

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030411

撞球台上的黑盒子

學校名稱：高雄市立龍華國民中學

作者： 國二 許耕福 國三 林姝真	指導老師： 許建銘
-------------------------	--------------

關鍵詞：撞球、撞擊方向、鏡射

撞球台上的黑盒子

摘要

由於受到學習經驗的影響，我們理解可利用鏡像作圖，找出撞球台上從某一點「繞球台」撞至另一點的第一碰撞點位置。但面對真實撞擊時，就會覺得當判定用的線段落至球台外部時，會使得撞擊方向的確定更為困難。我們希望找出可將所有判定因素拉回球台上考慮的方法，以提高理論的應用性。

我們針對以「對邊連續碰撞」與「繞球台」兩種方式，撞擊母球至另一指定位置的撞擊方向進行討論，從少顆星探討到多顆星，從「對邊連續碰撞」探討到「依序繞球台」再到「非依序繞球台」，透過不斷試驗、推證與修訂，確立了「對邊連續碰撞」的簡易撞擊方向判定法，並證得以「黑盒子中心」找出判定「繞球台」撞擊方向的理論。依據推得的理論作圖，可得出 P 點繞球台 n 顆星撞至 Q 點的初始撞擊方向，若依此方向將 P 點撞出，則點 P 必能撞至點 Q 位置。

撞球台上的黑盒子

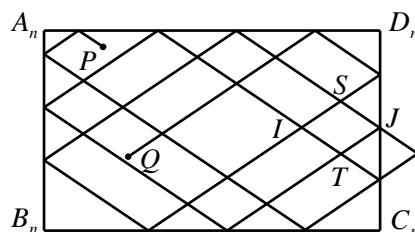
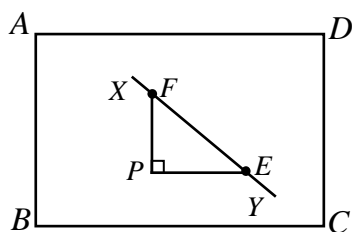
壹、研究動機與目的

由於喜歡玩網路上的撞球遊戲，再加上自己的學習經驗中，曾經使用作鏡射圖解決幾何問題；或嘗試以「翻球台」方式，找出可行的碰撞路線，所以就會想將以上的解題方法應用在撞球台上。但每當判定用的線段落至球台外部、撞擊方向捉摸不定時，就會覺得那些方法似乎過於繁瑣，因此才決定研究撞擊的相關問題。我們的研究目的如下：

- 一、在忽略母球洗袋與行進路線被球阻擋的情況，對於撞球台上一顆星以上的碰撞方式，將其第一碰撞點的判定因素拉回球台上考慮，以提高應用性。
- 二、藉由科學的試驗與推證，找出在任意矩形球台上，可藉由「對邊連續碰撞」或「繞球台」多顆星撞擊母球至另一指定位置的撞擊方向判定法。

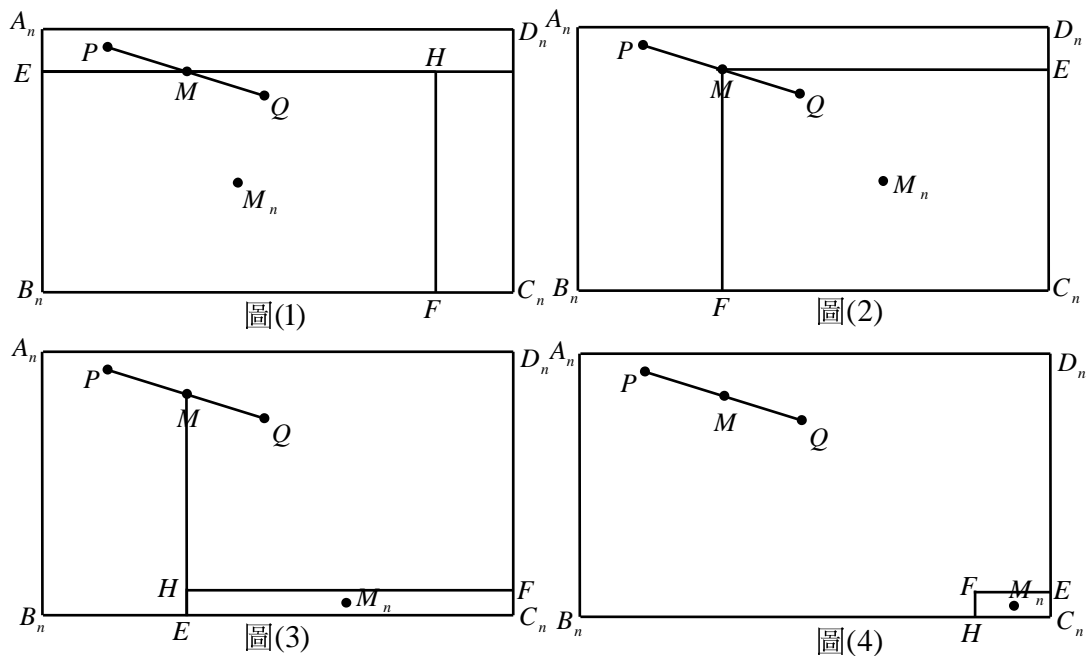
貳、名詞界定與說明

- 一、設定撞球台為一個長方體容器，將其矩形台面各邊向內、向上縮減一個撞擊圓球的半徑長，則所得到的新矩形台面，即為本文所稱的「球台」(以矩形 $ABCD$ 或 $A_nB_nC_nD_n$ 表示，且 $n \in N$)；而「路線」是指球心或點的移動路徑。
- 二、「對邊連續奇數次碰撞」、「對邊連續偶數次碰撞」(以下分別簡稱為「對邊奇數碰撞」、「對邊偶數碰撞」)的「完全碰撞」定義，以及「繞球台」的「碰撞迴路」定義，另於以下研究內容中補充說明。
- 三、如下左圖，當 \overline{XY} 與 \overline{AD} 不平行， \overline{XY} 與 \overline{AB} 不平行， P 點在球台 $ABCD$ (或 $A_nB_nC_nD_n$) 內部，且 P 不在 \overline{XY} 上，若過 P 點作 $\overline{PE} \parallel \overline{AD}$ ， \overline{PE} 交 \overline{XY} 於 E ；作 $\overline{PF} \parallel \overline{AB}$ ， \overline{PF} 交 \overline{XY} 於 F ，則本文以 $h(P/\overline{XY})$ 或 $h(\overline{EF})$ 表示 \overline{PE} 長，以 $v(P/\overline{XY})$ 或 $v(\overline{EF})$ 表示 \overline{PF} 長，另外 $d(P/\overline{AB})$ 、 $d(P/\overline{CD})$ 分別表示 P 點至 \overline{AB} 與 \overline{CD} 的距離。



- 四、如上右圖，矩形球台 $A_nB_nC_nD_n$ ($n \in N$) 上，由 P 點繞球台撞至 Q 點位置的碰撞路線 (或將碰撞路線延伸) 所產生的菱形網中，設單位菱形的兩條對角線分別為 \overline{IJ} 與 \overline{ST} ，其中 $\overline{IJ} \parallel \overline{A_nD_n}$ ， $\overline{ST} \parallel \overline{A_nB_n}$ ($n \in N$)，則本文以 $a(P/Q)$ 表示 \overline{IJ} 長，以 $b(P/Q)$ 表示 \overline{ST} 長。

五、球台 $A_n B_n C_n D_n$ ($n \in N$) 上，由 P 點繞球台撞至 Q 點，爲了方便討論並配合研究目的，本文研究內容中選擇 $d(P/\overline{A_n D_n}) \leq d(Q/\overline{A_n D_n})$ ，且 $d(P/\overline{A_n B_n}) < d(Q/\overline{A_n B_n})$ (或 $d(P/\overline{A_n D_n}) < d(Q/\overline{A_n D_n})$ ，且 $d(P/\overline{A_n B_n}) \leq d(Q/\overline{A_n B_n})$) 的情況，進行相關幾何推證(如下圖(1)~圖(4))，而且 P 點的第一個碰撞點皆設定落在 $\overline{A_n D_n}$ 或 $\overline{A_n B_n}$ 上。當 $\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$ (或 $\overline{PQ} \parallel \overline{A_n D_n}$) 時，定義 $h(\overline{PQ}) = \overline{PQ}$ ， $v(\overline{PQ}) = 0$ ；當 $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ (或 $\overline{PQ} \parallel \overline{A_n B_n}$) 時，定義 $h(\overline{PQ}) = 0$ ， $v(\overline{PQ}) = \overline{PQ}$ 。若 M 爲 \overline{PQ} 中點，如下圖(1)的矩形 $EB_n FH$ (其中 $\overline{FC_n} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$)、下圖(2)中的矩形 $EMFC_n$ 、下圖(3)中的矩形 $EC_n FH$ (其中 $\overline{HE} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$)、下圖(4)的矩形 $EFHC_n$ (其中 $\overline{EF} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ ， $\overline{FH} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$)，本文稱這些矩形爲由 P 點 $4n+1$ 顆星、 $4n+2$ 顆星、 $4n+3$ 顆星、 $4n+4$ 顆星 ($n \in N$) 繞球台撞至 Q 點時，作爲判定撞擊方向的「黑盒子」，並定義其中心點爲「黑盒子中心」(如下圖中的 M_n)。事實上，當改變球台上 P 點或 Q 點的位置時，可能使得「黑盒子中心」落至球台外部(此部分在結論時，另有補充說明)，且當「黑盒子」退化爲線段時，「黑盒子中心」即爲此線段的中點。



參、研究內容

一、一顆星的碰撞點及撞擊方向之討論：

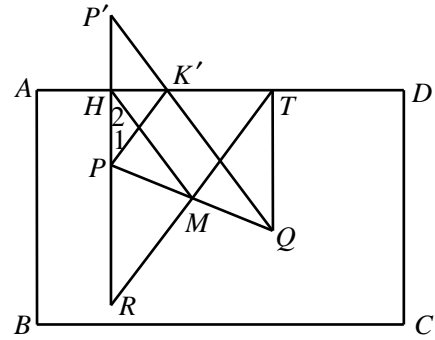
【已知】如圖，球台 $ABCD$ 上的 P 、 Q 相異兩點。

【求作】 \overline{AD} 上一點 K ，使得 K 點是由 P 點一顆星撞至 Q 點的碰撞點。

【作法】

(1) 如圖，作 $\overline{QT} \perp \overline{AD}$ 交 \overline{AD} 於 T ，取 \overline{PQ} 的中點 M 。

(2) 連 \overline{MT} ，作 $\overline{PK} \parallel \overline{MT}$ 交 \overline{AD} 於 K ，則 K 即為所求。



【證明】

- (1) 設 K' 點是由 P 點一顆星撞至 Q 點的碰撞點，連 $\overline{PK'}$ 。
- (2) 作 $\overline{PH} \perp \overline{AD}$ 交 \overline{AD} 於 H ，連 \overline{HM} ，延長 \overline{TM} 交 \overline{PH} 於 R ，延長 \overline{PH} 交 $\overline{K'Q}$ 於 P' 。
- (3) $\because \overline{PH} = \overline{P'H}$ ，又 $\overline{PM} = \overline{MQ} \therefore \overline{MH} \parallel \overline{P'Q} \Rightarrow \angle P' = \angle 2$ 。
- (4) $\because \Delta K'PP'$ 為等腰三角形 $\therefore \angle P' = \angle 1 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ 。
- (5) $\because \Delta MPR \cong \Delta MQT \therefore \overline{MT} = \overline{MR} \Rightarrow M$ 點為直角 ΔRHT 的外心 $\therefore \overline{MH} = \overline{MR} \Rightarrow \angle 2 = \angle R \Rightarrow \angle 1 = \angle R \Rightarrow \overline{PK'} \parallel \overline{MT}$ ，故 $K' = K$ ，即 K 合為所求。

二、對邊碰撞的第一碰撞點及撞擊方向之討論：

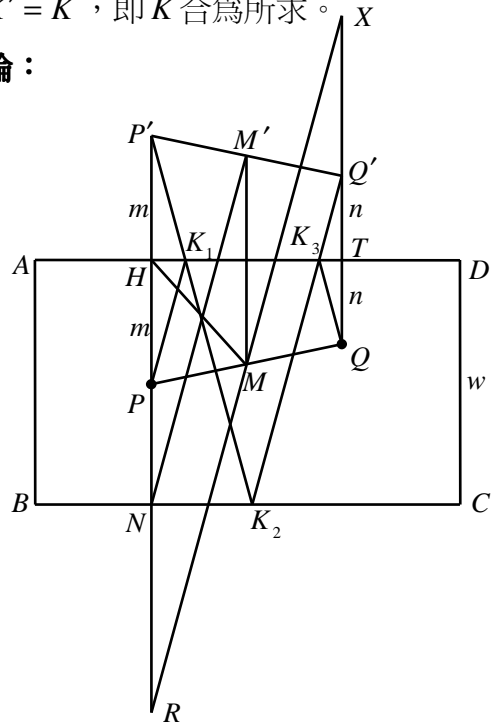
(一) 對邊奇數碰撞討論：

【已知】 如圖，球台 $ABCD$ 上的 P 、 Q 相異兩點。

【求作】 \overline{AD} 上一點 K ，使得 K 點是由 P 點對邊碰撞三顆星撞至 Q 點的第一碰撞點。

【作法】

- (1) 作 $\overline{QT} \perp \overline{AD}$ 交 \overline{AD} 於 T 。
- (2) 延長 \overline{QT} ，在 \overline{QT} 上取 X ，使得 $\overline{XT} = \overline{CD}$ 。
- (3) 取 \overline{PQ} 中點 M ，連 \overline{MX} ，作 $\overline{PK} \parallel \overline{MX}$ 交 \overline{AD} 於 K ，則 K 即為所求。



【證明】

- (1) 令 K_1 、 K_2 、 K_3 為正確碰撞路線圖的第一、第二、第三碰撞點，若以下可證明 $\overline{MX} \parallel \overline{PK_1}$ ，則本證明完成。
- (2) 作 $\overline{PH} \perp \overline{AD}$ 交 \overline{AD} 於 H ，延長 $\overline{K_1K_2}$ 交 \overline{PH} 於 P' ，延長 $\overline{K_2K_3}$ 交 \overline{QX} 於 Q' 。
- (3) 令 $\overline{PH} = \overline{P'H} = m$ ， $\overline{QT} = \overline{Q'T} = n$ ， $\overline{TX} = \overline{CD} = w$ 。
- (4) 連 $\overline{P'Q'}$ ，取 $\overline{P'Q'}$ 中點 M' ，連 $\overline{MM'}$ 。
- (5) 延長 \overline{MX} 及 $\overline{PP'}$ 於 R ，且令 $\overline{PP'}$ 與 \overline{BC} 交於 N 。

(6) ∵ M 為 \overline{PQ} 中點 ∴ $\triangle RPM \cong \triangle XQM \Rightarrow \overline{PR} = \overline{XQ} = w + n$

∴ $\overline{PN} = w - m$ ∴ $\overline{RN} = \overline{PR} - \overline{PN} = (w + n) - (w - m) = m + n$ 。

(7) 連 $\overline{NM'}$ ，則 $\overline{M'M} = \frac{1}{2}(\overline{PP'} + \overline{QQ'}) = \frac{1}{2}(2m + 2n) = m + n = \overline{RN}$ ，又 $\overline{M'M} \parallel \overline{RN}$

