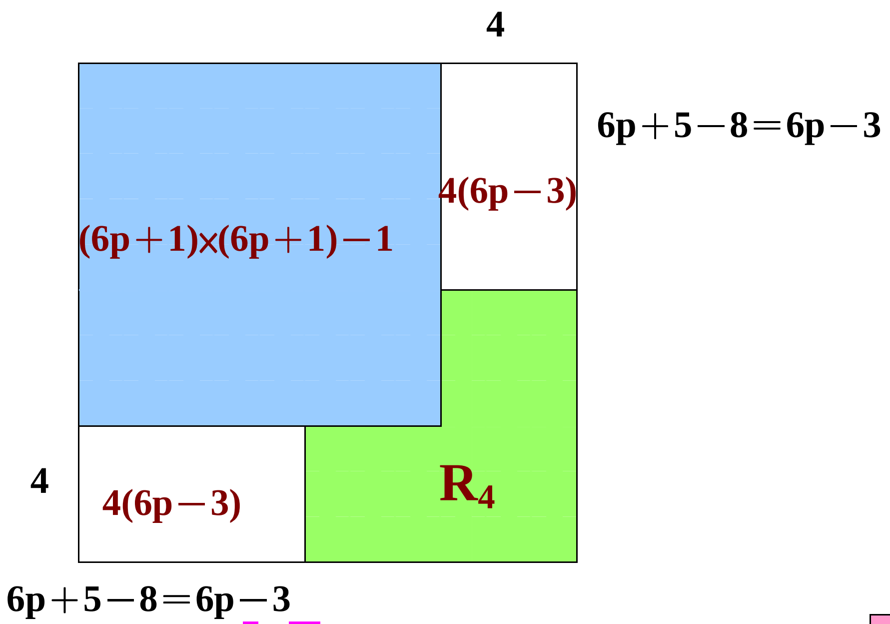
2. m＝6p＋8

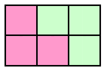



**6p＋8－8＝6p**

2x4x6p＝8x2x3xp＝8p 個（2x3）矩形  ＝16p 個虧格

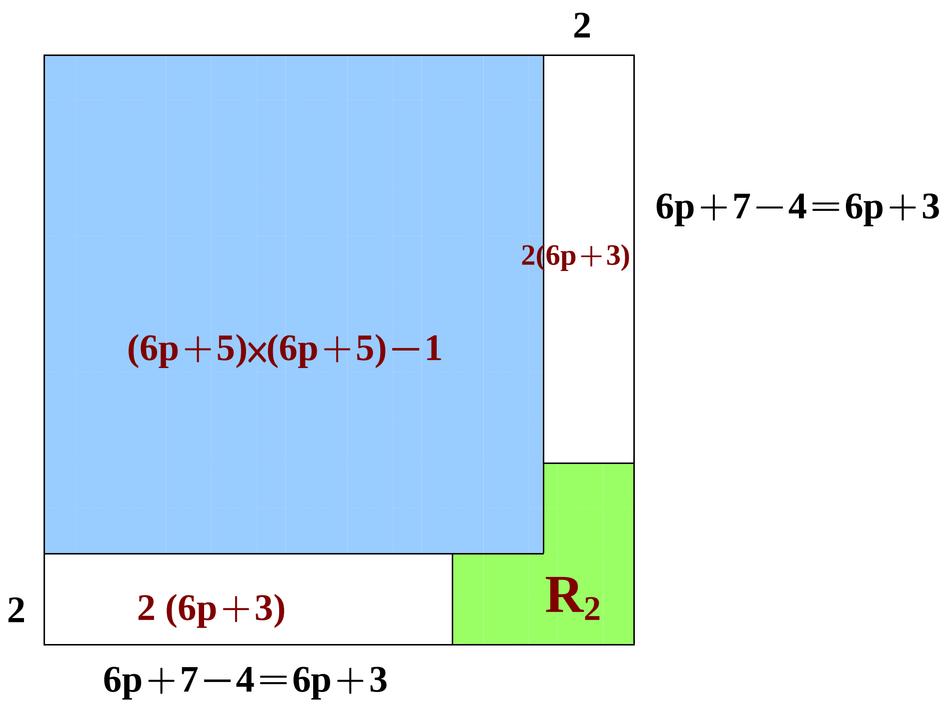
3.　m＝6p＋5

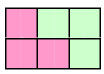



2x4（6p－3）＝2x4x3（2p－1）＝4（2p－1）個（2x3）矩形 

＝8（2p－1）個虧格 ＝16p－8 個虧格

4.　m＝6p＋7




2x2x（6p＋3）＝2x2x3（2p＋1）＝2（2p＋1）個（2x3）矩形 

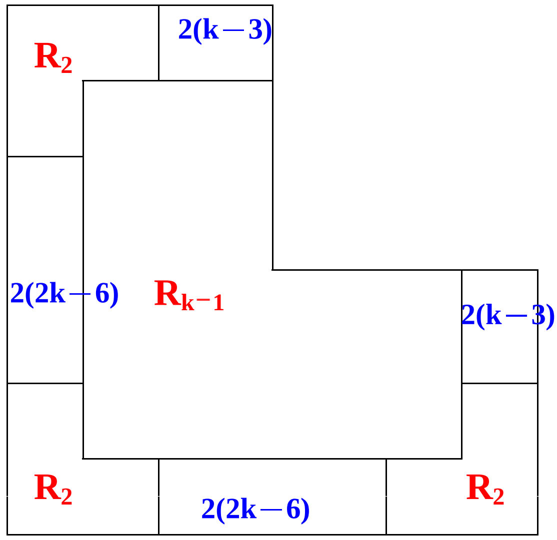
＝4（2p＋1）個虧格 ＝8p＋4 個虧格

# 伍、研究結果

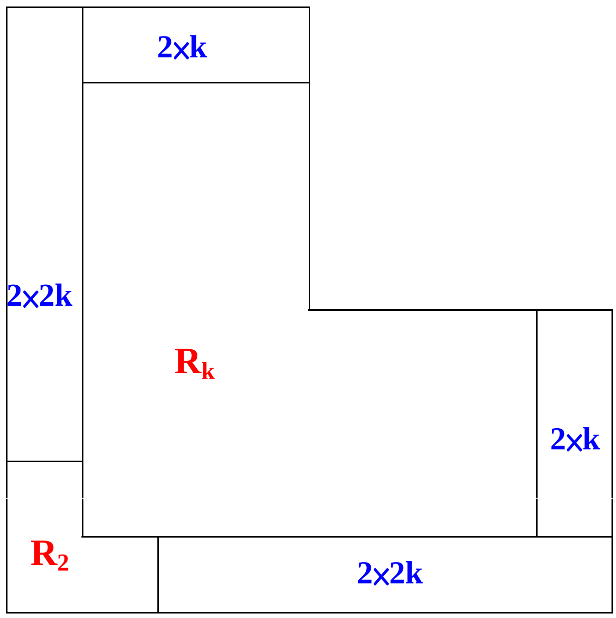
一、$R_k$ 可被虧格填滿的方法：

（一）歸納出三種類型（k≥3 且 k 是 3 的倍數）：

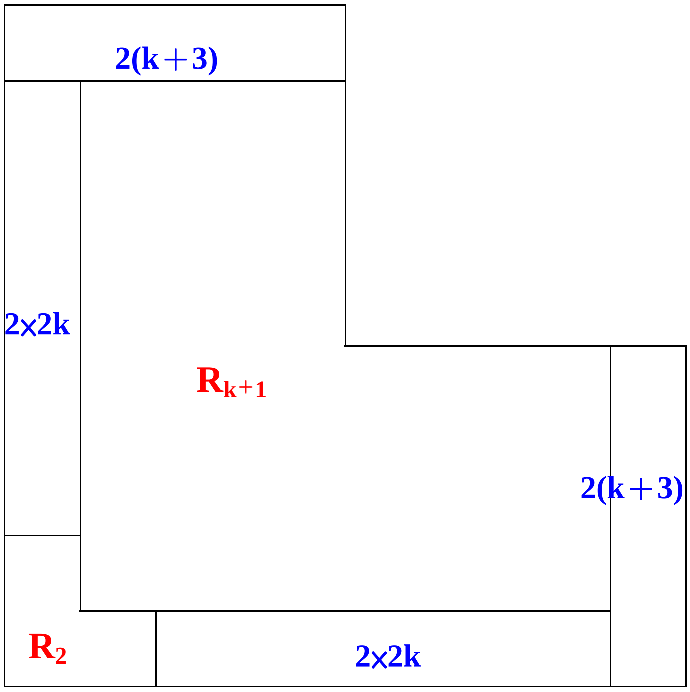
1. $R_{k+1}$




2. $R_{k+2}$



3. $R_{k+3}$




