中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030413

在一任意凸N邊形內作連續M個整數凸多邊形的切割

學校名稱：臺中縣立四箴國民中學

作者：	指導老師：
國二 朱詠仙	李映良
國二 陳昭延	
國二 陳冠銘	
國二 鄭雅萍	

關鍵詞：多邊形、內角和、切割

在一任意凸 N 邊形內作連續 M 個整數凸多邊形的切割

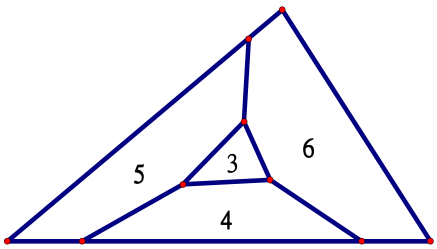
摘要

在切割了許多的圖形後，我們發現比較簡便而有趣的切割方法！我們嘗試透過特定的數學方法，找出有規律或固定模式且通用的切割方法來歸納、簡化切割的做法。整理、推論出可能的方法（邊連邊法、放射法、分枝法、夾心法）和結果數的規律並說明我們所用的方法是否正確。

壹、研究動機

老師在一次的考卷上出了一個有意思的題目：如下圖，在一個三角形內，切割成四個「連續」的「凸」多邊形，一個是三角形，一個是凸四邊形，一個是凸五邊形，一個是凸六邊形，請問這個三角形在切割後，則所有（3，4，5，6）邊形的內角和比原本三角形的內角和增加多少？

我們將此題目推廣成此次的研究。既然三角形可以切割成（3，4，5，6），那三角形能不能切割成（3，4）、（3，4，5）、（3，4，5，6，7）…等的圖形呢？那麼四邊形可以怎麼切呢？五邊形呢？六邊形呢？…可以一直切割下去嗎？所以我們就開始了此次的研究。



貳、研究目的

一、將問題推廣至凸 N 邊形，做連續 M 個整數凸多邊形的切割。

二、尋找數學方法，簡化切割的方法。

三、整理、推論可能的方法和結果數，並証明之。

四、尋找比較簡便的切割方法。

五、希望能找出有規律或固定模式且通用的切割方法。

六、希望能找出凸 N 邊形的切割極限。

參、研究設備及器材

紙、筆、圓規、尺、數學軟體 Gsp。

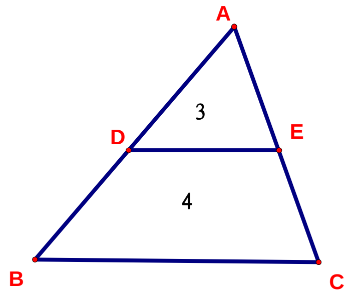
肆、研究過程與方法

一、尋找數學方法，簡化切割的方法

（一） 凸 n、凸 n+1、凸 n+2、…凸 n+k 邊形的內角和

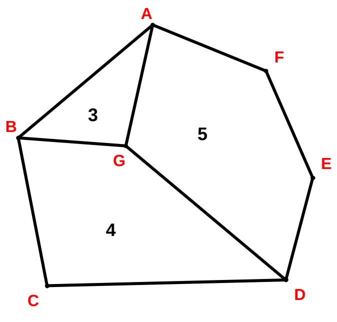
$$=180(n-2)+180(n+1-2)+180(n+2-2)+\ldots+180(n+k-2)$$
$$=180[\frac{(2n-4+k)(k+1)}{2}]=180t, t\in N$$

（二）多一個『邊上點』，會使凸多邊形的總內角和多 180°



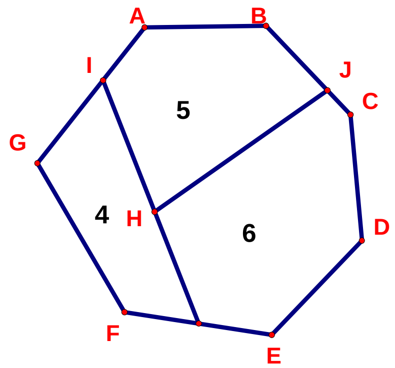
如上圖，△ABC 在多了 2 個『邊上點』D、E 後，便形成了一個三角形和一個四邊形，總內角和從原本的 180°，變成了 180°＋360°，其中多的 360°≒180°× 2，便是由 2 個『邊上點』所造成。

（三）多一個『內部點』，會使凸多邊形的總內角和多 360°



如上圖，六邊形 ABCDEF 在多了 1 個『內部點』G 後，便形成了一個三角形、一個四邊形和一個五邊形，總內角和從原本的 720°，變成了 180°＋360°＋540°，其中多的 360°，便是由 1 個『內部點』所造成。

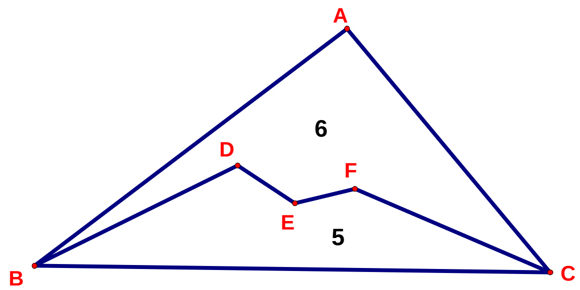
（四）多一個『假內部點』，會使凸多邊形的總內角和多 180°



如上圖，七邊形 ABCDEFG 在多了 1 個『假內部點』H 後，真正增加的角度只有 180°。

（五）由最大邊數的多邊形找起。

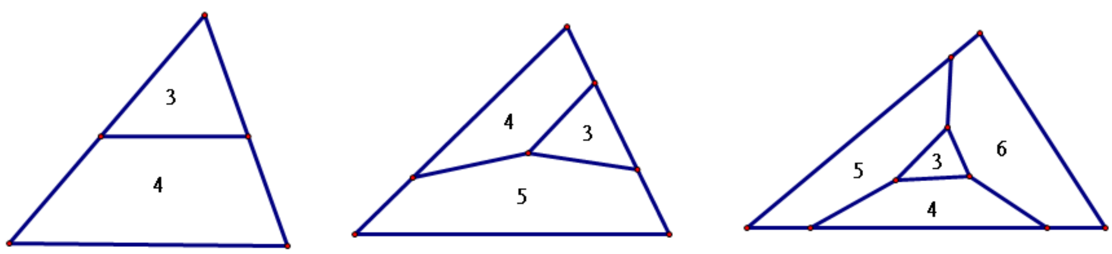
（六）排除凹多邊形的情況



如上圖，若要在△ABC 內製造出一個五邊形和一個六邊形，總內角和為 540°＋720°－180°＝360°× 3， 可使用多 3 個『內部點』D、E、F 造成，但因所成圖形是凹多邊形，並不符合我們的研究主題。

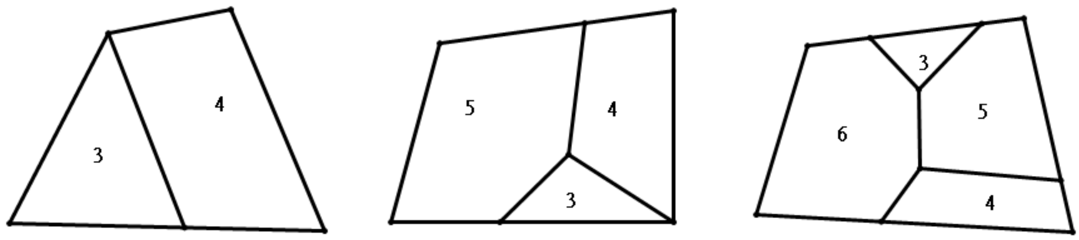
三、探討可能的結果數

（一） 三邊形



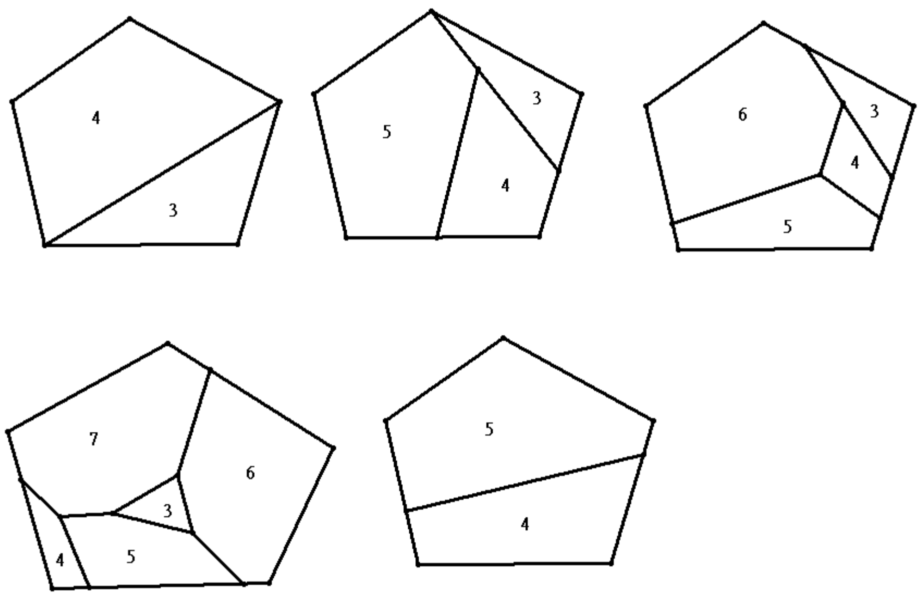
在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有（3,4）、（3,4,5）、（3,4,5,6）等 3 種。

（二） 四邊形



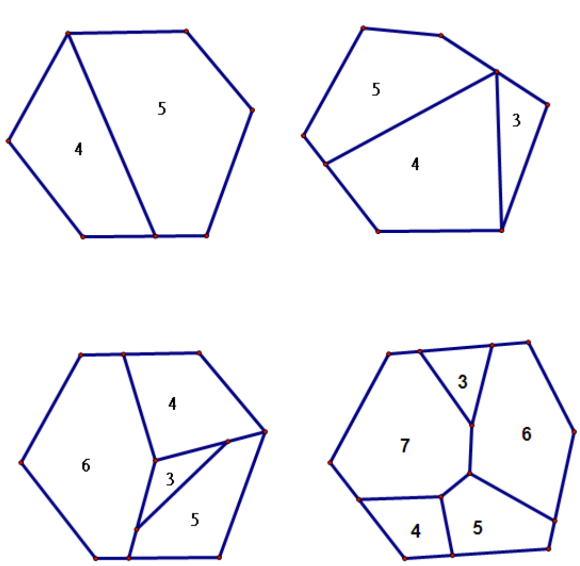
在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有（3,4）、（3,4,5）、（3,4,5,6）等 3 種。