∴ $M'NRM$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{MR} \parallel \overline{M'N} \Rightarrow \overline{MX} \parallel \overline{M'N}$ 。

(8) ∵ $\overline{M'N}$ 為由 Q' 點一顆星撞至 P' 的正確撞擊方向，由前一個定理可推知：

$\overline{PK_1} \parallel \overline{Q'K_2} \parallel \overline{M'N} \Rightarrow \overline{PK_1} \parallel \overline{MX}$ 。故 $K_1 = K$ ，即 K 合為所求。

【定理 F-1】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， $\overline{AB} \parallel \overline{HN} \parallel \overline{TS}$ ， P 、 Q 分別在 \overline{HN} 、 \overline{TS} 上，且 $\overline{PH} = \overline{QS}$ ， $\overline{HT_1} = \frac{1}{3}\overline{HT}$ ，當 $\overline{PK} \parallel \overline{NT_1}$ ，且 \overline{PK} 交 \overline{HT} 於 K ，則 K 為 P 點

對邊碰撞三顆星撞至 Q 的第一碰撞點。

【證明】

(1) 設 K_1 、 K_2 、 K_3 分別為 P 點對邊碰撞三顆星撞至 Q 的第一、第二、第三碰撞點。

(2) 延長 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{BC} 於 R ，作 $\overline{RG} \perp \overline{AD}$

交 \overline{AD} 於 G ，由 $\overline{HT_1} = \frac{1}{3}\overline{HT} \Rightarrow T_1$ 為

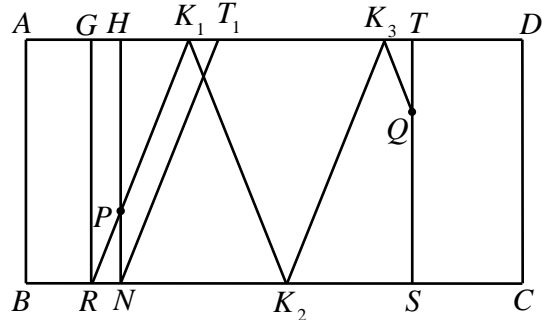
N 三顆星撞至 T 的第一碰撞點。

(3) ∵ $\overline{PN} = \overline{HN} - \overline{HP} = \overline{TS} - \overline{QS} = \overline{TQ}$ ， $\angle PRN = \angle QK_3T$ ， $\angle PNR = \angle QTK_3 = 90^\circ$

∴ $\triangle PNR \cong \triangle QTK_3 \Rightarrow \overline{RN} = \overline{K_3T} \Rightarrow \overline{GK_3} = \overline{HT}$ 。

(4) 又 $\overline{GK_1} = \frac{1}{3}\overline{GK_3} = \frac{1}{3}\overline{HT} = \overline{HT_1}$ ∴ $\overline{K_1T_1} = \overline{GH} = \overline{RN} \Rightarrow \overline{RK_1} \parallel \overline{NT_1} \Rightarrow \overline{PK_1} \parallel \overline{NT_1}$ 。

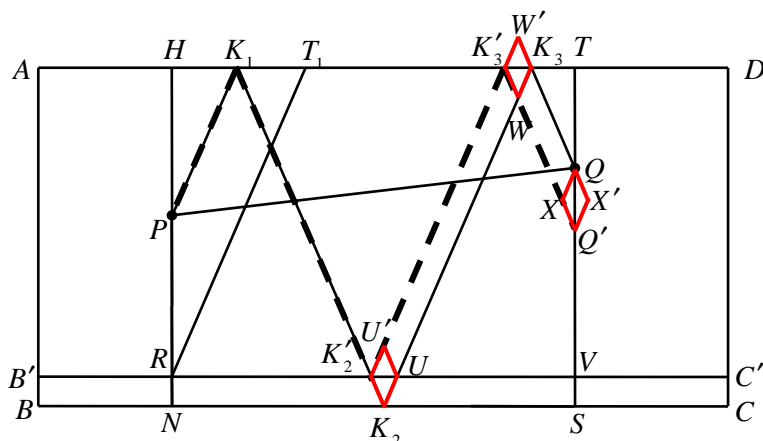
(5) ∵ $\overline{PK} \parallel \overline{NT_1}$ ，故得證： K 為 P 點對邊碰撞三顆星撞至 Q 的第一碰撞點。



【補充】對於「定理 F-1」之矩形球台 $ABCD$ 上，由 P 點對邊碰撞至 Q 點的路線總長度為 $n \times \overline{K_1K_2}$ 時 ($n \in N$)，本文稱此碰撞過程為「對邊 n 次完全碰撞」。

以下我們將運用「完全碰撞」，找出對邊碰撞三顆星的第二種作法。

【定理 F-2】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， $\overline{AB} \parallel \overline{HN} \parallel \overline{TS}$ ， P 、 Q 分別在 \overline{HN} 、 \overline{TS} 上，且 $\overline{PH} < \overline{QS}$ ， $\overline{HT_1} = \frac{1}{3}\overline{HT}$ ， $\overline{RN} = \frac{1}{3}(\overline{QS} - \overline{HP})$ ，當 $\overline{PK_1} \parallel \overline{RT_1}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{HT} 於 K_1 ，則 K_1 為 P 對邊碰撞三顆星撞至 Q 的第一碰撞點。

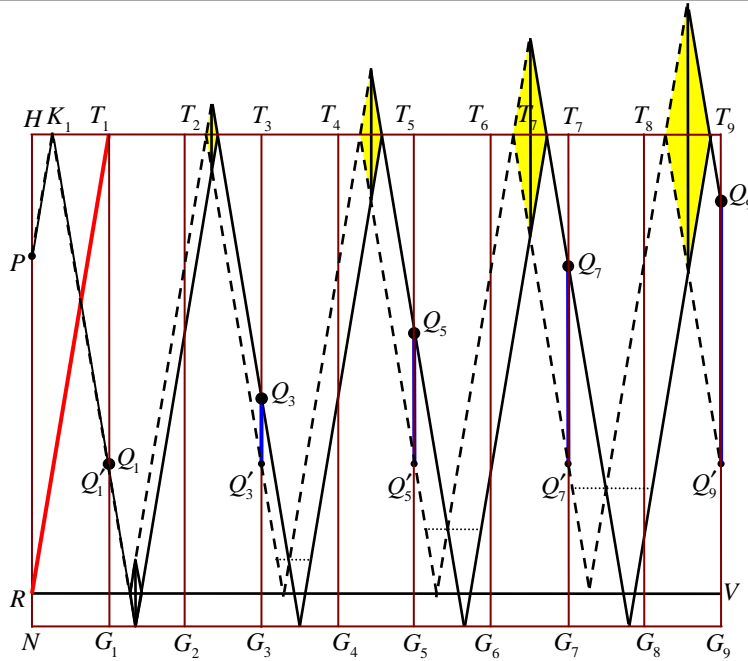


【證明】

- (1) 過 R 作 $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ ，且令 $\overline{B'C'}$ 交 \overline{TS} 於 V 。
- (2) 設由 P 撞至 K_1 的路線，在 $AB'C'D$ 球台上，得出的第二與第三碰撞點分別為 K'_2 、 K'_3 ，且路線與 \overline{TS} 交 Q' 。
- (3) $\because \overline{HT}_1 = \frac{1}{3} \overline{HT}$ ， $\overline{PK}_1 \parallel \overline{RT}_1$ $\therefore \overline{HP} = \overline{Q'V}$ 。
- (4) 設由 P 撞至 K_1 的路線，在 $ABCD$ 的球台上，得出的第二與第三碰撞點分別為 K_2 與 K_3 ，則 $\overline{K_2K_3} \parallel \overline{K'_2K'_3}$ 。
- (5) 令 $\overline{K_2K_3}$ 分別與 $\overline{B'C'}$ 、 $\overline{K'_3Q'}$ 交於 U 、 W $\because \overline{VS} = \overline{RN} = \frac{1}{3}(\overline{QS} - \overline{HP})$ ， $\overline{HP} = \overline{Q'V}$
 $\therefore \overline{VS} = \frac{1}{3}(\overline{QS} - \overline{Q'V}) = \frac{1}{3}(\overline{QQ'} + \overline{VS}) \Rightarrow \overline{QQ'} = 2 \times \overline{VS} = 2 \times \overline{RN}$ 。
- (6) 作菱形 $K_2UU'K'_2$ 、 $WK_3W'K'_3$ 、 $Q'X'QX$ (X 點在 $\overline{K'_3Q'}$ 上)，由 $\overline{U'K_2} = \overline{W'W} = \overline{QQ'}$ ，
 以及以上三個菱形全等 $\Rightarrow \overline{WX'} \parallel \overline{K'_3Q'} \Rightarrow \overline{K_3Q} \parallel \overline{K'_3Q'}$ ，故得證： K_1 為 P 對邊碰撞三顆星撞至 Q 的第一碰撞點。

【推論】 由「定理 F-1」、「定理 F-2」的性質與證明，我們得出對邊奇數次碰撞路線（實線）與對邊完全碰撞路線（虛線）的關係圖（如下頁圖）。圖中 $HRVT_9$ 、 HNG_9T_9 為矩形， T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 、 T_6 、 T_7 、 T_8 九等分 $\overline{HT_9}$ ； G_1 、 G_2 、 G_3 、 G_4 、 G_5 、 G_6 、 G_7 、 G_8 九等分 $\overline{NG_9}$ ， $\overline{PK_1} \parallel \overline{RT_1}$ ，若 Q'_1 、 Q'_3 、 Q'_5 、 Q'_7 、 Q'_9 分別為球台 $HRVT_9$ 上，以 P 為起點，對邊 1 次、3 次、5 次、7 次、9 次完全碰撞路線的終點； Q_1 、 Q_3 、 Q_5 、 Q_7 、 Q_9 分別為球台 HNG_9T_9 上，以 P 為起點，對邊 1 次、3 次、5 次、7 次、9 次碰撞路線的終點，由圖中四個內部塗色之菱形的對角線（與 $\overline{HT_9}$ 互相垂直者），它們的長度比由左而右為 1:2:3:4，可推得以下的關係式成立：

$$\overline{RN} = \frac{1}{i} |\overline{Q_i G_i} - \overline{PH}|, \quad \overline{Q_i Q'_i} = (i-1) \times \overline{RN} \quad \forall i = 1, 3, 5, 7, 9$$



上圖呈現的是 $\overline{Q_i G_i} > \overline{PH}$ 的情況。當 $\overline{Q_i G_i} < \overline{PH}$ 時，則必須將圖上的 \overline{RV} 改畫在以 $\overline{NG_9}$ 為軸的鏡射位置（落至球台 $HNG_9 T_9$ 外部），且由兩種路線圖交織得出的關係式仍然成立。

(二) 對邊偶數碰撞討論：

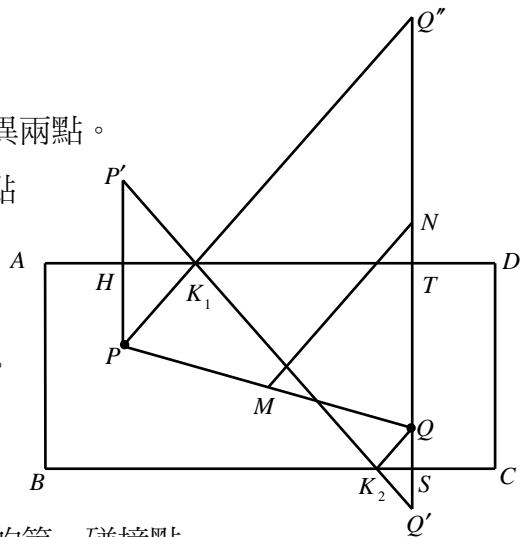
【已知】如圖，球台 $ABCD$ 上的 P 、 Q 相異兩點。

【求作】 \overline{AD} 上一點 K ，使得 K 點是由 P 點對邊碰撞二顆星撞至 Q 點的第一碰撞點。

【作法】

- (1) 如圖，作 $\overline{QN} \perp \overline{AD}$ ，且使得 $\overline{QN} = \overline{CD}$ 。
- (2) 取 \overline{PQ} 的中點 M ，連 \overline{MN} 。
- (3) 作 $\overline{PK} \parallel \overline{MN}$ ，且 \overline{PK} 交 \overline{AD} 於 K ，

則 K 點是由 P 點對邊碰撞二顆星撞至 Q 點的第一碰撞點。



【證明】

- (1) 以 \overline{AD} 為軸，取 P 的對稱點 P' ；以 \overline{BC} 為軸，取 Q 的對稱點 Q' ；以 \overline{AD} 為軸，取 Q' 的對稱點 Q'' ，連 $\overline{Q'Q''}$ 分別交 \overline{AD} 與 \overline{BC} 於 T 、 S 。
- (2) 連 $\overline{PQ''}$ 、 $\overline{P'Q'}$ ，設 $\overline{P'Q'}$ 、 \overline{AD} 交於 K_1 ，設 $\overline{P'Q'}$ 、 \overline{BC} 交於 K_2 ，則 K_1 、 K_2 分別為 $ABCD$ 球台上，由 P 撞至 Q 的第一碰撞點與第二碰撞點。

(3) ∵ $\overline{QN} = \overline{CD} \therefore \overline{NT} = \overline{QS} = \overline{Q'S}$

又 $\overline{TQ''} = \overline{TQ'} \Rightarrow \overline{TQ''} - \overline{NT} = \overline{TQ'} - \overline{Q'S} \Rightarrow \overline{Q''N} = \overline{TS} = \overline{CD}$

(4) ∵ $\overline{QN} = \overline{NQ''}$, $\overline{QM} = \overline{MP} \therefore \overline{PQ''} \parallel \overline{MN}$ 。

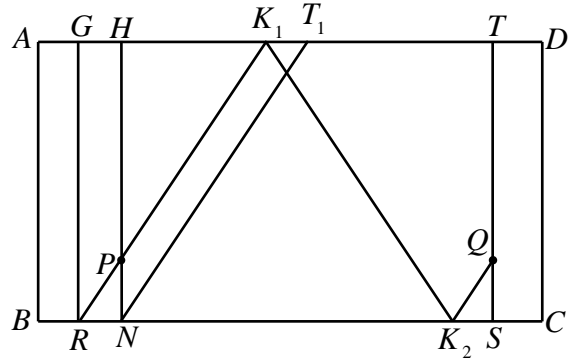
(5) 又 $\overline{PK} \parallel \overline{MN}$, 故得證: K 點是由 P 點對邊碰撞二顆星撞至 Q 點的第一碰撞點。

【定理 F-3】如圖, $ABCD$ 為矩形球台, $\overline{AB} \parallel \overline{HN} \parallel \overline{TS}$, P 、 Q 分別在 \overline{HN} 、 \overline{TS} 上, 且 $\overline{PH} = \overline{QT}$, $\overline{HT}_1 = \frac{1}{2}\overline{HT}$, 當 $\overline{PK} \parallel \overline{NT}_1$, 且 \overline{PK} 交 \overline{HT} 於 K , 則 K 為 P 點對邊碰撞兩顆星撞至 Q 的第一碰撞點。

