中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030412

魔鏡無盡

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 施順耀	林耀南
國二 鄭智謙	吳建昀
國二 詹詠媛	
國二 何芷儀	

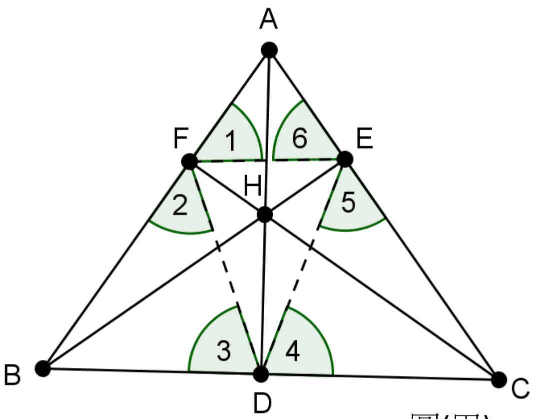
關鍵詞：多層次、內鏡射、外鏡射

摘要

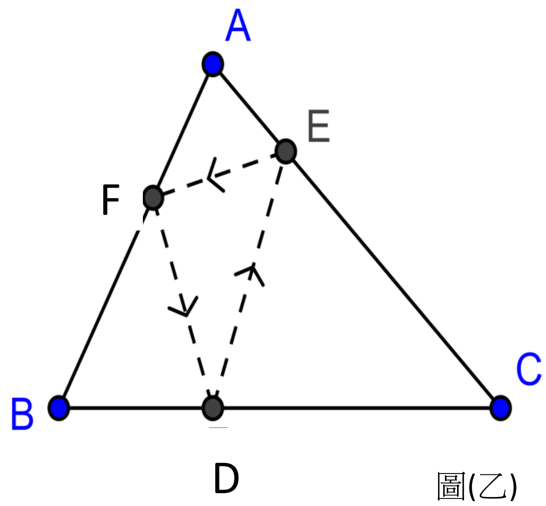
本文發展出一套內鏡射圖形的尺規作圖法，由此作圖法操作中發現奇數邊多邊形的內鏡射圖形是唯一的，而偶數邊多邊形卻有無限多個。本文主要探討多層次內鏡射圖形的存在條件，依條件給定的各組內角，必可操作到指定的層數，當給定的各內角愈接近正多邊形的角度時，可操作到的層數愈多。

壹、研究動機

在幾何課程中，我們學會了三角形的外心、內心、重心後，老師提到另外一個心，三角形的垂心，老師要我們觀察垂心有哪些性質？經仔細觀察後我們發現垂心 H，所對應的垂足△DEF 和原△ABC 各邊的夾角剛好都有入射角等於反射角的現象，如圖(甲)，∠EDC=∠FDB，∠DFB=∠EFA，∠FEA=∠DEC 想想若有一束光從 D 點射出，他會經過 E 點反射到 F 點，再反射回 D 點，見圖(乙)，如此繼續循環，無止盡的繞下去，非常有趣，但我們很想知道這種內鏡射△DEF 一定存在嗎？可以在內層△DEF 的三邊上再做出內層的內鏡射△嗎？可以一直作進去嗎？我們是否可以預估它作到第幾層？又在四邊形、五邊形等多邊形上？怎麼找出這種反射路徑呢？於是我們展開一系列的探討。



圖(甲)



圖(乙)

貳、研究目的

一、探討三角形的多層次內鏡射條件。

二、探討四邊形的多層次內鏡射條件。

三、探討五邊形、六邊形…等多邊形的多層次內鏡射條件。

四、發展一套有系統的尺規作圖方法，使其能任意操作多邊形的內鏡射圖形，並能將多層次內鏡射圖形繪製出來。

参、研究過程及方法

一、研究限制：

(一)本文探討的多邊形都限制在凸多邊形上。

(二)本文在多層次作圖時，該多邊形的邊長比要適當，使能操作出最多層內鏡射。

二、名詞定義：

(一)內鏡射多邊形

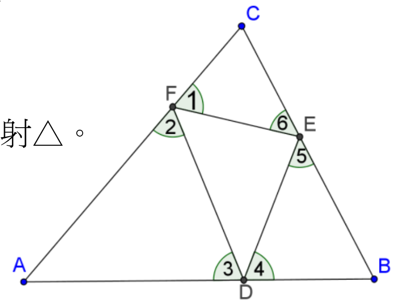
以三角形為例：

如圖(1)，△DEF 為△ABC 的內接△，若∠1=∠2，
∠3=∠4，∠5=∠6，則△DEF 被稱為是△ABC 的內鏡射△。

(二)外鏡射多邊形

以三角形為例：

如圖(1)，在相同的條件下，△ABC 被稱為是△DEF 的外鏡射△。



圖(1)

三、內鏡射△與外鏡射△的作圖法探討

(一)已知△ABC，求作△ABC 的外鏡射△

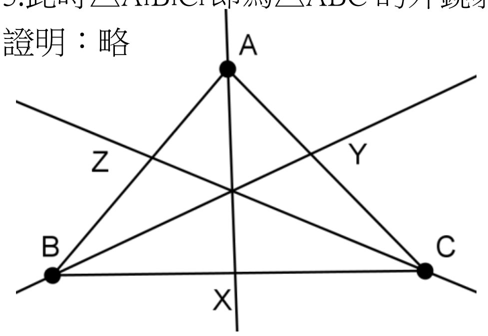
作法：

1.分別作∠A、∠B、∠C 的分角線$\overleftrightarrow{AX}$，$\overleftrightarrow{BY}$，$\overleftrightarrow{CZ}$，如圖(2)

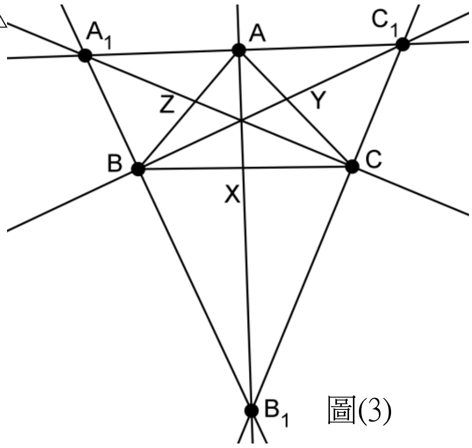
2.分別過 A、B、C，作$\overleftrightarrow{AX}$，$\overleftrightarrow{BY}$，$\overleftrightarrow{CZ}$ 之垂線，設兩兩交於 A_1、B_1、C_1，如圖(3)

3.此時△$A_1B_1C_1$即為△ABC 的外鏡射△

證明：略



圖(2)



圖(3)

(二)內鏡射△的作圖法探討

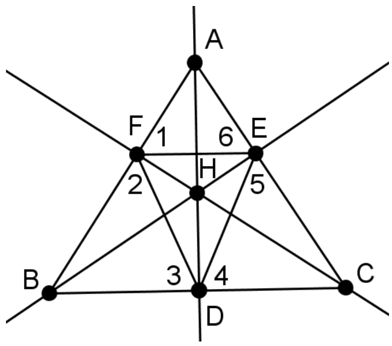
方法一：

在研究動機中，我們看到一個眾所皆知的內鏡射△的作圖法，即垂足△作圖法，從三角形的三頂點，往各對應邊作垂線，所得的垂足點 D、E、F 便可形成一個內鏡射△，如圖(4)

在△ABC 中，若$\overleftrightarrow{CF}\perp\overline{AB}$，$\overleftrightarrow{AD}\perp\overline{BC}$，$\overleftrightarrow{BE}\perp\overline{AC}$

$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於 H

則∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6
△DEF 為△ABC 的內鏡射△。



圖(4)

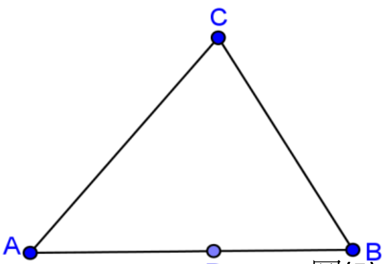
觀察上圖，我們發現這種內鏡射△是唯一的，但在鈍角△或直角△中並不存在，又若在四邊、五邊…等多邊形上，很顯然的此做法行不通，因此我們又嘗試去尋找其他的尺規作圖法。

方法二(奇數多邊形專用)：已知△ABC，求作△ABC 的內鏡射△

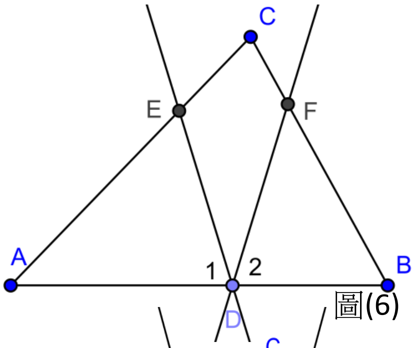
作法：

1.在圖(5)的$\overline{AB}$上，任取適當的一點 D

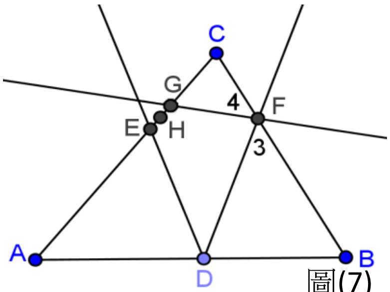
2.過 D，分別作$\overleftrightarrow{DE}$， $\overleftrightarrow{DF}$，使∠1=∠2=∠C，如圖(6)
3.過 F，作$\overleftrightarrow{FG}$，使∠3=∠4=∠A，如圖(7)
4.作$\overline{EG}$的中點 H
5.過 H，作$\overleftrightarrow{HI}$//$\overleftrightarrow{GF}$，交$\overline{BC}$於 I，如圖(8)
6.過 H，作$\overleftrightarrow{HJ}$//$\overleftrightarrow{ED}$，交$\overline{AB}$於 J，如圖(9)
7. 連$\overline{IJ}$，則△ABC 的內鏡射△HIJ 即為所求，如圖(10)



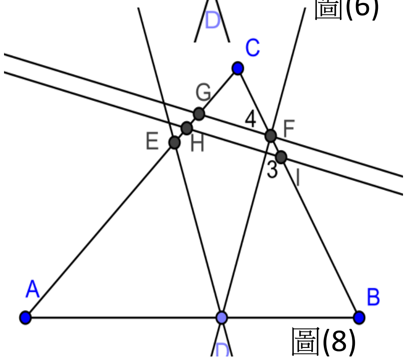
圖(5)



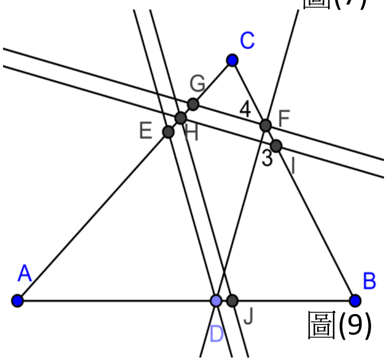
圖(6)



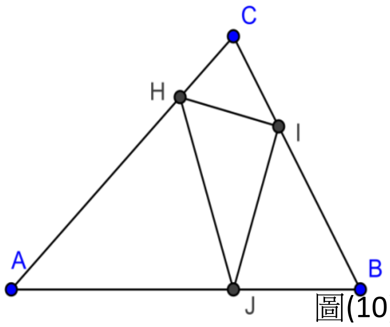
圖(7)



圖(8)



圖(9)



圖(10)

方法三(奇偶數多邊形皆可用)：已知△ABC，求作△ABC 的內鏡射△

作法：

1.在圖(11)的$\overline{AB}$上，取任意點 D
2.以$\overline{CB}$為對稱軸，作 D 的對稱點D_1'，如圖(12)
3.再以$\overline{AC}$為對稱軸，作D_1'的對稱點D_1''，如圖(13)
4.連$\overline{DD_1''}$，交$\overline{AC}$於 E，如圖(14)
5.以$\overline{AC}$為對稱軸，作 D 的對稱點 D′，如圖(15)
6.再以$\overline{BC}$為對稱軸，作 D′的對稱點 D″，如圖(16)

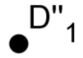
7.連$\overline{DD''}$，交 BC 於 F，如圖(17)

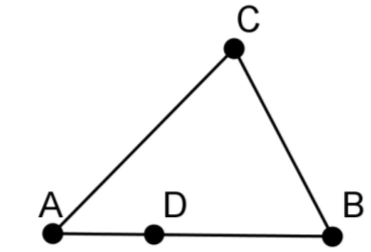
8.再在$\overline{AB}$任取一點 G，在 G 點上作(∠FDB+∠EDA)/2 交$\overline{BC}$於 H，如圖(18)
9.作∠GHB=∠CHI，如圖(19)
10.作∠CIH=∠AIJ，如圖(20)

11.取 G、J 中點 K，如圖(21)

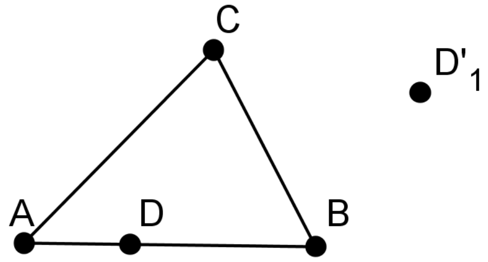
12.從 K 點再作一次鏡射，得 L、M

13.如圖(22)，則△KLM 即為△ABC 之內鏡射△

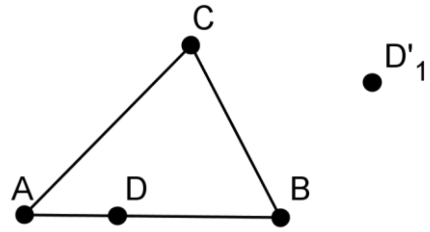




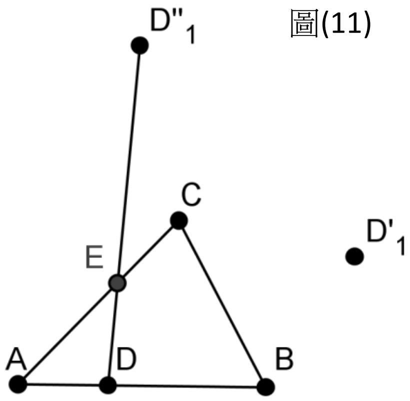
圖(11)



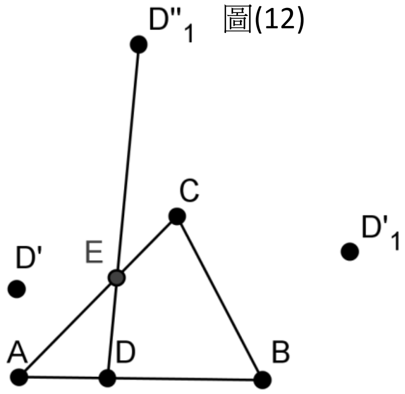
圖(12)