（三）五邊形



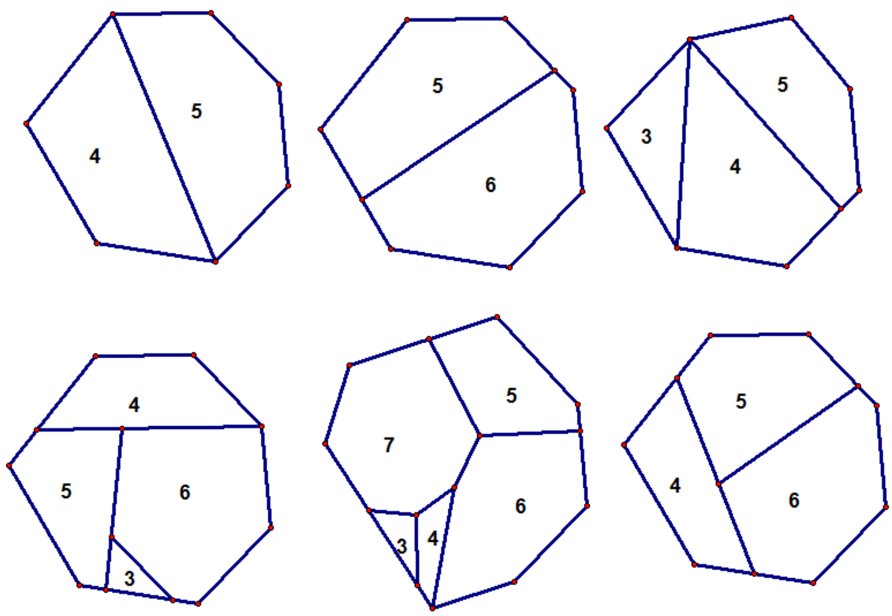
在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有（3,4）、（4,5）、（3,4,5）、（3,4,5,6）、（3,4,5,6,7）等 5 種。

（四）六邊形



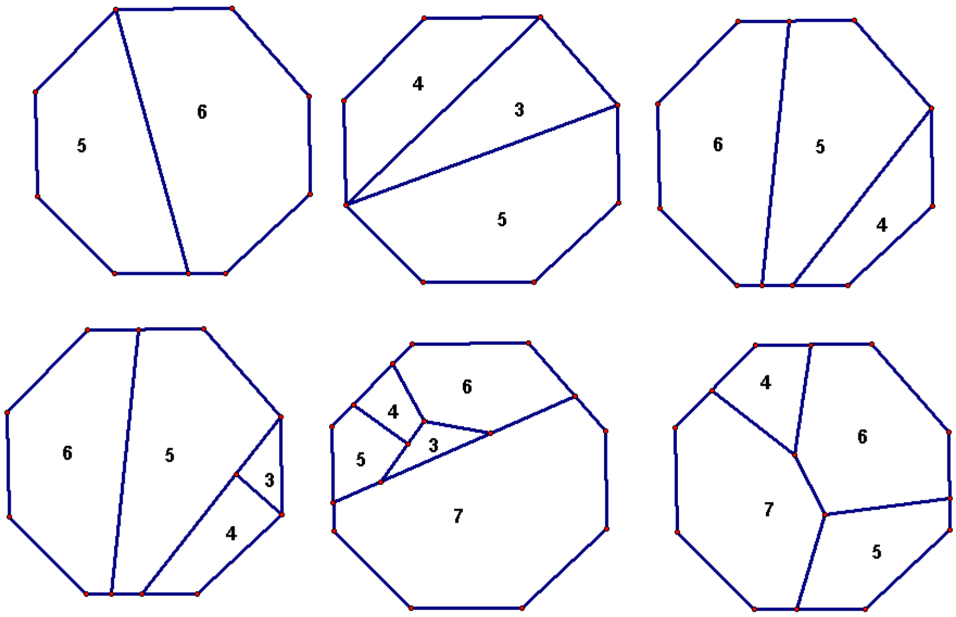
在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有(4,5)、(3,4,5)、(4,5,6)、(3,4,5,6)、(3,4,5,6,7)等 5 種。

（五） 七邊形



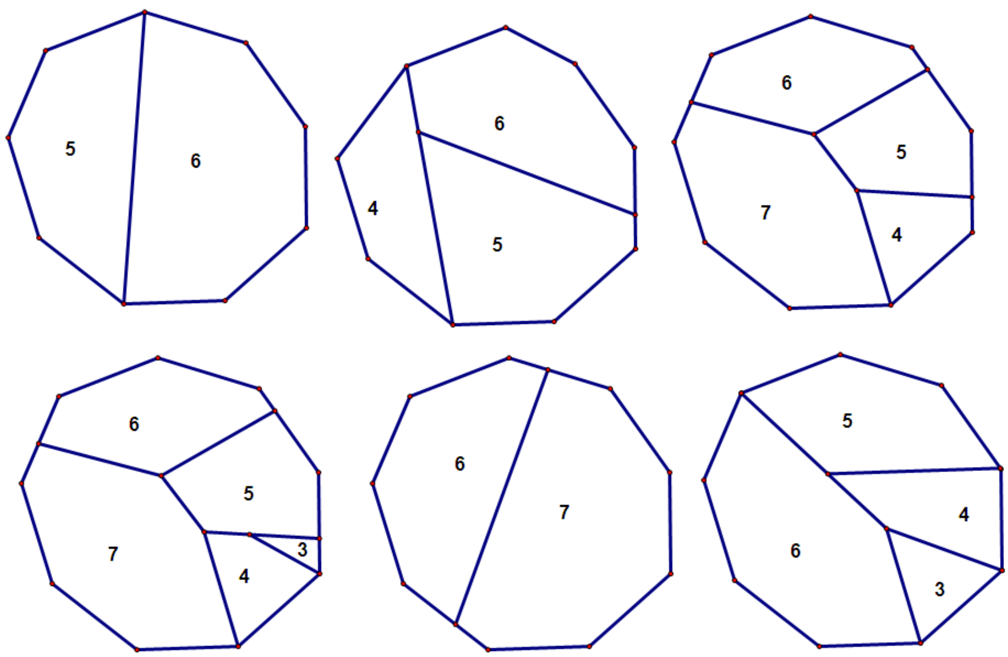
在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有(4,5)、(5,6)、(3,4,5)、(4,5,6)、(3,4,5,6)、(3,4,5,6,7)等 6 種。

（六）八邊形



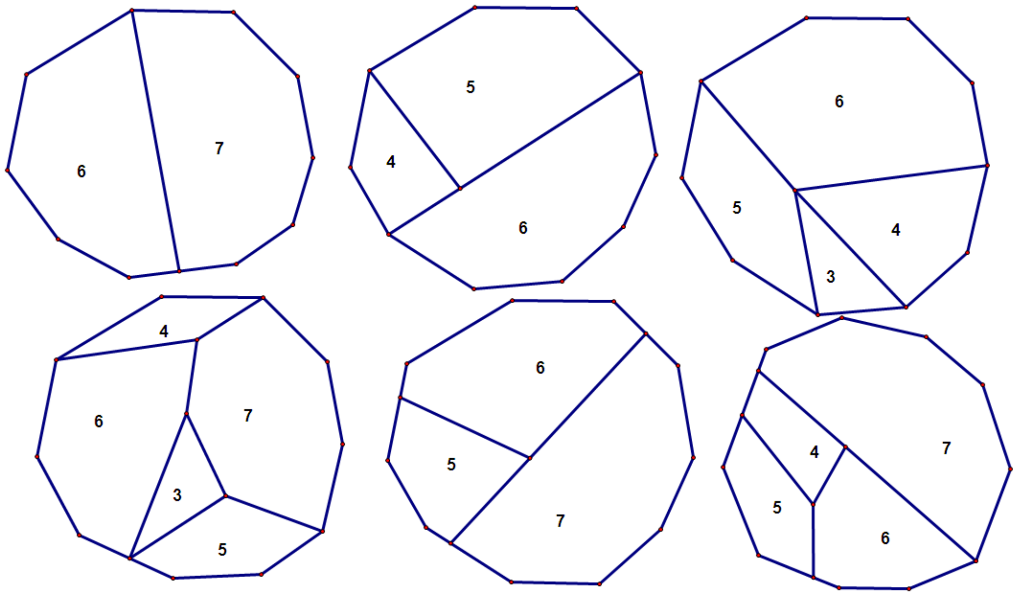
在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有（5,6）、（3,4,5）、（4,5,6）、（3,4,5,6）、（4,5,6,7）、（3,4,5,6,7）等 6 種。

（七）九邊形



在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有（5,6）、（6,7）、（4,5,6）、（3,4,5,6）、（4,5,6,7）、（3,4,5,6,7）等 6 種。

（八） 十邊形



在不考慮同一種類型的多種畫法下，可能的類型有（6,7）、（4,5,6）、（5,6,7）、（3,4,5,6）、（4,5,6,7）、（3,4,5,6,7）等 6 種。

四、綜合討論

任意凸 N 多邊形內作連續 M 個整數凸多邊形的切割的整理和推論：

M / N	2	3	4	5
3	（3,4）	（3,4,5）	（3,4,5,6）	
4	（3,4）	（3,4,5）	（3,4,5,6）	
5	（3,4）、（4,5）	（3,4,5）	（3,4,5,6）	（3,4,5,6,7）
6	（4,5）	（3,4,5）、（4,5,6）	（3,4,5,6）	（3,4,5,6,7）
7	（4,5）、（5,6）	（3,4,5）、（4,5,6）	（3,4,5,6）	（3,4,5,6,7）
8	（5,6）	（3,4,5）、（4,5,6）	（3,4,5,6） （4,5,6,7）	（3,4,5,6,7）

9	（5,6）、（6,7）	（4,5,6）	（3,4,5,6） （4,5,6,7）	（3,4,5,6,7）
10	（6,7）	（4,5,6）、（5,6,7）	（3,4,5,6） （4,5,6,7）	（3,4,5,6,7）
n-1 （n 是偶數，n≥6）	（$\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1$）、 （$\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2$）			
n （n 是偶數，n≥4）	（$\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2$）			
4k+1 （$k\in N$）		（k+2, k+3, k+4）		
4k+m （m=2,3,4，$k\in N$）		（k+2, k+3, k+4） （k+3, k+4, k+5）		

五、推論的証明

（一） n 邊形（n 是偶數，n≥4），可分成（$\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2$）

∵n 邊形內角和＝$180^\circ(n-2)$

$$180^\circ\left(\frac{n}{2}+1-2+\frac{n}{2}+2-2\right)=180^\circ(n-1)$$，二者差180°

∴只需在 n 邊形內，做出一個「邊上點」即可分成（$\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2$）。

（二） n-1 邊形（n 是偶數，n≥6），可分成（$\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1$）、（$\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2$）

1.∵ n-1 邊形內角和＝180°(n-3)

$$180^\circ\left(\frac{n}{2}-2+\frac{n}{2}+1-2\right)=180^\circ(n-3)$$

∴只需在 n 邊形內，連接二個頂點即可做出（$\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1$）。

2.∵ n-1 邊形內角和＝180°(n-3)

$$180^\circ\left(\frac{n}{2}+1-2+\frac{n}{2}+2-2\right)=180^\circ(n-1)$$ ，二者差 360°

∴只需在 n 邊形內，連接二個「邊上點」即可做出（$\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2$）。

