中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030410

揭開獨目美女神秘的面紗

學校名稱：高雄縣立鳳山國民中學

作者：	指導老師：
國二 管敏仁	廖士凱
國二 曾永恩	杜鴻祥
國二 呂俊益	

關鍵詞：益智遊戲、棋子顏色改變、棋盤對稱性

摘要

獨目棋盤的定義：在 $m \times n$ 的方格棋盤最右上角方格中先放置一個黑色棋子，其餘方格皆爲空格，有如白眼球中的黑色瞳孔，故稱之。

獨目棋盤的棋子放置規則：最右上角方格中先放置一個黑色棋子，之後每次可以在剩餘空格中放入一個白色棋子，並且同時改變相鄰方格中棋子的顏色，即黑改白，白改黑，若是空格就無變化。

本文證明了什麼樣的獨目棋盤在放滿棋子後，會讓方格內的棋子都變成白色棋子，並且找出可以令人依循的放棋原則，以及對所有棋盤設計一種通用放法，最後算出一些棋盤的所有放法。此外，我們改變黑棋的初始位置與初始黑棋的數目（可爲 0），試著探討與原棋盤的不同之處。

壹、研究動機

有一天在網路上查資料，看到了一個題目：

在 8×8 的方格棋盤最右上角方格中先放置一個黑色棋子，之後每次可以在剩餘空格中放入一個白色棋子，並且同時改變相鄰方格中棋子的顏色（黑改白、白改黑）。問棋盤在放滿棋子後，是否能使全部方格上都變成白色棋子，試證明你的推論。

當時覺得這個題目和點燈遊戲都是改變棋子的顏色，所以認爲與點燈遊戲相似，而點燈遊戲會用到我們所學過的對稱圖形（康版第 4 冊 2−2）的觀念。但後來發現獨目棋盤與點燈遊戲有 3 點不同，分別是「相鄰方格的意義」、「棋子變色的方式」、「初始棋盤的形式」。正因如此，此問題引起了我們的興趣，於是開始了我們的研究之路。

貳、研究目的

一、找出哪些獨目棋盤在放滿棋子後，能使全部方格上都變成白色棋子。
二、給出一些可以令人依循的放棋原則，並設計一個可以用於所有棋盤的通用放法。
三、找出一些獨目棋盤的所有放法。
四、改變黑棋的初始位置，探討將棋盤變型後，相關問題的答案與原棋盤的不同之處。
五、改變初始黑棋的數目（可爲 0），繼續探討棋盤的另一種變型，並比較與原獨目棋盤的不同之處。

參、研究設備及器材

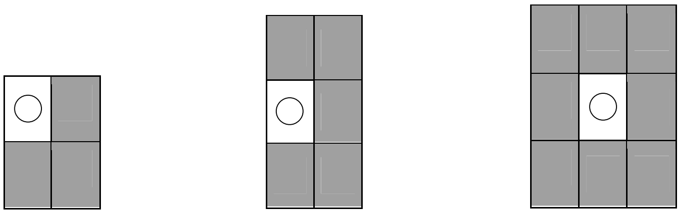
白紙、方格紙、筆、圍棋、圍棋板、電腦。

肆、研究過程與方法

名詞與符號定義

（一）名詞定義

1、相鄰方格：有共同的頂點的方格。如下圖，白色爲棋子，灰色方格即爲其相鄰方格。



2、有解棋盤：若存在一種放法，在棋子放滿棋盤後，能使得所有棋子都是白色棋子。

3、無解棋盤：若不是有解棋盤，則稱做無解棋盤。

4、棋盤解法：能使棋盤成爲有解棋盤的放法，也簡稱爲解法。

5、行與列：直排方格稱做「行」，由左到右分別爲第 1 行至最後 1 行。橫排方格稱做「列」，由上到下分別爲第 1 列至最後 1 列。

6、棋盤的同構性：在 2 棋盤剩餘空格中，若不同位置的方格的相鄰方格相同，則這 2 個棋盤剩下的空格顏色改變總次數相同。此時我們稱這 2 個棋盤同構，詳見 P.13、P.14。

（二）符號定義

1、$m\times n$ 棋盤：代表此獨目棋盤有 m 個直行，n 個橫列，也可簡記爲 $m\times n$。

2、（a，b）：代表 $m\times n$ 棋盤中第 a 行第 b 列的方格位置，其中 $1\leqq a\leqq m$，$1\leqq b\leqq n$。

例：

	1	2	3
1		○	
2			
3			

白棋在（2，1）

	1	2	3
1			
2	○		
3			

白棋在（1，2）

3、$[m\times n]$棋盤：代表此棋盤把獨目棋盤黑棋的初始位置改變，可視爲獨目棋盤的變型。

4、$[m\times n，j]$棋盤：代表此棋盤把獨目棋盤初始黑棋的數目改變（可爲 0），其中 j 即爲黑棋的數目，此棋盤可視爲獨目棋盤的另一種變型。其中$[m\times n，1]$棋盤可視爲$[m\times n]$棋盤。

5、$S(m\times n)$：$m\times n$ 有解棋盤的所有解法數，或稱做總解法數。若 m=1，則簡記爲 $S(n)$。

6、$S([m\times n])$：$[m\times n]$有解棋盤的所有解法數。若 m=1，則簡記爲 $S([n])$。

7、$S([m\times n，j])$：$[m\times n，j]$有解棋盤的所有解法數。若 m=1，則簡記爲 $S([n，j])$。

8、$n!$：$n!=1\times2\times\cdots\cdots\times n$。

9、$\sum_{k=1}^{n}a_k$ ：（1）$\sum$：讀做 *sigma*，「相加」的意思。（2）$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$ 。