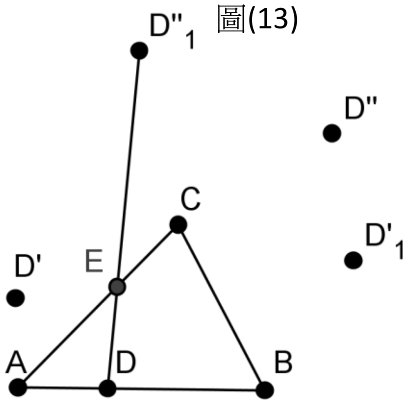
圖(13)



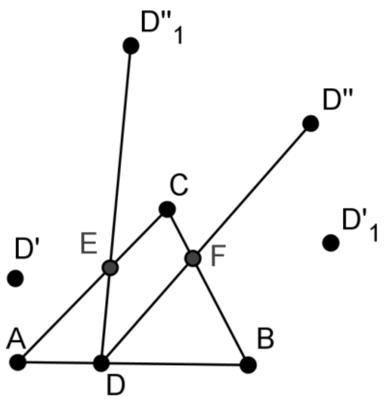
圖(14)



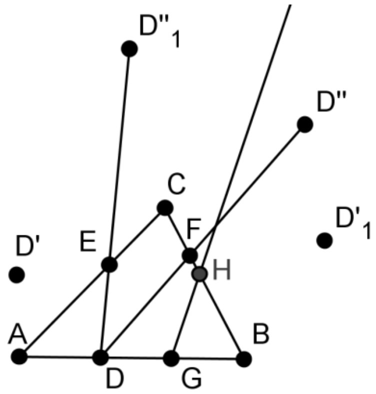
圖(15)



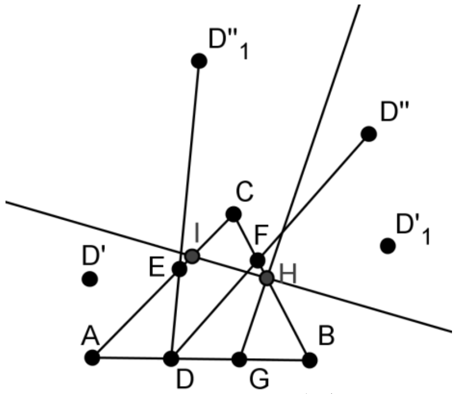
圖(16)



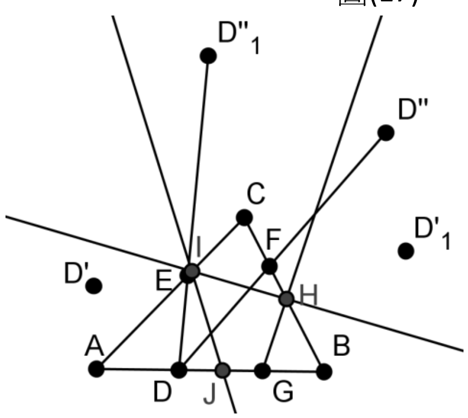
圖(17)



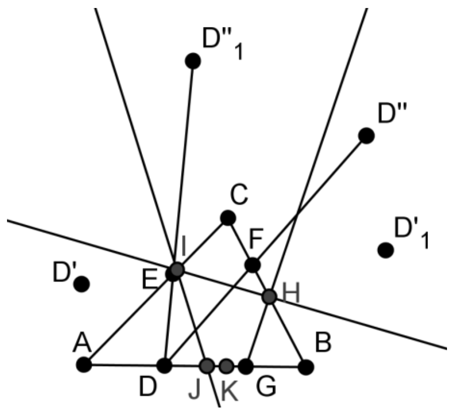
圖(18)



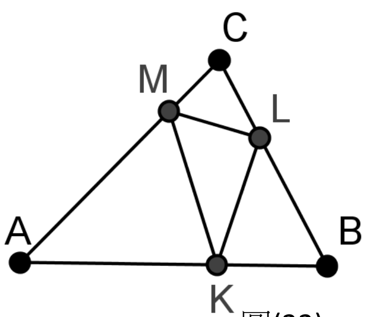
圖(19)



圖(20)



圖(21)

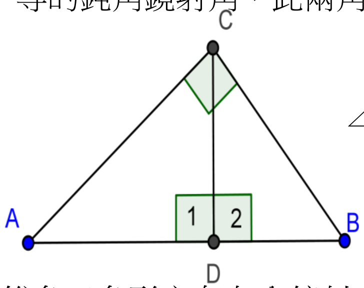


圖(22)

四、三角形的多層次內鏡射條件探討

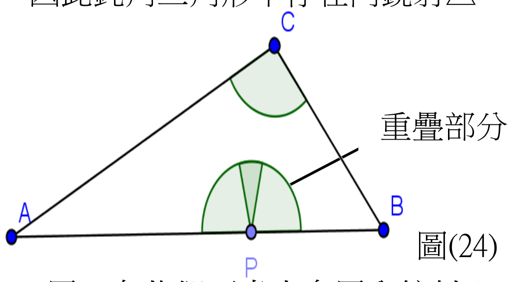
(一)直角三角形的內鏡射△，退化成一條線段，(即斜邊上的高$\overline{CD}$)，如圖(23)

(二)鈍角三角形不存在任何內鏡射△，因為如圖(24)，在 P 點上要畫出兩個相等的鈍角鏡射角，此兩角必定會部分重疊。因此鈍角三角形不存在內鏡射△。



$\angle 1=\angle 2=\angle C$

圖(23)



圖(24)

(三)銳角三角形方存在內鏡射△，但有些僅存在一層，有些卻可畫出多層內鏡射△。

1.在△ABD，當$\angle A\le 45^\circ<\angle B\le\angle C<90^\circ$時，△ABC 僅存在一層內鏡射△，如圖(25)。

證明：(1)當$0^\circ<\angle A<45^\circ$時，則$\angle HIJ>180^\circ-2\angle A$即$\angle HIJ>90^\circ$為鈍角，接下去就無法再作第二層內鏡射△了。

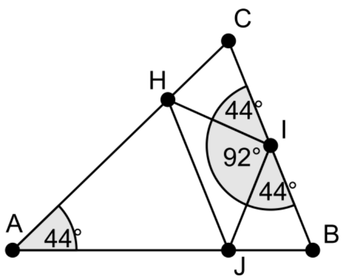
(2)當$\angle A=45^\circ$時，則$\angle HIJ=180^\circ-2\angle A=90^\circ$，即△HIJ 為直角△，無內鏡射△。

(3)當$\angle A=\angle B=45^\circ$時，原△ABC 即為直角△，此時連一層都畫不出來，因此$\angle B$須大於45°

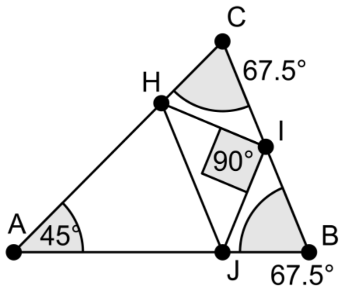
(4) $0^\circ<\angle A\le 45^\circ<\angle B\le\angle C<90^\circ$時，如圖(26)△HIJ 為直角△，僅能畫出一層內鏡射△

結論：由(1)(2)(3)(4)可推得：

僅能畫出一層內鏡射△的充要條件是 $0^\circ<\angle A\le 45^\circ<\angle B\le\angle C<90^\circ$



圖(25)



圖(26)

2.在△ABC 中，當$45^\circ<\angle A\le\angle B<67.5^\circ\le\angle C<90^\circ$時，△ABC 僅存在兩層內鏡射△，如圖(27)

證明：(1)由 1.知$\angle A<45^\circ$時，△HIJ 為鈍角△又$\angle A=45^\circ$時，△HIJ 為直角△。這兩種狀況都無法再作出第二層內鏡射△，必須$\angle A>45^\circ$。

(2)假設$\angle B=67.5^\circ$時，$\angle 1=\angle 2=67.5^\circ$，則$\angle IHJ=180^\circ-67.5^\circ\times 2=45^\circ$。若要能再作出第二層，$\angle 3=\angle 4=45^\circ$，此時，$\angle OPQ=90^\circ$為直角△，無法再作第三層，這看起來似乎合理，但這其實逼使$\angle B$和$\angle C$的大小錯置了。

解釋如下：當$\angle B=67.5^\circ$時

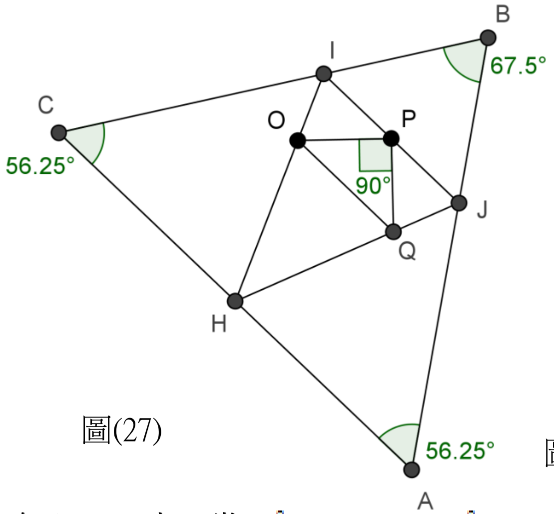
$\because \angle A>45^\circ$

$\therefore \angle A+\angle B>112.5^\circ$

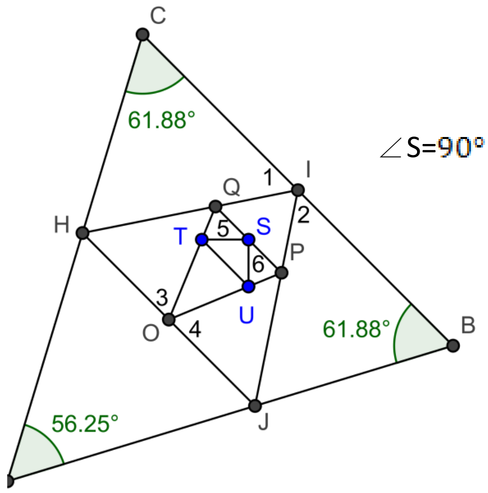
$\therefore \angle C < 67.5^\circ$，這就變成$\angle C < \angle B$了，不合，故$\angle B$必定要小於$67.5^\circ$

結論：在△ABC 中，

> 僅存在兩層內鏡射△的充要條件是$45^\circ < \angle A \le \angle B < 67.5^\circ \le \angle C < 90^\circ$



圖(27)



圖(28)

3.在△ABC 中，當$45^\circ < \angle A \le 56.25^\circ < \angle B \le \angle C < 67.5^\circ$時，

則△ABC 必僅能作出三層內鏡射△，如圖(28)

證明：(1)當最小角$\angle A = 56.25^\circ$時，$\angle 1 = \angle 2 = 56.25^\circ$，$\therefore \angle HIJ = 67.5^\circ$

$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 67.5^\circ$，得$\angle POQ = 45^\circ$，又進一步，$\angle 5 = \angle 6 = 45^\circ$，及$\angle TSU = 90^\circ$

因此△TSU 為直角△，此時無法再作第四層內鏡射△了

(2)若$\angle B = 56.25^\circ$，亦會造成$\angle A$、$\angle B$大小錯置

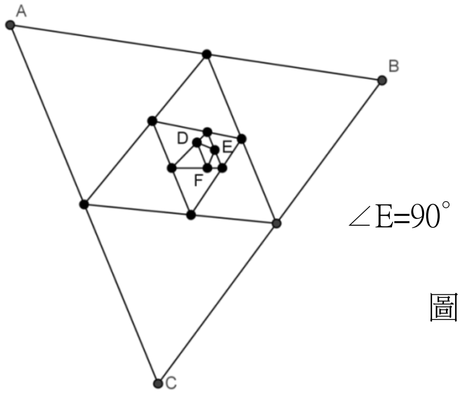
(3)若$\angle C = 67.5^\circ$，亦會造成$\angle B$、$\angle C$大小錯置

結論：在△ABC 中

> 若且唯若$45^\circ < \angle A \le 56.25^\circ < \angle B \le \angle C < 67.5^\circ$，△ABC 僅存在三層內鏡射△

4.同理，在△ABC 中，如圖(29)

> **若且唯若** $56.25^\circ < \angle A \le \angle B < 61.875^\circ \le \angle C < 67.5^\circ$，△ABC 僅存在四層內鏡射△。



圖(29)

5.依上文中的 1 到 4 我們可去歸納內鏡射△的層數與原△三內角度數範圍排列關係。

內鏡射△層數	甲	<	乙	≤	丙	<	丁	≤	戊	<	己
一	0°		$\angle A$		45°		$\angle B$		$\angle C$		90°
二	45°		$\angle A$		$\angle B$		67.5°		$\angle C$		90°
三	45°		$\angle A$		56.25°		$\angle B$		$\angle C$		67.5°
四	56.25°		$\angle A$		$\angle B$		61.875°		$\angle C$		67.5°
五	56.25°		$\angle A$		59.0625°		$\angle B$		$\angle C$		61.875°
六	59.0625°		$\angle A$		$\angle B$		60.46875°		$\angle C$		61.875°
七	59.0625°		$\angle A$		59.765625°		$\angle B$		$\angle C$		60.46875°
八	59.765625°		$\angle A$		$\angle B$		60.1171875°		$\angle C$		60.46875°
九	59.765625°		$\angle A$		59.940625°		$\angle B$		$\angle C$		60.1171875°
十	59.94140625°		$\angle A$		$\angle B$		60.029296875°		$\angle C$		60.1171875°

我們發現：

(1)連續兩層的下層的常數項角度是上層兩個常數角度的平均。

(2)奇數層進到偶數層的規律和偶數層進到奇數層的規律類似但有點不一樣。

(3)當要計算內鏡射奇數層進到偶數層時，可以達成的原△三內角範圍，

其推算方式敘述如下：

若偶數層範圍為 $x^\circ < \angle A \leq \angle B < y^\circ \leq \angle C < z^\circ$

則下一個奇數層範圍為 $x^\circ < \angle A \leq \frac{x^\circ+y^\circ}{2} < \angle B \leq \angle C < y^\circ$

(4)當要計算內鏡射偶數層進到奇數層時，可以達成的原△三內角範圍。

(例如，要取得能內鏡射到第五層的原△三內角範圍，要從第四層範圍往下推算)