（三） 4k+1 邊形（$k\in N$），可分成（k+2, k+3, k+4）

∵ 4k+1 邊形內角和＝180°(4k+1-2)＝180°(4k-1)

$$180^\circ(k+2-2+k+3-2+k+4-2)=180^\circ(3k+3)$$

$$180^\circ(3k+3)-180^\circ(4k-1)=180^\circ(4-k)$$

∴在 k=1,2,3,4 時，即 5,9,13,17 邊形，可利用本研究所介紹的切割法做出（k+2, k+3, k+4）。

但如在 k＞4，即 21 邊形以上，因邊數過多，是做不到的。

故我們的推論應修正為 4k+1 邊形（$k=1,2,3,4$），可分成（k+2, k+3, k+4）。

（四） 4k+m 邊形（m=2,3,4，$k\in N$），可分成（k+2, k+3, k+4）、（k+3, k+4, k+5）

1.∵ 4k+m 邊形內角和＝180°(4k+m-2)

$$180^\circ(k+2-2+k+3-2+k+4-2)=180^\circ(3k+3)$$

$180^{\circ}(3k+3)-180^{\circ}(4k+m-2)=180^{\circ}(5-m-k)$

∴在 k=1，m=2,3,4 時，即 6,7,8 邊形，可切割出（k+2, k+3, k+4）。

在 k=2，m=2,3 時，即 10,11 邊形，可切割出（k+2, k+3, k+4）。

在 k=3，m=2 時，即 14 邊形，可切割出（k+2, k+3, k+4）。

在 k≥4 時無法做出（k+2, k+3, k+4）。

2.∵4k+m 邊形內角和＝$180^{\circ}(4k+m-2)$

$$180^{\circ}(k+3-2+k+4-2+k+5-2)=180^{\circ}(3k+6)$$

$$180^{\circ}(3k+6)-180^{\circ}(4k+m-2)=180^{\circ}(8-m-k)$$

∴在 k=1，m=2,3,4 時，即 6,7,8 邊形，可切割出（k+3, k+4, k+5）。

在 k=2，m=2,3,4 時，即 10,11,12 邊形，可切割出（k+3, k+4, k+5）。

在 k=3，m=2,3,4 時，即 14,15,16 邊形，可切割出（k+3, k+4, k+5）。

在 k=4，m=2,3,4 時，即 18,19,20 邊形，可切割出（k+3, k+4, k+5）。

在 k=5，m=2,3 時，即 22,23 邊形，可切割出（k+3, k+4, k+5）。

在 k=6，m=2 時，即 26 邊形，可切割出（k+3, k+4, k+5）。

在 k≥7 時無法做出（k+3, k+4, k+5）。

3.∵n 邊形內角和＝$180^{\circ}(n-2)$

3,4,5 邊形的內角總和=$180^{\circ}(3+4+5-2-2-2)=180^{\circ}\times 6$

$$180^{\circ}\times 6-180^{\circ}(n-2)=180^{\circ}(8-n)$$

∴在 n=3~8 時，即 3~8 邊形，可切割出（3,4,5）。

（五）証明 M=4 時的情形

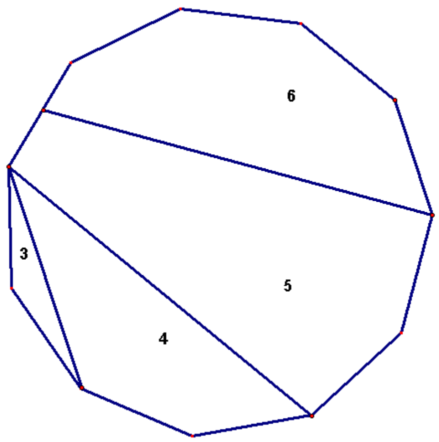
1. ∵n 邊形內角和＝$180^\circ(\text{n-2})$；

3,4,5,6 邊形的內角總和=$180^\circ(3+4+5+6-2-2-2-2)=180^\circ\times 10$

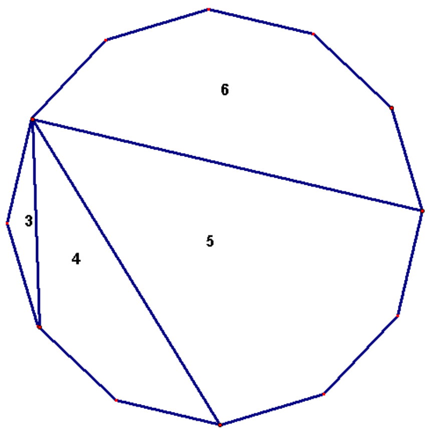
$180^\circ\times 10-180^\circ(\text{n-2})=180^\circ(12-n)$

∴在 n=3~12 時，即 3~12 邊形，可切割出（3,4,5,6）。

根據這個論証，我們又畫出了（3,4,5,6）的 n=11~12 的情形。



n =11



n=12

2.∵n 邊形內角和＝$180^\circ(\text{n-2})$

a,a+1,a+2,a+3 邊形$(a\in N, a\geq 3)$的內角總和

=$180^\circ(a+a+1+a+2+a+3-2-2-2-2)=180^\circ\times(4a-2)$

$180^\circ\times(4a-2)-180^\circ(\text{n-2})=180^\circ(4a-n)$

n	3~12	3~16	3~20	3~4b
a	3	4	5	b
分割	(3,4,5,6)	(4,5,6,7)	(5,6,7,8)	(b,b+1,b+2,b+3)

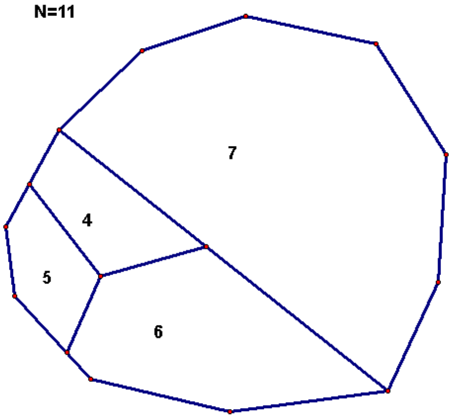
∴在 n=3~12 時，即 3~12 邊形，可切割出（3,4,5,6）。

在 n=3~16 時，即 3~16 邊形，可切割出（4,5,6,7），但仍必須排除凹多邊形的情況。

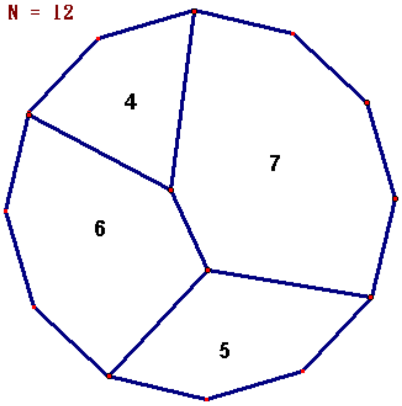
在 n=3~4b 時，即 3~4b 邊形，可切割出(b,b+1,b+2,b+3)，但仍必須排除凹多邊形的情況。