【證明】

(1) 設 K_1 、 K_2 分別為 P 點對邊碰撞兩顆星撞至 Q 的第一、第二碰撞點。

(2) 延長 \overline{PK}_1 交 \overline{BC} 於 R , 作 $\overline{RG} \perp \overline{AD}$ 交 \overline{AD} 於 G , 由 $\overline{HT}_1 = \frac{1}{2}\overline{HT} \Rightarrow T_1$ 為



N 兩顆星完全碰撞至 S 的第一碰撞點。

(3) ∵ $\overline{PN} = \overline{HN} - \overline{HP} = \overline{TS} - \overline{TQ} = \overline{QS}$, $\angle PRN = \angle QK_2S$, $\angle PNR = \angle QSK_2 = 90^\circ$
 $\therefore \triangle PNR \cong \triangle QSK_2 \Rightarrow \overline{RN} = \overline{K_2S} \Rightarrow \overline{RK_2} = \overline{NS} = \overline{HT}$ 。

(4) 又 $\overline{GK}_1 = \frac{1}{2}\overline{RK}_2 = \frac{1}{2}\overline{HT} = \overline{HT}_1 \therefore \overline{K_1T}_1 = \overline{GH} = \overline{RN} \Rightarrow \overline{RK}_1 \parallel \overline{NT}_1$ 。

(5) ∵ $\overline{PK} \parallel \overline{NT}_1$, 故得證: K 為 P 點對邊碰撞兩顆星撞至 Q 的第一碰撞點。

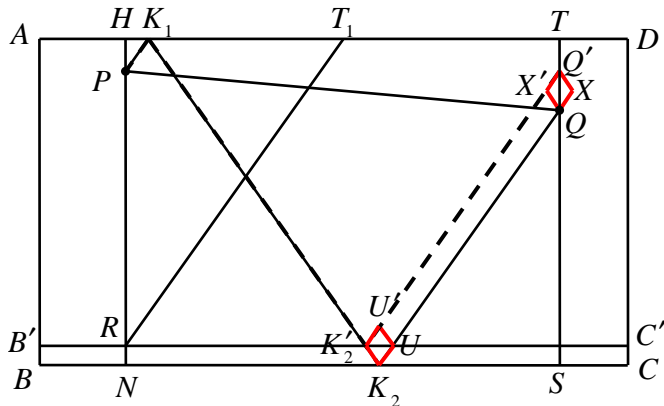
以下我們將再運用「完全碰撞」, 找出對邊碰撞兩顆星的第二種作法。

【定理 F-4】如圖, $ABCD$ 為矩形球台, $\overline{AB} \parallel \overline{HN} \parallel \overline{TS}$, P 、 Q 分別在 \overline{HN} 、 \overline{TS} 上, 且 $\overline{PH} < \overline{TQ}$, $\overline{HT}_1 = \frac{1}{2}\overline{HT}$, $\overline{RN} = \frac{1}{2}(\overline{TQ} - \overline{PH})$, 當 $\overline{PK}_1 \parallel \overline{RT}_1$, 且 \overline{PK}_1 交 \overline{HT} 於 K_1 , 則 K_1 為 P 點對邊碰撞兩顆星撞至 Q 的第一碰撞點。

【證明】

(1) 過 R 作 $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ 。

(2) 設由 P 撞至 K_1 的路線, 在 $AB'C'D$ 的球台上, 得出的第二碰撞點為 K'_2 , 且路線與 \overline{TS} 交於 Q' 。

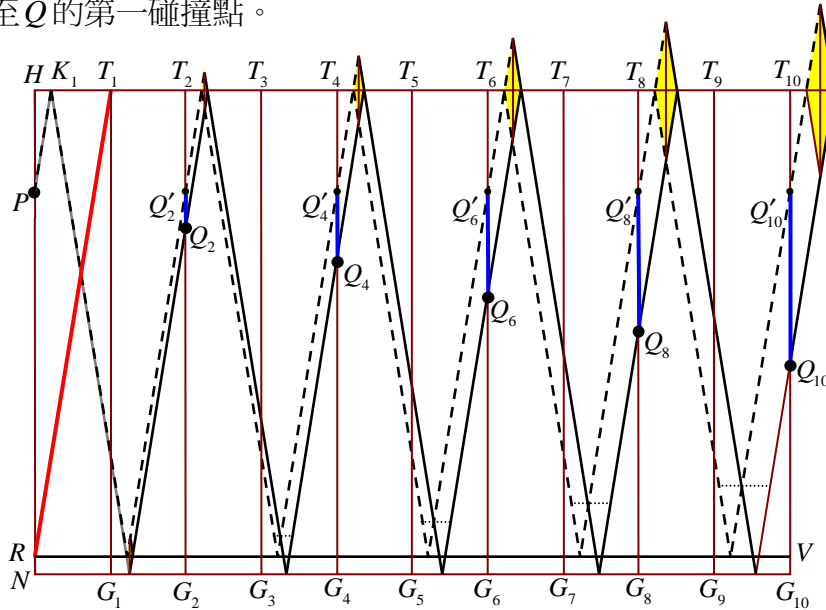


$$(3) \because \overline{HT_1} = \frac{1}{2}\overline{HT} \quad , \quad \overline{PK_1} \parallel \overline{RT_1} \quad \therefore \overline{HP} = \overline{TQ'}$$

(4) 設由 P 撞至 K_1 的路線，在 $ABCD$ 的球台上，得出的第二碰撞點為 K_2 。

$$(5) \overline{RN} = \frac{1}{2}(\overline{TQ} - \overline{PH}) = \frac{1}{2}(\overline{TQ} - \overline{TQ'}) = \frac{1}{2}\overline{QQ'} \Rightarrow \overline{QQ'} = 2 \times \overline{RN}$$

(6) 連 $\overline{K_2Q}$ ，作菱形 $K_2UU'K'_2$ 、 $Q'X'QX$ (X' 點在 $\overline{K'_2Q'}$ 上)，由 $\overline{UK_2} = 2\overline{RN} = \overline{Q'Q}$ ，且菱形 $K_2UU'K'_2$ 、 $Q'X'QX$ 全等 $\Rightarrow \overline{K_2Q} \parallel \overline{K'_2Q'}$ 。故得證： K_1 為 P 對邊碰撞兩顆星撞至 Q 的第一碰撞點。



【推論】由「定理F-3」、「定理F-4」的性質與證明，我們得出對邊偶數次碰撞路線（實線）與對邊完全碰撞路線（虛線）的關係圖如下。如圖， $HRVT_{10}$ 、 $HNG_{10}T_{10}$ 為矩形， T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 、 T_6 、 T_7 、 T_8 、 T_9 十等分 $\overline{HT_{10}}$ ； G_1 、 G_2 、 G_3 、 G_4 、 G_5 、 G_6 、 G_7 、 G_8 、 G_9 十等分 $\overline{NG_{10}}$ ，若 Q'_2 、 Q'_4 、 Q'_6 、 Q'_8 、 Q'_{10} 分別為球台 $HRVT_{10}$ 上，以 P 為起點，對邊2次、4次、6次、8次、10次完全碰撞路線的終點； Q_2 、 Q_4 、 Q_6 、 Q_8 、 Q_{10} 分別為球台 $HNG_{10}T_{10}$ 上，以 P 為起點，對邊2次、4次、6次、8次、10次碰撞路線的終點，由圖中五個內部塗色之菱形的對角線（與 $\overline{HT_{10}}$ 互相垂直者），它們的長度比由左而右為1:2:3:4:5，可推得以下的關係式成立：

$$\overline{RN} = \frac{1}{i} \left| \overline{Q_i T_i} - \overline{PH} \right|, \quad \overline{Q_i Q'_i} = i \times \overline{RN} \quad \forall i = 2, 4, 6, 8, 10$$

上圖呈現的是 $\overline{Q_i T_i} > \overline{PH}$ 的情況。當 $\overline{Q_i T_i} < \overline{PH}$ 時，則必須將圖上的 \overline{RV} 改畫在以 $\overline{NG_{10}}$ 為軸的鏡射位置（落至球台 $HNG_{10}T_{10}$ 外部），且由兩種路線圖交織得出的關係式仍然成立。

三、繞球台的第一碰撞點及撞擊方向之討論：

【定理 R-1】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ，若 $\overline{PK_1} \parallel \overline{AC}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 ，則 $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} （令碰撞點為 K_2 ）、 \overline{BC} （令碰撞點為 K_3 ）、 \overline{CD} （令碰撞點為 K_4 ）四顆星撞至 Q 的撞擊方向，且 $K_1K_2K_3K_4$ 為平行四邊形。

【證明】

(1) 令 \overline{AC} 分別交 $\overline{K_1K_2}$ 、 $\overline{K_3K_4}$ 於 E 、 F 。

(2) $\because \overline{PK_1} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{PK_1} \parallel \overline{K_2K_3}$

$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{K_2K_3}$ ，又 $\overline{EK_2} \parallel \overline{FK_3}$

$\therefore EK_2K_3F$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{EK_2} = \overline{FK_3}$ 。

(3) $\because \angle PK_1D = \angle EAK_1$ ， $\angle PK_1D = \angle EK_1A$ $\therefore \angle EAK_1 = \angle EK_1A \Rightarrow \overline{EA} = \overline{EK_1}$

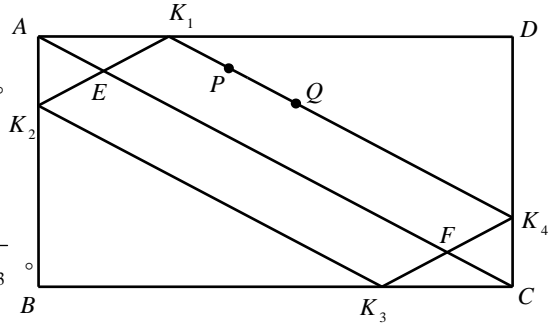
同理可證得： $\overline{EA} = \overline{EK_2}$ $\therefore \overline{EK_1} = \overline{EK_2}$ ，即 $\overline{K_1K_2} = 2 \times \overline{EK_2}$ 。

(4) 同理可證得： $\overline{K_3K_4} = 2 \times \overline{FK_3}$ 。

(5) 由(2)、(3)、(4) $\Rightarrow \overline{K_1K_2} = \overline{K_3K_4}$ ，又 $\because \overline{K_1K_2} \parallel \overline{K_3K_4}$ $\therefore K_1K_2K_3K_4$ 為平行四邊形。

(6) $\because \overline{PK_1} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{K_1K_4} \parallel \overline{AC}$ $\therefore Q$ 落在 $\overline{K_1K_4}$ 上

故得證： $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 四顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【補充】對於「定理 R-1」之矩形球台 $ABCD$ 上，由 P 點繞球台碰撞至 Q 點得出的平行四邊形路線 $K_1K_2K_3K_4$ ，我們稱它為矩形球台 $ABCD$ 上的一個「碰撞迴路」。

【定理 R-2】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， M 為 \overline{PQ} 中點，若 $\overline{PK} \parallel \overline{MA}$ ，且 \overline{PK} 交 \overline{AD} 於 K ，則 \overline{PK} 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 兩顆星撞至 Q 的撞擊方向。

【證明】

(1) 以 \overline{AD} 為軸，取 P 的對稱點 P' ；

以 \overline{AB} 為軸，取 Q 的對稱點 Q' 。

(2) 連 $\overline{P'Q'}$ 分別交 \overline{AD} 、 \overline{AB} 於 K_1 、 K_2 ，則 K_1 、 K_2 分別為

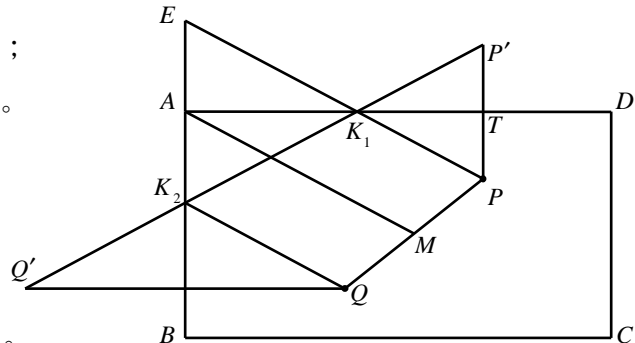
$ABCD$ 球台上，由 P 撞至

Q 的第一碰撞點與第二碰撞點。

(3) 延長 $\overline{PK_1}$ 、 \overline{AB} 相交於 $E \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AK_2}$ 。

(4) $\because \overline{PM} = \overline{QM}$ ， $\overline{AE} = \overline{AK_2}$ ， $\overline{PK_1} \parallel \overline{QK_2}$ $\therefore \overline{PE} \parallel \overline{MA}$

$\therefore \overline{PK} \parallel \overline{MA}$ $\therefore \overline{PK}$ 為 P 點繞球台碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 兩顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【定理 R-3】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， M 為 \overline{PQ} 中點，作 $\overline{QH} \perp \overline{BC}$ ， \overline{QH} 交 \overline{BC} 於 H ，作 $\overline{MM'} \parallel \overline{QH}$ ， $\overline{MM'} = \overline{QH}$ ，連 $\overline{M'A}$ ，作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{M'A}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 ，則 $\overline{PK_1}$ 可為由 P 三顆星撞至 Q 的撞擊方向。

【證明】

(1) 令 K_2 、 K_3 為 P 依序碰撞 \overline{AB} 、 \overline{BC} 的碰撞點。

(2) 延長 $\overline{AM'}$ 分別交 \overline{BC} 於 N 、 \overline{QH} 於 R ，作矩形 $AEM'S$ 、 $ABNT$ ，延長 $\overline{PK_1}$ 分別交 $\overline{SM'}$ 、 \overline{TN} 於 G 、 X 。

(3) 由「定理 R-1」可知： K_1K_2UG 為平行四邊形， U 、 G 分別在 $\overline{EM'}$ 、 $\overline{SM'}$ 上；且 $K_1K_2K_3X$ 為平行四邊形， K_3 、 X 分別在 \overline{BN} 、 \overline{TN} 上。

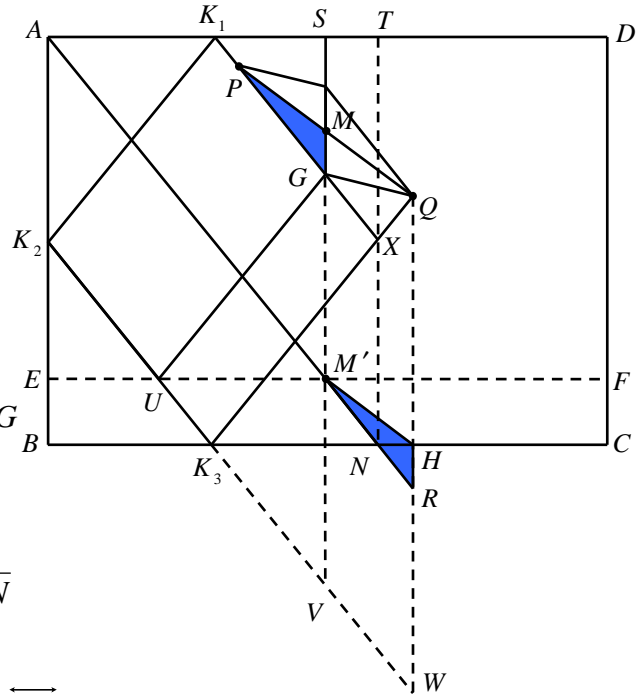
(4) 延長 $\overline{K_2K_3}$ 分別交 $\overline{SM'}$ 於 V ，交 \overline{QH} 於 W 。