推算方法敘述如下：

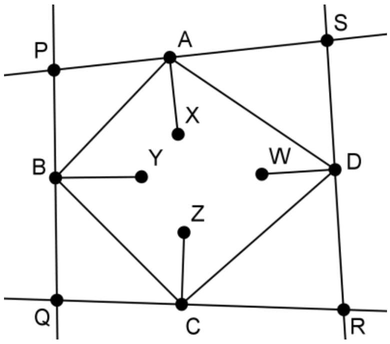
若奇數層範圍為 $x^\circ < \angle A \leq y^\circ < \angle B \leq \angle C < z^\circ$

則下一個偶數層範圍為 $y^\circ < \angle A \leq \angle B < \frac{y^\circ+z^\circ}{2} \leq \angle C < z^\circ$

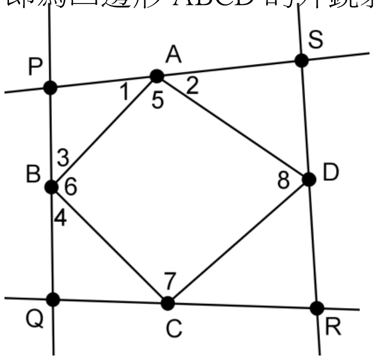
(5)利用上面兩個公式，當我們要精準的取得恰好能作 n 層內鏡射△時，只要依推算公式推算，就能找到三內角的適當範圍，而滿足這個範圍內的三內角，必可往內操作出 n 層內鏡射△。

五、內鏡射四邊形與外鏡射四邊形的作圖法探討:

(一)任一凸四邊形都有外鏡射四邊形且外鏡射四邊形必共圓。如圖(30)，凸四邊形 ABCD 中，$\overrightarrow{AX}$、$\overrightarrow{BY}$、$\overrightarrow{CZ}$、$\overrightarrow{DW}$平分各內角，$\overleftrightarrow{PS}$、$\overleftrightarrow{PQ}$、$\overleftrightarrow{QR}$、$\overleftrightarrow{RS}$各垂直對應的分角線。設四直線所圍成的四邊形為 PQRS，則四邊形 PQRS 即為四邊形 ABCD 的外鏡射四邊形



圖(30)



圖(31)

觀察圖(31)，PQRS 為 ABCD 的外鏡射四邊形，

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=180^\circ-2\angle 1$，$\angle 6=180^\circ-2\angle 3$

$\angle 5+\angle 6=360^\circ-2(\angle 1+\angle 3)=360^\circ-2(180^\circ-\angle P)=2\angle P$

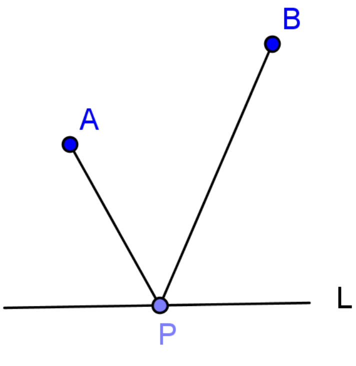
同理$\angle 7+\angle 8=2\angle R$ 故$\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=2\angle P+2\angle R=360^\circ$，$\therefore \angle P+\angle R=180^\circ$，

因此推得外鏡射四邊形必共圓。

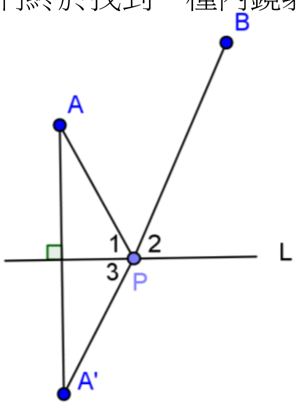
(二)反過來說四點共圓的四邊形才可能有內鏡射四邊形，但不是絕對都存在內鏡射四邊形，例如邊長比不適當(最長邊與最短邊比例差太大)，或四內角不適當(後文會探討)。

(三)四頂點共圓邊長比適當的四邊形如何用尺規作圖作出內鏡射四邊形:

我們想了很久很久，試過的方法不計其數，終於在第四冊幾何不等式中的一題作圖題找到靈感，敘述如下：已知 A、B 兩點是直線 L 外兩點，試在 L 上找一點 P，使$\overline{PA}+\overline{PB}$的值最小。如圖(32)，其解法是先從 A 點對直線 L 作一個線對稱的對稱點 A'再連$\overline{BA'}$，此時和直線 L 交於 P 點，P 點即為所求。如圖(33)，我們發現圖中也有$\angle 1=\angle 2$ 這種鏡射現象，利用這種想法，我們終於找到一種內鏡射四邊形的做法了。



圖(32)



圖(33)

已知 ABCD 為圓內接四邊形，且邊長比適當，如圖(34)

求作：作出內鏡射四邊形

方法甲(奇偶數邊多邊形皆可用，也叫線對稱作圖法)：

1.在$\overline{AB}$任取一點 P

2.以$\overline{AD}$為對稱軸，作出 P 點的對稱點 E

3.同樣以$\overline{BC}$為對稱軸，作出 P 點的對稱點 F

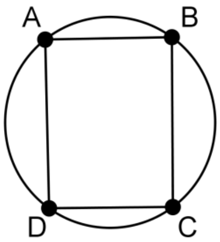
4.再以$\overline{CD}$為對稱軸，作出 E 點的對稱點 G，如圖(35)

5.連$\overline{FG}$，交$\overline{CD}$於 H，交$\overline{BC}$於 I

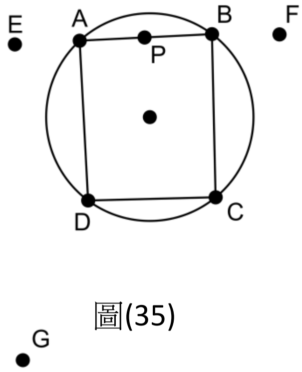
6.連$\overline{EH}$，交$\overline{AD}$於 J，如圖(36)

7.連$\overline{PI}$，$\overline{PJ}$，如圖(37)，則內鏡射四邊形 PIHJ 即為所求

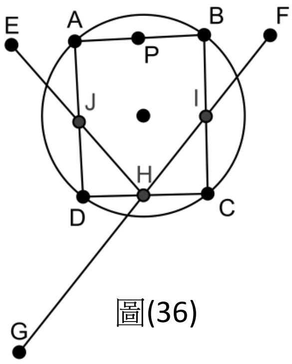
8.如圖(37-1)，平行移動內鏡射四邊形 PIHJ 可以得到無限多個內鏡射四邊形，如 QSNM，他們的周長相等，四內角不變



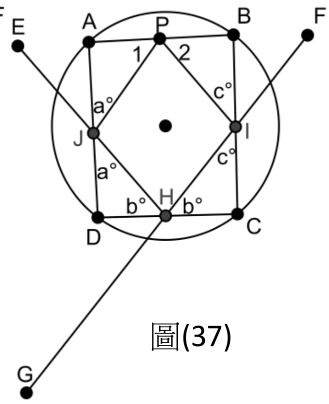
圖(34)



圖(35)



圖(36)



圖(37)

證明：

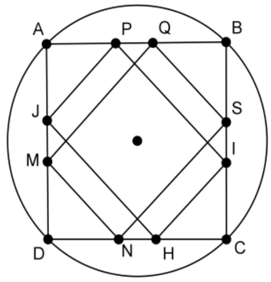
1.由圖(37)的對稱作圖概念知∠PJA=∠DJH，∠JHD=∠IHC，∠HIC=∠PIB

2.∵A、B、C、D 四點共圓，如圖(37-1)

$\therefore \angle A+\angle C=180^\circ \quad (180^\circ-\angle 1-a^\circ)+(180^\circ-b^\circ-c^\circ)=180^\circ$

$\therefore 180^\circ=\angle 1+a^\circ+b^\circ+c^\circ$

3.同理$\angle 2+c^\circ+a^\circ+b^\circ=180^\circ \Rightarrow \angle 1=\angle 2$ 故四邊形 PJHI 為內鏡射四邊形



圖(37-1)

方法乙：(四邊形專用，畫出來的內鏡射四邊形是方法甲無限多種中的一種)

1.令內接四邊形 ABCD 兩對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交於 O (O 非圓心)

2.過 O 點做$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$之垂線$\overline{PO}$、$\overline{QO}$、$\overline{RO}$、$\overline{SO}$

3.連接四邊形 PQRS，則四邊形 PQRS 為四邊形 ABCD 之內鏡射四邊形，如圖(A)

證明：

1.∵四邊形 ABCD 共圓⇒∠ABD=∠ACD(對同弧$\overset{\frown}{AD}$之圓周角)

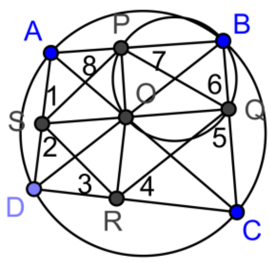
2.四邊形 BPOQ 中，$\angle BQO=90^\circ=\angle BPO$

∴ 四邊形 BPOQ 為圓內接四邊形(對角互補)⇒∠PQO=∠PBO(對同弧 PO 之圓周角)

3.同理∠RQO=∠RCO

4.由 1、2、3 得知∠PQO=∠RQO⇒∠5=∠6

5.同理可證∠1=∠2，∠3=∠4，∠7=∠8，故四邊形 PQRS 為四邊形 ABCD 之內鏡射四邊形



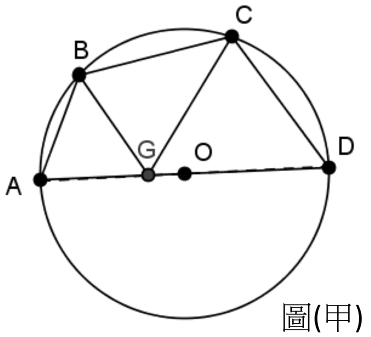
圖(A)

(四)在共圓的四邊形中是否存在內鏡射四邊形的判別法探討：

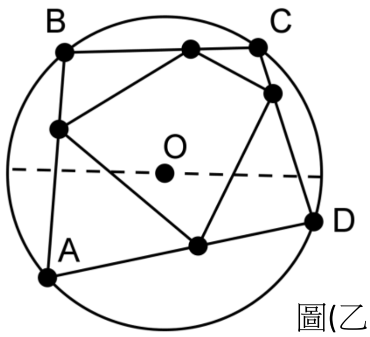
(1)若 ABCD 恰為半圓上的內接四邊形(也就是有一弧=180°，例如:$\overset{\frown}{AD}=180^\circ$)，則 ABCD 的內鏡射四邊形必退化成△，如圖(甲)，退化成△GBC。

(2)若 ABCD 為超過半圓的內接四邊形(也就是$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$皆小於180°)，則必存在一個內鏡射四邊形，可以畫出一個內鏡射四邊形。如圖(乙)

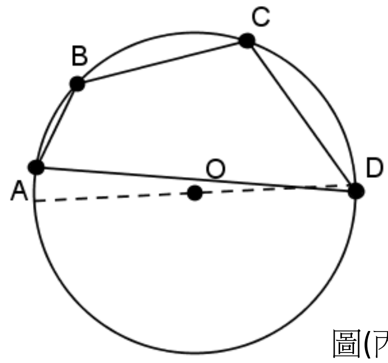
(3)若 ABCD 為半圓內的內接四邊形(也就是其中有一$> 180^\circ$，例如: $\overset{\frown}{AD} > 180^\circ$)，則無法畫出內鏡射四邊形。如圖(丙)



圖(甲)



圖(乙)



圖(丙)

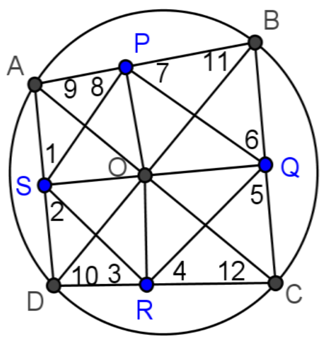
(五)凸四邊形依尺規作圖按〝方法甲或乙〞操作出來的內鏡射四邊形又能共圓的條件探討

如圖(B)，若四邊形 ABCD 為圓內接四邊形且存在內鏡射四邊形。以方法乙作內鏡射四邊形 PQRS，$\because \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6$，$\angle 7 = \angle 8$，$\therefore$O 為四邊形 PQRS 之內切圓圓心$\Rightarrow$ 四邊形 PQRS之對邊和必相等。

又$\angle 9 = \angle 10$、$\angle 11 = \angle 12$，如果$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，則$\angle 10 + \angle 12 = 90^\circ$、$\angle 9 + \angle 11 = 90^\circ$ $\Rightarrow \angle 7 + \angle 8 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$，即 PQRS 對角互補，四點共圓

當然由方法甲操作出的內鏡射四邊形，不一定能再共圓。

由方法乙操作出的內鏡射四邊形又共圓的條件是原四邊形兩對角線互相垂直



圖(B)

(六)利用國中課內基本幾何圖形依方法乙作內鏡射多層次探索

1.四邊形 ABCD 能作一層內鏡射四邊形的必要條件有：

甲：共圓　乙：$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$皆小於180°，如圖(B)

2.四邊形 ABCD 能作二層內鏡射四邊形的必要條件有：

甲：共圓　乙：$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$皆小於180°　丙：兩對角線互相垂直，如圖(38)

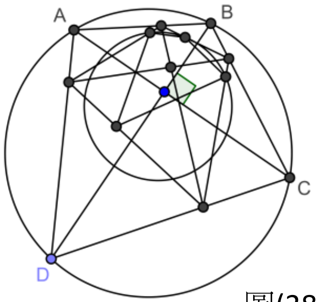
3.四邊形 ABCD 能作三層內鏡射四邊形必要的條件有：

甲：共圓　乙：$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$皆小於180°　丙：兩對角線互相垂直

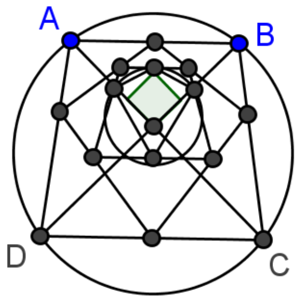
丁：為等腰梯形，如圖(39)

4.四邊形 ABCD 能作四層以上內鏡射四邊形的條件是條件甲、乙、丙及四內角越接近90°的圖形：

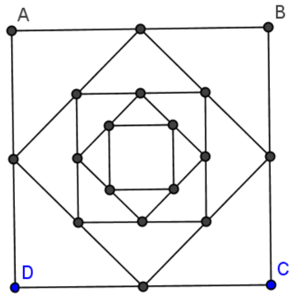
甲：共圓　乙：$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$皆小於180°　丙：例如正方形，如圖(40)