3.根據上面的論証，我們又畫出了（4,5,6,7）的 n=11~16 的情形。

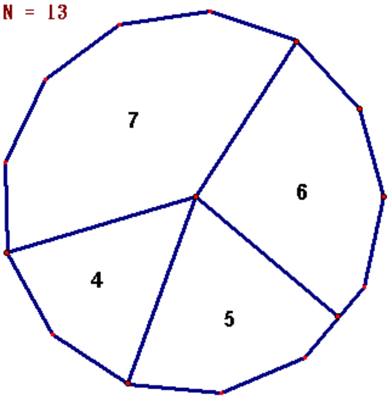
N=11



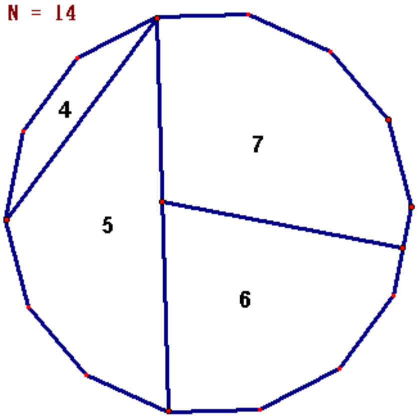
N = 12



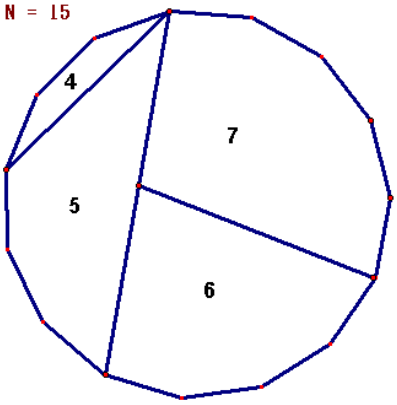
N = 13



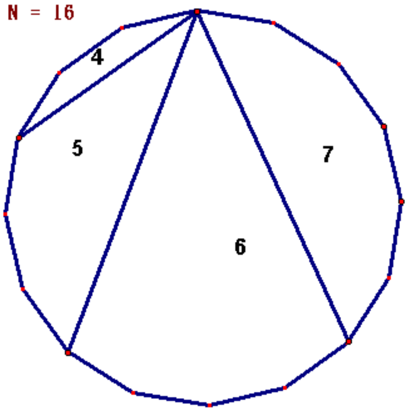
N = 14



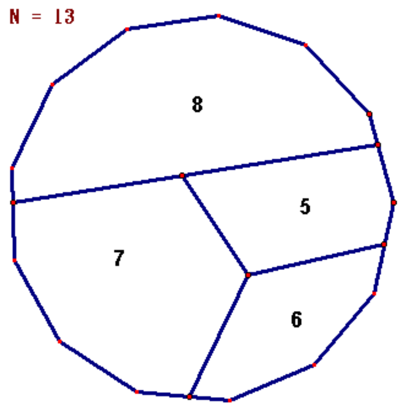
N = 15

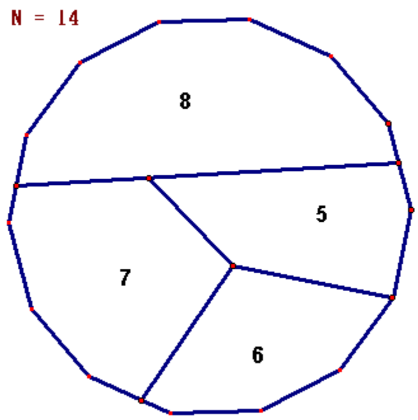


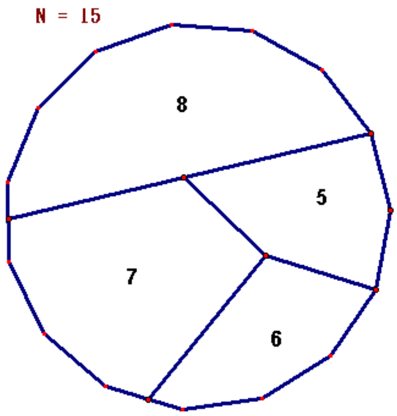
N = 16

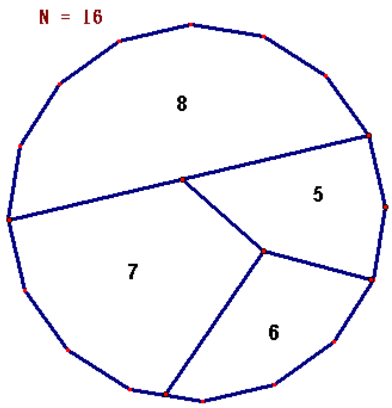


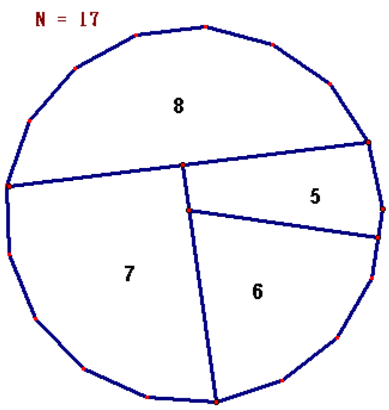
4.根據上面的論証，我們又畫出了（5,6,7,8）的 n=13~20 的情形。

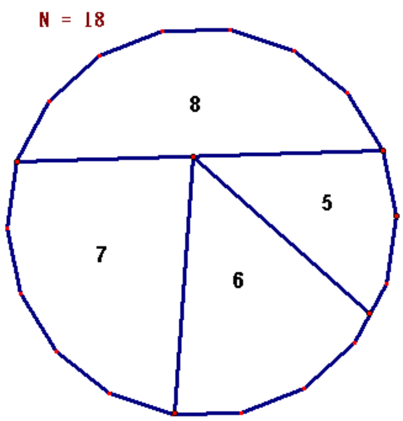


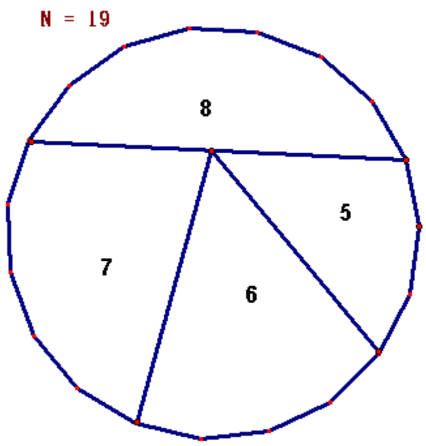


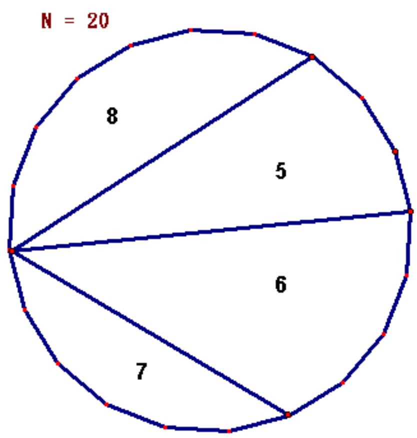












（六）證明 M=5 時的情形

$\because$ n 邊形內角和＝180°(n-2)

a,a+1,a+2,a+3,a+4 邊形$(a\in N, a\geq 3)$的內角總和

$=180^\circ(a+a+1+a+2+a+3+a+4-2-2-2-2-2)=180^\circ\times(5a)$

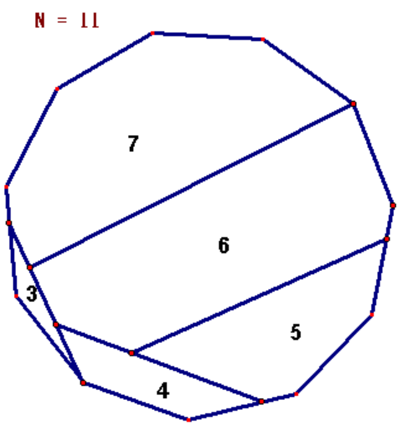
$180^\circ\times(5a)-180^\circ(n\text{-}2)=180^\circ(5a-n+2)$

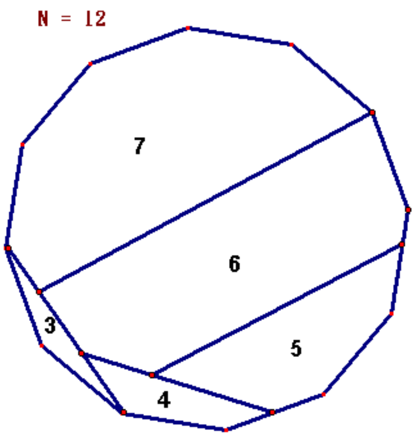
n	3~17	3~5b+2
a	3	b
分割	(3,4,5,6,7)	(b,b+1,b+2,b+3,b+4)

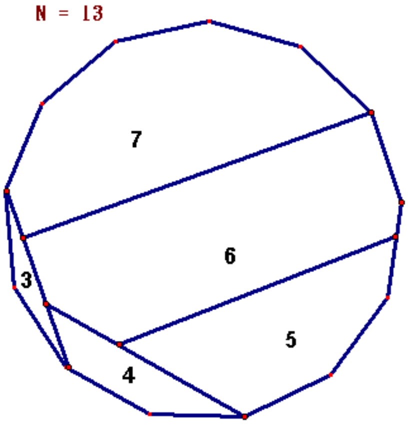
$\therefore$ 在 n=3~17 時，即 3~17 邊形，可切割出（3,4,5,6,7），但仍必須排除凹多邊形的情況。

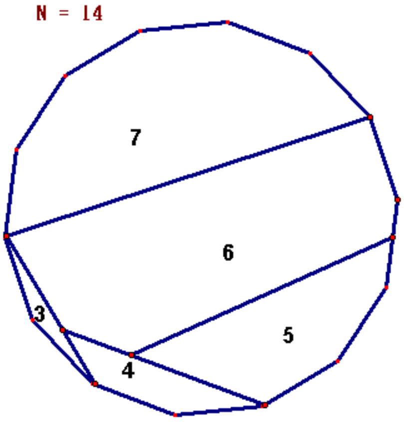
在 n=3~5b+2 時，即 3~5b+2 邊形，可切割出(b,b+1,b+2,b+3,b+4)，但仍必須排除凹多邊形的情況。