(5) $\because \overline{MM'} \parallel \overline{QH}$ ， $\overline{MM'} = \overline{QH}$ $\therefore MM'HQ$ 為平行四邊形
 $\Rightarrow \overline{MQ} = \overline{M'H} \Rightarrow \overline{PM} = \overline{M'H}$ 。

(6) $\because \overline{PM} \parallel \overline{M'H}$ ， $\overline{PG} \parallel \overline{M'R}$ ， $\overline{MG} \parallel \overline{HR}$ $\therefore \angle MPG = \angle HM'R$ ， $\angle PMG = \angle M'HR$
 $\Rightarrow \triangle PMG \cong \triangle M'HR \Rightarrow \overline{MG} = \overline{HR}$ 。

(7) $\overline{QH} = \overline{MM'} = \overline{MG} + \overline{GM'} = \overline{MG} + \overline{M'V} = \overline{HR} + \overline{RW} = \overline{HW} \Rightarrow$ 點 K_3 、 X 、 Q 共線。

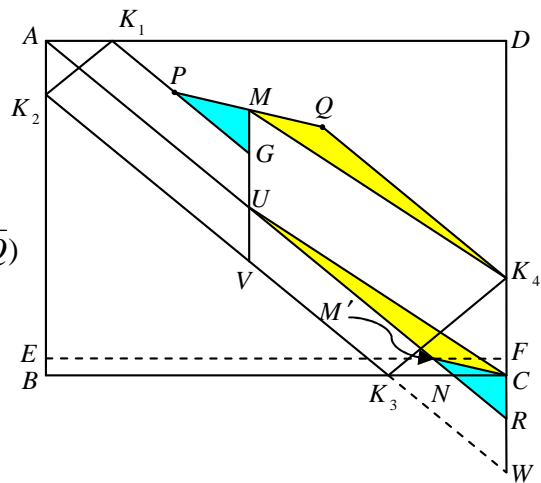
由上故證得： $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 三顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【定理 R-4】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， M 為 \overline{PQ} 中點，分別在 \overline{AB} 、 \overline{CD} 取 E 、 F ，且使 $\overline{CF} = \overline{BE} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ ，

連 \overline{EF} ，在 \overline{EF} 取 M' ，且使 $\overline{M'F} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$

，連 $\overline{M'A}$ ，作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{M'A}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 ，則 $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 四顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【證明】

(1) 令 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 為 P 依序碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的碰撞點，連 $\overline{K_4Q}$ 、 $\overline{K_4M}$ 。

(2) 作 $\overline{MV} \parallel \overline{AB}$ ，令 \overline{MV} 分別交 $\overline{PK_1}$ 、 $\overline{M'A}$ 、 $\overline{K_2K_3}$ 於 G 、 U 、 $V \Rightarrow \overline{GU} = \overline{UV}$ 。

(3) 延長 $\overline{K_2K_3}$ 、 \overline{CD} ，並令 $\overline{K_2K_3}$ 與 \overline{CD} 相交於 W ，延長 $\overline{AM'}$ 分別交 \overline{BC} 於 N 、交 \overline{CD} 於 R ，連 \overline{CU} 。

(4) $\because \overline{PM} = \overline{M'C}$ ， $\angle MPG = \angle CM'R$ ， $\angle PMG = \angle M'CR$

$\therefore \triangle PMG \cong \triangle M'CR \Rightarrow \overline{MG} = \overline{CR}$ 。

(5) $\because \overline{GU} = \overline{UV} = \overline{RW} \therefore \overline{MU} = \overline{MG} + \overline{GU} = \overline{MG} + \overline{UV} = \overline{CR} + \overline{RW} = \overline{CW} = \overline{K_4C}$

又 $\overline{MU} \parallel \overline{K_4C} \therefore$ 四邊形 $MUCK_4$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{MK_4} \parallel \overline{UC}$ ， $\overline{MK_4} = \overline{UC}$ 。

(6) $\because \overline{MK_4} = \overline{UC}$ ， $\overline{MQ} = \overline{PM} = \overline{M'C}$ ， $\angle QMK_4 = \angle M'CU$

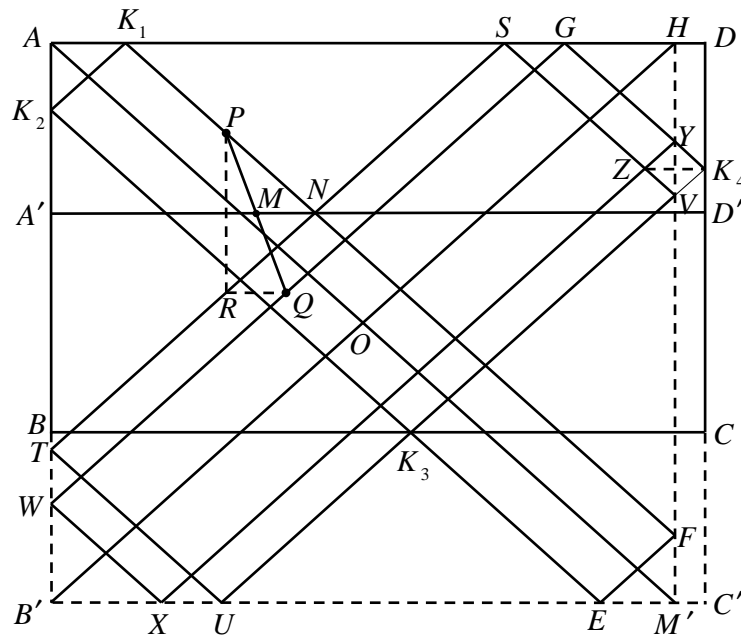
$\therefore \triangle QMK_4 \cong \triangle M'CU \Rightarrow \angle K_4QM = \angle UM'C \Rightarrow \overline{K_4Q} \parallel \overline{UM'} \parallel \overline{PK_1}$ 。

由上可證得： $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 四顆星撞至 Q 的撞擊方向。

【定理 R-5】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， M 為 \overline{PQ} 中點，過 M 作 $\overline{A'D'} \parallel \overline{AD}$ ，且使 A' 、 D' 分別在 \overline{AB} 、 \overline{CD} 上，作矩形 $A'B'C'D' \cong$ 矩形 $ABCD$ ，在 \overline{AD} 、 $\overline{B'C'}$ 分別取點 H 、點 M' ，且使得 $\overline{HD} = \overline{M'C'} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ ，連 $\overline{HM'}$ 、 $\overline{M'A}$ 、 $\overline{B'H}$ ，令

$\overline{B'H}$ 、 $\overline{M'A}$ 相交於 O ，作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{M'A}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 ，則 \overline{OA} 與 $\overline{PK_1}$ 皆可為 P

碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 五顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【證明】

(1) 作 $\overline{PR} \parallel \overline{AB}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{AD}$ 。

(2) 過 P 作 $AB'M'H$ 的碰撞迴路 K_1K_2EF , 過 R 作 $AB'M'H$ 的碰撞迴路 $STUV$, 過 Q 作 $AB'M'H$ 的碰撞迴路 $GWXY$ 。

(3) $\because \overline{A'D'}$ 為 \overline{PR} 的中垂線 \therefore 可令 $\overline{K_1F}$ 、 \overline{ST} 、 $\overline{A'D'}$ 相交於 N , 且 $\overline{PN} = \overline{RN}$ 。

(4) 令 $\overline{K_2E}$ 與 \overline{UV} 相交於 K_3 , \overline{XY} 與 \overline{SV} 相交於 Z , 延長 \overline{UV} 、 \overline{GY} 相交於 K_4 , 連 $\overline{ZK_4} \Rightarrow$ 四邊形 ZVK_4Y 為菱形 $\Rightarrow \overline{ZK_4} \perp \overline{YV} \Rightarrow \overline{ZK_4} \parallel \overline{SG}$ 。

(5) $\because O$ 點為矩形 $AB'M'H$ 的中心 , 又 $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

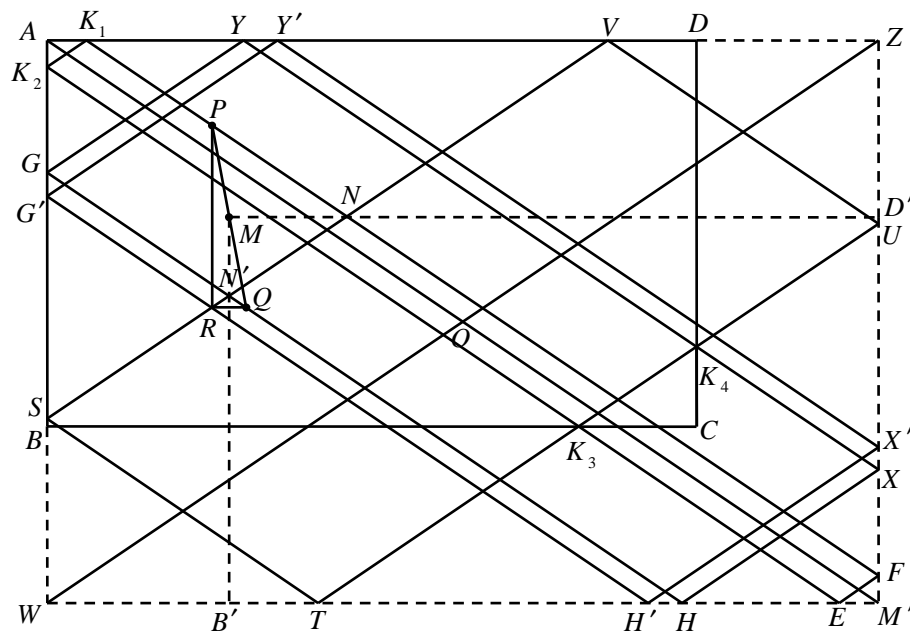
\therefore 依點對稱圖形性質可推知 : 點 K_3 在 \overline{BC} 上。

(6) $\because \overline{RQ} = \overline{SG} = \overline{ZK_4}$, $\overline{HD} = \overline{M'C'} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ}) = \frac{1}{2}\overline{RQ} = \frac{1}{2}\overline{ZK_4}$

\therefore 點 K_4 在 $\overline{C'D}$ 上。

(7) 故可證得 : $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 五顆星撞至 Q 的撞擊方向 , 且 \overline{OA} 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 五顆星撞至 Q 的正確撞擊方向。

【定理 R-6】如圖 , $ABCD$ 為矩形球台 , M 為 \overline{PQ} 中點 , 過 M 作 $\overline{MD'} \parallel \overline{AD}$, 且使 $\overline{MD'} = \overline{AD}$, 作矩形 $MB'M'D' \cong$ 矩形 $ABCD$, 延長 \overline{AB} 、 $\overline{B'M'}$ 相交於 W , 延長 \overline{AD} 、 $\overline{D'M'}$ 相交於 Z , 連 \overline{WZ} 、 $\overline{M'A}$, 令 \overline{WZ} 、 $\overline{M'A}$ 相交於 O , 作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{M'A}$, 且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 , 則 \overline{OA} 與 $\overline{PK_1}$ 皆為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 六顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【證明】

(1) 如圖 , 作 $\overline{PR} \parallel \overline{AB}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{AD}$ 。

(2) 過 P 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 K_1K_2EF ，過 Q 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $GHXY$ ，過 R 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $STUV$ 與 $G'H'X'Y'$ 。

(3) $\because \overline{MD'}$ 為 \overline{PR} 的中垂線 \therefore 可令 $\overline{K_1F}$ 、 \overline{SV} 、 $\overline{MD'}$ 相交於 N ，且 $\overline{PN} = \overline{RN}$ 。

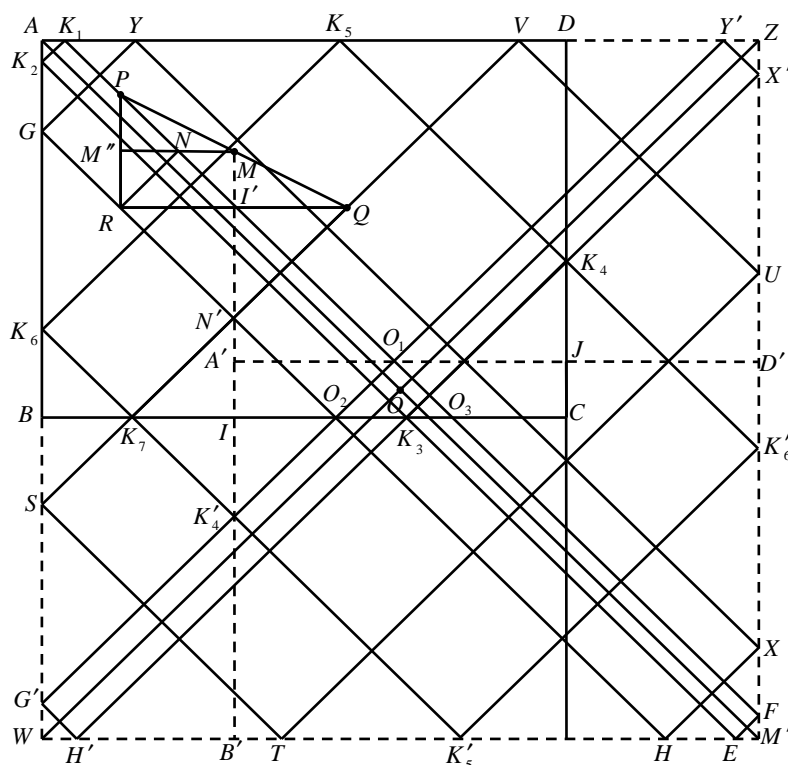
(4) $\because \overline{MB'}$ 為 \overline{RQ} 的中垂線 \therefore 可令 \overline{GH} 、 \overline{SV} 、 $\overline{MB'}$ 相交於 N' ，且 $\overline{RN'} = \overline{QN'}$ 。

(5) 令 $\overline{K_2E}$ 與 \overline{TU} 相交於 K_3 ， \overline{XY} 與 \overline{TU} 相交於 K_4 。

(6) $\because O$ 點為矩形 $AWM'Z$ 的中心 \therefore 依點對稱圖形性質可推知：點 K_3 在 \overline{BC} 上， K_4 在 \overline{CD} 上。

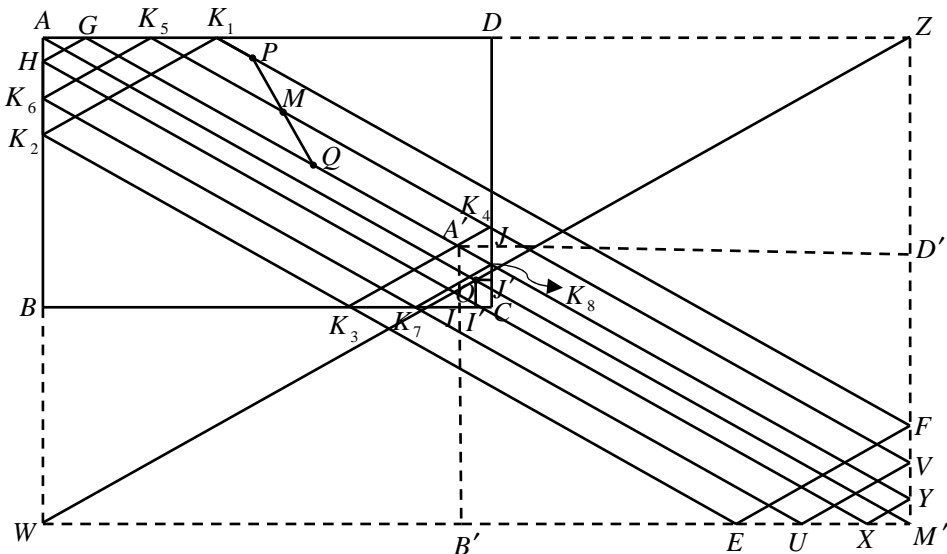
(7) 由 K_4 、 Y 、 G 在同一碰撞迴路 $GHXY$ 上，可證得： $\overline{PK_1}$ 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 六顆星撞至 Q 的撞擊方向，且 \overline{OA} 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 六顆星撞至 Q 的正確撞擊方向。