圖(38)



圖(39)



圖(40)

六、四邊形的多層次內鏡射條件探討

假設共圓四邊形 ABCD 中，利用方法甲可連續做出多層次的內鏡射圖形，如圖(41)。

則$\angle 1=\angle A+\frac{\angle D-\angle B}{2}$　$\angle A\leq\angle B\leq\angle C\leq\angle D$

證明：$\angle 1+\angle 2=2\angle A$ ⋯①　　$\angle 1+\angle 3=180^\circ$ ⋯⑤

$\angle 2+\angle 3=2\angle B$ ⋯②　　$\angle 2+\angle 4=180^\circ$ ⋯⑥

$\angle 3+\angle 4=2\angle C$ ⋯③

$\angle 4+\angle 1=2\angle D$ ⋯④

④－②　$\angle 4+\angle 1-\angle 2-\angle 3=2\angle D-2\angle B$ ⋯⑦

③－①　$\angle 3+\angle 4-\angle 1-\angle 2=2\angle C-2\angle A$ ⋯⑧

⑦－⑧　$2\angle 1-2\angle 3=2\angle D-2\angle B-2\angle C+2\angle A$

$\angle 1-\angle 3=\angle D-\angle B-\angle C+\angle A$

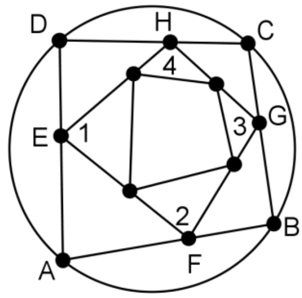
$\angle 1-(180^\circ-\angle 1)=\angle D-\angle B-\angle C+\angle A$

$2\angle 1=180^\circ+\angle D-\angle B-\angle C+\angle A$

$2\angle 1=\angle A+\angle C+\angle D-\angle B-\angle C+\angle A$

$2\angle 1=2\angle A+\angle D-\angle B$

$\therefore\angle 1=\angle A+\frac{\angle D-\angle B}{2}$



圖(41)

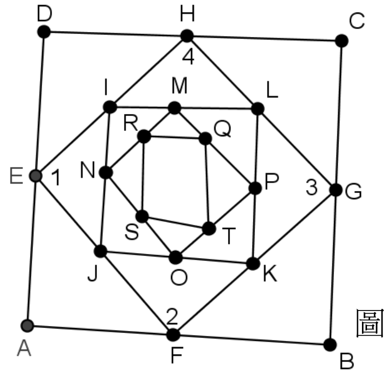
因此，在可連續操作多層次的內鏡射四邊形條件下，內層的任一內角可由外層的角度推算出來。

設共圓四邊形 ABCD 可連續做出多層次的內鏡射圖形，如圖(42)

則$\angle 1=\angle A+\frac{\angle D-\angle B}{2}$，$\angle 2=\angle B+\frac{\angle A-\angle C}{2}$，$\angle 3=\angle C+\frac{\angle B-\angle D}{2}$，$\angle 4=\angle D+\frac{\angle C-\angle A}{2}$

如圖(42)，設$\angle A \leq \angle B \leq \angle D \leq \angle C$，四邊形 ABCD 是可做多層次內鏡射的多邊形，並令$\angle A = a$，$\angle B = b$......以此類推，而各層角度寫成下表。

(由小到大)				
原層角度	a	b	d	c
內推第一層	f	e	g	h
內推第二層	j	k	i	l
內推第三層	o	n	p	m
內推第四層	s	t	r	q



圖(42)

承前文$\angle 1 = a + \frac{d-b}{2} = a + \frac{(180^\circ - b) - b}{2} = a - b + 90^\circ$

$$\angle 2 = b + \frac{a-c}{2} = b + \frac{a - (180^\circ - a)}{2} = a + b - 90^\circ$$

在同一規律下，$\angle J$ 是第二層的最小角

$j = \angle 1 + \angle 2 - 90^\circ$

$= (a - b + 90^\circ) + (a + b - 90^\circ) - 90^\circ$

$= 2a - 90^\circ$

由於越往內層操作所得的四內角應越偏離90°，這偏離的數量在奇數層之間或在偶數層之間有著一定的規律，探討如下：

$$\frac{\angle J \text{ 偏離 } 90^\circ \text{的量}}{\angle A \text{ 偏離 } 90^\circ \text{的量}} = \frac{90^\circ - j}{90^\circ - a} = \frac{90^\circ - (2a - 90^\circ)}{90^\circ - a} = \frac{2(90^\circ - a)}{90^\circ - a} = 2$$

這表示偏離量成等比數列擴大，公比為 2，我們發現其他對應角也是如此。而公比 2 將在後文中，多層次的判斷起了很大的作用。

接下來要仿照三角形，推導出能操作到指定層數的原始四內角的角度範圍。

(一)只能操作到第一層的限制式探討:

過程：1. $f > 0^\circ$(能畫至第一層，如圖(42))

$a + b - 90^\circ > 0^\circ$

$a + b > 90^\circ$

2. $j \leq 0^\circ$(不能畫至第二層，如圖(42))

$90^\circ - j \geq 90^\circ$

$2(90 - a) \geq 90^\circ$

$90^\circ - a \geq 45^\circ$

$-a \geq -45^\circ$

$a \leq 45^\circ$

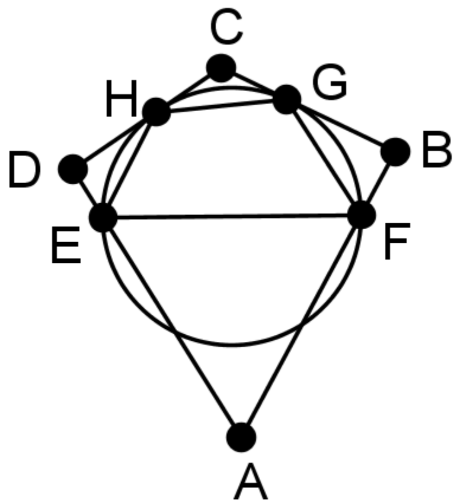
3. $\because$ $a \leq b \leq d \leq c$

且 $a + c = 180^\circ$

$\therefore$ $a \leq 90^\circ$

同理 $b \leq 90^\circ$ —— ①

(由小到大)				
原層角度	a	b	d	c
內推第一層	f	e	g	h
內推第二層	j	k	i	l
內推第三層	o	n	p	m
內推第四層	s	t	r	q



圖(43)

又承 1. $a+b>90^\circ$ —— ②

由①+②

$a+b+90^\circ>b+90^\circ$

$\therefore a>0^\circ$

結論：統合上列所述得知可畫到第一層的∠A 範圍限制為$45^\circ\geq\angle A>0^\circ$，且$\angle A+\angle B>90^\circ$，而四邊形對角互補，因此可推得四邊形僅能畫出內鏡射一層(如圖(43))的限制式為：

> 僅能畫出一層內鏡射四邊形的充要條件是 $45^\circ\geq\angle A>0^\circ$，$\angle A+\angle B>90^\circ$

(二)只能操作到第二層限制式探討:

過程：1.令 $j>0^\circ$(能畫至第二層，如圖(42))

$90^\circ-j<90^\circ$

$2(90^\circ-a)<90^\circ$

得 $a>45^\circ$

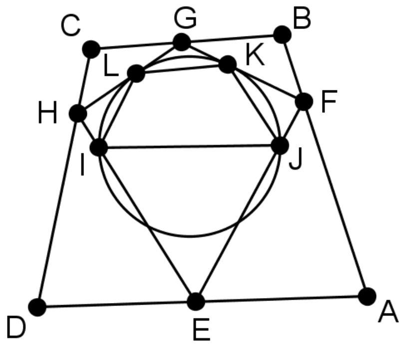
2. 令 $o\leq 0^\circ$ (不能畫至第三層，如圖(42))

$90^\circ-o\geq 90^\circ$

$2(90^\circ-f)\geq 90^\circ$

$2[90^\circ-(a+b-90^\circ)]\geq 90^\circ$

化簡得 $a+b\leq 135^\circ$



圖(44)

結論：統合上列所述得知可畫到第二層的∠A 範圍限制為$\angle A>45^\circ$，且$135^\circ\geq\angle A+\angle B$，而四邊形對角互補，因此可推得四邊形僅能畫出內鏡射二層(如圖(44))的限制式為：

> 僅能畫出二層內鏡射四邊形的充要條件是$\angle A>45^\circ$，$135^\circ\geq\angle A+\angle B$

(三)只能操作第三層的限制式探討

過程：只畫到第一層的限制式為 $45^\circ\geq\angle A>0^\circ$，$\angle A+\angle B>90^\circ$，若要只畫到第三層，那麼 $45^\circ\geq j>0^\circ$，且$j+k>90^\circ$，就像從原層畫到第一層的條件:

1.令 $45^\circ\geq j>0^\circ$

又 $j=2a-90^\circ$

代入得 $45^\circ\geq 2a-90^\circ>0^\circ$

化簡得 $67.5^\circ\geq a>45^\circ$

2. 令 $j+k>90^\circ$

又 $j=2a-90^\circ$，

$j=2a-90^\circ$，$k=2b-90^\circ$

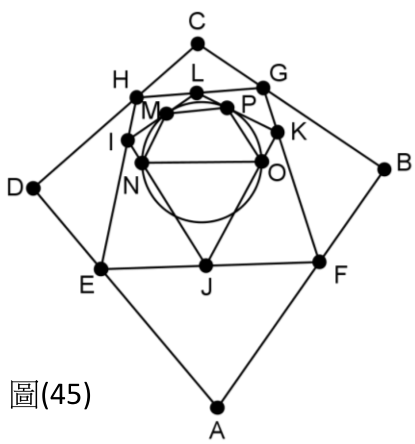
代入上式

$(2a-90^\circ)+(2b-90^\circ)>90^\circ$

化簡得 $a+b>135^\circ$

(由小到大)

原層角度	a	b	d	c
內推第一層	f	e	g	h
內推第二層	j	k	i	l
內推第三層	o	n	p	m
內推第四層	s	t	r	q



圖(45)

結論：統合上列所述得知可畫到第三層的∠A 範圍限制為$67.5^\circ\geq\angle A>45^\circ$，且$\angle A+\angle B>135^\circ$，而四邊形對角互補，因此可推得四邊形僅能畫出內鏡射三層(如圖(45))的限制式為：

> 僅能畫出三層內鏡射四邊形的充要條件是$67.5^\circ\geq\angle A>45^\circ$，$\angle A+\angle B>135^\circ$

(四)只能操作到第四層的限制式探討

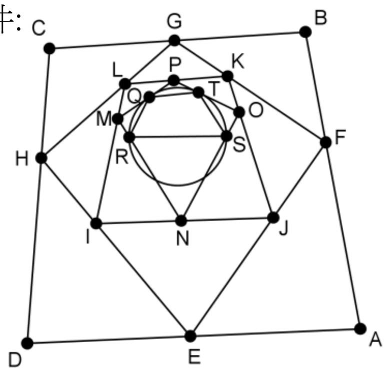
過程：只畫到第二層的限制式為$\angle A > 45^\circ$，$135^\circ \geq \angle A+\angle B$，若要只畫到第四層，那麼 $j>45^\circ$，$135^\circ \geq j+k$，就像從第原層畫到第二層的條件：

1. $2a-90^\circ > 45^\circ$

   $a > 67.5^\circ$

2. $2a-90^\circ + 2b - 90^\circ \leq 135^\circ$

   $a+b \leq 157.5^\circ$



圖(46)

結論：統合上列所述得知可畫到第四層的$\angle A$ 範圍限制為$\angle A > 67.5^\circ$，且$157.5^\circ > \angle A + \angle B$，而四邊形對角互補，因此可推得四邊形僅能畫出內鏡射四層(如圖(46))的限制式為：

僅能畫出四層內鏡射四邊形的充要條件是$\angle A > 67.5^\circ$，$157.5^\circ \geq \angle A + \angle B$

(五)經由以上過程和結論我們找到其規律並整理出以下公式：

若要指定畫到第 Q 層，Q 為奇數，則其範圍是

$$\frac{\angle A+\angle B}{2} > 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{\frac{Q+1}{2}}} \geq \angle A > 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{\frac{Q-1}{2}}}$$

若要指定畫到第 p 層，p 為偶數，則其範圍是

$$\angle A > 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{\frac{p}{2}}} \text{ 且 } 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{\frac{p+2}{2}}} \geq \frac{\angle A+\angle B}{2}$$

我們經由此公式推得以下表格

$\angle A \leq \angle B \leq \angle D \leq \angle C$ ，$\angle C$ 和$\angle A$ 互補，$\angle D$ 和$\angle B$ 互補

	$\angle A$	$\angle A$ 和$\angle B$
第一層	$45^\circ \geq \angle A > 0^\circ$	$\angle A + \angle B > 90^\circ$
第二層	$\angle A > 45^\circ$	$135^\circ \geq \angle A + \angle B$
第三層	$67.5^\circ \geq \angle A > 45^\circ$	$\angle A + \angle B > 135^\circ$
第四層	$\angle A > 67.5^\circ$	$157.5^\circ \geq \angle A + \angle B$
第五層	$78.75^\circ \geq \angle A > 67.5^\circ$	$\angle A + \angle B > 157.5^\circ$
第六層	$\angle A > 78.75^\circ$	$168.75^\circ \geq \angle A + \angle B$
第七層	$84.375^\circ \geq \angle A > 78.75^\circ$	$\angle A + \angle B > 168.75^\circ$
第八層	$\angle A > 84.375^\circ$	$174.375^\circ \geq \angle A + \angle B$
第九層	$87.1875^\circ \geq \angle A > 84.375^\circ$	$\angle A + \angle B > 174.375^\circ$
第十層	$\angle A > 87.1875^\circ$	$177.1875^\circ \geq \angle A + \angle B$

(六)操作範例

層次	∠A	∠B	∠D	∠C
	87°	89°	91°	93°
1.	86°	88°	92°	94°
2.	84°	88°	92°	96°
3.	82°	86°	94°	98°
4.	78°	86°	94°	102°
5.	74°	82°	98°	106°
6.	66°	82°	98°	114°
7.	58°	74°	106°	122°
8.	42°	74°	106°	138°
9.	26°	58°	122°	154°
10.	-6°	58°	122°	186°

表(一)