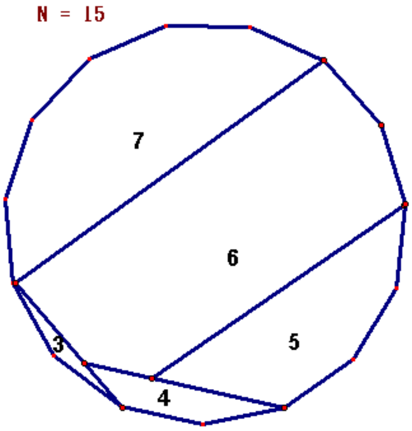
根據這個論証，我們又畫出了（3,4,5,6,7）的 n=11~17 的情形。

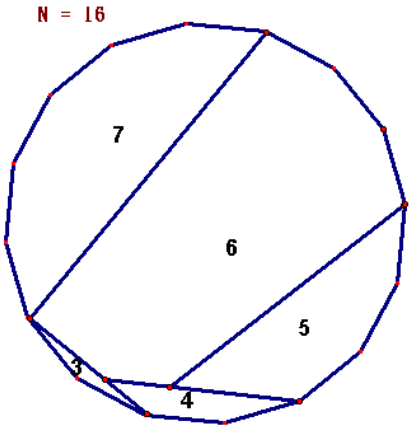


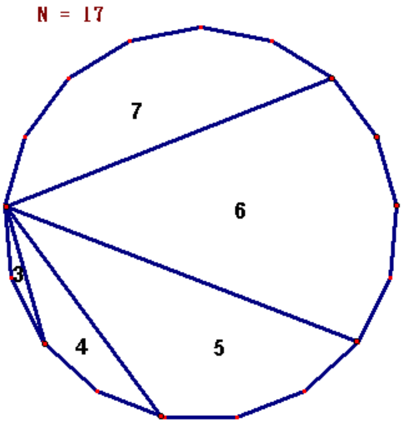










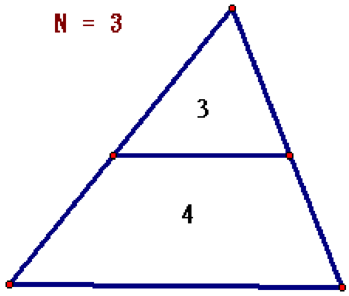


伍、研究結果和討論

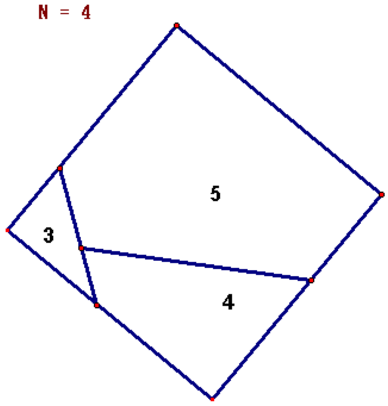
（一）我們在研究的過程，發現了一個有趣的『邊連邊』方法。

1.我們用連接二個「邊上點」的方式，先作出三角形，再從這個多出的邊，用『邊連邊』的方式，作出四邊形，以次類推，下面是根據這方法，畫出的圖形。

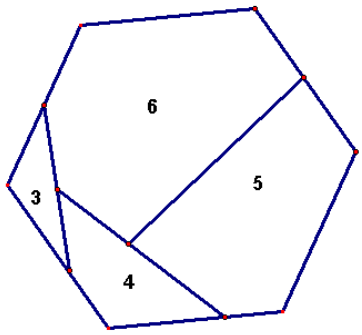
N = 3



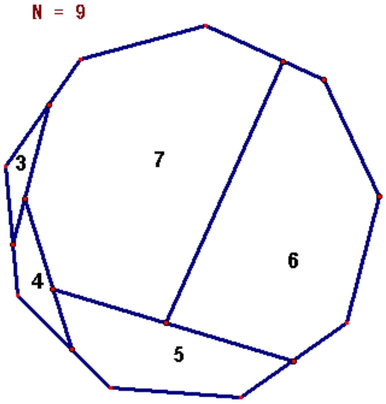
N = 4



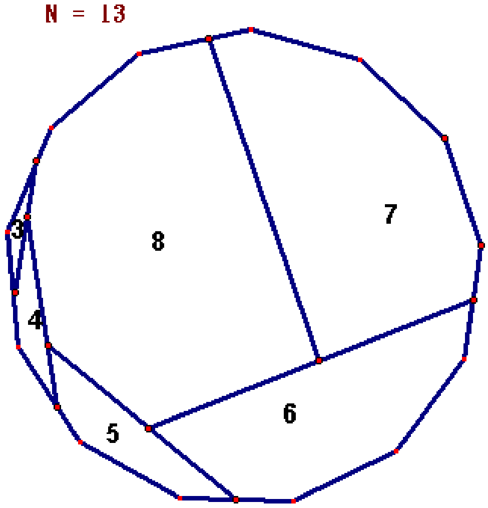
N = 6



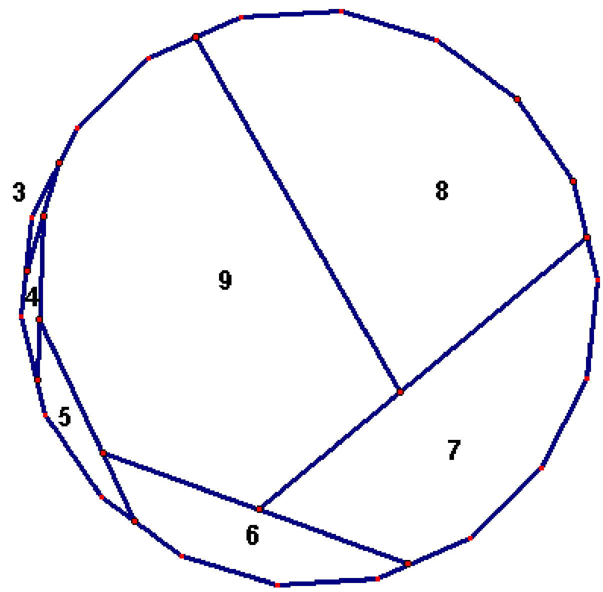
N = 9

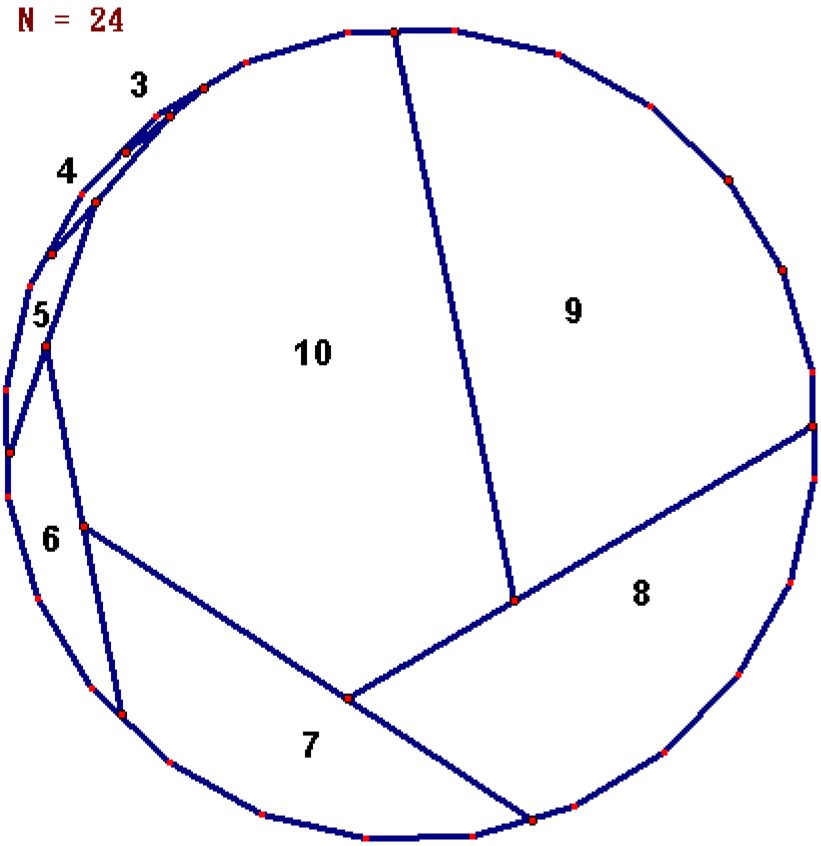


N = 13



N = 18





2.將圖形的結果整理如下表：

M	圖形	邊連邊方法的 N
2	（3,4）	3
3	（3,4,5）	4
4	（3,4,5,6）	6
5	（3,4,5,6,7）	9
6	（3,4,5,6,7,8）	13
7	（3,4,5,6,7,8,9）	18
8	（3,4,5,6,7,8,9,10）	24
k	(3,4,……………….,k+2)	x

其中 $x=3+1+2+3+4+5+6+...+(k-2)=3+\frac{[1+(k-2)](k-2)}{2}=\frac{(k-1)(k-2)}{2}+3$

於是我們想証明，在 M=k 時，(3,4,……………….,k+2)，可在 N=x 時畫出。

3.我們嘗試用數學歸納法証明這件事：

（1）當 M=1 時，(3)可在 N==$\frac{(1-1)(1-2)}{2}+3=3$時畫出。

（2）假設 M=k 時，(3,4,……………….,k+2)，可在 N＝x＝$\frac{(k-1)(k-2)}{2}+3$時畫出。

（3）若 M=k+1 時，

(3,4,……………….,k+2,k+3)的內角和＝$180^{\circ}(1+2+3+...+k+1)=180^{\circ}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$…❶

此時 N＝x＝$\frac{k(k-1)}{2}+3$

每做一次『邊連邊』，都會多出 2 個邊上點，也就是會多出內角和$180^{\circ}\times 2=360^{\circ}$

M=2，要做『邊連邊』一次；M=3，要做『邊連邊』2 次；…

M=k，要做『邊連邊』（k-1）次，也就是會多出$(k-1)360^{\circ}$

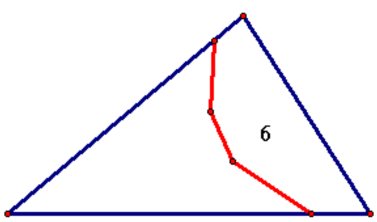
M=k+1 時，要做『邊連邊』（k）次，也就是會多出$360^{\circ}k$

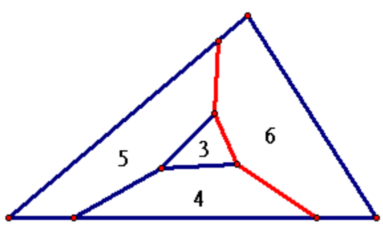
→N＝x＝$[\frac{k(k-1)}{2}+3]$邊形的內角和＝$180^{\circ}[\frac{k(k-1)}{2}+3-2]=180^{\circ}[\frac{k(k-1)}{2}+1]$

$\because$ 此時要作『邊連邊』（k）次，會多出$360^{\circ}k$

$\therefore 180^{\circ}[\frac{k(k-1)}{2}+1]+360^{\circ}k=180^{\circ}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$…❷　　→❶式＝❷式，故得証。

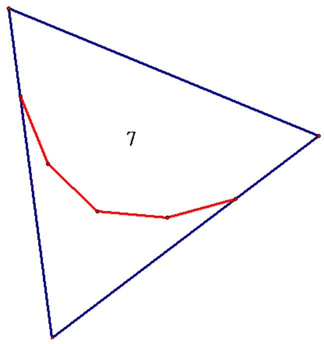
（二）把一個三角形分成(3,4,5,6)時，我們最多只能借用三角形的三個邊來做六邊形，於是必須多畫出 3 個邊，如下圖，再讓(3,4,5)各用一邊，來畫出(3,4,5,6)。





根據這個道理，如果要把一個三角形分成(4,5,6,7)是不可能的。

∵把一個三角形分成(4,5,6,7)時，我們最多只能借用三角形的 3 個邊來作 7 邊形，於是必須多畫出 4 個邊，如下圖，而(4,5,6)只能各用一邊，這樣會多出一條邊，在一定要是凸多邊形的情況下，我們是來畫不出(4,5,6,7)的。



於是，我們可以發現：四邊形不能分成(5,6,7,8)、五邊形不能分成(6,7,8,9)⋯

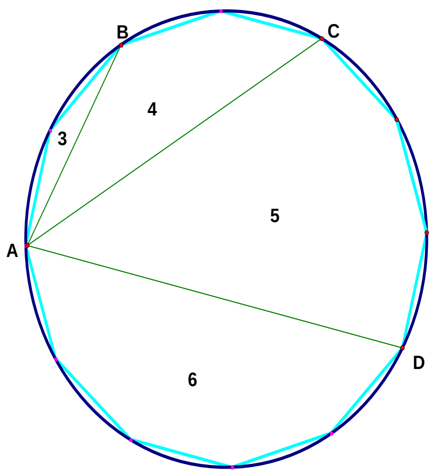
N 邊形不能分成(N+1,N+2,N+3,N+4)。

（三）當 M=4 時，我們將我們已畫出來的圖整理如下表：

分割方法	已畫出來的 N 的範圍 x~y
(3,4,5,6)	3~12
(4,5,6,7)	8~16
(5.6.7.8)	13~20
(6,7,8,9)	X~24

我們發現上表的 y 形成一個公差＝4的等差數列，且已在之前証明過。但 x 是否也有規律呢？

我們覺得，如果能找出一種固定的切割模式，而用那種分割模式可以在做 M＝4 的分割時，只需要用到邊數最少的多邊形，那麼或許就可以找出規律。我們參考了各項分割方式中邊數最少和最多的多邊形，先後想出了：邊數最多的切割模式、邊數最少的切割模式！



1. M=4，邊數最多時（y）的切割方法（稱『放射法』）

以切割成(3，4，5，6)為例：

（1）因為圓周上任三點不共線。畫一個圓形後，隨意在圓周上打一個點，拉出三條線。

（2）在圓周上打點拉線，在分割出的 4 個扇形裡連接

每個點就完成 3、4、5、6 邊形了！

（3）y 的計算方法＝ 4 個多邊形的頂點數 減 6

此例的 y=(3+4+5+6)-6=12 邊形！

但為什麼要減 6 呢？

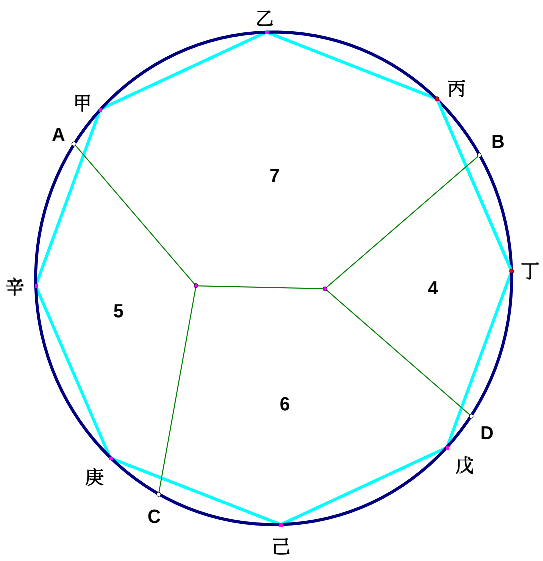
∵頂點 A 共用了 4 次，只取一次 ，頂點數減掉 3

頂點 B，C，D 共用 2 次，只各取一次，頂點數再減掉 3，故需減掉的數目為 3+3=6。

（4）M=k（k∈ N），作(a,a+1,a+2,⋯,a+k-1)的分割時（ $a\geq 3$ ），$y=\dfrac{k(a+a+k-1)}{2}-2(k-1)$。

2. $\boxed{\text{M=4}}$，邊數最少時（x）的切割方法（是『有兩個內部點的分枝法』）

以切割成(4，5，6，7) 為例：



（1）畫一個圓形後，隨意在圓內點兩個點，連接兩點並各拉出兩條線。

（2）在圓周上打點。

（3）在分割出的 4 個圖形裡完成 4，5，6，7 邊形。

（4）連接各點，但千萬不要把分割線和圓周交會的四點(A、B、C、D)也連上去了喔！

（5）x 的計算方法＝ 4 個多邊形的邊數 減 14

此例的 x＝(4+5+6+7)-14=8 邊形！

為什麼要減 14 呢？

∵4，5，6，7 邊形在圖中內部有 4-2 個內部點，每個內部點有三個多邊形共用，所以要減 3(4-2) ；而拉出的四條線和圓周所形成的四個邊上點，每個邊上點有兩個多邊形共用，所以要減 4×2

→共減 4×2＋3(4-2) =14

（6）$\boxed{\text{M=k}}$（k∈ N），作(a,a+1,a+2,⋯,a+k-1)的分割時（ $a\geq 3$ ），$x=\dfrac{k(a+a+k-1)}{2}-[2k+3(k-2)]$。