一、$m\times n$ 有解棋盤

一開始我們放白棋時，就像是亂槍打鳥。$m\times n$ 棋盤有時有解，有時無解，而且也不知道

是什麼原因造成棋盤有解、無解。於是我們試著深入研究棋子顏色改變的原因，期望能幫助我們找到解題途徑。

（一）棋子顏色改變原理（之後簡稱為色變原理）

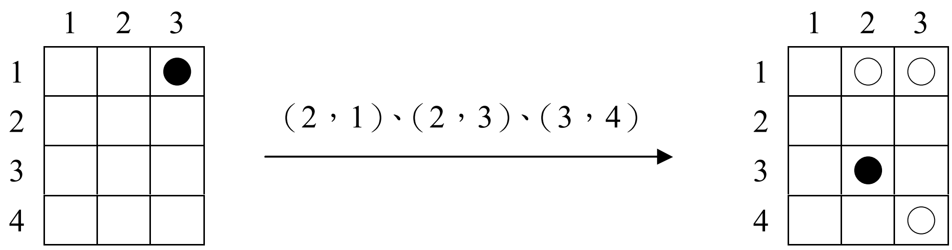
色變原理：棋子顏色改變的次數與放棋時該棋子周圍的空格數目相同。

證明：根據獨目棋盤的棋子放置規則，我們知道棋子顏色的改變是由相鄰棋子放入時改變的，所以放棋時棋子周圍的空格有幾格，則棋子顏色改變的次數就有多少次。

（二）放棋要點 1

因為白棋變色奇數次會變為黑棋；變色偶數次還是白棋。所以根據色變原理可知，**「每次放白棋時，它的周圍必須為偶數個空格，不然它最後一定會變成黑棋」**，我們將此稱為放棋要點 1。藉由此要點，可以幫助我們減少放棋的選擇，使得解法更有效率，如下例。

例：前 3 個棋子的放棋順序為（2，1）、（2，3）、（3，4），接下來第 4 個棋子只可以放在（1，1）、（1，3）、（1，4）、（3，2）其中一個位置，不可放在其它位置。



（三）$m \times n$ 有解棋盤的證明

藉由放棋要點 1，我們解出了不少小棋盤，也發現一些棋盤無論棋子怎麼放，都是無解的。從這些棋盤解法中，我們觀察到 $m \times n$ 棋盤是否為有解棋盤，似乎與所有棋子顏色改變總次數有關，於是我們著手證明哪些 $m \times n$ 棋盤為有解棋盤。

定理 1：$m \times n$ 為有解棋盤 $\Leftrightarrow$ $m \times n$ 獨目棋盤，其中 m、n 為一偶數，一奇數。

證明：

($\Rightarrow$)1. 棋盤的每一條內邊（方格的邊）為 2 個相鄰方格的共同邊，這一條邊即代表了 2 個棋子可發生一次顏色改變。而棋盤內部的每一個交點為 4 個方格的共同頂點，這一個交點即代表了 2 雙斜相鄰的棋子各發生一次顏色改變，所以共有兩次顏色改變。

因為 $m \times n$ 棋盤為 m 行 n 列，所以共有$(m-1)(n-1)$個交點，及$(m-1)\times n+(n-1)\times m$ 條邊。所以所有棋子顏色改變總次數為

$2(m-1)(n-1)+n(m-1)+m(n-1)=2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)$次。

2. 因為獨目棋盤一開始就有一個黑棋，變白色需要改變顏色奇數次，其他棋子在放入空格時是白色棋子，所以最後仍為自己需要改變顏色偶數次。故所有棋子顏色改變總次數為奇數次。因為 $m \times n$ 為有解棋盤，所以 $2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)$為奇數。

$\because$ $2(m-1)(n-1)$和 $2mn$ 為偶數

$\Rightarrow$ $m+n$ 為奇數

⇒ m 和 n 為一偶數，一奇數 (⇐)接著我們要確定所有 $m\times n$ 棋盤，其中 m、n 為一偶數，一奇數，確實都有解。所以我們設計了一個適用於所有棋盤的通用解法。證明於後。

二、$m\times n$ 有解棋盤的通用解法—單跳單連雙交連綜合解法

為了完成上述的定理，我們研究這些棋盤的解法是如何操作。要先說明的是，因為每次放的棋子數都是一顆，而且最後都要放滿棋盤，所以不會有次數最少的解法，故我們的目標是找出所有解法或者是讓人可以依循的解法。

（一）棋盤解法的簡易表示法

由於每次放棋時都要花時間畫黑白棋（改變顏色），會容易忘記畫（改）或不小心沒看到，很沒有效率。所以我們用數字 1、2、3、…、等，來代替白棋與白棋的放置順序。因為數字代表順序，所以數字大的棋子可以改變數字小的棋子的顏色。如果想知道在放棋過程中每個棋子的顏色，只需算出它周圍方格中有幾個數字比它大即可。

例：

	1	2
1	7	●
2	6	1
3	2	8
4	5	3
5	4	9

此棋盤解法的放棋順序為
（2，2）→（1，3）→（2，4）
→（1，5）→（1，4）→（1，2）
→（1，1）→（2，3）→（2，5）

（二）單行奇偶跳放法與單行連續放法

由於 $m\times n$ 棋盤太大，所以我們先從 $1\times n$（n 為偶數）與 $2\times n$（n 為奇數）研究起。

1、$1\times n$ 的解法－「單行奇偶跳放法」

$1\times n$ 的解法中，有奇數格與偶數格跳著放的規律，我們稱之為「單行奇偶跳放法」。

例：

1×4	1×6	1×8
●	●	●
2	3	4
1	1	1
3	4	5
	2	2
	5	6
		3
		7

第 1 步：將白棋依序從（1，3）、（1，5）、（1，7）放到（1，n−1）。 第 2 步：將白棋依序從（1，2）、（1，4）、（1，6）放到（1，n）。

證明：

在第 1 步裏，每次放白棋時，該白棋的周圍都是只有（1，$2k$）、（1，$2k$+2）這

2 個空格，其中 k=1、2、…、$\frac{n}{2}-1$，所以符合放棋要點 1。

第 1 步結束後，棋盤剩下（1，2k）的空格，其中 k=1、2、…、$\frac{n}{2}$。所以在第 2 步裏，每次放白棋時，該白棋的周圍都是 0 個空格，也符合放棋要點 1。

由以上可知，我們每次放白棋都符合放棋要點 1，而且最後確實放滿棋盤，所以「單行奇偶跳放法」可以是 1×n 的通用解法。

在這裡要特別說明的是，「單行奇偶跳放法」須依據放棋要點 1 來決定奇數格先放或者偶數格先放，意即奇數格與偶數格並無一定的先後放置順序。

2、2×n 的解法－「單行連續放法」與「單行奇偶跳放法」合併

2×n 的解法中，第 1 行有奇數格與偶數格跳著放的規律，第 2 行有連續放的規律，其中第 2 行的解法我們稱之爲「單行連續放法」。

例：

2×3

4	●
3	1
5	2

2×5

7	●
5	1
8	2
6	3
9	4

2×7

10	●
7	1
11	2
8	3
12	4
9	5
13	6

第 1 步：將白棋從（2，2）、（2，3）、（2，4）連續放到（2，n）。
第 2 步：使用「單行奇偶跳放法」將白棋放滿第 1 行。

證明：

在第 1 步裏，放最後 1 個白棋時，它周圍的空格是（1，n−1）、（1，n），而放其餘白棋時，該白棋的周圍都是（1，k−1）、（1，k）、（1，k+1）、（2，k+1）這 4 個空格，其中 k=2、3、…、n−1，所以在第 1 步裏每次放白棋都符合放棋要點 1。