層次	∠A	∠B	∠D	∠C
	85°	88°	92°	95°
1.	83°	87°	93°	97°
2.	80°	86°	94°	100°
3.	76°	84°	96°	104°
4.	70°	82°	98°	110°
5.	62°	78°	102°	118°
6.	50°	74°	106°	130°
7.	34°	66°	114°	146°
8.	10°	58°	122°	170°
9.	-22°	42°	138°	202°

表(二)

由上表知可操作到第八層，圖形見電腦檔

由上表知可操作到第九層，圖形見電腦檔

圖形的繪製方法，可先繪出一個四內角是 26°,58°,122°,154°的四邊形，再利用外鏡射連續往外操作九次，即可繪得四內角是 87°,89°,91°,93°的四邊形 ABCD。反過來說，由四邊形 ABCD 必僅能作內鏡射九次。

> 當原四內角
> ∠A、∠B、∠C、∠D 愈逼近 90°、邊長比適當時，可以操作到愈多層內鏡射四邊形。

七、內鏡射五邊形與外鏡射五邊形的尺規作圖法

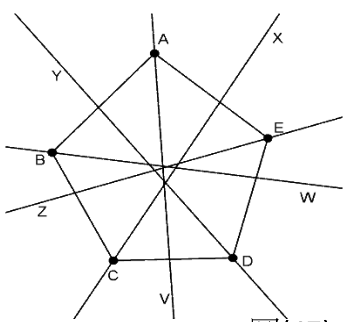
我們發現五邊形不共圓可做出內鏡射五邊形，我們花了幾個月的時間， 融合三角形及四邊形的內鏡射作圖法，驚奇的作出了五邊形的內鏡射圖形，做法如下：

(一)外鏡射五邊形作圖法已知五邊形 ABCDE，求作五邊形 ABCDE 的外鏡射五邊形

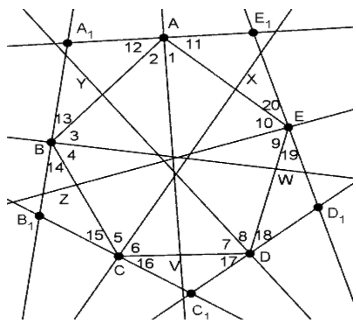
1.分別作∠A、∠B、∠C、∠D、∠E 的分角線$\overleftrightarrow{AV}$，$\overleftrightarrow{BW}$，$\overleftrightarrow{CX}$，$\overleftrightarrow{DY}$，$\overleftrightarrow{EZ}$。如圖(47)

2.分別 A、B、C、D、E，作$\overleftrightarrow{AV}$，$\overleftrightarrow{BW}$，$\overleftrightarrow{CX}$，$\overleftrightarrow{DY}$，$\overleftrightarrow{EZ}$的垂線，設兩兩相交於 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1，如圖(48)

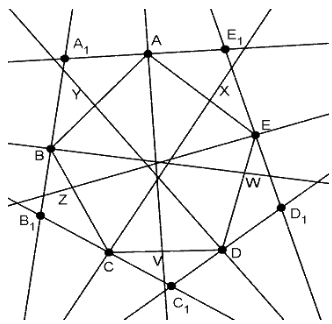
3.此時五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 即為五邊形 ABCDE 的外鏡射五邊形，如圖(49)



圖(47)



圖(48)



圖(49)

(二)內鏡射五邊形作圖法

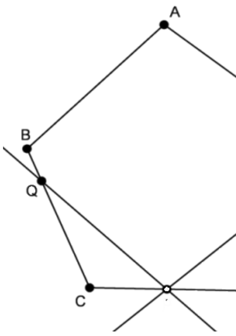
方法一：同△作圖法二

1.在圖(50)的$\overline{CD}$上取適當的一點 P，過 P 作$\overleftrightarrow{PQ}$、$\overleftrightarrow{PR}$，使 $\angle QPC=\angle RPD=(\angle ABC+\angle AED)-180^{\circ}$。

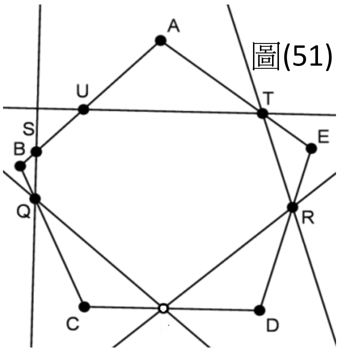
2.再作$\angle SQB=\angle PQC$，$\angle TRE\angle PRD$，$\angle RTE=\angle UTA$，如圖(51)

3.取 S、U 中點 V，以 V 為原點作鏡射，交$\overline{BC}$於 W，交$\overline{CD}$於 X，交$\overline{DE}$於 Y，交$\overline{AE}$於 Z，如圖(52)

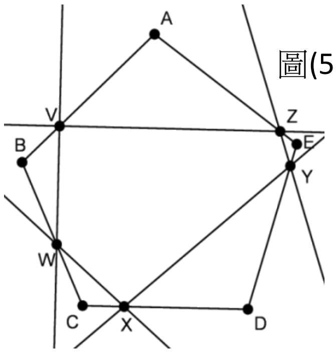
4.則五邊形 VWXYZ 即為五邊形 ABCDE 的內鏡射五邊形，如圖(53)。



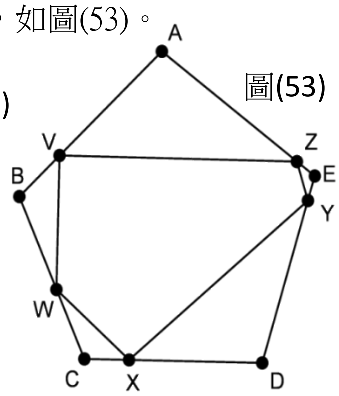
圖(50)



圖(51)



圖(52)



圖(53)

方法二：(1)以$\overline{BC}$為對稱軸，作出 P 的對稱點 Q。

(2)再以$\overline{CD}$為對稱軸，作出 Q 的對稱點 R。

(3)再以$\overline{DE}$為對稱軸，作出 R 的對稱點 S。

(4)再另外一側以$\overline{AE}$為對稱軸作出 P 的對稱點 T。

(5)再以$\overline{ED}$為對稱軸，作出 T 的對稱點 U。

(6)再以$\overline{CD}$為對稱軸，作出 U 的對稱點 V。

(7)連$\overline{QV}$交$\overline{BC}$，$\overline{CD}$於 F,G。

(8)連$\overline{TS}$交$\overline{AE}$、$\overline{ED}$於 H、I。

(9)連$\overline{RU}$，R、G、I、U 四點必共線。

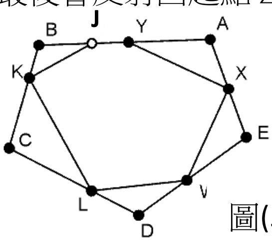
(10)再在$\overline{AB}$上，任取一點 J。(J≠P)。

(11)$\theta=\frac{(\angle BPF+\angle APH)}{2}$

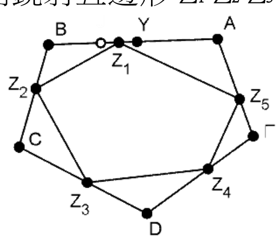
(12)在 J 點作$\angle BJK=\theta$，並逆時鐘方向作反射，交各邊於 L，W，X，Y，最後點 Y 與 J 不一定會重合，如圖(54)。

(13)如圖(55)，取$\overline{JY}$的中點 Z_1。

(14)從 Z_1 開始，作$\angle BZ_1Z_2=\theta$，沿逆時鐘方向作鏡射，交各邊於 Z_2，Z_3，Z_4，Z_5，最後會反射回起點 Z_1。則內鏡射五邊形 $Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ 即為所求。



圖(54)



圖(55)

討論：

1.凸五邊形不一定能作出內鏡射五邊形。

2.如同三角形，在可作出內鏡射五邊形中，我們發現也是唯一的。

3.正五邊形可作出無限多層內鏡射五邊形。

4.任意奇數多邊形都能仿照本法求作內鏡射多邊形。

八、內鏡射六邊形的尺規作圖法

我們也發現六邊形不共圓也可作出內鏡射六邊形，我們沿用五邊形的做法，幸運的是偶數邊形，從起點開始的線對稱點數左右一樣多，此時作圖手續簡化很多，敘述如下：

已知 ABCDEF 為凸六邊形，P 為邊$\overline{AF}$上的任一點。

求作：過 P 點，作出內鏡射六邊形。

作法：

1.從 P 點開始依次序，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$，$\overline{CD}$為對稱軸，作出對稱點 Q、R、S

2.另一方向，也是從 P 點開始，依次序，分別以$\overline{EF}$、$\overline{DE}$、$\overline{CD}$為對稱軸，作出對稱點 G、H、I。

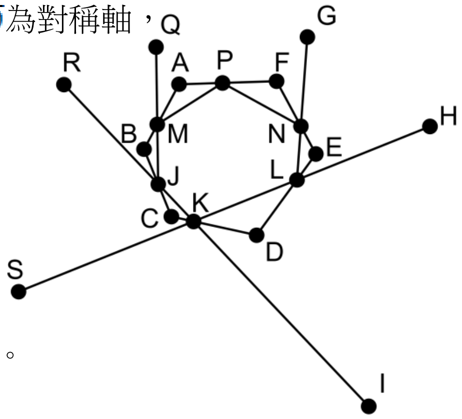
3.連$\overline{RI}$交$\overline{BC}$、$\overline{CD}$於 J、K。

4.連$\overline{HS}$，交$\overline{ED}$於 L，同時和$\overline{CD}$的交點也是 K 點。

5.連$\overline{QJ}$，交$\overline{AB}$於 M。

6.連$\overline{GL}$，交$\overline{EF}$於 N

7.如圖(56)，連$\overline{PM}$、$\overline{PN}$，則內鏡射六邊形 PMJKLN 即為所求。



圖(56)

討論：

1. 凸六邊形不一定能作出內鏡射六邊形。

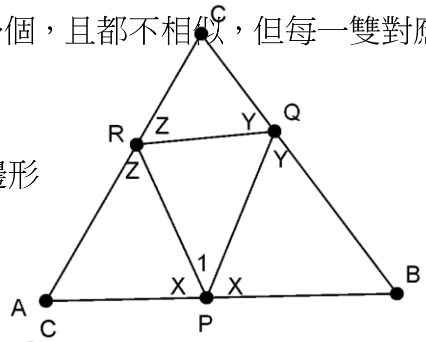
2.若在共同的六邊形中，內鏡射六邊形有無限多個，且都不相似，但每一雙對應邊都平行。

3.正六邊形可作出無限多層內鏡射六邊形

4.任意偶數多邊形都能仿照本法求作內鏡射多邊形

九、奇數多邊形多層次內鏡射的內角計算公式探討

(一)三角形



圖(57)

如圖(57)，設△PQR 為△ABC 的內鏡射△，

$2x+2y+2z=3\times180^{\circ}-180^{\circ}=360^{\circ}$

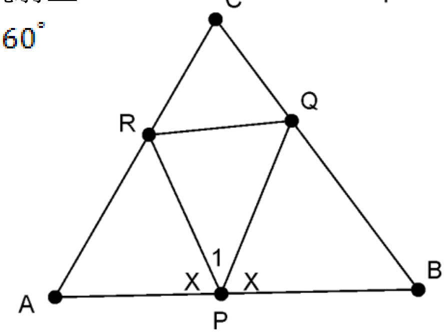
$\therefore x+y+z=180^{\circ}$

在△CRQ 中$\angle C+y+z=180^{\circ}$

$\Longrightarrow \angle C+(180^{\circ}-x)=180^{\circ}$

故 $x=\angle C$

如圖(58)



圖(58)

$\angle P=\angle 1=180^{\circ}-2x$

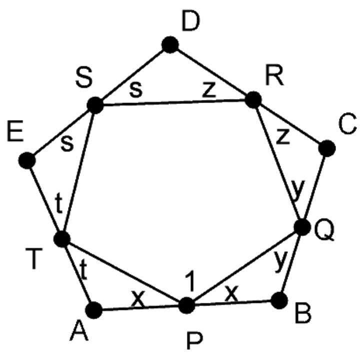
$=180^{\circ}-2c$

$=\angle A+\angle B+\angle C-2\angle C$

$=\angle A+\angle B-\angle C$

(二)五邊形

如圖(59)，設五邊形 PQRST 為五邊形 ABCDE 的內鏡射五邊形



圖(59)

$\angle C+y+z=180^{\circ}$.........①

$\angle E+s+t=180^{\circ}$.........②

由①+②得$\angle C+\angle E+y+z+s+t=360^{\circ}$.........③

又$2x+2y+2z+2s+2t=5\times 180^{\circ}-540^{\circ}=360^{\circ}$

$\therefore x+y+z+s+t=180^{\circ}$

代入③得$\angle C+\angle E+(180^{\circ}-x)=360^{\circ}$

$\therefore x=\angle C+\angle E-180^{\circ}$

到此我們可以計算∠P(內鏡射五邊形的一角)

$$\begin{aligned}\angle P=\angle 1=180^{\circ}-2x&=180^{\circ}-2(\angle C+\angle E-180^{\circ})\\&=540^{\circ}-2\angle C-2\angle E\\&=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E-2\angle C-2\angle E\\&=\angle A+\angle B-\angle C+\angle D-\angle E\end{aligned}$$

(三)七邊形

如圖(60)，設七邊形 PQRSTUV 為七邊形 ABCDEFG 的內鏡射七邊形

仿照三角形及五邊形，我們可以算出 $x=\angle C+\angle E+\angle G-360^{\circ}$

因此內鏡射七邊形的一內角

$\angle P=\angle 1$

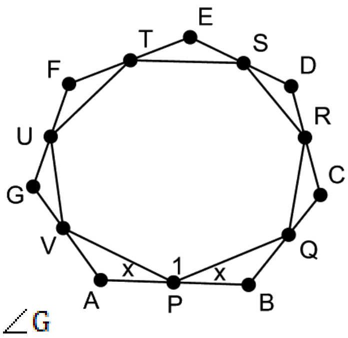
$=180^{\circ}-2x$

$=180^{\circ}-2(\angle C+\angle E+\angle G-360^{\circ})$

$=900^{\circ}-2\angle C-2\angle E-2\angle G$

$=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G-2\angle C-2\angle E-2\angle G$

$=\angle A+\angle B-\angle C+\angle D-\angle E+\angle F-\angle G$



圖(60)

(四)九邊形，同理內鏡射九邊形的鏡射角$x=\angle C+\angle E+\angle G+\angle I-540^{\circ}$

此時內鏡射九邊形的一內角為$\angle P=\angle 1=\angle A+\angle B-\angle C+\angle D-\angle E+\angle F-\angle G+\angle H-\angle I$