（7）按照分枝法、放射法，我們將 M=4 時的切割模式整理如下：

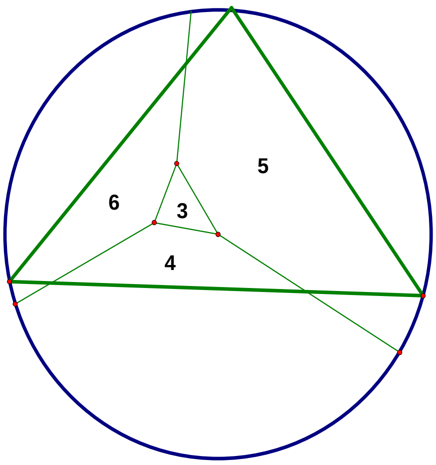
分割方法	分枝法 x	放射法 y	已畫出來的 N 的範圍 x ～ y
(3,4,5,6)	(3+4+5+6)-14=$\boxed{4}$	(3+4+5+6)-6=12	$\boxed{3}$ ～ 12
			5 （ ） 4
(4,5,6,7)	(4+5+6+7)-14=8	(4+5+6+7)-6=16	8 ～ 16
			4 （ ） 4
(5,6,7,8)	(5+6+7+8)-14=12	(5+6+7+8)-6=20	12 ～ 20
			4 （ ） 4
(6,7,8,9)	(6+7+8+9)-14=16	(6+7+8+9)-6=24	16 ～ 24
			4 （ ） 4
(7,8,9,10)	(7+8+9+10)-14=20	(7+8+9+10)-6=28	20 ～ 28
			4 （ ） 4
(8,9,10,11)	(8+9+10+11)-14=24	(8+9+10+11)-6=32	24 ～ 32

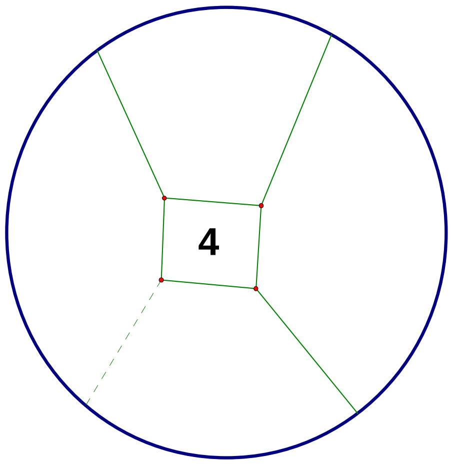
（8）我們發現，x 的規律除了切割成(3,4,5,6)以外，是一個$\boxed{公差=4}$的等差數列，但為什麼切割成(3,4,5,6)時會是例外呢？因為它可以在圖形中擺三個內部點！

3. (3,4,5,6) 切割的討論

（1）如果想要以邊數最少的 N 邊形，畫出指定的切割圖形，在把這個多邊形分割成多份的情況下，當然是盡可能把頂點設在圖形內最好。若要將一個多邊形切成四份，最多只能在圖形內放兩個內部點（否則會有凹多邊形出現）。

『但是』,（ 3，4，5，6 ）的分割例外，它可以把三角形放在中間，我們將這種把多邊形放在中心的切割方法，稱作：『夾心法』（M＝4 時，只有三角形可以夾心），如 {圖一}：

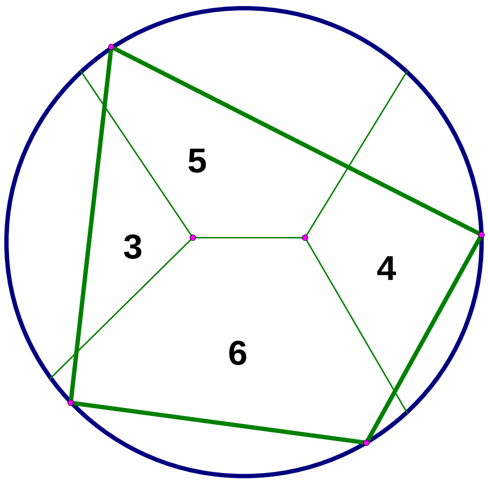




{圖一}　　　　　　　　　　　{圖二}

如果把三角形以外的多邊形放中間，因為其他三個多邊形只能佔用其中三個邊，所以會多出一條邊（或很多條邊），或是形成凹多邊形。 {圖二}

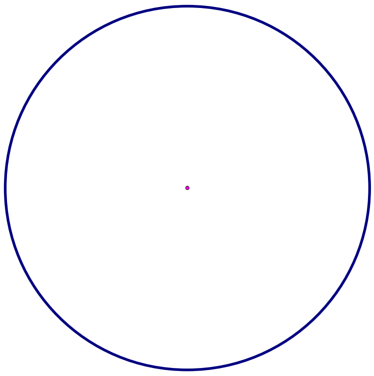
（2）如果照分枝法來分割，（3，4，5，6）至少需要四邊形！



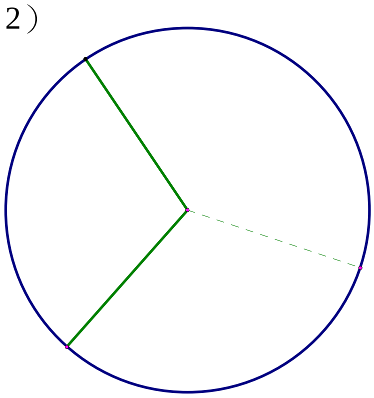
（四）分枝法的討論

1. 我們發現一種在排除特殊情況（如（3,4,5,6)），「分枝法」可作為邊數最少 x 的分割方法，而且這個方法可以通用於各種分割。詳述如下：

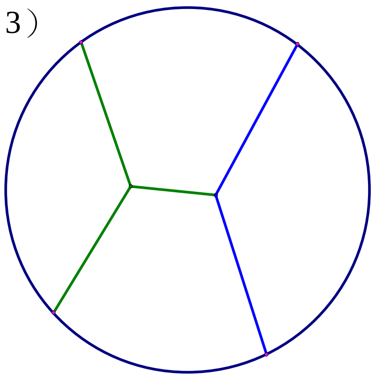
（1） 在圓內找一個內部點



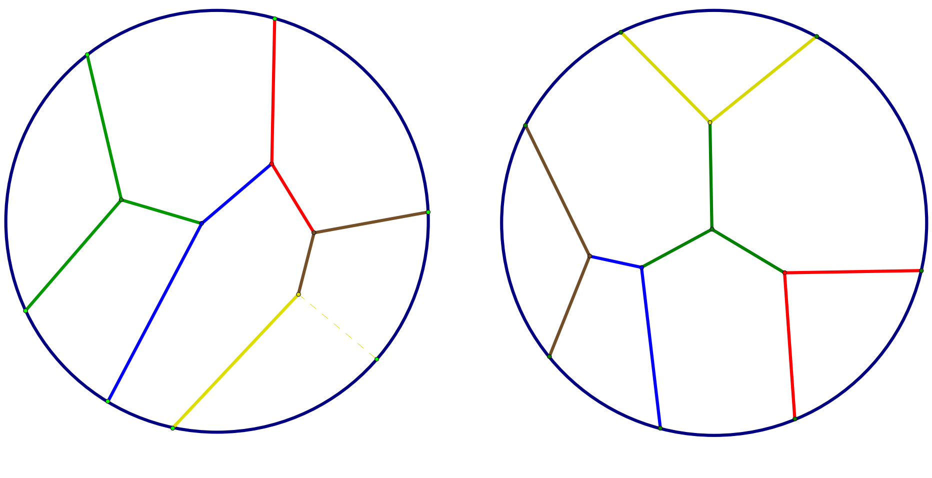
（2） 由這個點向外拉出三條線，
得到三個類似扇形的區塊。
而這就是 M=3 的<u>邊數最少 x 的分割方法</u>



（3） 如果想做 M=4 的分割，只需隨意在拉出的三條線中選一條將它〝分枝〞，即可的到四個區塊。
而這就是 M=4 的<u>邊數最少 x 的分割方法</u>
(須排除有三角形的情況)



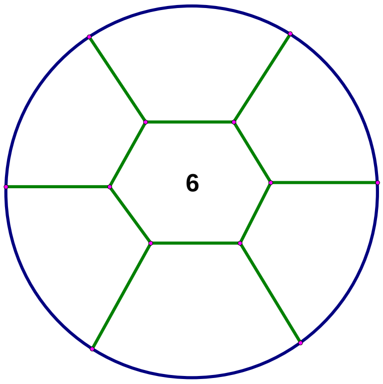
（4）如果想做更多的分割，只要以此類推作出更多的分枝。(不論在哪條線做分枝，結果都相同)



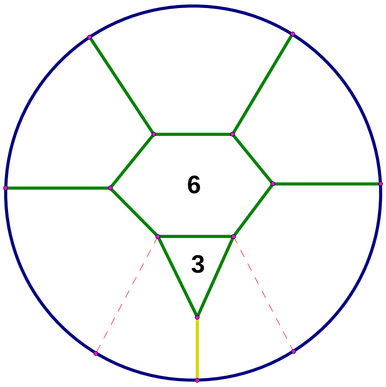
（五）夾心法的討論

1. 我們將多邊形放在中心的切割方法，稱作：『夾心法』。

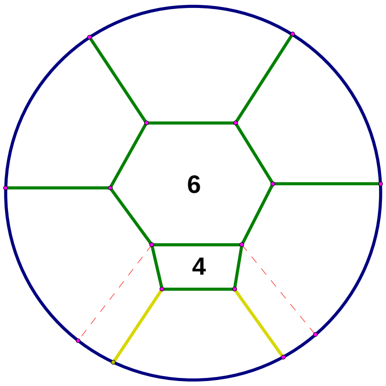
（1）放 N 邊形在中心，就會〝拉出〞 N 條線 ，
也就會在四周分割出 N 個區塊。
如放六邊形在中間，拉出六條線，
分割出六個區塊。



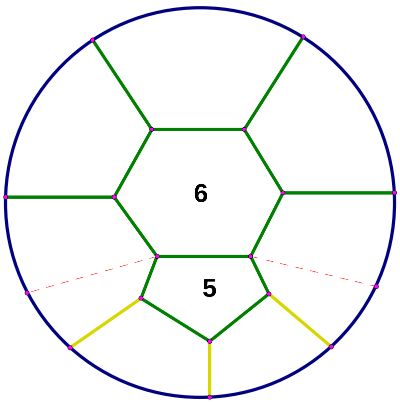
（2）但如果外加一個三角形在中心，
三角形能使原本要拉出的兩條線
合併成一條，減少一條拉出的線。
且在右圖中，產生了「6+3-2」個
內部點。



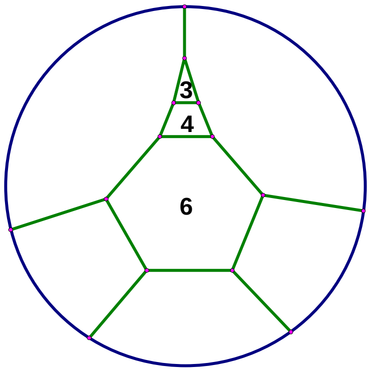
（3）而如果外加一個四邊形在中心，
原本要拉出的兩條線還是會拉出
兩條線。且在右圖中產生了「6+4-2」
個內部點。