【定理 R-7】如圖， $ABCD$ 為矩形球台， M 點為 \overline{PQ} 的中點，過 M 作 $\overline{MI} \perp \overline{BC}$ ，且令 \overline{MI} 與 \overline{BC} 相交於 I ；在 \overline{MI} 上取 A' ，且使 $\overline{A'I} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ ；作 $\overline{A'D'} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{A'D'} = \overline{AD}$ ；作矩形 $A'B'M'D' \cong$ 矩形 $ABCD$ ；延長 \overline{AB} 、 $\overline{B'M'}$ 相交於 W ，延長 \overline{AD} 、 $\overline{D'M'}$ 相交於 Z ；連 \overline{WZ} 、 $\overline{M'A}$ ，令 \overline{WZ} 、 $\overline{M'A}$ 相交於 O ；作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{M'A}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 ，則 \overline{OA} 與 $\overline{PK_1}$ 皆可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 七顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【證明】

- (1) 如圖，作 $\overline{PR} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{RQ} \parallel \overline{AD}$ 。
- (2) 過 P 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 K_1K_2EF ，過 Q 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $STUV$ ，過 R 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $GHXY$ 。
- (3) 令 $\overline{K_2E}$ 與 \overline{BC} 相交於 K_3 ，過 K_3 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $G'H'X'Y'$ ，且令 $\overline{K_1F}$ 與 $\overline{G'Y'}$ 相交於 O_1 ， \overline{GH} 與 $\overline{G'Y'}$ 相交於 O_2 ， $\overline{K_1F}$ 與 \overline{BC} 相交於 O_3 ， $\overline{K_1F}$ 與 \overline{RQ} 相交於 I' 。
- (4) 作 $\overline{MM''} \perp \overline{PR}$ ，且 $\overline{MM''}$ 交 $\overline{K_1F}$ 於 N 。
- (5) $\because \overline{MM''}$ 為 \overline{PR} 的中垂線 $\therefore \overline{NR} = \overline{NP} = \overline{NI'}$ ， $\overline{NR} \parallel \overline{K_1K_2}$ 。
- (6) $\because O$ 點為矩形 $AWM'Z$ 的中心，依點對稱圖形性質可推知：點 O_1 在 $\overline{A'D'}$ 上。
 又 $\overline{M'R} = \overline{A'I} \Rightarrow \overline{NI'} = \overline{O_1O_3}$ ， $\angle RNI' = \angle O_2O_1O_3$ ， $\overline{NR} = \overline{O_1O_2}$
 $\Rightarrow \triangle NRI' \cong \triangle O_1O_2O_3 \Rightarrow$ 點 O_2 在 \overline{BC} 上。
- (7) 令 $\overline{X'H'}$ 與 \overline{CD} 相交於 K_4 ，過 K_4 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $K_5K_6K'_5K'_6$ ，並令 $\overline{K'_5K'_6}$ 與 \overline{SV} 相交於 K_7 。
- (8) $\because O$ 點為矩形 $AWM'Z$ 的中心，依點對稱圖形性質可推知： $\overline{MB'}$ 、 $\overline{K'_5K'_6}$ 、 $\overline{G'Y'}$ 共點（令此點為 K'_4 ）。
- (9) 令 \overline{SV} 與 \overline{GH} 相交於點 N' $\Rightarrow \overline{N'R} = \overline{N'Q}$
 又 $\overline{MB'}$ 為 \overline{RQ} 的中垂線 \Rightarrow 點 N' 在 $\overline{MB'}$ 上 \Rightarrow 四邊形 $N'K_7K'_4O_2$ 為菱形
 $\Rightarrow \overline{BC}$ 為 $\overline{N'K'_4}$ 的中垂線 $\Rightarrow K_7$ 在 \overline{BC} 上。
- (10) 由以上推論可證得： $\overline{PK_1}$ 為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 七顆星撞至 Q 的撞擊方向（碰撞點依序為 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 、 K_5 、 K_6 、 K_7 ），且 \overline{OA} 可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 七顆星撞至 Q 的撞擊方向。



【定理 R-8】如上圖， $ABCD$ 為矩形球台， M 為 \overline{PQ} 中點，在 $ABCD$ 內部取點 A' ，分別在 \overline{BC} 、 \overline{CD} 取點 I 與 J ，使 $\overline{A'I} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ ， $\overline{A'J} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ ，且使 $\overline{A'I} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{A'J} \perp \overline{CD}$ ；作 $\overline{A'D'} \parallel \overline{AD}$ ，且使 $\overline{A'D'} = \overline{AD}$ ，作矩形 $A'B'M'D' \cong$ 矩形 $ABCD$ ；延長 \overline{AB} 、 $\overline{B'M'}$ 相交於 W ，延長 \overline{AD} 、 $\overline{D'M'}$ 相交於 Z ，連 \overline{WZ} 、 $\overline{M'A}$ ，令 \overline{WZ} 、 $\overline{M'A}$ 相交於 O ，作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{M'A}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{AD} 於 K_1 ，則 \overline{OA} 與 $\overline{PK_1}$ 皆可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 八顆星撞至 Q 的撞擊方向。

【證明】

(1) 如圖，過 P 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 K_1K_2EF ，過 M 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 K_5K_6UV ，過 Q 作 $AWM'Z$ 的碰撞迴路 $GHXY$ 。

(2) 令 $\overline{K_2E}$ 與 \overline{BC} 相交於 K_3 ， $\overline{K_6U}$ 與 \overline{BC} 相交於 K_7 ， $\overline{K_5V}$ 與 \overline{CD} 相交於 K_4 ， \overline{GY} 與 \overline{CD} 相交於 K_8 。

(3) 作 $\overline{OI'} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{OI'}$ 交 \overline{BC} 於 I' ；作 $\overline{OJ'} \perp \overline{CD}$ ，且 $\overline{OJ'}$ 交 \overline{CD} 於 J' 。

(4) $\because O$ 點為矩形 $AWM'Z$ 與 $A'ICJ$ 的中心，又 $\overline{A'I} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ ， $\overline{A'J} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$

$$\therefore \overline{OI'} = \frac{1}{2}\overline{A'I} = \frac{1}{4}v(\overline{PQ}) = \frac{1}{2}v(\overline{MQ})，\overline{OJ'} = \frac{1}{2}\overline{A'J} = \frac{1}{4}h(\overline{PQ}) = \frac{1}{2}h(\overline{MQ})。$$

(5) $\because \overline{PK_1} \parallel \overline{OA}$ ，依「定理 R-4」 $\Rightarrow \overline{PK_1}$ 為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 四顆星撞至 M 的撞擊方向（碰撞點依序為 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 ）。

(6) $\because \overline{MK_5} \parallel \overline{OA}$ ，依「定理 R-4」 $\Rightarrow \overline{MK_5}$ 為 M 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 四顆星撞至 Q 的撞擊方向（碰撞點依序為 K_5 、 K_6 、 K_7 、 K_8 ）。

(7) 由以上推論可證得： \overline{OA} 與 $\overline{PK_1}$ 皆可為 P 碰撞 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 八顆星撞至 Q 的撞擊方向（碰撞點依序為 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 、 K_5 、 K_6 、 K_7 、 K_8 ）。

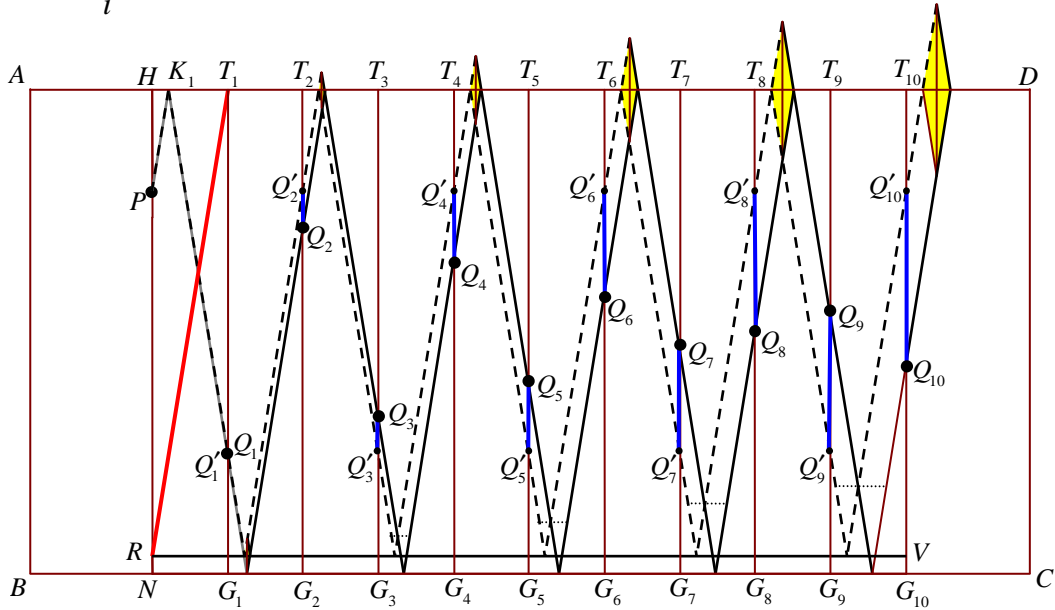
肆、推論與結論

一、對邊碰撞 n 顆星的第一碰撞點與撞擊方向：

如圖， $HRVT_{10}$ 、 $HNG_{10}T_{10}$ 為矩形， T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 、 T_6 、 T_7 、 T_8 、 T_9 十等分 $\overline{HT_{10}}$ ； G_1 、 G_2 、 G_3 、 G_4 、 G_5 、 G_6 、 G_7 、 G_8 、 G_9 十等分 $\overline{NG_{10}}$ ，以下對於任一個不大於 10 的正整數 i 而言，若 Q'_i 表示球台 $HRVT_{10}$ 上，以 P 為起點，對邊 i 次完全碰撞路線的終點； Q_i 表示球台 $HNG_{10}T_{10}$ 上，以 P 為起點，對邊 i 次碰撞路線的終點，由圖中五個內部塗色之菱形的對角線（與 $\overline{HT_{10}}$ 互相垂直者），它們的長度比由左而右為 1:2:3:4:5，可推知下列性質成立：

$$(1) \overline{RN} = \frac{1}{i}(\overline{Q_i G_i} - \overline{PH}), \quad \overline{Q_i Q'_i} = (i-1) \times \overline{RN} \quad \forall i = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$(2) \overline{RN} = \frac{1}{i}(\overline{Q_i T_i} - \overline{PH}), \quad \overline{Q_i Q'_i} = i \times \overline{RN} \quad \forall i = 2, 4, 6, 8, 10$$



也就是說，若想由 \overline{HN} 上的 P 點對邊碰撞 n 次至 $\overline{T_n G_n}$ 上的 Q_n 點，則必須在 \overline{HN} 上確定出 R 點的位置，以及在 $\overline{HT_n}$ 上確定出 n 等分 $\overline{HT_n}$ 的第一個等分點 T_1 點的位置（即最接近 H 點的等分點），連 $\overline{RT_1}$ ，作 $\overline{PK_1} \parallel \overline{RT_1}$ ，且 $\overline{PK_1}$ 交 \overline{HT} 於 K_1 ，則 K_1 即為 P 點對邊碰撞 n 顆星撞至 Q_n 的第一碰撞點。其中 R 點的位置如下：

$$(1) \overline{RN} = \frac{1}{n} |\overline{Q_n G_n} - \overline{PH}|, \quad \overline{Q_n Q'_n} = (n-1) \times \overline{RN} \quad \forall n = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

當 $\overline{Q_n G_n} > \overline{PH}$ 時， R 落在 \overline{HN} 上；當 $\overline{Q_n G_n} < \overline{PH}$ 時， R 落在球台外的 \overline{HN} 上。

$$(2) \overline{RN} = \frac{1}{n} (\overline{Q_n T_n} - \overline{PH}), \quad \overline{Q_n Q'_n} = n \times \overline{RN} \quad \forall n = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

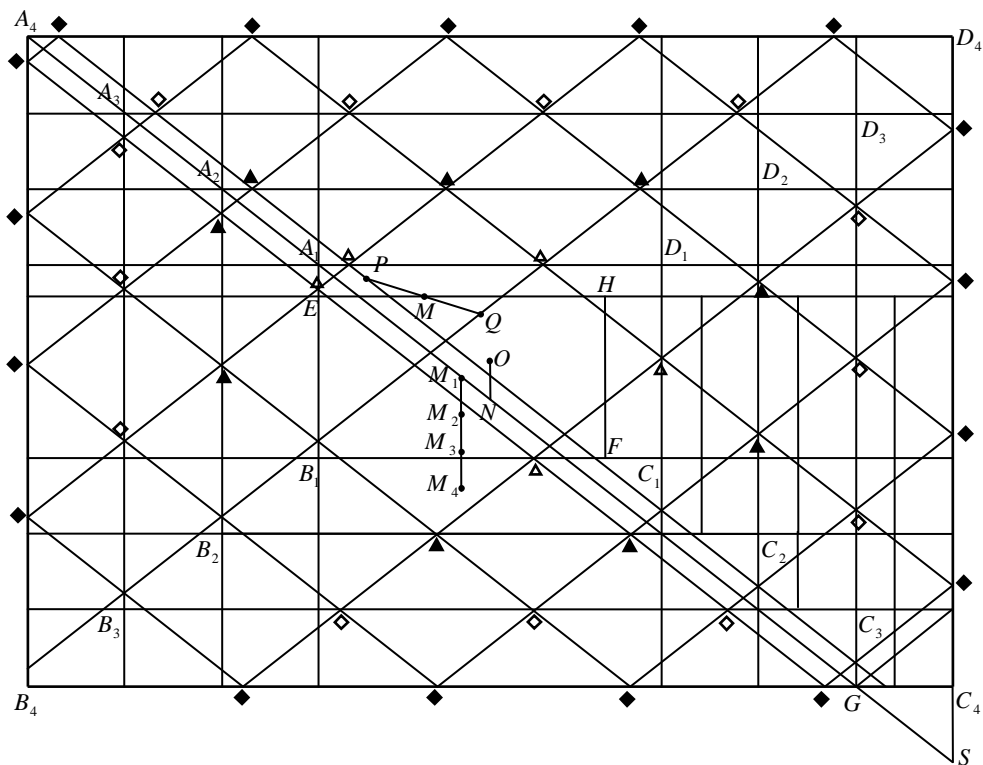
當 $\overline{Q_n T_n} > \overline{PH}$ 時， R 落在 \overline{HN} 上；當 $\overline{Q_n T_n} < \overline{PH}$ 時， R 落在球台外的 \overline{HN} 上。