(五)n 邊形 (n 為奇數)

設 n 邊形$P_1P_2P_3\ldots P_n$為 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$的內鏡射 n 邊形且P_1在$\overline{A_1A_2}$上

則①P_1點處的內鏡射角角度 $x=A_3+A_5+A_7+\cdots+A_n-(n-3)\times 180^{\circ}$

②內鏡射 n 邊形的一內角

$$\angle P_1=\angle A_1+\angle A_2-\angle A_3+\angle A_4-\angle A_5+\angle A_6-\cdots-\angle A_n$$

結論：當一個 n 邊多邊形(n 為奇數)存在內鏡射 n 邊形時，我們可以利用上述公式計算出內鏡射 n 邊形的每一內角，甚至可以一層一層的再算進去，直到內角角度超出範圍時停止。

十、偶數多邊形多層次內鏡射的內角計算公式探討

(一)四邊形

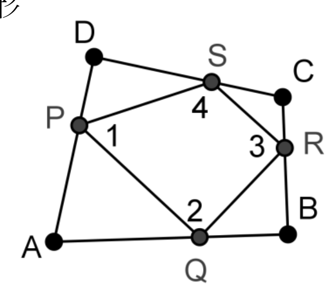
如圖(61)，設四邊形 PQRS 為四邊形 ABCD 的內鏡射四邊形

則

$$\begin{cases}\angle 1+\angle 2=2\angle A\ldots ①\\\angle 2+\angle 3=2\angle B\ldots ②\\\angle 3+\angle 4=2\angle C\ldots ③\\\angle 4+\angle 1=2\angle D\ldots ④\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\angle A+\angle C=180^{\circ}\\\angle B+\angle D=180^{\circ}\end{cases}$$



圖(61)

由④−②得$\angle 4+\angle 1-\angle 2-\angle 3=2\angle D-2\angle B$ ... ⑤

③−①得$\angle 3+\angle 4-\angle 1-\angle 2=2\angle C-2\angle A$ … ⑥

由⑤−⑥得$2\angle 1-2\angle 3=2\angle D-2\angle B-2\angle C+2\angle A$

$\therefore \angle 1-\angle 3=\angle D-\angle B-\angle C+\angle A$

又$\angle 1+\angle 3=180^\circ$及$\angle A+\angle C=180^\circ$

$\therefore \angle 1-(180^\circ-\angle 1)=\angle D-\angle B-(180^\circ-\angle A)+\angle A$

$\therefore 2\angle 1=2\angle A+\angle D-\angle B$

推得$\angle 1=\angle A+\frac{\angle D-\angle B}{2}$

(二)六邊形

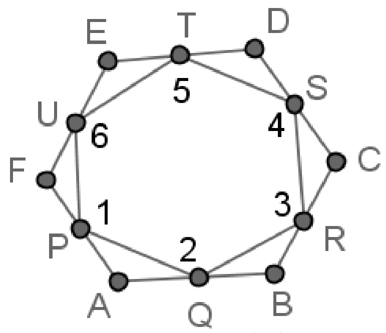
如圖(62)，設六邊形 PQRSTU 為六邊形 ABCDEF 的內鏡射六邊形

則

$$\begin{cases}\angle 1+\angle 2=2\angle A \ \dots \ ①\\ \angle 2+\angle 3=2\angle B \ \dots \ ②\\ \angle 3+\angle 4=2\angle C \ \dots \ ③\\ \angle 4+\angle 5=2\angle D \ \dots \ ④\\ \angle 5+\angle 6=2\angle E \ \dots \ ⑤\\ \angle 6+\angle 1=2\angle F \ \dots \ ⑥\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\angle A+\angle C+\angle E=360^\circ\\ \angle B+\angle D+\angle F=360^\circ\end{cases}$$



圖(62)

由⑥−②得$\angle 1+\angle 6-\angle 2-\angle 3=2\angle F-2\angle B$ … ⑦

由⑤−①得$\angle 5+\angle 6-\angle 1-\angle 2=2\angle E-2\angle A$ … ⑧

由⑦−⑧得$2\angle 1-\angle 3-\angle 5=2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A$

因為在作多層次操作時，仍會有$\angle 1+\angle 3+\angle 5=360^\circ$，$\angle 2+\angle 4+\angle 6=360^\circ$

因此$2\angle 1-\left(360^\circ-\angle 1\right)=2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A$

$3\angle 1-360^\circ=2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A$

得$\angle 1=120^\circ+\frac{2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A}{3}$

$=\frac{1}{3}\left(\angle A+\angle C+\angle E+2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A\right)$

$=\angle A+\frac{2\angle F+\angle C-\angle E-2\angle B}{3}$

(三)八邊形

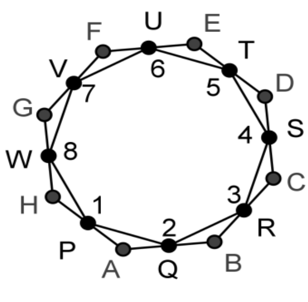
如圖(63)，設八邊形 PQRSTUVW 為八邊形 ABCDEFGH 的內鏡射八邊形

則

$$\begin{cases}\angle 1+\angle 2=2\angle A \ \dots \ ①\\ \angle 2+\angle 3=2\angle B \ \dots \ ②\\ \angle 3+\angle 4=2\angle C \ \dots \ ③\\ \angle 4+\angle 5=2\angle D \ \dots \ ④\\ \angle 5+\angle 6=2\angle E \ \dots \ ⑤\\ \angle 6+\angle 7=2\angle F \ \dots \ ⑥\\ \angle 7+\angle 8=2\angle G \ \dots \ ⑦\\ \angle 8+\angle 1=2\angle H \ \dots \ ⑧\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\angle A+\angle C+\angle E+\angle G=540^\circ\\ \angle B+\angle D+\angle F+\angle H=540^\circ\end{cases}$$



圖(63)

我們將用∠A, ∠B,∠C,.....,∠G,∠H 去推導∠1

由⑧−② $\angle 8+\angle 1-\angle 2-\angle 3=2\angle H-2\angle B$

由⑦−① $\angle 7+\angle 8-\angle 1-\angle 2=2\angle G-2\angle A$

兩式相減得 $2\angle 1-\angle 3-\angle 7=2\angle H-2\angle B-2\angle G+2\angle A$ ... ⑨

由⑧−④ $\angle 8+\angle 1-\angle 4-\angle 5=2\angle H-2\angle D$

由⑦−③ $\angle 7+\angle 8-\angle 3-\angle 4=2\angle G-2\angle C$

兩式相減得 $\angle 1-\angle 5-\angle 7+\angle 3=2\angle H-2\angle D-2\angle G+2\angle C$ ... ⑩

由⑥−② $\angle 6+\angle 7-\angle 2-\angle 3=2\angle F-2\angle B$

由⑤−① $\angle 5+\angle 6-\angle 1-\angle 2=2\angle E-2\angle A$

兩式相減得 $\angle 7-\angle 3-\angle 5+\angle 1=2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A$ ... ⑪

由⑩−⑪ $2\angle 1-2\angle 5=2\angle H-2\angle D-2\angle G+2\angle C+2\angle F-2\angle B-2\angle E+2\angle A$ ...⑫

將 $\angle 3+\angle 7=540^\circ-\angle 1-\angle 5$ 帶入⑨

得 $2\angle 1-(540^\circ-\angle 1-\angle 5)=2\angle H-2\angle B-2\angle G+2\angle A$

即 $3\angle 1+\angle 5=540^\circ+2\angle H-2\angle B-2\angle G+2\angle A$ ... ⑬

由⑫+2×⑬得 $8\angle 1=1080^\circ+6\angle H-2\angle D-6\angle G+2\angle C+2\angle F-6\angle B$

故 $\angle 1=135^\circ+\frac{1}{4}(3\angle H-\angle D-3\angle G+\angle C+\angle F-3\angle B-\angle E+3\angle A)$

$=\frac{1}{4}(540^\circ+3\angle H-\angle D-3\angle G+\angle C+\angle F-3\angle B-\angle E+3\angle A)$

$=\frac{1}{4}[(\angle A+\angle C+\angle E+\angle G)+3\angle H-\angle D-3\angle G+\angle C+\angle F-3\angle B-\angle E+3\angle A]$

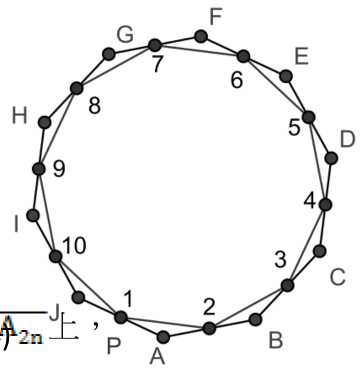
$=\angle A+\frac{3\angle H+2\angle C+\angle F-\angle D-2\angle G-3\angle B}{4}$

(四)十邊形

設∠1 為十邊形 ABCDEFGHIJ 的內鏡射多邊形一內角

如圖(64)

則 $\angle 1=\angle A+\frac{4\angle J+3\angle C+2\angle H+\angle E-\angle G-2\angle D-3\angle I-4\angle B}{5}$



圖(64)

(五)2n 邊形

若∠1=∠P 為 2n 邊形的內鏡射多邊形的一內角，P 在 $\overline{A_1A_{2n}}$ 上，則

$\angle 1=\angle P$

$$=\angle A_1+\frac{(n-1)A_{2n}+(n-2)A_3+(n-3)A_{2n-2}+(n-4)A_5+\cdots+A_n-A_{n+2}-2A_{n-1}-3A_{2n-1}-\cdots-(n-1)A_2}{n}$$

結論：當一個 2n 邊多邊形存在多層次內鏡射多邊形時，我們可以利用上述公式計算出內鏡射多邊形的每一內角，接著再一層層的算進去，直到內角角度超出範圍時停止。

十、五邊形的多層次內鏡射限制式探討

在三角形與四邊形的內鏡射多層次內鏡射中，因為有共圓這個基本條件，所以討論多層次內鏡射較方便敘述限制式，然而五邊形以上不共圓也有內鏡射，因此我們要先約定

探討規則，以下即為我們的約定：

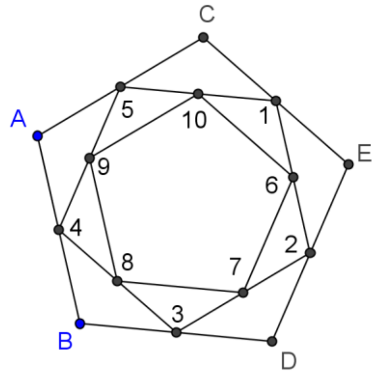
①將給定的五個角作最佳排列，放在原層上，以便得到最多層內鏡射

②作圖時，不考慮邊長，取適當的邊長使能得到內鏡射圖形

③設$\angle A \le \angle B \le \angle C \le \angle D \le \angle E$則最佳排列為 ABDEC，如圖(65)這使得原層不相鄰的兩內角和都較接近$216^\circ(108^\circ \times 2)$。

④給定的五個角排列完成後，任意兩個不相鄰的內角和都要介於180°與270°之間，這樣才能作內鏡射。

(一)只能操作到第一層的限制式探討，如圖(65)。



圖(65)

由

$$\begin{cases} \angle 1=\angle E+\angle C-\angle A+\angle B-\angle D \\ \angle 2=\angle D+\angle E-\angle C+\angle A-\angle B \\ \angle 3=\angle B+\angle D-\angle E+\angle C-\angle A \\ \angle 4=\angle A+\angle B-\angle D+\angle E-\angle C \\ \angle 5=\angle C+\angle A-\angle B+\angle D-\angle E \end{cases}$$

得第二層的$\angle 6=\angle 2+\angle 1-\angle 5+\angle 4-\angle 3$

$$=(\angle D+\angle E-\angle C+\angle A-\angle B)+(\angle E+\angle C-\angle A+\angle B-\angle D)-(\angle C+\angle A-\angle B+\angle D-\angle E)+(\angle A+\angle B-\angle D+\angle E-\angle C)-(\angle B+\angle D-\angle E+\angle C-\angle A)$$

$$=\angle A+\angle B-3\angle C-3\angle D+5\angle E$$

同理$\angle 7=\angle A-3\angle B+\angle C+5\angle D-3\angle E$，$\angle 8=-3\angle A+5\angle B+\angle C-3\angle D+\angle E$

$\angle 9=5\angle A-3\angle B-3\angle C+\angle D+\angle E$，$\angle 10=-3\angle A+\angle B+5\angle C+\angle D-3\angle E$

因為要只能操作到第一層而不能操作到第二層，就是要讓最大角$\ge 180^\circ$，或讓最小角$\le 0^\circ$，偶數層內鏡射角度若要算最大角=MAX[(E+A+B),(D+B+C)]，若要算最小角鏡射角度=MIN[(A+D+E),(B+E+C)](係數依層數不同做變更)。

因此限制式為：

> 僅畫出一層內鏡射五邊形的條件是
>
> MAX[(5E+A+B),(5D+B+C)]-3(剩餘兩角和) $\ge 180^\circ$或
>
> MIN[(5A+D+E),(5B+E+C)]-3(剩餘兩角和) $\le 0^\circ$

(二)只能操作到第二層的限制式探討

同理算出第三層的內鏡射角度，奇數層若要算最大角=MAX[(A+D+E),(B+C+D)]，若要算最小角=MIN[(D+C+A),(E+A+B)] (係數依層數不同做變更)。

加上前一層的最大角需$\le 180^\circ$，最小角則需$\ge 0^\circ$，因此得到限制式為：

> 僅能畫出二層內鏡射五邊形的條件是
>
> MAX[(5A+5D+13E),(5B+5C+13D)]-11(剩餘兩角和) $\ge 180^\circ >$ MAX[(5E+A+B),(5D+B+C)]-3(剩餘兩角和)
>
> MIN[(5D+5C+13A),(5E+5A+13B)]-11(剩餘兩角和) $\le 0^\circ <$ MIN[(5A+D+E),(5B+E+C)]-3(剩餘兩角和)

(三)只能操作到第三層的限制式探討

同理算出第四層的內鏡射角度。

因此限制式為：

僅能畫出三層內鏡射五邊形的條件是

MAX[(45E+13A+13B),(45D+13B+13C)]-35(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(5A+5D+13E),(5B+5C+13D)]-11(剩餘兩角和)

MIN[(45A+13D+13E),(45B+13E+13C)]-35(剩餘兩角和) ≤0° ＜ MIN[(5D+5C+13A),(5E+5A+13B)]-11(剩餘兩角和)