（二）由圖形推導出關係式（$k\in N$）：

1.偶數圖形：$R_{2k}=4R_k$

2.奇數圖形：$R_{2k+1}=R_k+R_{k+1}+k(k+1)$ 個（2x3）的矩形

二、在 $m\times m-1$ 的方陣中（$m\in N$ 且 $m>1$），我們發現除了 m 爲 3 的倍數和 $m=5$ 的情況外，m 爲其他正整數時，方陣中的刪除格在任何位置，皆可被虧格填滿。並找到二種快速填滿的方式：

（一）當 $m=2^n$ 時：$2^n\times2^n-1$ 的方陣中，填滿的虧格數目爲 $a_n=4a_{n-1}+1$

（二）$m<10$ 的方陣可由實際操作得知，$m\geq10$ 如下表：

| | $m\times m-1$ 方陣（$p\in N$） | 填滿的方式 | $t\times t-1$ 方陣 ＋ | $R_k$ | ＋（2x3）矩形虧格個數 |
|---|---|---|---|---|---|
| 偶數 | $m=6p+4$ | | $t=6p+2$ | $R_2$ | 8p |
| | $m=6p+8$ | | $t=6p+4$ | $R_4$ | 16p |
| 奇數 | $m=6p+5$ | | $t=6p+1$ | $R_4$ | $16p-8$ |
| | $m=6p+7$ | | $t=6p+5$ | $R_2$ | $8p+4$ |