二、繞球台 n 顆星的第一碰撞點與撞擊方向

以下固定球台上的撞擊方向，是為了比較、了解在不同球台與不同碰撞次數的條件下，黑盒子中心、球台中心與出發點位置、目標點位置之間的關係，並進一步找出在同一球台上繞球台 n ($n > 4$) 顆星的可行撞擊方向。

(一) 繞球台 $4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) 顆星的黑盒子中心：第一碰撞點與撞擊方向

以下球台的構建步驟是先作出 $A_1 B_1 C_1 D_1$ ，再依其路線，以各邊每次向外增加 $\frac{1}{2} \times a(P/Q)$ 、 $\frac{1}{2} \times b(P/Q)$ 、 $\frac{1}{2} \times a(P/Q)$ 、 $\frac{1}{2} \times b(P/Q)$ 的方式，依序作出 $A_2 B_2 C_2 D_2$ 、 $A_3 B_3 C_3 D_3$ 、 $A_4 B_4 C_4 D_4$ ，且撞擊 P 後的停置點皆為 Q 。



如上圖，在 $A_1B_1C_1D_1$ 球台上，由 P 繞球台 5 顆星（碰撞點以「 \triangle 」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_1 ；在 $A_2B_2C_2D_2$ 球台上，由 P 繞球台 9 顆星（碰撞點以「 \blacktriangle 」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_2 ；在 $A_3B_3C_3D_3$ 球台上，由 P 繞球台 13 顆星（碰撞點以「 \diamond 」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_3 ；在 $A_4B_4C_4D_4$ 球台上，由 P 繞球台 17 顆星（碰撞點以「 \blacklozenge 」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_4 。

$$\text{令 } v(O/\overrightarrow{A_1G}) = \overrightarrow{ON} \quad \therefore \overrightarrow{C_4S} = \frac{1}{2} \times b(P/Q)$$

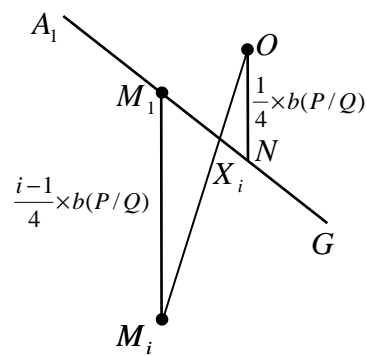
$$\therefore \overrightarrow{ON} = \frac{1}{4} \times b(P/Q)$$

$$\therefore \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{4} \times b(P/Q) = \overrightarrow{ON}$$

若設 $\overrightarrow{OM_i}$ 與 $\overrightarrow{A_iG}$ 相交於 X_i ($\forall i=1, 2, 3, 4$)

由 $\triangle ONX_i \sim \triangle M_iM_1X_i$ ($\forall i=2, 3, 4$)

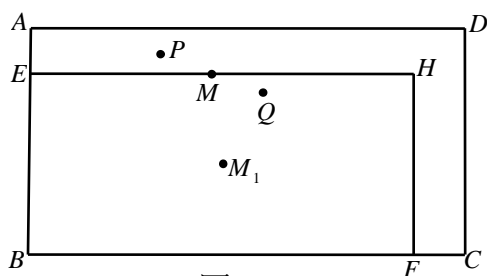
$$\Rightarrow \overrightarrow{OX_i} = \frac{1}{i} \times \overrightarrow{OM_i} \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$



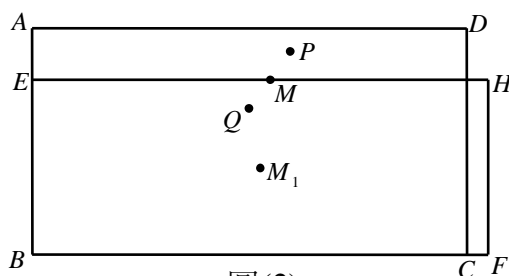
也就是說，若 P 、 Q 為球台 $ABCD$ 上的相異兩點， M 為 \overrightarrow{PQ} 中點，由 P 點繞球台 $4k+1$ ($k \in N$) 顆星撞至 Q 點，則必須確定 $ABCD$ 的中心點 O 的位置，以及確定黑盒子與黑盒子中心 M_k 的位置，在 $\overrightarrow{OM_k}$ 上確定出 k 等分 $\overrightarrow{OM_k}$ 的第一個等分點 X_k 點的位置（即最接近 O 點的等分點），則 $\overrightarrow{X_kA}$ 即為 P 繞球台 $4k+1$ 顆星碰撞至 Q 的撞擊方向。其中黑盒子的位置如下：

(1)當 $d(P/\overline{AB}) < d(Q/\overline{AB})$ 時，則黑盒子矩形 $EBFH$ (E 、 F 分別在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上， \overline{EH} 通過 M 點) 中， $\overline{EH} = \overline{AD} - \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ 。(如下圖(1))

(2)當 $d(P/\overline{AB}) > d(Q/\overline{AB})$ 時，則黑盒子矩形 $EBFH$ (E 、 F 分別在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上， \overline{EH} 通過 M 點) 中， $\overline{EH} = \overline{AD} + \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ 。(如下圖(2))

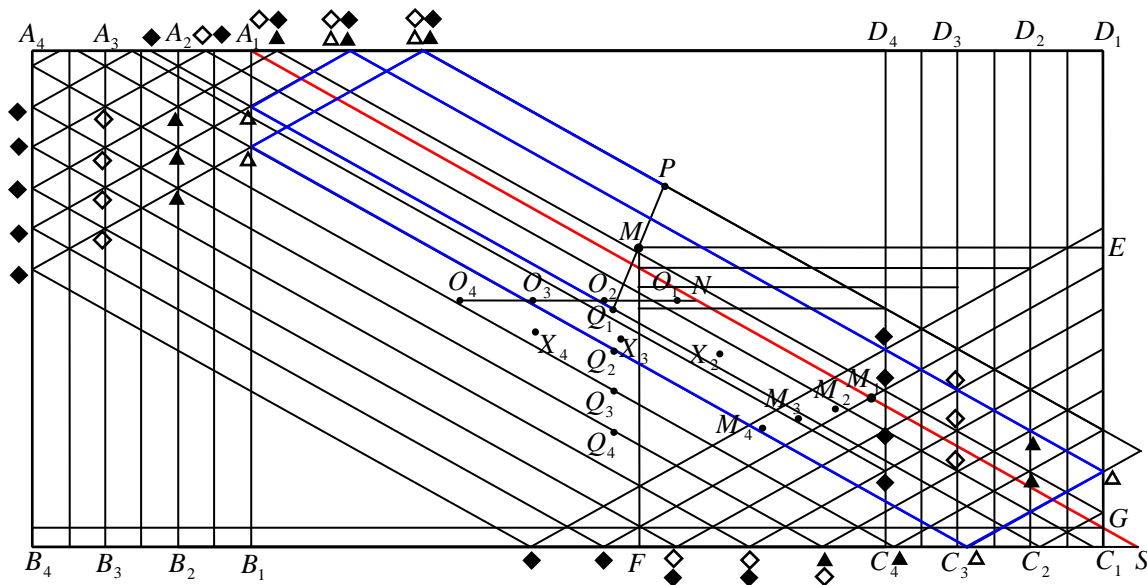


圖(1)



圖(2)

(二)繞球台 $4k+2$ ($k \in N$) 顆星的第一碰撞點與撞擊方向



以上球台的構建步驟是先作出 $A_1B_1C_1D_1$ ，再依其路線，每次將球台向 $\overline{D_1A_1}$ 平移 $a(P/Q_1)$ 的方式，依序作出 $A_2B_2C_2D_2$ 、 $A_3B_3C_3D_3$ 、 $A_4B_4C_4D_4$ ，而撞擊 P 後的停置點依序為 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 。

如上圖，在 $A_1B_1C_1D_1$ 球台上，中心點為 O_1 ，由 P 繞球台 6 顆星（碰撞點以「 \triangle 」表示）碰撞至 Q_1 ，黑盒子中心為 M_1 ；在 $A_2B_2C_2D_2$ 球台上，中心點為 O_2 ，由 P 繞球台 10 顆星（碰撞點以「 \blacktriangle 」表示）碰撞至 Q_2 ，黑盒子中心為 M_2 ；在 $A_3B_3C_3D_3$ 球台上，中心點為 O_3 ，由 P 繞球台 14 顆星（碰撞點以「 \diamond 」表示）碰撞至 Q_3 ，黑盒子中心為 M_3 ；在 $A_4B_4C_4D_4$ 球台上，中心點為 O_4 ，由 P 繞球台 18

顆星（碰撞點以「◆」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_4 。

$$\text{令 } h(O_i / \overrightarrow{A_1G}) = \overline{O_iN} \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$

$$\because \overline{C_1S} = \frac{1}{2} \times a(P/Q_1)$$

$$\therefore \overline{O_1N} = \frac{1}{4} \times a(P/Q_1)$$

$$\Rightarrow \overline{O_iN} = a(P/Q_1) \times (i-1) + \frac{1}{4} \times a(P/Q_1)$$

$$= a(P/Q_1) \times (i - \frac{3}{4}) \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$

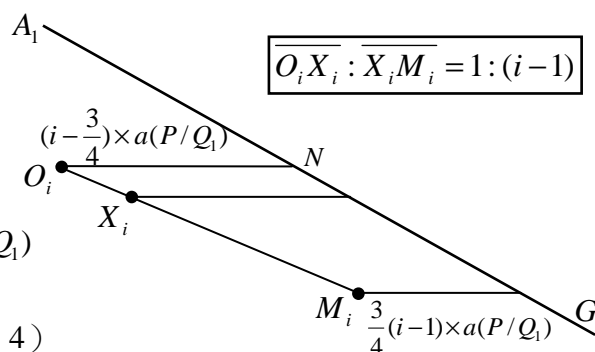
$$\text{又 } h(M_i / \overrightarrow{A_1G}) = [a(P/Q_1) \times \frac{1}{2} + a(P/Q_1) \times \frac{1}{4}] \times (i-1) = a(P/Q_1) \times \frac{3}{4} (i-1)$$

若 i 等分 $\overline{O_iM_i}$ ，並取 $\overline{O_iM_i}$ 的第一個等分點 X_i 點的位置（即最接近 O_i 點的等分

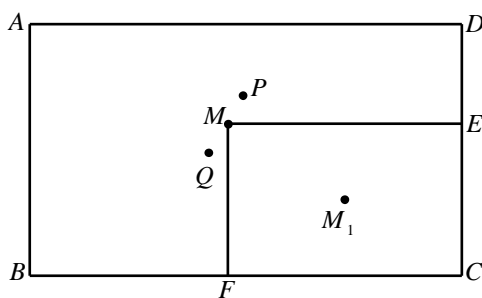
點），則 $h(X_i / \overrightarrow{A_1G}) = h(M_i / \overrightarrow{A_1G}) + [\overline{O_iN} - h(M_i / \overrightarrow{A_1G})] \times \frac{i-1}{i} = a(P/Q) \times \frac{3}{4} (i-1) +$

$$+ [a(P/Q) \times (i - \frac{3}{4}) - a(P/Q) \times \frac{3}{4} (i-1)] \times \frac{i-1}{i} = a(P/Q) \times (i-1) \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$

$$\text{又 } \overline{A_iA_1} = (i-1) \times a(P/Q) \quad (\forall i=2, 3, 4) \quad \therefore \overline{X_iA_1} // \overline{A_1G}$$

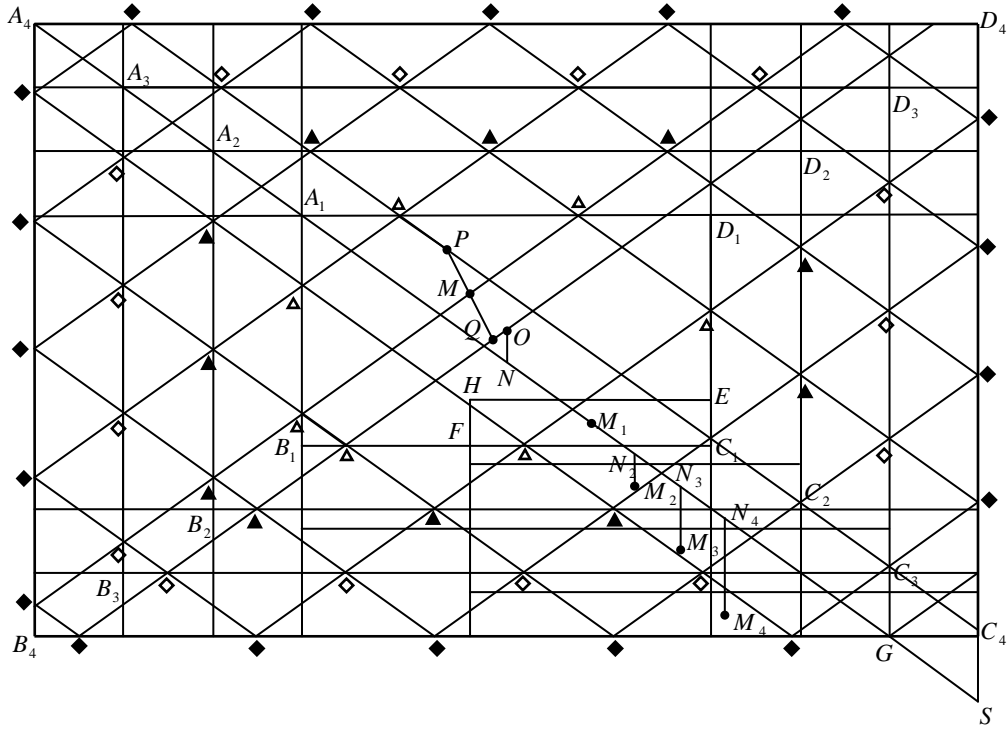


也就是說，若 P 、 Q 為球台 $ABCD$ 上的相異兩點， M 為 \overline{PQ} 中點，由 P 點繞球台 $4k+2$ ($k \in N$) 顆星撞至 Q 點，則必須確定 $ABCD$ 的中心點 O 的位置，以及確定黑盒子與黑盒子中心 M_k 的位置，在 $\overline{OM_k}$ 上確定出 k 等分 $\overline{OM_k}$ 的第一個等分點 X_k 點的位置（即最接近 O 點的等分點），則 $\overline{X_kA}$ 即為 P 繞球台 $4k+2$ 顆星碰撞至 Q 的撞擊方向。其中黑盒子的位置如下：過 M 點作 $\overline{ME} \perp \overline{CD}$ （垂足為 E ）、 $\overline{MF} \perp \overline{BC}$ （垂足為 F ），則黑盒子為矩形 $MECF$ （如右圖）。



(三) 繞球台 $4k+3$ ($k \in N$) 顆星的第一碰撞點與撞擊方向

以下球台的構建步驟是先作出 $A_1B_1C_1D_1$ ，再依其路線，以各邊每次向外增加 $\frac{1}{2} \times a(P/Q)$ 、 $\frac{1}{2} \times b(P/Q)$ 、 $\frac{1}{2} \times a(P/Q)$ 、 $\frac{1}{2} \times b(P/Q)$ 的方式，依序作出 $A_2B_2C_2D_2$ 、 $A_3B_3C_3D_3$ 、 $A_4B_4C_4D_4$ ，且撞擊 P 後的停置點皆為 Q 。