第 1 步結束後，2×n 剩下[1×n，0]，我們可以先在（1，2k）放白棋，其中 k=1、2、…、$\frac{n-1}{2}$，然後再將白棋放滿剩餘的空格，此種放法即爲 1×n 的「單行奇偶跳放法」，只是在這裏是先放偶數格，故在第 2 步裏每次放白棋也符合放棋要點 1。

由以上可知，我們每次放白棋都符合放棋要點 1，而且最後確實放滿棋盤，所以「單行連續放法」與「單行奇偶跳放法」合併後可以是 2×n 的通用解法。

（三）雙行交叉連續放法

1、嘗試錯誤

從 2×n（n 爲奇數）解法中，我們觀察到棋盤在第 1 行全空的狀況下，第 2 行可以先放滿。這個發現使我們有一種想法，我們把 3×n 棋盤拆開來看。從第 3 行開始，我們一次放 1 行，但馬上又發現每次放 1 行是不行的。因爲如果使用單行奇偶跳放法放滿第 3 行是不對的（如下例），會發現放的格子會錯誤。又如果使用單行連續放

法，依據放棋要點 1，會沒有位置放棋。所以我們再往左邊加 1 行，研究 4×n（n 爲奇數）的解法。

例：

●
2
1
3

一樣的位置、順序放過去，會發現 1 就錯了

→

		●
		1

2、4×n（n 為奇數）的解法

我們沿用之前的想法，把 4×n 拆成[3×n，0]與 1×n。我們先用單行連續放法放滿 1×n，所以接下來思考[3×n，0]的解法。

（1）[3×n，0]（n 爲奇數）的解法－「雙行交叉連續放法」與「單行奇偶跳放法」合併

因爲我們想在第 1 行使用「單行奇偶跳放法」，所以思考可以放滿 2 行的方法。經過一番試驗後，我們得到了[3×n，0]的解法。

例：

3×3

8	6	3
7	1	4
9	5	2

3×5

13	10	5
11	1	6
14	7	2
12	8	3
15	9	4

第 1 步：在（2，2）放入第 1 個白棋。
第 2 步：往右下一格（3，3）放第 2 個白棋，接著連續放到（3，n）。
第 3 步：從（3，1）放到（3，2），再往左下一格（2，3）放白棋，之後連續放到（2，n），接著在（2，1） 放白棋。
第 4 步：使用「單行奇偶跳放法」從（1，2）開始放白棋，直到放滿第 1 行。

我們把第 1 步到第 3 步放滿 2 行的放法稱做「雙行交叉連續放法」。

證明：

在第 1 步裏，顯然（2，2）的周圍有 8 個空格，所以在（2，2）放白棋符合放棋要點 1。

在第 2 步裏，（3，3）的周圍有（3，2）、（2，3）、（2，4）、（3，4）這 4 個空格，所以在（3，3）放白棋符合放棋要點 1。

從（3，4）～（3，n−1）放白棋時，該白棋的周圍都是（2，k−1）、（2，k）、（2，k+1）、（3，k+1）這 4 個空格，其中 k=4、5、⋯、n−1，所以從（3，4）～（3，n−1）每次放白棋都符合放棋要點 1。另外，在（3，n）放白棋時它的周圍是（2，n−1）、（2，n）這 2 個空格，所以在（3，n）放白棋也符合放棋要點 1。

在第 3 步裏，（3，1）的周圍有（2，1）、（3，2）這 2 個空格，所以在（3，1）放白棋符合放棋要點 1。另外，（3，2）的周圍有（2，1）、（2，3）這 2 個空格，所以在（3，2）放白棋符合放棋要點 1。

從（2，3）～（2，n−1）放白棋時，該白棋的周圍都是（1，k−1）、（1，k）、（1，k+1）、（2，k+1）這 4 個空格，其中 k=3、4、⋯、n−1，所以從（2，3）～（2，n−1）每次放白棋都符合放棋要點 1。

顯然（2，1）的周圍有（1，1）、（1，2）這 2 個空格，所以在（2，1）放白棋符合放棋要點 1。

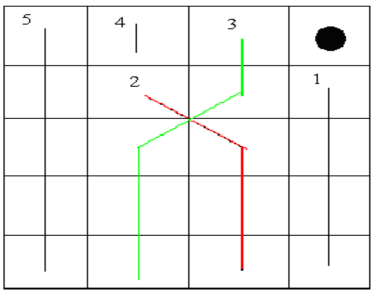
前 3 步結束後，3×n 剩下[1×n，0]，所以我們使用「單行奇偶跳放法」直到放滿第 1 行，故在第 4 步裏每次放白棋也符合放棋要點 1。

由以上可知，我們每次放白棋都符合放棋要點 1，而且最後確實放滿棋盤，所以「雙行交叉連續放法」與「單行奇偶跳放法」合併後可以是[3×n，0]（n 為奇數）的通用解法。

（2）4×n（n 為奇數）的解法－「單跳單連雙交連綜合解法」

接下來我們把[3×n，0]與 1×n 的解法合併，這就成了 4×n（n 為奇數）的解法。因為在這 4 行裏，我們同時使用了三種放法，取其方法精義，我們稱之為「單跳單連雙交連綜合解法」。我們舉例如下，圖中的數字是解法的順序。

例：　4×n（n 為奇數）



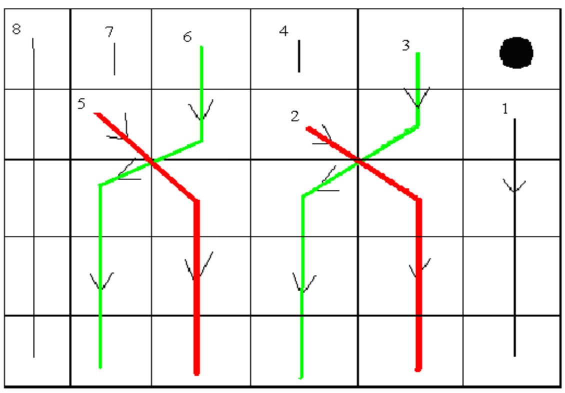
1 為「單行連續放法」。
2~4 為「雙行交叉連續放」法。
5 為「單行奇偶跳放法」。