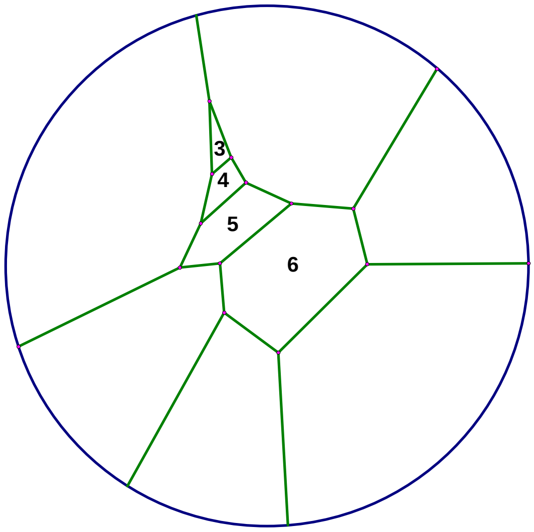
（4）若是外加一個五邊形，則會多增加
1 條拉出的線；同樣的，外加六邊
形會增加 2 條拉出的線，七邊形會
增加三條…外加 N 邊形會增加 N-4 條（ $N \geq 5$ ）。
且產生「6+5-2」個內部點。



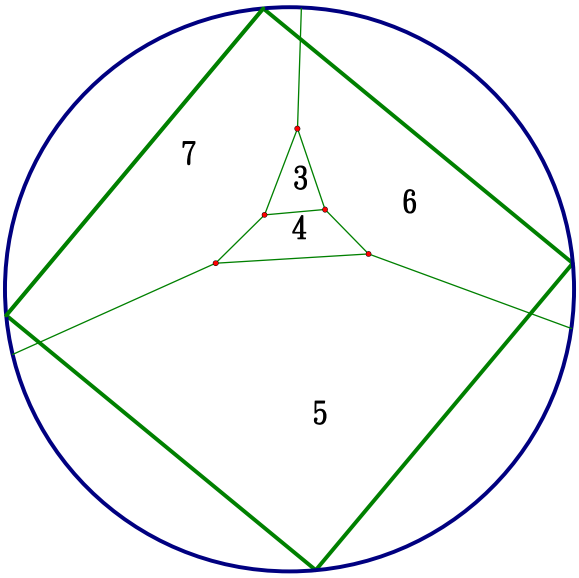
（5）放了 3，4，6 邊形在中心，
拉出「6+0-1」條分割線，
產生「6+4-2+3-2」個內部點。



（6）放了 3，4，5，6 邊形在中心，
拉出「6+1+0-1」條分割線，
產生「6+5-2+4-2+3-2」個內部點。



2. 根據「夾心法」理論，要找出可切割成(3,4,5,6,7)最少邊數的多邊形，先把 3 邊形和 4 邊形放中間，再從 3 個頂點拉出 3 條切割線，這 3 條切割線都和外部的多邊形交於邊上點，連接圓周上的點(不能把那三條切割線與圓周交會的點也連上去喔！)就找到了可切割成(3,4,5,6,7)最少邊數的多邊形是四邊形！
我們意外的發現，當初我們畫出(3,4,5,6,7)邊數最少的多邊形是五邊形，原來還有邊數更少的，就是下圖的四邊形。



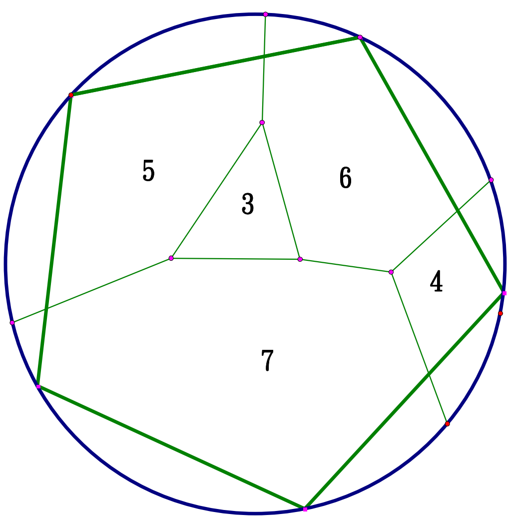
（六）綜合討論

1. 於是我們用邊數最少的切割方法(夾心法、分枝法)和邊數最多的切割方法（放射法），將 M=5 時的切割模式整理如下：

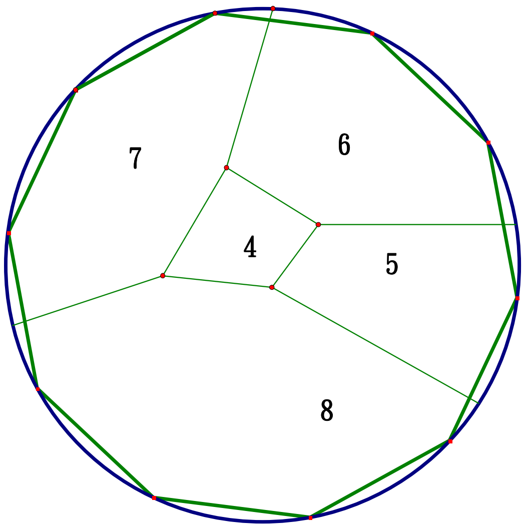
分割方法	分枝法 x	放射法 y	已畫出來的 N 的範圍 x ～ y
(3,4,5,6,7)	(3+4+5+6+7)-19=6	(3+4+5+6+7)-8=17	$\boxed{4}$ ～ 17
			6 ( ) 5
(4,5,6,7,8)	(4+5+6+7+8)-19=11	(4+5+6+7+8)-8=22	$\boxed{10}$ ～ 22
			6 ( ) 5
(5,6,7,8,9)	(5+6+7+8+9)-19=16	(5+6+7+8+9)-8=27	16 ～ 27
			5 ( ) 5
(6,7,8,9,10)	(6+7+8+9+10)-19=21	(6+7+8+9+10)-8=32	21 ～ 32
			5 ( ) 5
(7,8,9,10,11)	(7+8+9+10+11)-19=26	(7+8+9+10+11)-8=37	26 ～ 37
			5 ( ) 5
(8,9,10,11,12)	(8+9+10+11+12)-19=31	(8+9+10+11+12)-8=42	31 ～ 42
			5 ( ) 5
(9,10,11,12,13)	(8+9+10+11+12)-19=36	(9+10+11+12+13)-8=47	36 ～ 47

2. 再用夾心法，往下修正 x 的數值：

（1）切割成(3,4,5,6,7)，還可以可把 3 邊形放中間，再做一次分枝，得到五邊形。{圖一}



{圖一}



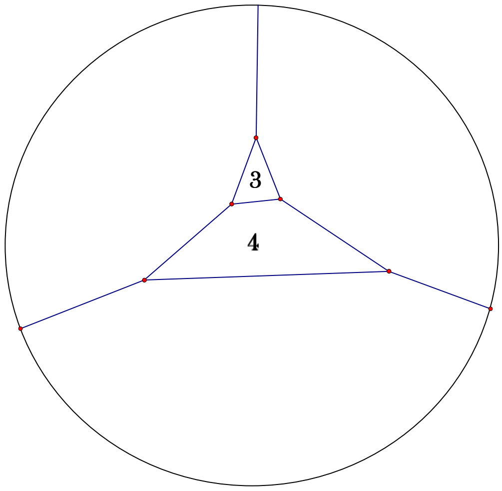
{圖二}

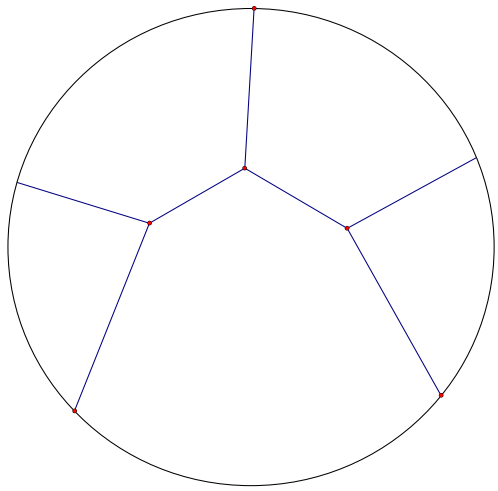
（2）要找出可切割成(4,5,6,7,8)最少邊數的多邊形，就把 4 邊形放中間，再從 4 個頂點拉出 4 條切割線，此 4 條切割線皆與外部的多邊形交於邊上點，連接外部點就找到了可切割成(4,5,6,7,8)最少邊數的多邊形 y 是十邊形！{圖二}

3. M=5 時 邊數最少的切割方法 ： 有三個內部點的分枝法！

（1）但這只適用於在「分割成的圖形中沒有 3 邊形或 4 邊形」時，(3 邊形或 4 邊形可以放中間)，也就是說，從(5,6,7,8,9)開始才可以用。如果在圖形內放了 4~5 個內部點，除非有了 3 或 4 邊形，否則就會產出凹多邊形；而如果放了 6 個以上的內部點，就一定會產生凹多邊形。

（2）(3,4,5,6,7)邊數最少的分割方法 ： 因為有三角形和四邊形，所以可以將它們放在中心，也就造成了 5 個內部點在圓形內。(這是放了三角形和四邊形的夾心法)





4. 我們也整理出可以開始使用分枝法作為邊數最少 x 的分割方法的情況 ：

切割成 M 份	切割出連續的凸多邊形	能夠完成切割的凸多邊形 x ~ y
M=4	(4 , 5 , 6 , 7)	8 ~ 16
M=5	(5 , 6 , 7 , 8 , 9)	16 ~ 27
M=6	(6 , 7 , 8 , 9 , 10, 11)	27 ~ 41