如上圖，在 $A_1B_1C_1D_1$ 球台上，中心點為 O_1 ，由 P 繞球台 7 顆星（碰撞點以「 \triangle 」表示）碰撞至 Q_1 ，黑盒子中心為 M_1 ；在 $A_2B_2C_2D_2$ 球台上，中心點為 O_2 ，由 P 繞球台 11 顆星（碰撞點以「 \blacktriangle 」表示）碰撞至 Q_2 ，黑盒子中心為 M_2 ；在 $A_3B_3C_3D_3$ 球台上，中心點為 O_3 ，由 P 繞球台 15 顆星（碰撞點以「 \diamond 」表示）碰撞至 Q_3 ，黑盒子中心為 M_3 ；在 $A_4B_4C_4D_4$ 球台上，中心點為 O_4 ，由 P 繞球台 19 顆星（碰撞點以「 \blacklozenge 」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_4 。

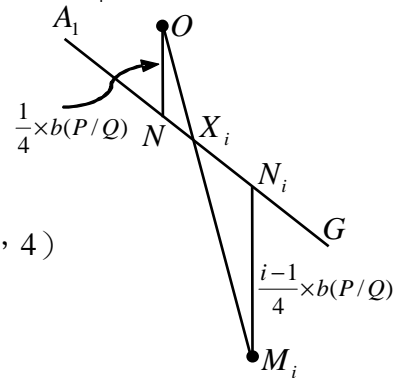
$$\text{令 } v(O/\overrightarrow{A_1G}) = \overline{ON} \quad \because \overline{C_4S} = \frac{1}{2} \times b(P/Q)$$

$$\therefore \overline{ON} = \frac{1}{4} \times b(P/Q)$$

$$\because v(M_i/\overrightarrow{A_1G}) = \overline{M_iN_i} = \frac{i-1}{4} \times b(P/Q) \quad (\forall i=2, 3, 4)$$

若設 $\overline{OM_i}$ 與 $\overrightarrow{A_1G}$ 相交於 X_i ($\forall i=2, 3, 4$)

$$\text{由 } \triangle ONX_i \sim \triangle M_iN_iX_i \quad (\forall i=2, 3, 4) \Rightarrow \overline{OX_i} = \frac{1}{i} \times \overline{OM_i} \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$



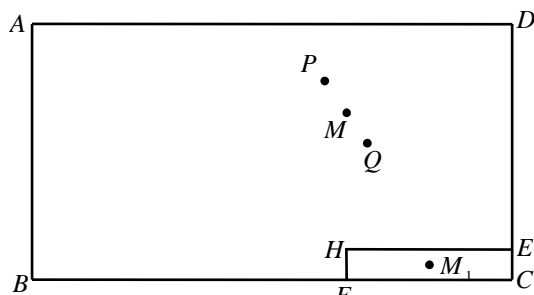
也就是說，若 P 、 Q 為球台 $ABCD$ 上的相異兩點， M 為 \overline{PQ} 中點，由 P 點繞球台 $4k+3$ ($k \in N$) 顆星撞至 Q 點，則必須確定 $ABCD$ 的中心點 O 的位置，以及確定黑盒子與黑盒子中心 M_k 的位置，在 $\overline{OM_k}$ 上確定出 k 等分 $\overline{OM_k}$ 的第一個等分點 X_k 點的位置（即最接近 O 點的等分點），則 $\overrightarrow{X_kA}$ 即為 P 繞球台 $4k+3$ 顆星碰撞至 Q 的撞擊方向。其中黑盒子的位置如下：

(1)當 $d(P/\overline{AD}) < d(Q/\overline{AD})$ 時，則黑盒子矩形 $ECFH$ (E 、 F 分別在 \overline{CD} 、 \overline{BC}

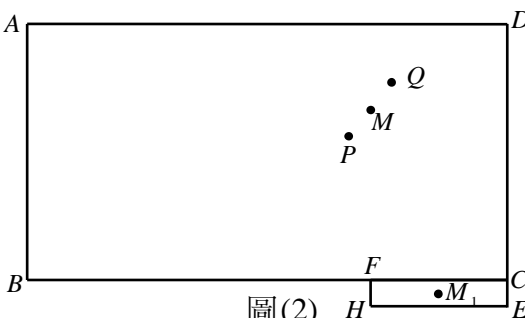
上， \overline{FH} 通過 M 點) 中， $\overline{ED} = \overline{CD} - \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ 。(如下圖(1))

(2)當 $d(P/\overline{AD}) > d(Q/\overline{AD})$ 時，則黑盒子矩形 $ECFH$ (E 、 F 分別在 \overline{CD} 、 \overline{BC}

上， \overline{FH} 通過 M 點) 中， $\overline{ED} = \overline{CD} + \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ 。(如下圖(2))

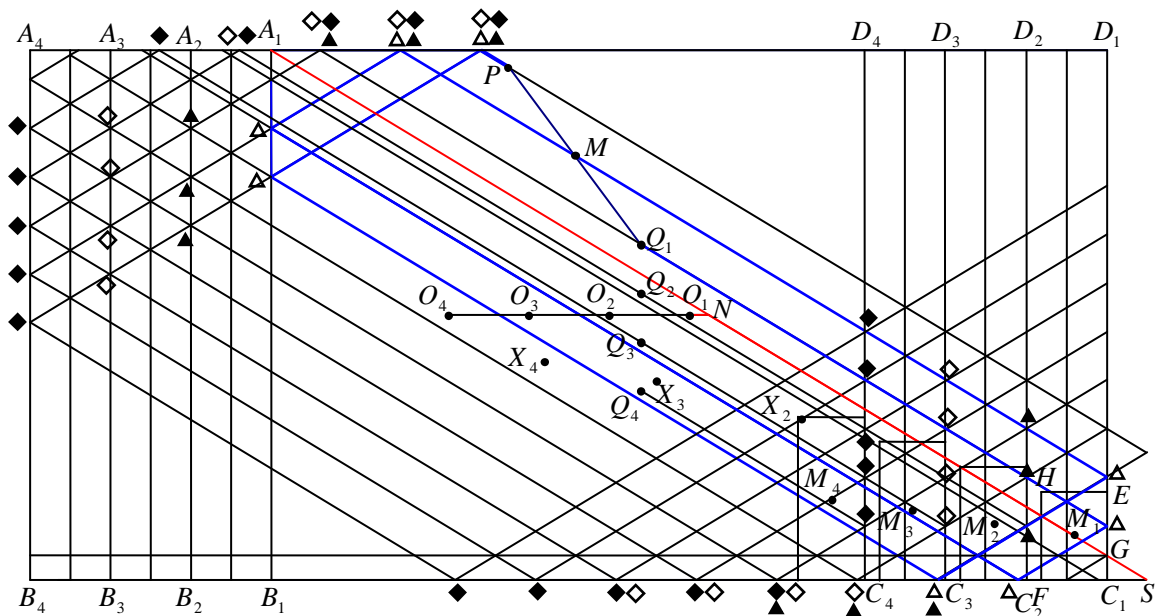


圖(1)



圖(2)

(四)繞球台 $4k+4$ ($k \in N$) 顆星的第一碰撞點與撞擊方向



以上球台的構建步驟是先作出 $A_1B_1C_1D_1$ ，再依其路線，每次將球台向 $\overline{D_1A_1}$ 平移 $a(P/Q_1)$ 的方式，依序作出 $A_2B_2C_2D_2$ 、 $A_3B_3C_3D_3$ 、 $A_4B_4C_4D_4$ ，而撞擊 P 後的停置點依序為 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 。

如上圖，在 $A_1B_1C_1D_1$ 球台上，中心點為 O_1 ，由 P 繞球台 8 顆星 (碰撞點以「 \triangle 」表示) 碰撞至 Q_1 ，黑盒子中心為 M_1 ；在 $A_2B_2C_2D_2$ 球台上，中心點為 O_2 ，由 P 繞球台 12 顆星 (碰撞點以「 \blacktriangle 」表示) 碰撞至 Q_2 ，黑盒子中心為 M_2 ；在

$A_3B_3C_3D_3$ 球台上，中心點為 O_3 ，由 P 繞球台 16 顆星（碰撞點以「◇」表示）碰撞至 Q_3 ，黑盒子中心為 M_3 ；在 $A_4B_4C_4D_4$ 球台上，中心點為 O_4 ，由 P 繞球台 20 顆星（碰撞點以「◆」表示）碰撞至 Q ，黑盒子中心為 M_4 。

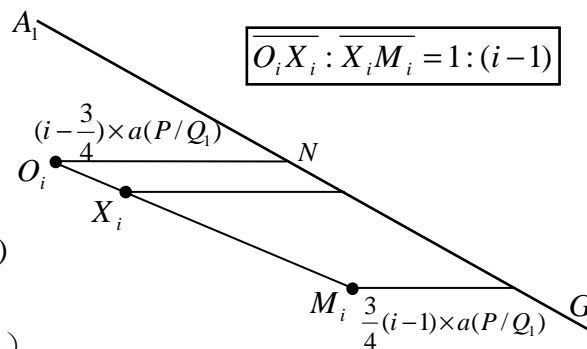
$$\text{令 } h(O_i / \overrightarrow{A_1G}) = \overline{O_iN} \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore \overline{C_1S} = \frac{1}{2} \times a(P/Q_1)$$

$$\therefore \overline{O_1N} = \frac{1}{4} \times a(P/Q_1)$$

$$\Rightarrow \overline{O_iN} = a(P/Q_1) \times (i-1) + \frac{1}{4} \times a(P/Q_1)$$

$$= a(P/Q_1) \times (i - \frac{3}{4}) \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$



$$\text{又 } h(M_i / \overrightarrow{A_1G}) = [a(P/Q_1) - a(P/Q_1) \times \frac{1}{4}] \times (i-1) = a(P/Q_1) \times \frac{3}{4}(i-1)$$

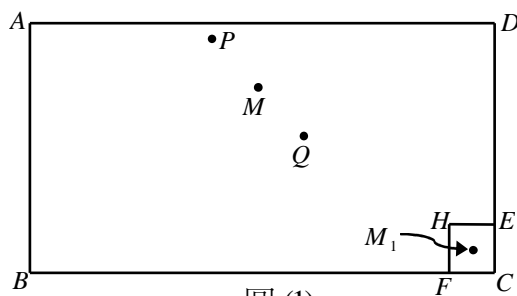
若 i 等分 $\overline{O_iM_i}$ ，並取 $\overline{O_iM_i}$ 的第一個等分點 X_i 點的位置(即最接近 O_i 點的等分點)

$$\text{則 } h(X_i / \overrightarrow{A_1G}) = h(M_i / \overrightarrow{A_1G}) + [\overline{O_iN} - h(M_i / \overrightarrow{A_1G})] \times \frac{i-1}{i} = a(P/Q) \times \frac{3}{4}(i-1)$$

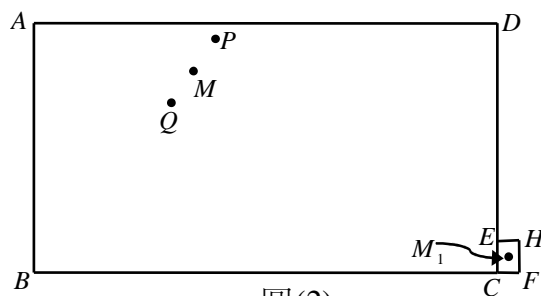
$$+ [a(P/Q) \times (i - \frac{3}{4}) - a(P/Q) \times \frac{3}{4}(i-1)] \times \frac{i-1}{i} = a(P/Q) \times (i-1) \quad (\forall i=1, 2, 3, 4)$$

$$\text{又 } \overline{A_iA_1} = (i-1) \times a(P/Q) \quad (\forall i=2, 3, 4) \quad \therefore \overline{X_iA_i} // \overline{A_1G}$$

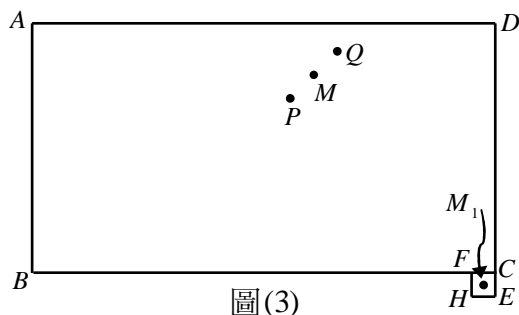
也就是說，若 P 、 Q 為球台 $ABCD$ 上的相異兩點， M 為 \overline{PQ} 中點，由 P 點繞球台 $4k+4$ ($k \in N$)顆星撞至 Q 點，則必須確定 $ABCD$ 的中心點 O 的位置，以及確定黑盒子與黑盒子中心 M_k 的位置，在 $\overline{OM_k}$ 上確定出 k 等分 $\overline{OM_k}$ 的第一個等分點 X_k 點的位置(即最接近 O 點的等分點)，則 $\overline{X_kA}$ 即為 P 繞球台 $4k+4$ 顆星碰撞至 Q 的撞擊方向。其中黑盒子(中心點令為 M_1)的位置如下：



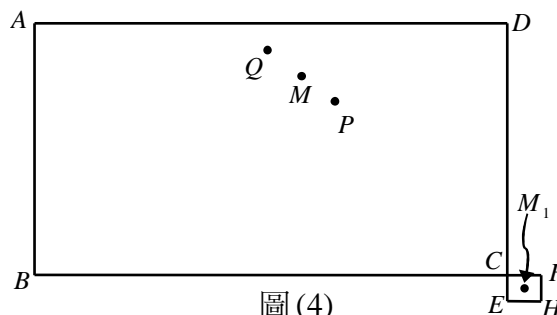
圖(1)



圖(2)



圖(3)



圖(4)

- (1) 當 $d(P/\overrightarrow{AB}) < d(Q/\overrightarrow{AB})$, $d(P/\overrightarrow{AD}) < d(Q/\overrightarrow{AD})$ 時, 則黑盒子矩形 $ECFH$ (E 、 F 分別在 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{BC} 上) 中, $\overline{EC} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$, $\overline{FC} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ 。(如上頁圖(1))
- (2) 當 $d(P/\overrightarrow{AB}) > d(Q/\overrightarrow{AB})$, $d(P/\overrightarrow{AD}) < d(Q/\overrightarrow{AD})$ 時, 則黑盒子矩形 $ECFH$ (E 、 F 分別在 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{BC} 上) 中, $\overline{EC} = \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$, $\overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{BC} + \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ 。(如上頁圖(2))
- (3) 當 $d(P/\overrightarrow{AB}) < d(Q/\overrightarrow{AB})$, $d(P/\overrightarrow{AD}) > d(Q/\overrightarrow{AD})$ 時, 則黑盒子矩形 $ECFH$ (E 、 F 分別在 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{BC} 上) 中, $\overline{FC} = \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$, $\overline{DE} = \overline{CD} + \overline{EC} = \overline{CD} + \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$ 。(如上圖(3))
- (4) 當 $d(P/\overrightarrow{AB}) > d(Q/\overrightarrow{AB})$, $d(P/\overrightarrow{AD}) > d(Q/\overrightarrow{AD})$ 時, 則黑盒子矩形 $ECFH$ (E 、 F 分別在 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{BC} 上) 中, $\overline{DE} = \overline{CD} + \overline{EC} = \overline{CD} + \frac{1}{2}v(\overline{PQ})$, $\overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{BC} + \frac{1}{2}h(\overline{PQ})$ 。(如上圖(4))