3、m×n（m≧4 且為偶數）的解法

因為「雙行交叉連續放法」可以放滿 2 行，而且 m×n 的行數可寫成 1+2d +1。所以「雙行交叉連續放法」可以重複使用於 m×n（m≧4 且為偶數）。

第 1 步：使用「單行連續放法」放滿第 m 行。
第 2 步：重複使用「雙行交叉連續放法」將白棋由右往左一直放滿到第 2 行。
第 3 步：使用「單行奇偶跳放法」放滿第 1 行。

例：　6×n（n 為奇數）



1 為「單行連續放法」。
2~4 和 5~7 為「雙行交叉連續放法」。
8 為「單行奇偶跳放法」。

（四）$m×n$ 有解棋盤的對稱性

$m×n$ 棋盤只要先翻轉 180 度，再順時針旋轉 90 度，即可變為 $n×m$ 棋盤。此時只要將 $m×n$ 的（a，b）對應到 $n×m$ 的（b，a），$m×n$ 有解棋盤的解法就是 $n×m$ 有解棋盤的解法，可得 S($m×n$)=S($n×m$)，因此我們只須討論 $m×n$ 有解棋盤即可。我們將這個性質稱為 $m×n$ 有解棋盤的對稱性：若 2 個棋盤中，將其中 1 個棋盤經過數次的旋轉或翻轉，能變成另 1 個棋盤，則 S($m×n$)=S($n×m$)，此時我們稱這 2 個棋盤是對稱的。

例：

2×3

4	●
3	1
2	5

翻轉180度 →

●	4
1	3
5	2

順時針旋轉90度 →

3×2

5	1	●
2	3	4

（五）每種棋盤所使用的通用解法

最後，我們把每種棋盤所使用的通用解法整理如下。

1、1×n（n 為偶數）：使用「單行奇偶跳放法」。

2、2×n（n 為奇數）：使用「單行連續放法」和「單行奇偶跳放法」。

3、$m×n$（m≧4 且為偶數，n≧3 且為奇數）：使用「單跳單連雙交連綜合解法」。

4、$n×m$（n≧3 且為奇數，m≧4 且為偶數）：根據 $m×n$ 有解棋盤的對稱性，$n×m$ 的解法可從 $m×n$ 的解法得到。

討論完通用解法後，我們想知道所有棋盤的所有解法有多少，所以我們開始計算所有解法數。

三、S($m×n$)的值

（一）S(1×n)的計算，n 為偶數

在這裡我們依據放棋要點 1，來分析白棋的所有可能位置。

1、1×2　　S(2)=1

1×2 只須放入一個白棋即可，故只有一種解法。

2、1×4　　S(4)=2

1×4 的所有解法很容易就可以找出來，詳列如下。

●
2
1
3

●
3
1
2

3、1×6　　S(6)=16

第 1 個白棋有 3 個地方可放，詳列如下。在情況(2)中，第 2 個棋子無位置可放，所以無解。另外，將情況(1)的 1×5 空白格子旋轉 180 度後，就變成了情況(3)的 1×5 空白格子。所以只要將(1)的（1，k）對應到(3)的（1，8−k），$2 \leqq k \leqq 6$，(1)的解法就是(3)的解法。所以我們只須計算情況(1)的所有解法後，再乘以 2 就是 S(6)。

(1)	(2)	(3)
●	●	●
1		
	1	
		1

接下來我們用樹狀圖計算情況(1)的所有解法，在此省略樹狀圖的過程，並將最後的解法詳列如下，最後得出解法總共有 8 種，所以 S(6)=16。

●	●	●	●	●	●	●	●
2	2	3	3	4	5	4	5
1	1	1	1	1	1	1	1
4	5	4	5	3	3	5	4
3	3	2	2	2	2	2	2
5	4	5	4	5	4	3	3

4、放棋要點 2

在這裡我們發現如果只用放棋要點 1 來放白棋，會有如同情況(2)無解的情形出現。而且此現象不只在 1×6 出現，在其他棋盤也會出現，所以我們針對這個現象深入研究。最後我們發現放白棋時，要注意「**不能剩分散的偶數對兩格相鄰**」（如下例），否則之後無位置可放白棋。但不可能剩奇數對兩格相鄰，因為原先總改變次數為偶數，用白棋放入時，在不違反放棋要點 1 下，一定剩偶數次顏色改變。所以我們只要「**放的時候盡量靠在一起，不要分成兩個以上區塊**」，就比較不會出現無解的情形，我們把這個結果寫成放棋要點 2。

例：

5	9			1	●
	4	7	8	2	
	6			3	

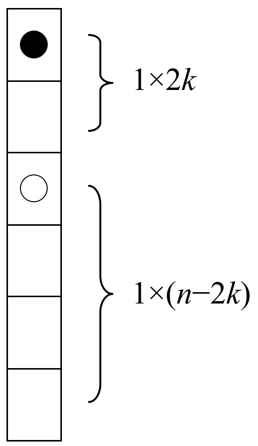
5、$1 \times n$，$n \geqq 4$

在研究 S(n)，$n \geq 8$ 時，我們很快發現 S(n)的值突然增加很多，用樹狀圖找 S(n)已經是很沒效率，所以我們開始思考用其他方式計算 S(n)。

（1）兩子棋盤合併法

若將第 1 個白棋放在第偶數格空格，會形成 $1\times n_1$ 與 $1\times n_2$（n_1、n_2 爲奇數）的 2 個子棋盤。依據定理 1，此 2 棋盤爲無解棋盤，所以第 1 個白棋只能放在第奇數格空格。故第 1 個白棋放入後，會把 $1\times n$ 分成 $1\times 2k$ 和 $1\times(n-2k)$兩個子棋盤區塊，其中 $1\leqq k\leqq \frac{n}{2}-1$，$k$ 爲整數。而其中第 1 個白棋在 $1\times(n-2k)$子棋盤的第 1 格。