# 陸、討論

經過幾個月和老師的討論與研究後，我們循序漸進的找出規則，但也發現應用的範圍不夠廣泛，因此想進一步嘗試如果是 a×b 矩形（a，b 爲大於 1 的正整數，且 a，b 不爲 3 的倍數），刪除任一格方格，剩餘方格是否也皆能被虧格填滿？嘗試結果找出當 a＞b 且 a－b＝3k，k∈N 時，刪除任一格方格，剩餘方格可被虧格填滿，但有限制條件，而限制條件沒有明顯的規律（如附件一），相信以後有機會可以再做更深入的研究。

# 柒、結論

一、m×m－1 的方陣中（m∈N 且 m＞1），除了 m 爲 3 的倍數和 m＝5 的情況外，m 爲其他正整數時，方陣中的刪除格在任何位置，皆可被虧格填滿。

二、m 爲 3 的倍數時，不能被虧格填滿，已證明；m=5 時，藉由第一部分的研究與觀察，如圖(一)所示，刪除格在某些位置時，是可以被虧格填滿。

# 捌、參考資料及其他


一、國中數學二下第一章數列與級數，康軒文教事業，2007。

二、國中數學二下第二章幾何圖形，康軒文教事業，2007。

三、高中基礎數學第一冊2-3數學歸納法，十二版，國立編譯館，P79-80，1995。

四、台北縣95學年度國民中小學科學展覽作品：幾何拼圖。

五、John P. D’Angelo ＆ Douglas B. West，Mathematical thinking：problem-solving and proofs，Second edition，Prentice-Hall，P61-62，2000。

# 附件一：

※a×b 矩形（a，b 爲大於 1 的正整數，且 a，b 不爲 3 的倍數），刪除任一格方格，剩餘方格是否也皆能被虧格填滿？

比值$\frac{1}{4}$

2×8：當×在 3 的倍數直行時，無法用虧格填滿。

4×16：全可。

5×20：全可。

7×28：全可。

8×32：全可。

10×40：全可。

比值$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$

2×5：當×在 3 的倍數直行時，無法用虧格填滿。

4×10：全可。

8×20：全可。

10×25：全可。

16×40：全可。

比值$\frac{1}{7}$

2×14：當×在 3 的倍數直行時，無法用虧格填滿。

4×28：全可。

5×35：當×在下圖位置時無法用虧格填滿。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | × |  | × |  |  |  | × |
| × | × | × | × | × |  | × | × |
|  | × |  | × |  |  |  | × |
| × | × | × | × | × |  | × | × |
|  | × |  | × |  |  |  | × |

……依此類推

7×49：全可。

10×70：全可。

比值$\frac{4}{7}$

4×7：全可。

8×14：全可。

12×21：全可。

比值$\frac{5}{8}$

5×8：全可。

10×16：全可。

20×32：全可。

比值$\frac{1}{10}$

2×20：當×在 3 的倍數直行時，無法用虧格填滿。

4×40：全可。

5×50：全可。

7×70：全可。

8×80：全可。

10×100：全可。

比值$\frac{7}{10}$

7×10：全可。

14×20：全可。

28×40：全可。

由以上實際操作中整理出：

1. 2×b：當刪除格在下圖位置時，無法用虧格填滿。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  | × |  |  | × |  |  | × |
|  |  | × |  |  | × |  |  | × |

……依此類推

2. a×b：其中只要 a 或 b 有一個是 4 的倍數，皆可。
3. a×10a：全可。（$a\neq2$）
4. 5m×2n：全可。（m，$n\in N$，$n\neq1$）
5. 5m×（2n＋1）：當刪除格在下圖位置時，無法用虧格填滿。（m，$n\in N$）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | × |  | × |  |  |  | × |
| × | × | × | × | × |  | × | × |
|  | × |  | × |  |  |  | × |
| × | × | × | × | × |  | × | × |
|  | × |  | × |  |  |  | × |

……依此類推

## 【評語】030414

透過將圖形分解為特定型態（L 型及正方形）的方式，作者先證明了一般的 L 型的方格可用三格的 L 形加以填滿，再由此得出一般 n×n 的正方形格狀圖的虧格問題的解答。分析的方法非常簡潔，說明也很清楚。比較可惜的是，沒能對一般的 n×m 的格狀圖作進一步的討論。如果能說明那些 n×m 的格狀圖（無虧格）可被三格的 L 形填滿，對解決一般 n×m 的矩形的虧格問題應該有幫助，可再努力以求對問題有更完整的結果。