（1）我們發現 **16** 邊形是 M＝4 切割成(4 , 5 , 6 , 7)的邊數最大值，

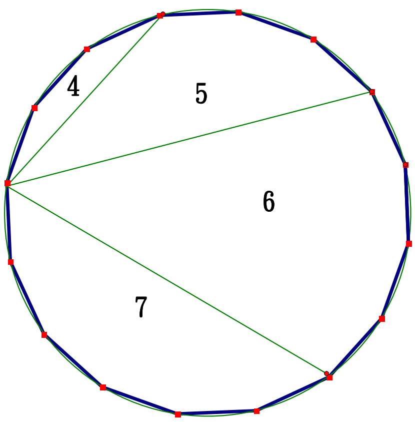
竟然也是 M＝5 切割成(5 , 6 , 7 , 8 , 9)的邊數最小值！

27 邊形是 M＝5 切割成(5 , 6 , 7 , 8 , 9)的邊數最小值，

竟然也是 M＝6 切割成(6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11)的邊數最大值！

（2）難道這是有規律的嗎? 我們想出了以下的證明 ：

M=k（k∈ N ），作(k,k+1,k+2,⋯,k+k-1)的分割時（ $k \geq 3$ ），



$$y=\frac{k(k+k+k-1)}{2}-2(k-1)=\frac{3k^2-5k+4}{2}$$ ⋯❶

例：k=4

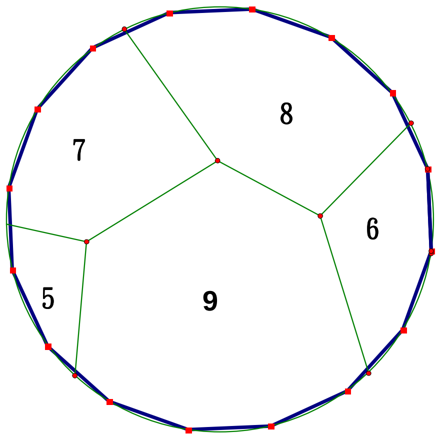
(4＋5＋6＋7)－2x3＝16

M=k+1（k∈ N ），作(k+1,k+2,⋯,k+k+1)的分割時（ $k\geq 3$ ），

$$x=\frac{(k+1)(k+1+k+k+1)}{2}-[5(k+1)-6]=\frac{3k^2-5k+4}{2} \cdots ❷$$

例：k=4

(5＋6＋7＋8＋9)－[5x5－6]＝16



兩個式子相同（❶＝❷），也就是說，往後一直延伸下去，都有這個規律，得証。

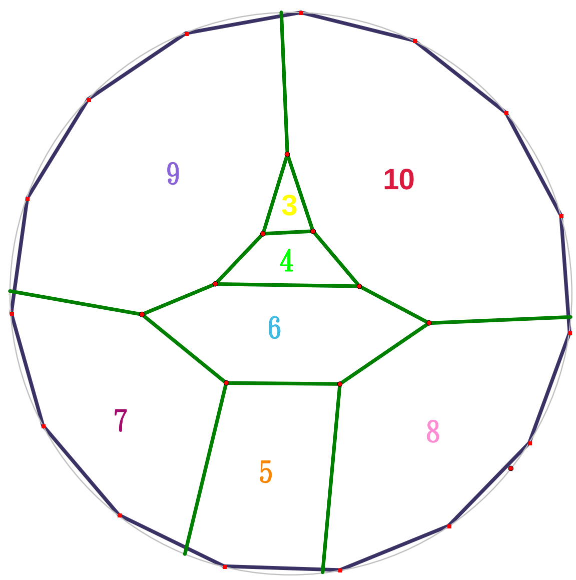
5. 「夾心法」是在特殊情況下邊數最少的分割方法，我們把「切割成幾份」和「需拉出幾條分割線」的關係整理成表格，表格中的數字代表放在中心的多邊形。

分割成幾份 \ 拉出幾條分割線	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	3,4						
4		4	3,5	3,4,5				
5			5	3,6	3,4,6			
6				6	3,7	3,4,7 {圖三} 3,5,6 {圖二}	3,4,5,6	
7					7	3,8	3,4,8	3,4,5,7

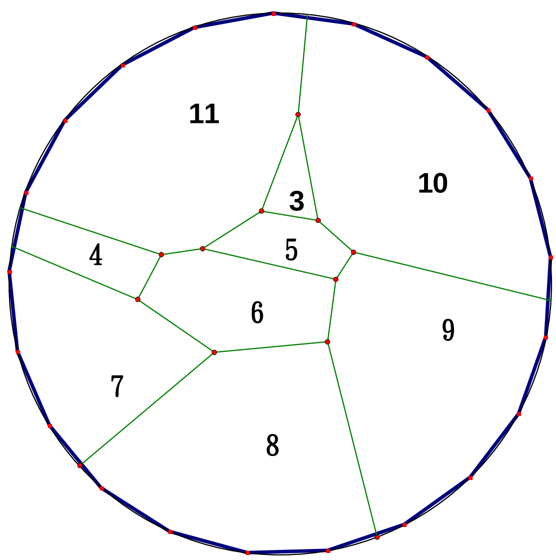
6. 我們將用夾心法畫出的圖形，整理如下表：

切割成幾份 M	切割成的連續多邊形	邊數最少的多邊形 N＝x	放幾個多邊形在中間	拉出的邊數	放在中間的多邊形	圖例
4	**(3~6)**	3	1	3	**3**	
5	**(3~7)**	4	2	3	**3,4**	
6	**(3~8)**	7	2	4	**3,5**	
7	**(3~9)**	10	3	4	**3,4,5**	{圖五}
8	**(3~10)**	15	3	5	**3,4,6**	{圖一}
9	**(3~11)**	21	3	6	**3,4,7**	{圖三}
10	**(3~12)**	27	4	6	**3,4,5,6**	{圖四}
11	**(3~13)**	35	4	7	**3,4,5,7**	
12	**(3~14)**	44	4	8	**3,4,5,8**	
13	**(3~15)**	54	4	9	**3,4,5,9**	
14	**(3~16)**	64	5	9	**3,4,5,6,7**	{圖六}
15	**(3~17)**	76	5	10	**3,4,5,6,8**	
16	**(3~18)**	89	5	11	**3,4,5,6,9**	
17	**(3~19)**	103	5	12	**3,4,5,6,10**	
18	**(3~20)**	118	5	13	**3,4,5,6,11**	{圖七}

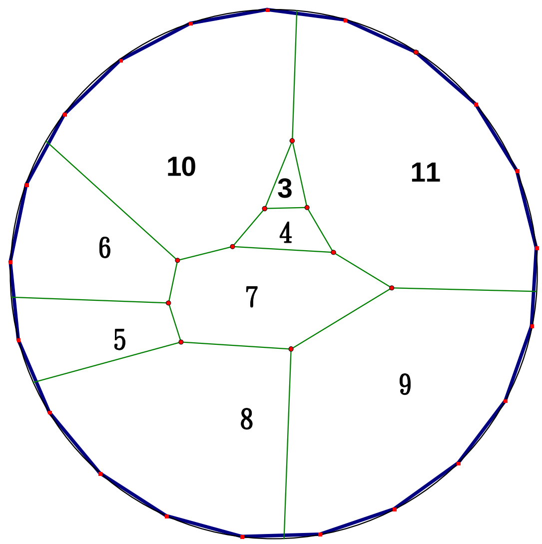
以下是部份的圖例：



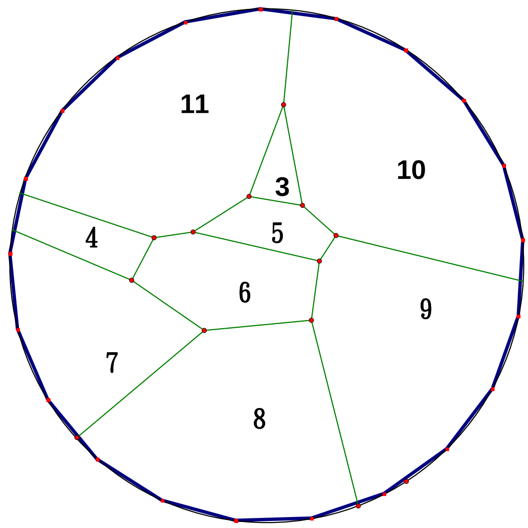
{圖一}



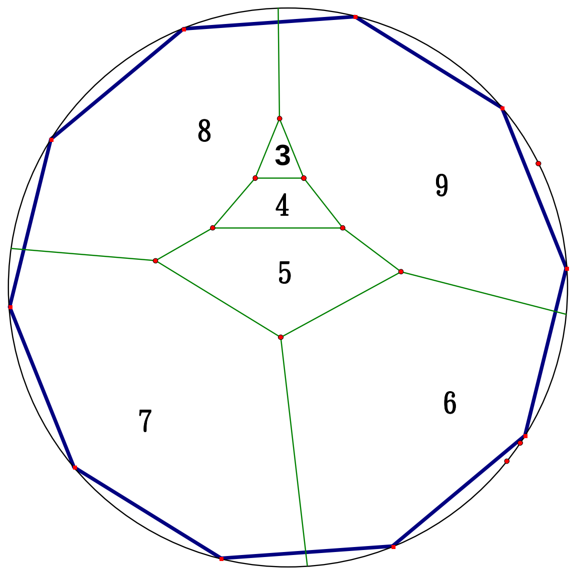
{圖二}


10
3
11
4
6
7
5
9
8

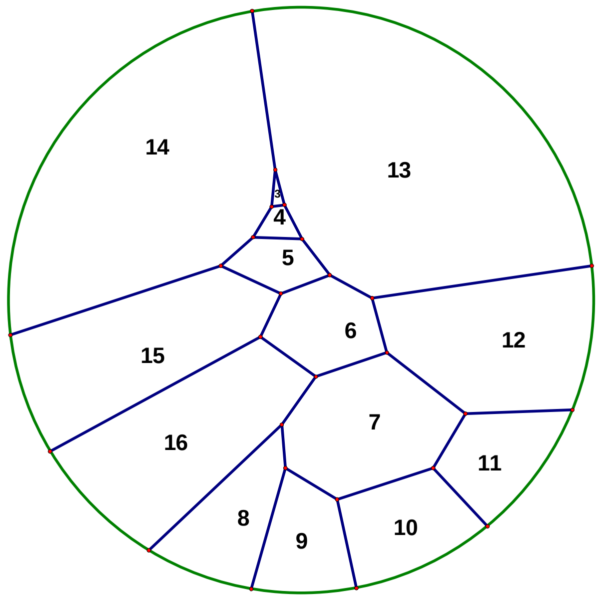
{圖三}


11
3
10
5
4
6
9
7
8

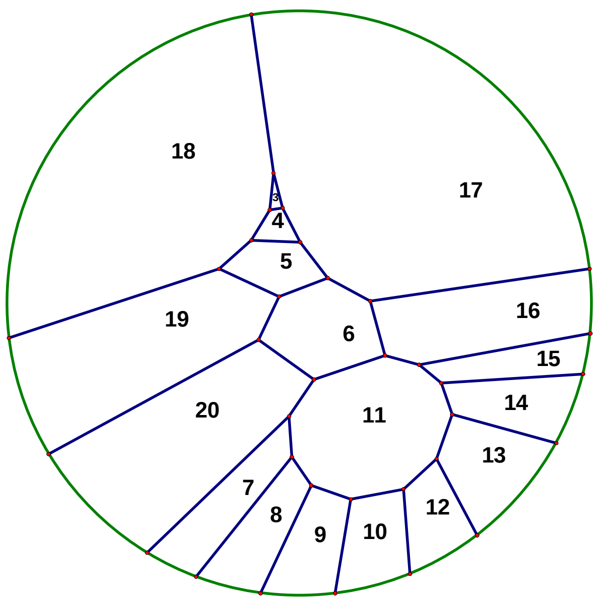
{圖四}


8
3
9
4
5
7
6

{圖五}


14
13
3
4
5
6
12
15
7
16
11
8
9
10

{圖六}


18
17
3
4
5
19
6
16
15
20
11
14
13
7
8
9
10
12

{圖七}

陸、結論

一、我們發現由 M 來找 N，比由 N 來找 M 容易多了。

二、利用『邊連邊法、放射法、分枝法、夾心法』，每個正整數 M，都可找到指定的 N，畫出圖形，甚至是 M=∞的圖形。

三、可用『放射法』找出對每個正整數 M，在可畫出的圖形中，相對應 N 值的上限 y。

四、可用『分枝法』找出對每個正整數 M，在可畫出的圖形中，相對應 N 值的下限 x，但部份特例，需用『夾心法』將 x 的數字往下修正。

柒、參考資料

一、國中數學（翰林版）第四冊 3-1 內角與外角。

二、國中數學（翰林版）第四冊 1-2 等差級數。

三、高中數學（南一版）第一冊 3-3 數學歸納法。

【評語】030413

研究在凸多邊形內的連續數個凸多邊形的切割，討論細膩，對國中生練習推導及證明，是相當不錯的練習。