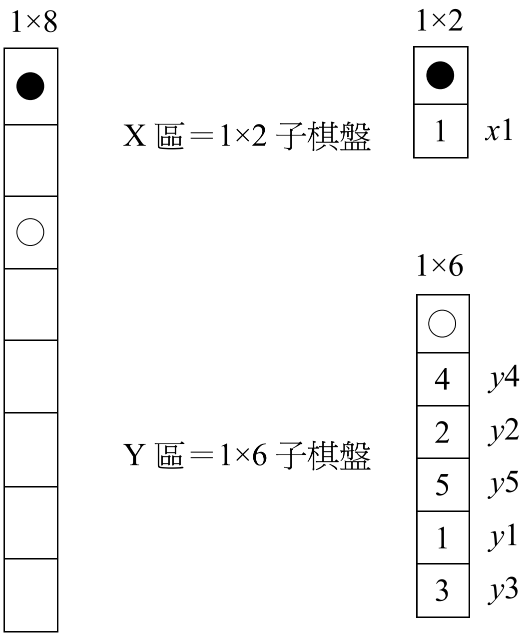
例：$n=6$，$k=1$。



我們假設白棋上方的子棋盤區塊＝X 區，下方的子棋盤區塊＝Y 區。顯而易見，在放完第 1 個白棋後，從第 2 個白棋開始，只是放 X 區、Y 區兩區擇一區放置。再者，第 1 個白棋在完成其中一區的解法後會變成黑棋，但在完成另一區的解法後，最後會變爲白棋。

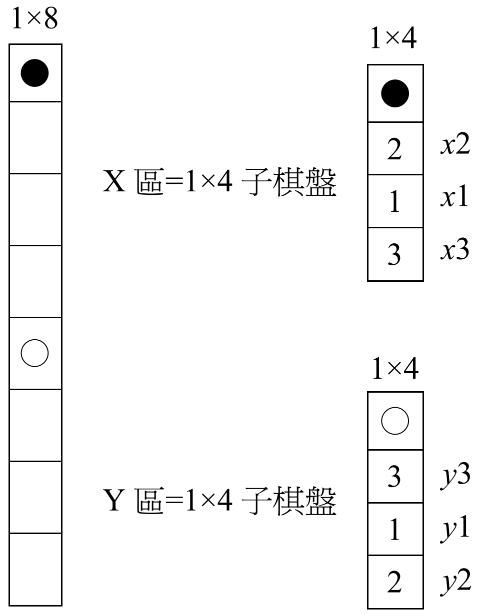
所以除了第 1 個白棋，在 X 區每次放白棋時並不會改變 Y 區的所有棋子的現有顏色。同樣的，在 Y 區每次放白棋時也不會改變 X 區所有棋子的現有顏色，所以 X、Y 兩區是互不影響的兩區。因此我們可以把兩區各自的一種解法合併成多種 $1\times n$ 解法。

例 1：



我們把 X 區的 1 改爲 $x1$，Y 區的 1～6 改爲 $y1$～$y6$，第一個白棋用 a 表示。合併後 1×8 的解法可以是 $a\ y1\ y2\ y3\ x1\ y4\ y5$，$a\ y1\ x1\ y2\ y3\ y4\ y5$，$a\ y1\ y2\ y3\ y4\ y5\ x1$，…等。

例 2：



我們把 X 區的 1～3 改爲 $x1$～$x3$，Y 區的 1～3 改爲 $y1$～$y3$，第一個白棋用 a 表示。合併後 1×8 的解法可是 $a\ x1\ y1\ x2\ y2\ x3\ y3$，$a\ x1\ x2\ y1\ x3\ y2\ y3$，$a\ y1\ y2\ x1\ x2\ y3\ x3$，…等。

由以上說明，我們可以確定 1×n 棋盤的所有解法可以透過兩子棋盤合併法找出來，接著我們便開始著手計算所有解法的數量。

（2）X 區、Y 區合併的解法數

爲了計算排列數目，我們自己做了數字卡，一張就寫 1 個數字，數字相同就稱爲一類，我們假設共有 n 類。

① 我們假設每類都只有 1 個，共有 n 個。

（i）n=1　　1 種。

（ii）n=2　　2 種。

（iii）n=3

我們在排列後，發現有 6 種，詳列如右，123、213、132、231、312、321。

（iv）n=4

我們在排列後，發現有 24 種。

（v）n=5

有了前面的經驗，我們發現這可以用乘法算出，第 1 張有 5 種選擇，第 2 張有 4 種選擇，第 3 張有 3 種選擇，第 4 張有 2 種選擇，第 5 張有 1 種選擇，可以算出有 5×4×3×2×1=120 種。

（vi）$n > 5$

由以上可知，有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1$ 種。

② 因為只有 X、Y 兩區，所以我們假設有 2 類，一類有 x 個相同，另一類有 y 個相同，總共有 n 個。

（i）$n=2$，$x=1$，$y=1$　有 12、21 共 2 種。

（ii）$n=3$，$x=1$，$y=2$　有 122、212、221 共 3 種。

（iii）$n=4$，$x=1$，$y=3$　有 1222、2122、2212、2221 共 4 種。

（iv）$n=4$，$x=2$，$y=2$　有 1122、1212、1221、2112、2121、2211 共 6 種。

③ 假設有 k 類，總共有 n 個，第一類的有 p_1 個相同，第二類有 p_2 個相同，…，第 k 類有 p_k 個相同。

有了以上的經驗之後，我們開始研究算法。

（i）$n=3$，$k=2$，$p_1=2$，$p_2=1$。

如果 3 個完全不一樣有 6 種，但因為有 2 個一樣，2 個的排列有 2×1 種，所以多乘 2×1 種，所以除以 2×1。

例：原來全不一樣，為 123、213、132、231、312、321。

假設 1 和 2 一樣，以 1 來代替，則變為 113、113、131、131、311、311，實際上只有 3 種。

（ii）$n=4$，$k=2$，$p_1=3$，$p_2=1$。

如果 4 個完全不一樣有 24 種，但有 3 個一樣，除以 $3\times2\times1$，最後算出 4 種。

（iii）$n=5$，$k=3$，$p_1=2$，$p_2=2$，$p_3=1$。

如果 5 個完全不一樣有 120 種，但 p_1 有 2 個一樣，p_2 有 2 個一樣，p_3 有 1 個一樣，除以 $2\times1\times2\times1\times1$，最後算出 30 種。

（iv）一般式

由以上經驗，我們可得一般式為 $\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1}{p_1\times\cdots\times1\times p_2\times\cdots\times1\times\cdots\times p_k\times\cdots\times1}$，後來老師看了之後，說可以用高中的「階乘」符號「!」來簡化式子，故此一般式可改為 $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots p_k!}$，而這就是高中課程所說的不盡相異物的排列數。