(五)繞球台之碰撞位置與行進路線

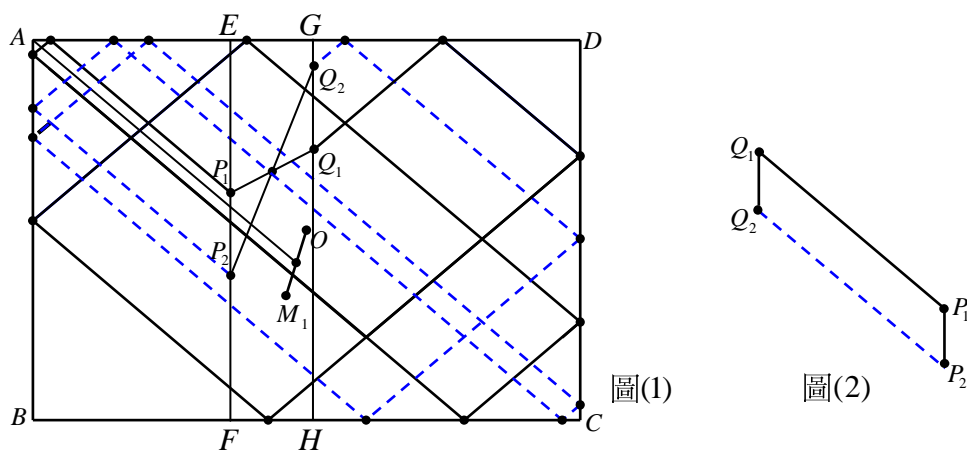
之前推論三顆星以上之繞球台定理時, 雖然刻意以依序繞球台的方式呈現並推證, 但實際上, 如果將之前所有附圖中 P 點或 Q 點位置改變, 且依據作圖理論和步驟確立撞擊方向, 則 P 點仍然可以繞球台撞至 Q 點位置。也就是說, P 點或 Q 點的位置改變, 頂多會改變 P 點行進的碰撞位置、次序與方向, 即使沒有依序繞球台, 也不會改變定理的成立性。而且若發生洗袋情況 (此時部分路線會重合並通過球台頂點), P 點仍可照原定碰撞次數 (碰撞一個球台頂點以碰撞 2 次計算) 撞至 Q 點位置。

以下從探究同一球台上「依序」與「非依序」的路線關係, 可以讓我們更加確立撞擊作圖理論的正確性。

下頁圖(1)是依照前述作圖判定理論, 在球台 $ABCD$ 上完成將 P_1 點撞至 Q_1 點

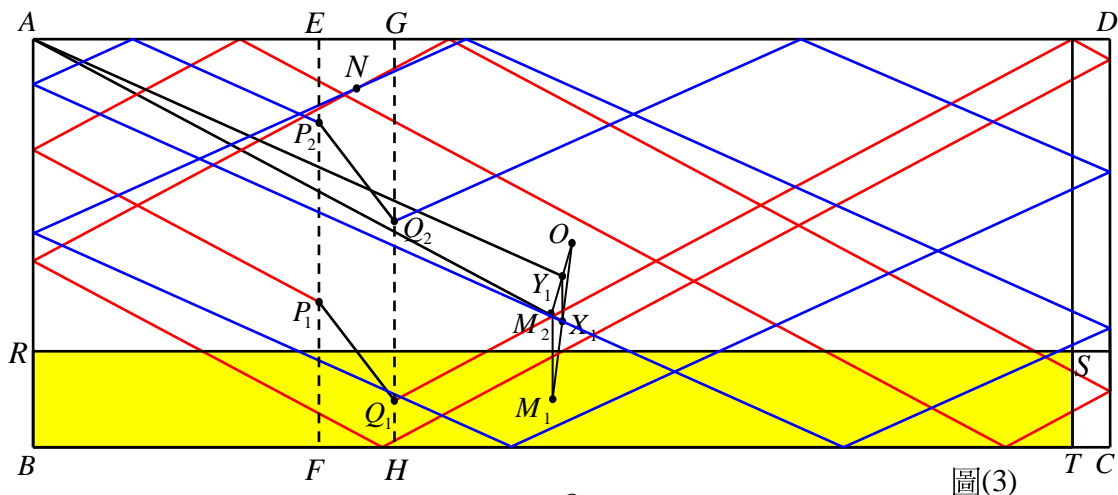
的九顆星碰撞路線圖，若通過 P_1 點、 Q_1 點分別作 $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$ ，接著又在 \overline{EF} 上取 P_2 點，再以同 P_1 點相同之初始撞擊方向將 P_2 點撞出，且於九顆星後撞至 \overline{GH} 上的 Q_2 點。

利用鏡射變換，我們發現 P_1 點撞至 Q_1 點的總路線長等於 P_2 點撞至 Q_2 點的總路線長，也就是說，這兩條碰撞路線長可以替換成兩條平行且又等長的線段（如圖(2)的示意圖），因此可推知： $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$ ，並得知：若在未撞擊 P_1 點與 P_2 點前，依據判定理論分別得出 P_1 點撞至 Q_1 點、 P_2 點撞至 Q_2 點之繞球台九顆星的「黑盒子中心」，則這兩個「黑盒子中心」的位置是相同的，只是 P_1 撞至 Q_1 的路線行進方向是依序繞球台，但 P_2 撞至 Q_2 的路線行進方向是非依序繞球台。



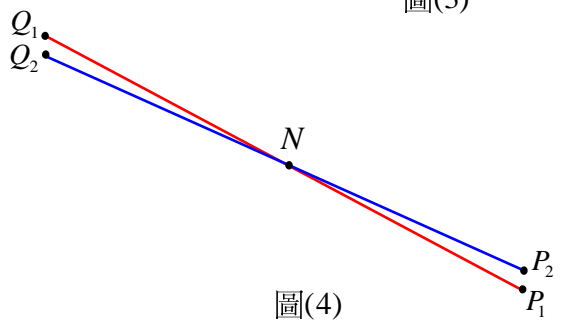
下頁圖(3)同樣也是依照前述作圖判定理論，在球台 $ABCD$ 上找出一個 P_1 點繞球台九顆星撞至 Q_1 點的初始撞擊方向 $\overline{X_1A}$ （其黑盒子為矩形 $BRST$ ，黑盒子中心為 M_1 ），首先通過 P_1 點、 Q_1 點分別作 $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$ ，接著又在 \overline{EF} 上取 P_2 點，在 \overline{GH} 上取 Q_2 ，且使得 $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$ ，再判定出繞球台九顆星的初始撞擊方向為 $\overline{Y_1A}$ （其黑盒子中心為 M_2 ），並得出 P_2 撞至 Q_2 的依序繞球台九顆星的行進路線。

因為 $\overline{X_1Y_1} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{P_1P_2} = 2 \times \overline{M_1M_2} = 4 \times \overline{X_1Y_1}$ ， $\overline{EG} = 2 \times \overline{TC}$ ，利用鏡射變換，我們可發現 P_1 撞至 N 點的總路線長等於 $4 \times \overline{X_1A}$ ； P_2 撞至 N 點的總路線長等於 $4 \times \overline{Y_1A}$ ，又 P_2 點由 N 撞至 Q_2 點的總路線長等於 $4 \times \overline{Y_1A}$ ，由此推知： P_1 點由 N 點起算再行進 $4 \times \overline{X_1A}$ 的路線長後，將撞至 \overline{GH} 上的 Q_1 點（如圖(4)的示意圖）。也就是說，若在未撞擊 P_1 點前，依據判定理論得出 P_1 點繞球台九顆星撞至 Q_1 點的初始撞擊方向，並依此方向將 P_1 點撞出，雖然 P_1 的行進路線是非依序繞球台，但 P_1 點必可撞至 Q_1 點。



圖(3)

我們可利用類似於前段繞球台九顆星的推證方式，藉由掌握同一球台上黑盒子中心的位置關係與「依序」、「非依序」的路線關係，證實本文提出之各種繞球台撞擊方向判定法的全面適用性。



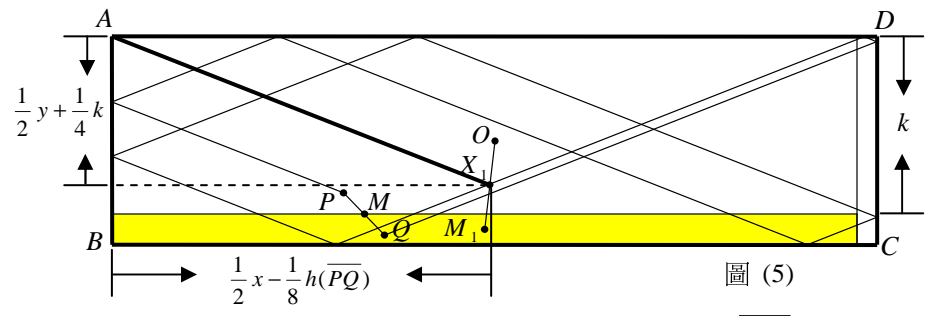
圖(4)

最後，對於任意一個以作圖理論確立的撞擊圖形，也可以不斷「翻球台」的方式證明本文判定法的成立性。我們以非依序繞球台九顆星與十顆星為例說明如下：

(1)非依序繞球台九顆星：

下圖(5)中， P 、 Q 為球台 $ABCD$ 上的兩點， M 為 \overline{PQ} 中點， M_1 為繞球台 $4k+1$ ($k \in N$)顆星的黑盒子中心， X_1 為 $\overline{OM_1}$ 中點，若設 $\overline{AD} = x$ ， $\overline{AB} = y$ ，

$$d(M / \overline{AD}) = k, \text{ 則 } \frac{d(X_1 / \overline{AD})}{d(X_1 / \overline{AB})} = \frac{\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}k}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}h(PQ)}。$$



圖(5)

我們另以不斷「翻球台」方式(如下頁圖(6))求得 $\frac{v(\overline{PQ'})}{h(\overline{PQ'})} = \frac{4y + 2k}{4x - h(\overline{PQ})}$ 。

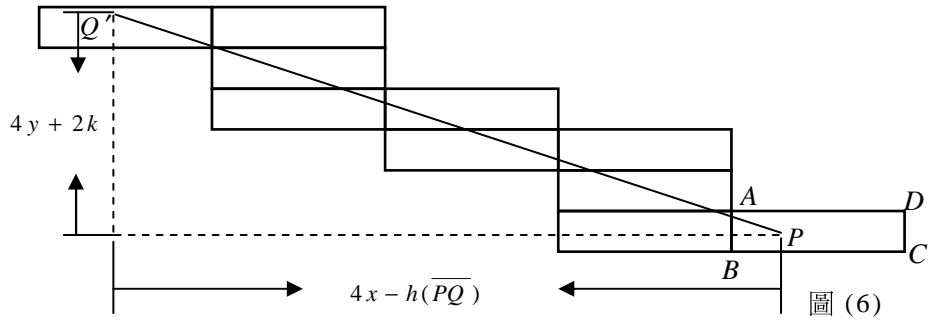


圖 (6)

$$\therefore \frac{4y+2k}{4x-h(\overline{PQ})} = \frac{\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}k}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}h(\overline{PQ})} \quad \therefore \overrightarrow{X_1A} \text{ 即為 } P \text{ 繞球台九顆星碰撞至 } Q \text{ 的撞擊}$$

方向。

(2)非依序繞球台十顆星：

下圖(7)中， P 、 Q 為球台 $ABCD$ 上的兩點， M 為 \overline{PQ} 中點， M_1 為繞球台 $4k+2$ ($k \in N$)顆星的黑盒子中心， X_1 為 $\overline{OM_1}$ 中點，若設 $\overline{AD} = x$ ， $\overline{AB} = y$ ，

$$d(M/\overline{AD}) = k, \quad d(M/\overline{AB}) = n, \quad \text{則} \quad \frac{d(X_1/\overline{AD})}{d(X_1/\overline{AB})} = \frac{\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}k}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}n}.$$

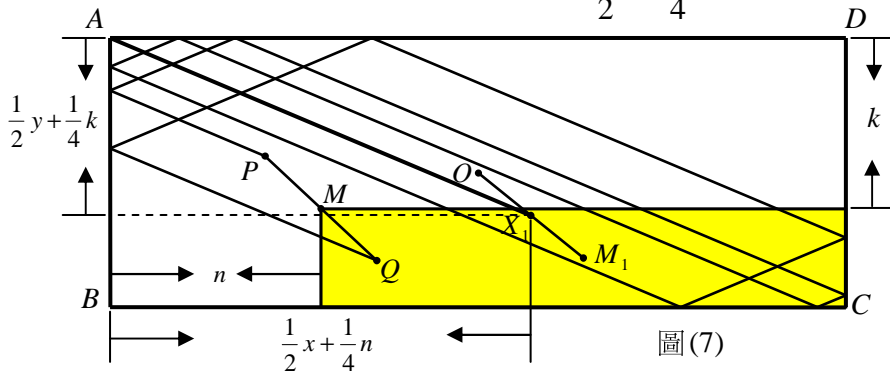


圖 (7)

我們另以不斷「翻球台」方式(如下圖(8))求得 $\frac{v(\overline{PQ'})}{h(\overline{PQ'})} = \frac{4y+2k}{4x+2n}$ 。

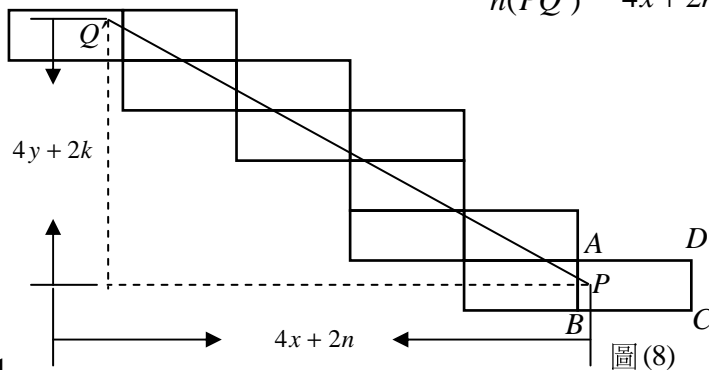


圖 (8)

$$\therefore \frac{4y+2k}{4x+2n} = \frac{\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}k}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}n} \quad \therefore \overrightarrow{X_1A} \text{ 即為 } P \text{ 繞球台十顆星碰撞至 } Q \text{ 的撞擊方向。}$$

綜合以上圖(1)至圖(8)的圖示與證明得知：若依據本文研究得出的理論，在固定球台上，判定出 P 點繞球台 n 顆星撞至 Q 點的初始撞擊方向，並依此方向將 P 點撞出，則點 P 必能撞至點 Q 位置，其碰撞路線可能是依序繞球台，也可能不是依序繞球台。

期待本文的研究結果，可以豐富撞擊的作圖理論，並作為實際撞擊（包括撞球）上的應用參考。

伍、參考資料

- 一、陳冒海主編《國中數學第五冊》；台南市：南一書局；民 98.8。
- 二、嚴鎮軍主編《初中數學競賽教程》；台北市：九章出版社；民 88.11。

【評語】 030411

研究撞球台上鏡射的原理，並發展出幾個定理，數學的推導完整，對國中生，為不錯的學習幾何的作品。