(四)只能操作到第四層的限制式探討：

同理限制式為：

僅能畫出四層內鏡射五邊形的條件是

MAX[(45A+45D+141E),(45B+45C+141D)]-115(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(45E+13A+13B),(45D+13B+13C)]-35(剩餘兩角和)

MIN[(45D+45C+141A),(45E+45A+141B)]-115(剩餘兩角和) ≤0° ＜ MIN[(45A+13D+13E),(45B+13E+13C)]-35(剩餘兩角和)

經由以上的探討，我們歸納操作五邊形內鏡射多層次的限制式規律如下表：

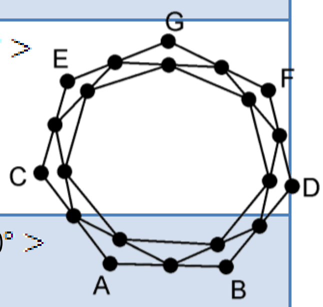
	∠A≤ ∠B≤ ∠C≤∠D≤∠E，最佳排列為 ABDEC
第一層	MAX[(5E+A+B),(5D+B+C)]-3(剩餘兩角和) ≥180° MIN[(5A+D+E),(5B+E+C)]-3(剩餘兩角和) ≤0°
第二層	MAX[(5A+5D+13E),(5B+5C+13D)]-11(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(5E+A+B),(5D+B+C)]-3(剩餘兩角和) MIN[(5D+5C+13A),(5E+5A+13B)]-11(剩餘兩角和) ≤0° ＜ MIN[(5A+D+E),(5B+E+C)]-3(剩餘兩角和)
第三層	MAX[(45E+13A+13B),(45D+13B+13C)]-35(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(5A+5D+13E),(5B+5C+13D)]-11(剩餘兩角和) MIN[(45A+13D+13E),(45B+13E+13C)]-35(剩餘兩角和) ≤0° ＜ MIN[(5D+5C+13A),(5E+5A+13B)]-11(剩餘兩角和)
第四層	MAX[(45A+45D+141E),(45B+45C+141D)]-115(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(45E+13A+13B),(45D+13B+13C)]-35(剩餘兩角和) MIN[(45D+45C+141A),(45E+45A+141B)]-115(剩餘兩角和) ≤0° ＜ MIN[(45A+13D+13E),(45B+13E+13C)]-35(剩餘兩角和)
第五層	MAX[(461E+141A+141B),(461D+141B+141C)]-301(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(45A+45D+141E),(45B+45C+141D)]-115(剩餘兩角和) MIN[(461A+141D+141E),(461B+141E+141C)]-301(剩餘兩角和) ≤0° ＜ MIN[(45D+45C+141A),(45E+45A+141B)]-115(剩餘兩角和)
第六層	MAX[(461A+461D+1485E),(461B+461C+1485D)]-1203(剩餘兩角和) ≥180° ＞ MAX[(461E+141A+141B),(461D+141B+141C)]-301(剩餘兩角和) MIN[(461D+461C+1485A),(461E+461A +1485B)]-1203(剩餘兩角和)≤0° ＜ MIN[(461A+141D+141E),(461B+141E+141C)]-301(剩餘兩角和)
第七層	MAX[(4813E+1485A+1485B),(4813D+1485B+1485C)]-3891(剩餘兩角和)≥180° ＞ MAX[(461A+461D+1485E),(461B+461C+1485D)]-1203(剩餘兩角和) MIN[(4813A+1485D+1485E),(4813B+1485E+1485C)]-3891(剩餘兩角和)≤0° ＜ MIN[(461D+461C+1485A),(461E+461A +1485B)]-1203(剩餘兩角和)

第八層	MAX[(4813A+4813D+7783E),(4813B+4813C+7783D)]-8704(剩餘兩角和)≥180° ＞ MAX[(4813E+1485A+1485B),(4813D+1485B+1485C)]-3891(剩餘兩角和) MIN[(4813A+4813D+7783E),(4813B+4813E+7783C)]-8704(剩餘兩角和)≤0° ＜ MIN[(4813A+1485D+1485E),(4813B+1485E+1485C)]-3891(剩餘兩角和)
第九層	MAX[(17409E+7783A+7783B),(17409D+7783B+7783C)]-16487(剩餘兩角和)≥180° ＞ MAX[(4813A+4813D+7783E),(4813B+4813C+7783D)]-8704(剩餘兩角和) MIN[(17409A+7783D+7783E),(17409B+7783E+7783C)]-16487(剩餘兩角和)≤0° ＜ MIN[(4813A+4813D+7783E),(4813B+4813E+7783C)]-8704(剩餘兩角和)
第十層	MAX[(17409A+17409D+65949E),(17409B+17409C+65949D)]-50383(剩餘兩角和)≥180° ＞ MAX[(17409E+7783A+7783B),(17409D+7783B+7783C)]-16487(剩餘兩角和) MIN[(17409A+17409D+65949E),(17409B+17409E+65949C)]-50383(剩餘兩角和)≤0° ＜ MIN[(17409A+7783D+7783E),(17409B+7783E+7783C)]-16487(剩餘兩角和)

七邊形我們也用類似的方法，將內鏡射一到四層用原層角度表示，再找其規律，整理成以下表格。

十一、七邊形的多層次內鏡射條件探討：

	∠A≤∠B≤∠C≤∠D≤∠E≤∠F≤∠G，**最佳排列為 ABDFGEC，如圖(66)**
第一層	MAX[(7G+3C+3D),(7F+3E+3B)]-5(其餘不相鄰兩角)-(其餘相鄰兩角)≥180° MIN[(7B+3F+3C),(7A+3D+3E)]-5(其餘不相鄰兩角)-(其餘相鄰兩角) ≤0°
第二層	MAX[(7C+7A+23D+23G),(7A+7B+23F+23E)]-23(其餘三角的中間角)-17(剩餘兩角)≥180° ＞ MAX[(7G+3C+3D),(7F+3E+3B)]-5(其餘不相鄰兩角)-(其餘相鄰兩角) MIN[(7F+7G+23C+23B),(7G+7E+23A+23D)]-23(其餘三角的中間角)-17(剩餘兩角)≤0° ＜ MIN[(7B+3F+3C),(7A+3D+3E)]-5(其餘不相鄰兩角)-(其餘相鄰兩角)
第三層	MAX[(119G+71C+71D),(119F+71E+71B)]-105(其餘不相鄰兩角)-25(其餘相鄰兩角)≥180° ＞ MAX[(7C+7A+23D+23G),(7A+7B+23F+23E)]-23(其餘三角的中間角)-17(剩餘兩 角)MIN[(119B+71F+71C),(119A+71D+71E)]-105(其餘不相鄰兩角)-25(其餘相鄰兩角)≤0° ＜ MIN[(7F+7G+23C+23B),(7G+7E+23A+23D)]-23(其餘三角的中間角)-17(剩餘兩角)
第四層	MAX[(119C+119A+471D+471G),(119A+119B+471F+471E)] -521(其餘三角的中間角)-329(剩餘兩角)≥180° ＞ MAX[(119G+71C+71D),(119F+71E+71B)]-105(其餘不相鄰兩角)-25(其餘相鄰兩角) MIN[(119F+119G+471C+471B),(119G+119E+471A+471D)]-521(其餘三角的中間角)-329(剩餘兩角)≤0° ＜ MIN[(119B+71F+71C),(119A+71D+71E)]-105(其餘不相鄰兩角)-25(其餘相鄰兩角)
第五層	MAX[(2359G+1463C+1463D),(2359F+1463E+1463B)]-2121(其餘不相鄰兩角)-521(其餘相鄰兩角)≥180° ＞ MAX[(119C+119A+471D+471G),(119A+119B+471F+471E)] -521(其餘三角的中間角)-329(剩餘兩角) MIN[(2359B+1463F+1463C),(2359A+1463D+1463E)]-2121(其餘不相鄰兩角)-521(其餘相鄰兩角)≤0° ＜ MIN[(119F+119G+471C+471B),(119G+119E+471A+471D)]-521(其餘三角的中間角)-329(剩餘兩角)
第六層	MAX[(2359C+2359A+9527D+9527G),(2359A+2359B+9527F+9527E)] -10569(其餘三角的中間)-6601(剩餘兩 角)≥180° ＞ MAX[(2359G+1463C+1463D),(2359F+1463E+1463B)]-2121(其餘不相鄰兩角)-521(其餘相鄰兩角) MIN[(2359F+2359G+9527C+9527B),(2359G+2359E+9527A+9527D)]--10569(其餘三角的中間角)-6601(剩餘兩 角)≤0° ＜ MIN[(2359B+1463F+1463C),(2359A+1463D+1463E)]-2121(其餘不相鄰兩角)-521(其餘相鄰兩角)



圖(66)

第七層	MAX[(47543G+29623C+29623D),(47543F+29623E+29623B)]-41825(其餘不相鄰兩角)-10569(其餘相鄰兩角)≥180° > MAX[(2359C+2359A+9527D+9527G),(2359A+2359B+9527F+9527E)] -10569(其餘三角的中間)-6601(剩餘兩角) MIN[(47543B+29623F+29623C),(47543A+29623D+29623E)]-41825(其餘不相鄰兩角)-10569(其餘相鄰兩角)≤0° < MIN[(2359F+2359G+9527C+9527B),(2359G+2359E+9527A+9527D)]--10569(其餘三角的中間角)-6601(剩餘兩角)
第八層	MAX[(47543C+47543A+190439D+190439G),(47543A+47543B+190439F+190439E)] -213577(其餘三角的中間角)-126193(剩餘兩角)≥180° > MAX[(47543G+29623C+29623D),(47543F+29623E+29623B)]-41825(其餘不相鄰兩角)-10569(其餘相鄰兩角) MIN[(47543F+47543G+190439C+190439B),(47543G+47543E+190439A+190439D)]-213577(其餘三角的中間角)-126193(剩餘兩角)≤0° < MIN[(47543B+29623F+29623C),(47543A+29623D+29623E)]-41825(其餘不相鄰兩角)-10569(其餘相鄰兩角)
第九層	MAX[(931927G+594455C+594455D),(931927F+594455E+594455B)]-846841(其餘不相鄰角)-213577(其餘相鄰兩角)≥180° > MAX[(47543C+47543A+190439D+190439G),(47543A+47543B+190439F+190439E)] -213577(其餘三角的中間角)-126193(剩餘兩角) MIN[(931927B+594455F+594455C),(931927A+594455D+594455E)]-846841(其餘不相鄰兩角)-213577(其餘相鄰兩角)≤0° < MIN[(47543F+47543G+190439C+190439B),(47543G+47543E+190439A+190439D)]-213577(其餘三角的中間角)-126193(剩餘兩角)
第十層	MAX[(931927C+931927A+3814519D+3814519G),(931927A+931927B+3814519F+3814519E)]-4241673(其餘三角的中間角)-2625609(剩餘兩角)≥180° > MAX[(931927G+594455C+594455D),(931927F+594455E+594455B)]-846841(其餘不相鄰角)-213577(其餘相鄰兩角) MIN[(931927F+931927G+3814519C+3814519B),(931927G+931927E+3814519A+3814519D)]-4241673(其餘三角的中間角)-2625609(剩餘兩角)≤0° < MIN[(931927B+594455F+594455C),(931927A+594455D+594455E)]-846841(其餘不相鄰兩角)-213577(其餘相鄰兩角)

往後的奇數多邊形(n> 7)都採用這種找規律的方式，找出其多層次內鏡射的限制式。

十二、六邊形的多層次內鏡射條件探討:

探討六邊形多層次內鏡射之前，我們也先有以下的約定：

①需給兩組角，每組三個，每組總和各 360°，例如: A＋B＋C =360°，D＋E＋F =360°，並Ａ ≧ Ｂ ≧ Ｃ，Ｄ ≧ Ｅ ≧ Ｆ，其中Ａ 、Ｆ為對角，Ｂ 、Ｅ為對角，Ｃ 、Ｄ為對角，取最佳排列為ＡＤＢＦＣＥ，如圖(67)，這使得內鏡射圖形角度偏離量盡量減少，以便得到最多層內鏡射圖形。

②作圖時，不考慮邊長，取適當的邊長使其能得到最多層內鏡射圖形。

③因在內鏡射過程中，三個角總和為 360°，所以當任一角開始出現≤ 0°，則至少有一個角≥180°，故在此直接探討≥180°，不討論≤0°。

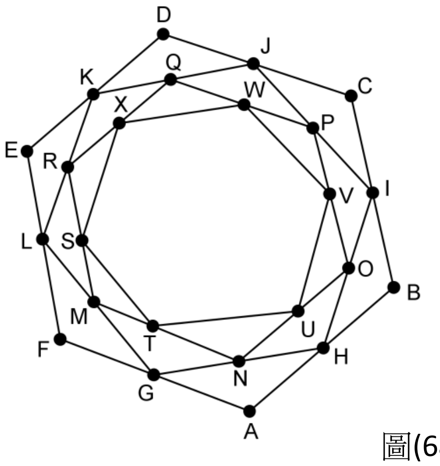
④令∠Ａ=a，∠Ｂ=b……以此類推。

⑤可畫至第 n 層的限制式是全部成立才可畫至第 n 層，不可畫至第 n 層的限制式只要

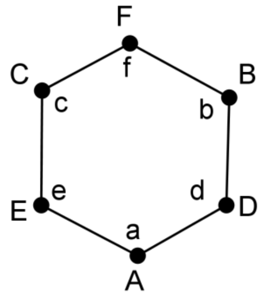
有任何一項成立，就不可畫至第 n 層。

1.只能操作到第一層的限制式探討：

當六個內角按最佳排列完成後，假設各層內鏡射的排列如圖(68)。



圖(68)



圖(67)

由 $g=a+\frac{2f+c-e-2b}{3}$

$=\frac{3a+2f+c-e-2b}{3}$

$=\frac{2a+2f-2e-2b}{3}+120^{\circ}$

$=\boxed{120^{\circ}+\frac{2(a+f-e-b)}{3}}$

又由 $n=h+\frac{2g+j-l-2i}{3}$

$=b+\frac{2a+d-f-2c}{3}+\frac{2\left(b+\frac{2a+d-f-2c}{3}\right)+\left(d+\frac{2c+f-b-2e}{3}\right)-\left(f+\frac{2e+b-d-2a}{3}\right)-2\left(c+\frac{2b+e-a-2d}{3}\right)}{3}$