有了這個排列觀念後，我們開始計算 S(n)。

（3）S(n)的計算式

為了計算 X 區、Y 區合併後的解法數，我們可以把問題想成有$(2k-1)$個相同的 x 棋與$(n-2k-1)$相同的 y 棋任意排列。如此一來，每一種排列就是一種解法，而其排列的順序就是放 X、Y 區的順序。要注意的是「棋子不論放哪一區，要按照該區的解法順序來放棋」。而兩子棋盤合併法也可以用在 1×4 與 1×6，所以

$$\mathrm{S}(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{S}(2k)\mathrm{S}(n-2k)\frac{(n-2)!}{(2k-1)!(n-2k-1)!}\text{，}n\geqq4\text{。}$$

（4）計算 S(8)

$$S(8)=S(2)S(6)\frac{6!}{1!5!}+S(4)S(4)\frac{6!}{3!3!}+S(6)S(2)\frac{6!}{5!1!}=1\times16\times6+2\times2\times20+16\times1\times6=272$$

由此看來，S(n)增加的速度比 n 增加的速度快很多。其它 S(n)，$n \geqq 10$，同樣也可用此算式計算出來。

（二）S(2×n)的計算，n 爲奇數

1、2×1　　S(2×1)＝1

此棋盤爲 1×2 棋盤的對稱型，故 S(2×1)＝1。

2、2×3　　S(2×3)＝8

詳列如下。

4	●
3	1
5	2

5	●
3	1
4	2

4	●
3	1
2	5

5	●
3	1
2	4

4	●
1	3
2	5

5	●
1	3
2	4

4	●
1	3
5	2

5	●
1	3
4	2

3、棋盤的同構性

我們觀察 2×3 的 8 種解法時，發現有些棋盤剩餘空格的排列形狀雖然不同，但是所有的解法是一樣的。經過一番研究，我們得到一個結論。

（1）棋盤同構性的意義

在 2 棋盤剩餘空格中，若不同位置的方格的相鄰方格相同，則這 2 個棋盤剩下的空格顏色改變總次數相同。此時只需將這 2 個棋盤的不同位置的空格互相對應，則其中一個棋盤的解法可以是另一個棋盤的解法，因此 2 個棋盤的總解法數相等，此時我們稱這 2 個棋盤同構。

（2）舉例說明

我們舉 2×3 的例子，並詳細解說如下。

例 1：

	●
1	

	●
	1

例 2：

	●
	1
2	

	●
	1
	2

在例 1，2 個棋盤的剩餘空格中，只有左棋盤的（2，2）與右棋盤的（1，2）不相同，其餘方格位置皆相同。其中（1，1）與（2，2）或（1，2）相鄰，雖然（2，2）與（1，2）不同，但都是只能影響 1 次顏色改變。同樣的，（1，3）和（2，3）這 2 個方格與（2，2）或（1，2）相鄰，雖然（2，2）與（1，2）不同，但都是只能影響 2 次顏色改變。

由以上可知，雖然（2，2）與（1，2）是不同位置的方格，但對 2 棋盤剩下的空格顏色改變總次數並無影響。這時只要將左棋盤的（2，2）對應到右棋盤的（1，2），左棋盤的解法就能是右棋盤的解法，故這 2 個棋盤的總解法數相等。此時我們說這 2 個棋盤剩餘空格的結構相同，並將這個特性稱做棋盤的同構性。

同理，例 2 中的 2 棋盤也是同構的。只要將左棋盤的（2，3）對應到右棋盤的（1，3），左棋盤的解法就能是右棋盤的解法，所以這 2 個棋盤的所有解法數相等。應用棋盤的同構性，我們來重新計算 S(2×3)。

（3）重新計算 S(2×3)

因爲例 1 的 2 棋盤同構，所以我們只須計算其中 1 個棋盤的所有解法數。又例 2 的 2 棋盤同構，我們也只須計算其中 1 個棋盤的所有解法數。而我們可以很容易算出例 2 其中 1 個棋盤的所有解法數等於 2，所以 S(2×3)＝2×2×2＝8。

在計算 S(2×3)時，我們對棋盤的同構性的感受不深，但對於接下來 S(2×5)的計算，棋盤的同構性對我們有很大的幫助。

4、2×5　　S(2×5)＝608

在算 S(2×5)不久後，我們發現只用數狀圖找 S(2×5)很花工夫。所以應用棋盤的同構性來解題，最後我們用樹狀圖配合棋盤的同構性來計算 S(2×5)，並把計算過程全部附在附件一（在附件 P.1）。

5、放棋要點 3

在計算 S(2×5)時，我們發現在 A 類棋盤（在附件一）之後，若只根據放棋要點 1 來放棋，也會出現一種情形是無解的（如圖一）。而且這個現象也會出現在其他棋盤，所以我們又針對此現象做探討。最後我們發現在放棋子時「**不能空出[2×*n*，0]的矩形**」（如圖二）。之前放棋要點 2 提過放白棋時，盡量要靠在一起放，不過這樣可能造成[2×*n*，0]的空格。所以當快剩下 2 行時，跳一格放就好（如圖三）。所以我們把這個結果寫成放棋要點 3。

	●
3	1
4	2

(圖一)

		○	○	○
		○	○	○
		○	○	○
		○	○	○

(圖二)

		○	○	○
		○	○	○
		○	○	○
	○		○	○

(圖三)

6、2×*n*，*n*≧3

我們接著計算 S(2×7)，但不久之後，我們發現只用樹狀圖、同構性與對稱性找 S(2×7)很費工夫。所以我們再次深入研究 2×*n* 棋盤解法的特性，以期能解決問題。

（1）2×*n* 解法的棋子放置順序性質

我們研究解法時，若先不考慮同構性，發現兩行間一些白棋的放置順序有絕對的先後次序。

① （2，t+1）必須在（2，t）放入後，才能放入白棋，$2 \leqq t \leqq n-1$。

因爲（2，t+1）周圍本來爲奇數格空格，但在（2，t）放入後，周圍空格數變成偶數格，這樣就能擺放棋子了。

② （1，2u）必須在（2，2u）、（2，2u+1）放滿後，才能放入白棋，$1 \leqq u \leqq \dfrac{n-1}{2}$。

因爲在（2，2u）放完後，（1，2u）周圍空格數變成奇數格，必須等到（2，2u+1）放了之後，（1，2u）周圍空格數才會變回偶數格。

③ （1，2u+1）必須在（1，2u）、（1，2u+2）放滿後，才能放入白棋，$1 \leqq u \leqq \dfrac{n-1}{2}$。

若只有（1，2u）、（1，2u+2）其中一格放棋，（1，2u+1）周圍只有 1 格空格。當兩格都放滿後，（1，2u+1）周圍空格數變爲 0，此時（1，2u+1）就可放棋了。

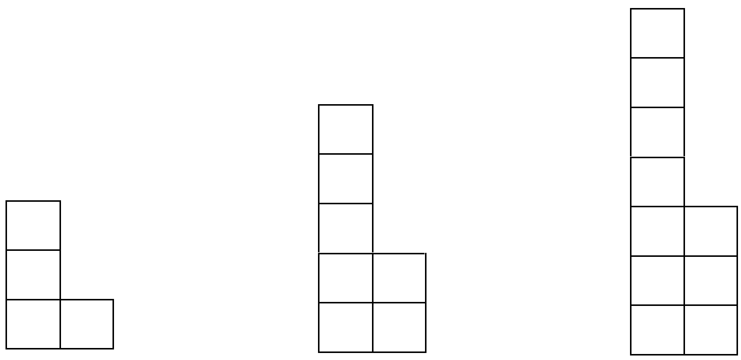
爲計算 S(2×n)，我們定義一個新的棋盤符號。

（2）L(r，s)（r＞s，且 r 爲奇數）

L(r，s)代表此棋盤有 2 行，第 1 行爲[1×r，0]；第 2 行爲[1×s，0]。

例：① L(5，4)＝2×5 的空格。

② 以下由左至右分別爲 L(3，1)、L(5，2)與 L(7，3)。



（3）S(L(r，s))的計算

① S(L(3，1))

很容易可以計算出 S(L(3，1))＝4。另外，S(L(3，1))爲 S(L(r，s))中最小的值。

② S(L(r，s))

從（1）的 ① 與 ② ，我們研究出計算 S(L(r，s))的方式。因爲第 1 個白棋可以放在（1，2）、（1，4）、⋯、（1，2w）、（1，$r-s+1$）、（2，$r-s+1$），其中 $w = \dfrac{r-s-1}{2}$ 的整數部份。所以

$$\mathrm{S}(\mathrm{L}(r，s))=\sum_{k=1}^{w}\mathrm{S}([2k-1，0])\mathrm{S}(\mathrm{L}(r-2k，s))\frac{(r+s-1)!}{(2k-1)!(r+s-2k)!}+2\mathrm{S}(\mathrm{L}(r，s-1))。$$

（4）S(2×n)的計算

① 由（3）② 可知，$\mathrm{S}(2\times n)=\mathrm{S}(\mathrm{L}(n，n-1))=2\mathrm{S}(\mathrm{L}(n，n-2))=4\mathrm{S}(\mathrm{L}(n，n-3))$

$$=4〔\mathrm{S}([1，0])\mathrm{S}(\mathrm{L}(n-2，n-3))\frac{(2n-4)!}{1!(2n-5)!}+2\mathrm{S}(\mathrm{L}(n，n-4))〕$$

$$=\cdots\cdots$$

接下來一直使用 S(L(r，s))計算方式直到出現 S(L(3，1))爲止。

② 計算 S(2×7)的值

我們用（4）① 的方式來計算 S(2×7)，詳見附件二（在附件 P.5）。

討論完一些棋盤的所有解法數後，我們想知道如果改變黑棋的初始位置，相關問題的答案有沒有與原棋盤不同之處。所以我們又開始研究獨目棋盤的變型－[m×n]。

四、m×n 棋盤的變型[m×n]—改變黑棋的初始位置

（一）哪些[m×n]棋盤爲有解棋盤

因爲[m×n]棋盤 m×n 棋盤都是 1 個黑棋，只是初始位置不同，所以我們推測[m×n]棋盤與 m×n 棋盤有類似的定理。

定理 2：[m×n]爲有解棋盤$\Rightarrow$[m×n]棋盤，其中 m、n 爲一偶數，一奇數。
證明：與之前 m×n 有解棋盤的證明相同。

要注意的是，這個定理的逆向推論並不成立，主要原因是：依據色變原理，黑棋周圍必須有奇數個空格，最後才能變白棋。如果是偶數個空格，最後還是黑棋。所以我們要先檢驗黑棋的周圍是不是有奇數個空格，經過逐一檢驗後，對於每種棋盤黑棋可放的位置，我們詳述如下。

1、[1×n]：只能放在（1，1）和（1，n）。
2、[2×n]：任一方格皆可放。
3、[m×n]（m，n≧3）：只能放在最外圍一圈的方格，即（1，1）～（m，1），（m，1）～（m，n），（m，n）～（1，n），（1，n）～（1，1）。

接著我們要確定上述 3 類棋盤都有解，因此我們對每類棋盤設計了一個通用解法。

（二）[m×n]有解棋盤的通用解法

我們先把原棋盤的「單跳單連雙交連綜合解法」拿來試用，結果發現基本上可使

用，但用在一些棋盤時，須把原方法做些變型。

1、[1×n]：可使用 1×n 的通用解法。

證明：因為黑棋只能放在（1，1）和（1，n），而將其中一個棋盤旋轉 180 度之後即為另 1 個棋盤，所以[1×n]可使用 1×n 的通用解法。

2、[2×n]：基本上可使用 2×n 的通用解法。但用在一些棋盤時，須將原解法做些變型。

（1）黑棋放在（1，1）、（2，1）、（1，n）、（2，n）：可完全使用 2×n 的通用解法。

證明：黑棋放在這 4 個位置時，這 4 個棋盤彼此都可經過旋轉或翻轉得到，所以此時可完全使用 2×n 的通用解法。

（2）黑棋放在（1，1）～（1，n−1）、（2，1）～（2，n−1）

例：

2×7

10	2
7	1
11	●
8	3
12	4
9	5
13	6

2×7

10	6
7	5
11	4
8	●
12	1
9	2
13	3

第 1 步：使用「單行連續放法」從黑棋的上方和下方分別連續放滿第 2 行。
第 2 步：使用「單行奇偶跳放法」將白棋放滿第 1 行。

證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（一）（在附件 P.6）。

3、[m×n]（m、n≧4）：因為黑棋能放在最外圍一圈的方格，而且 m、n 為一偶數，一奇數，所以要分成 2 類。在此假設 m 為奇數、n 為偶數。

（1）黑棋在第 1 列與第 n 列的格子上

基本上可使用原棋盤的「單跳單連雙交連綜合解法」。但須將原解法做些變型。

例：

5×6

2	1	●	3	4
27	24	19	14	9
25	15	20	5	10
28	21	16	11	6
26	22	17	12	7
29	23	18	13	8

第 1 步：使用「單行連續放法」將白棋從黑棋的左方和右方分別連續放滿第 1 列或第 n 列。
第 2 步：使用「雙行交叉連續放法」將白棋放滿第 2 行到第 m 行的剩餘空格。
第 3 步：使用「單行奇偶跳放法」放滿第 1 行的剩餘空格。