$=\frac{16a-b-8c+11d-8e-f}{9}$

$=\frac{16a-8c-8e}{9}+\frac{-b+11d-f}{9}$

$=\frac{16a-8c-8e}{9}+\frac{-b+11d-f}{9}$

$=\frac{24a}{9}-360^{\circ}\times\frac{8}{9}+\frac{12d}{9}-360^{\circ}\times\frac{1}{9}$

$=\boxed{\frac{8}{3}a+\frac{4}{3}d-360^{\circ}}$

$=\boxed{120^{\circ}+\frac{8}{3}(a-120^{\circ})+\frac{4}{3}(d-120^{\circ})}$

(1)可畫至第一層：

令 $g<180^{\circ}$

$120^{\circ}+\frac{2(a+f-e-b)}{3}<180^{\circ}$

得 $a+f-e-b<90^{\circ}$ … ①　同理：$b+a-f-c<90^{\circ}$ … ②

$c+b-a-d<90^{\circ}$ … ③　$d+c-b-e<90^{\circ}$ … ④

$e+d-c-f<90^{\circ}$ … ⑤　$f+e-d-a<90^{\circ}$ … ⑥

②⑤；③⑥；①④可合併，得限制式為：

$$\boxed{\begin{array}{l}\max[(a+b),(d+e)]<90^{\circ}+c+f\\ \max[(b+c),(e+f)]<90^{\circ}+a+d\\ \max[(c+d),(a+f)]<90^{\circ}+b+e\end{array}}$$

(2)不可畫至第二層：

令$n \geq 180°$

$\frac{8}{3}a + \frac{4}{3}d - 360° \geq 180°$

$\frac{8}{3}a + \frac{4}{3}d \geq 540°$

$2a + d \geq 405°$

得$a \geq 405° - a - d$ … ①　同理：$b \geq 405° - b - e$ … ②

$c \geq 405° - c - f$ … ③　$d \geq 405° - d - a$ … ④

$e \geq 405° - e - b$ … ⑤　$f \geq 405° - f - c$ … ⑥

①④；③⑥；②⑤可合併，得限制式為：

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(a，d) \geq 405° - a - d \\ \max(c，f) \geq 405° - c - f \\ \max(b，e) \geq 405° - b - e \end{array}}$$

結論：使用可畫至第一層及不可畫至第二層之限制式，即為只可畫至第一層之限制式

2.只能操作到第二層的限制式探討：

(1)可畫到第二層：將不可畫至第二層之

≥改為<即可，得限制式為：

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(a，d) < 405° - a - d \\ \max(c，f) < 405° - c - f \\ \max(b，e) < 405° - b - e \end{array}}$$

(2)不可畫至第三層：令$t \geq 180°$

$120° + \frac{2(m+n-o-r)}{3} \geqq 180°$

$m+n-o-r \geqq 90°$

$\frac{8}{3}f + \frac{4}{3}c - 360° + \frac{8}{3}a + \frac{4}{3}d - 360° - \frac{8}{3}b - \frac{4}{3}e + 360° - \frac{8}{3}e - \frac{4}{3}b + 360° \geqq 90°$

$\frac{8}{3}a - \frac{12}{3}b + \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}d - \frac{12}{3}e + \frac{8}{3}f \geqq 90°$

$2a-3b+c+d-3e+2f \geqq 67.5°$

$a+f-4b-4e \geqq -652.5°$

得 $a+f \geqq -652.5°+4b+4e$ … ①　同理:$b+a \geqq -652.5°+4c+4f$ … ②

$c+b \geqq -652.5°+4d+4a$ … ③　$d+c \geqq -652.5°+4e+4b$ … ④

$e+d \geqq -652.5°+4f+4c$ … ⑤　$f+e \geqq -652.5°+4a+4d$ … ⑥

②⑤；③⑥； ①④可合併，

得限制式為:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max[(a+b),(d+e)] \geq -652.5° + 4c + 4f \\ \max[(b+c),(e+f)] \geq -652.5° + 4a + 4d \\ \max[(c+d),(a+f)] \geq -652.5° + 4b + 4e \end{array}}$$

結論：使用可畫至第二層及不可畫至第三層之限制式，即為只可畫至第二層之限制式。

3.由上述限制式推出一般式的規則:

①若要將可畫至第 n 層的限制式換成不可畫至第 n 層的限制式時，只要將不等號＜改為≧即可。

②設 p 為限制式後兩項的係數

在第一層，$p=3^0$　在第二層，$p=-3^0$　在第三層，$p=3^0+3^1$

在第四層，$p=-3^0-3^1$　在第五層，$p=3^0+3^1+3^2$　在第六層，$p=-3^0-3^1-3^2$

以此類推

③設 t 為限制式上的常數項

若在奇數層，則下兩層的 $t=\frac{3}{4}t-540p-180°$；若在偶數層，則下兩層的 $t=\frac{3}{4}t+270(-2p+1)$

④奇數層限制式格式為:

可畫至的那層是奇數層時: $\max[(a+b),(d+e)]<t+pc+pf$

$\max[(b+c),(e+f)]<t+pa+pd$

$\max[(c+d),(a+f)]<t+pb+pe$

不可畫至的那層是奇數層時: $\max[(a+b),(d+e)]\geqq t+pc+pf$

$\max[(b+c),(e+f)]\geqq t+pa+pd$

$\max[(c+d),(a+f)]\geqq t+pb+pe$

⑤偶數層限制式格式為:

可畫至的那層是偶數層時: $\max(a,d)<t-pa-pd$

$\max(c,f)<t-pc-pf$

$\max(b,e)<t-pb-pe$

不可畫至的那層是偶數層時: $\max(a,d)\geq t-pa-pd$

$\max(c,f)\geq t-pc-pf$

$\max(b,e)\geq t-pb-pe$

4.畫至各層的限制式範圍:

(1)只能畫到第一層

$$\begin{cases} ①\max[(a+b),(d+e)]<90°+c+f \\ ②\max[(b+c),(e+f)]<90°+a+d \\ ③\max[(c+d),(a+f)]<90°+b+e \\ ④\max(a,d)\geq 405°-a-d \\ ⑤\max(c,f)\geq 405°-c-f \\ ⑥\max(b,e)\geq 405°-b-e \end{cases}$$

(2) 只能畫到第二層

$$\begin{cases} ①\max(a,d)<405°-a-d \\ ②\max(c,f)<405°-c-f \\ ③\max(b,e)<405°-b-e \\ ④\max[(a+b),(d+e)]\geq -652.5°+4c+4f \\ ⑤\max[(b+c),(e+f)]\geq -652.5°+4a+4d \\ ⑥\max[(c+d),(a+f)]\geq -652.5°+4b+4e \end{cases}$$

(3)只能畫到第三層

$$\begin{cases} ①\max[(a+b),(d+e)]<-652.5°+4c+4f \\ ②\max[(b+c),(e+f)]<-652.5°+4a+4d \\ ③\max[(c+d),(a+f)]<-652.5°+4b+4e \\ ④\max(a,d)\geq 1113.75°-4a-4d \\ ⑤\max(c,f)\geq 1113.75°-4c-4f \\ ⑥\max(b,e)\geq 1113.75°-4b-4e \end{cases}$$

(4) 只能畫到第四層

$$\begin{cases} ①\max(a,d)<1113.75°-4a-4d \\ ②\max(c,f)<1113.75°-4c-4f \\ ③\max(b,e)<1113.75°-4b-4e \\ ④\max[(a+b),(d+e)]\geq -2829.375°+13c+13f \\ ⑤\max[(b+c),(e+f)]\geq -2829.375°+13a+13d \\ ⑥\max[(c+d),(a+f)]\geq -2829.375°+13b+13e \end{cases}$$

(5) 只能畫到第五層

$$\begin{cases} ①\max[(a+b),(d+e)] < -2829.375^\circ + 13c + 13f \\ ②\max[(b+c),(e+f)] < -2829.375^\circ + 13a + 13d \\ ③\max[(c+d),(a+f)] < -2829.375^\circ + 13b + 13e \\ ④\max(a,d) \geq 3265.3125^\circ - 13a - 13d \\ ⑤\max(c,f) \geq 3265.3125^\circ - 13c - 13f \\ ⑥\max(b,e) \geq 3265.3125^\circ - 13b - 13e \end{cases}$$

(6) 只能畫到第六層

$$\begin{cases} ①\max(a,d) < 3265.3125^\circ - 13a - 13d \\ ②\max(c,f) < 3265.3125^\circ - 13c - 13f \\ ③\max(b,e) < 3265.3125^\circ - 13b - 13e \\ ④\max[(a+b),(d+e)] \geq -9322.03125^\circ + 40c + 40f \\ ⑤\max[(b+c),(e+f)] \geq -9322.03125^\circ + 40a + 40d \\ ⑥\max[(c+d),(a+f)] \geq -9322.03125^\circ + 40b + 40e \end{cases}$$

(7) 只能畫到第七層

$$\begin{cases} ①\max[(a+b),(d+e)] < -9322.03125^\circ + 40c + 40f \\ ②\max[(b+c),(e+f)] < -9322.03125^\circ + 40a + 40d \\ ③\max[(c+d),(a+f)] < -9322.03125^\circ + 40b + 40e \\ ④\max(a,d) \geq 9738.984375^\circ - 40a - 40d \\ ⑤\max(c,f) \geq 9738.984375^\circ - 40c - 40f \\ ⑥\max(b,e) \geq 9738.984375^\circ - 40b - 40e \end{cases}$$

(8) 只能畫到第八層

$$\begin{cases} ①\max(a,d) < 9738.984375^\circ - 40a - 40d \\ ②\max(c,f) < 9738.984375^\circ - 404c - 40f \\ ③\max(b,e) < 9738.984375^\circ - 40b - 40e \\ ④\max[(a+b),(d+e)] \geq -28771.52344^\circ + 121c + 121f \\ ⑤\max[(b+c),(e+f)] \geq -28771.52344^\circ + 121a + 121d \\ ⑥\max[(c+d),(a+f)] \geq -28771.52344^\circ + 121b + 121e \end{cases}$$

其餘詳見研究日誌

討論：當多邊形的邊數越多時，可發現其各層限制式的條件越多，檢查起來很不方便，此時可以使用文中多層次內鏡射各內角的計算公式，一層層的往內算，直到某一內角超出範圍時停止，此時即可知道能畫進第幾層，這些動作可用 EXCEL 完成。又繪圖時可先將最內層的多邊形畫出來，再利用外鏡射完成整個多層次圖形。

肆、結論

一、 (一)銳角△內存在唯一的內鏡射△，但鈍角△、直角△內都不存在內鏡射△。

(二)在邊長比適當及內角合宜的共圓四邊形中才存在內鏡射四邊形，且若存在一個內鏡射四邊形，則必存在對應邊兩兩平行的無限多不相似的內鏡射四邊形。

(三)關於國中課內簡單的四邊形幾何圖形中，若共圓且每一邊的弧度都<180°，則至少可畫出一層內鏡射；若再加上兩對角線互相垂直，則至少可畫出兩層內鏡射；

若再加上是等腰梯形，則至少可畫出三層內鏡射；若是正方形，則可畫出無限多層內鏡射。

(四)五邊、六邊…以上的多邊形中，若奇數多邊形存在內鏡射圖形，則此圖形為唯一，若偶數邊多邊形存在內鏡射圖形，則此圖形有無限多個。

(五)當 n 邊形的 n 個內角愈接近$\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}$時，在適當的邊長比下，將可做出愈多層的內鏡射圖形。

(六)正 n 邊形，可畫出無限多層內鏡射圖形。

二、對於奇數多邊形和偶數多邊形，本文各有一套有系統的尺規作圖法，做它們的內鏡射圖形，其中奇數多邊形採用△作圖法中的〝方法二〞，較簡潔。而偶數多邊形則採用奇偶數邊皆可用的線對稱作圖法

三、在一個可連續畫出多層次內鏡射的圖形中，每一層內鏡射圖形的任一內角皆可用原圖形的各內角表示出來，設 P 在邊$\overline{A_1A_2}$上，

當是奇數邊時，(2n+1 邊)

$$\angle P = A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + A_6 - A_7 + \cdots + A_{2n} - A_{2n+1}$$

當是偶數邊時，(2n 邊)

$$\angle P = A_1 + \frac{(n-1)A_{2n} + (n-2)A_3 + (n-3)A_{2n-2} + (n-4)A_5 + \cdots + A_n - A_{n+2} - 2A_{n-1} - 3A_{2n-1} - \cdots - (n-1)A_2}{n}$$

四、在△的內鏡射探討中，本文發現可操作到各指定層的三內角限制式規律，其中

(一)從奇數層推到偶數層時：

設 $x^\circ < \angle A \leq y^\circ < \angle B \leq \angle C < z^\circ$ 時，

則推得下一層是 $y^\circ < \angle A \leq \angle B < \frac{y^\circ + z^\circ}{2} \leq \angle C < z^\circ$

(二)從偶數層推到奇數層時：

設 $x^\circ < \angle A \leq \angle B < y^\circ \leq \angle C < z^\circ$ 時，

則推得下一層是 $x^\circ < \angle A \leq \frac{x^\circ + y^\circ}{2} < \angle B \leq \angle C < y^\circ$

五、在四邊形的內鏡射探討中，本文發現可操作到各指定層的四內角限制式規律，其中

(一)若要指定畫到第 2n+1 層時：

則$\angle A \leq 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{n+1}}$，且$\frac{\angle A + \angle B}{2} > 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{n+1}}$

(二)若要指定畫到第 2n 層時：

則$\angle A > 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^n}$，且$\frac{\angle A + \angle B}{2} \leq 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^{n+1}}$

六、在五邊、六邊…以上的多邊形多層次內鏡射探討中，它們的各層內鏡射限制式都可推導出來，但明顯的太冗長不適用，解決方式是先將給定的 n 個內角作最佳排列，再利用本文推導出的內層內角計算公式算出各內角，再以電腦 EXCEL 程式處理，一直往內算，直到有一內角超出範圍才停止，此時就知道可內鏡射多少層。繪圖時，僅需將最內層配合適當邊長畫出來，再利用外鏡射即可得到整個多層次的圖形。

伍、參考資料

一、GeoGebra 使用說明書

二、幾何學辭典

三、康軒版國中數學麻辣講義第四冊

四、第 38 屆全國科學展覽數學科–鏡射乾坤

【評語】030412

從三角形內角的特色來思考內鏡射三角形的層次，是一個聰明又簡便的方法。植基於三角形的多層次內鏡射條件的探究，循序漸進、有系統地探討四邊形、五邊形……等多邊形的多層次內鏡射條件，並發展出一套尺規作圖法，來繪製多層次內鏡射圖形，是本文的主要特色，值得參考。