證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（二）。

在敘述第 2 種類型的通用解法之前，我們先詳述[4×n，0]的通用解法。

（2）[4×n，0]的通用解法－單跳單連雙交連綜合解法的變型

如果使用「雙行交叉連續放法」後會剩下[2×n，0]，接下來就無位置可放白棋，所以我們必須把原解法做些變型。

例：

4×6

17	20	24	6
21	12	1	7
18	13	8	2
22	14	9	3
19	15	10	4
23	16	11	5

第 1 步：使用「雙行交叉連續放法」將白棋放滿第 3、4 行，但須空下（3，1）。
第 2 步：使用「單行連續放法」將白棋從（2，2）放到（2，n），空下（2，1）。
第 3 步：使用「單行奇偶跳放法」將白棋從（1，1）每次跳一格放到（1，n−1），剩下的（1，2）、（1，4）、…、（1，n）先空著不放。
第 4 步：將白棋放在（2，1）後，繼續使用「單行奇偶跳放法」將剩下的（1，2）、（1，4）、…、（1，n）放滿。
第 5 步：放最後的（3，1）。

證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（三）。

（3）黑棋在（1，2）、…、（1，n−1）與（m，2）、…、（m，n−1）的格子上

在這裏我們要依 m 的數值來分為 3 類，因為解法稍微不同。

① m=3

如果使用「單行連續放法」放滿有黑棋的那一行後會剩下[2×n，0]，接下來就無位置可放白棋，所以我們必須把原解法做些變型。

例：

3×6

10	13	17
14	5	4
11	6	●
15	7	1
12	8	2
16	9	3

第 1 步：使用「單行連續放法」將白棋從黑棋的上方和下方分別連續放在第 3 行，但須空下（3，1）。
第 2 步到第 5 步：與[4×n，0]通用解法的第 2 步到第 5 步相同。

證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（四）。

② m=5

如果使用「單行連續放法」放滿有黑棋的那一行後會剩下[4×n，0]，故接下來只需使用[4×n，0]的通用解法即可。

第 1 步：使用「單行連續放法」將白棋從黑棋的上方和下方分別連續放滿第 5 行。 第 2 步：使用[4×n，0]的通用解法即可解出棋盤。

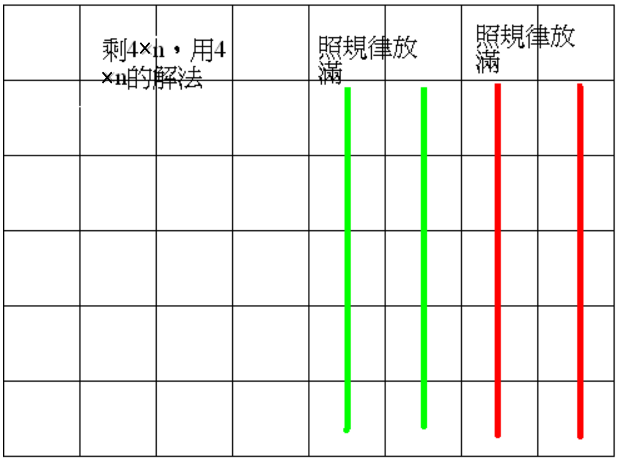
證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（五）。

③ $m>5$

如果使用「單行連續放法」放滿有黑棋的那一行後會剩下[(m−1)×n，0]，其中 m−1 爲偶數且大於 4，所以我們必須把原解法做些變型。

第 1 步：使用「單行連續放法」將白棋從黑棋的上方和下方分別連續放滿第 m 行。 第 2 步：重複使用「雙行交叉連續放法」將白棋由右往左一直放滿到第 5 行。 第 3 步：使用[4×n，0]的通用解法即可解出棋盤。

圖示[(m−1)×n，0]的解法如下。



證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（六）。

（三）S([m×n])的值

1、[1×n]　　S([n])＝0 or S(n)

（1）放在（1，2）～（1，n−1）　　S([n])＝0

黑棋放在這些位置時，此棋盤無解，因此 S([n])=0。

（2）放在（1，1）和（1，n）　　S([n])＝S(n)

黑棋放在這 2 個位置時，將其中一個棋盤旋轉 180 度之後即爲另 1 個棋盤，而且此 2 棋盤皆爲獨目棋盤，因此 S([n])=S(n)。

2、[2×3]　　S([2×3])＝8 or 16

（1）放在（1，1）、（2，1）、（1，3）、（2，3）　　S([2×3])＝8

黑棋放在這 4 個位置時，棋盤經過翻轉 180 度或旋轉 90 度後，其實是同一個棋盤，即這 4 個棋盤是對稱的。所以 S([2×3])＝S(2×3)＝8。

（2）放在（1，2）、（2，2）　　S([2×3])＝16

黑棋放在這 2 個位置時，棋盤經過旋轉 180 度後，其實是同一個棋盤，即這 2 個棋盤是對稱的，再利用棋盤的同構性，可計算出 S([2×3])=2×2×4=16。

3、[2×5]　　S([2×5])＝608 or 2048 or 2880

（1）放在（1，1）、（2，1）、（1，5）、（2，5）　　S([2×5])＝608

與 2、（1）相同理由。所以 S([2×5])＝S(2×5)＝608。

（2）放在（1，2）、（2，2）、（1，4）、（2，4）　　S([2×5])＝2048

與 2、（1）相同理由。但須利用棋盤的同構性來計算 S([2×5])，詳見附件四（在附件 P.8）。

（3）放在（1，3）、（2，3）　　S([2×5])＝2880

與 2、（2）相同理由。但須利用棋盤同的構性來計算 S([2×5])，詳見附件五（在附件 P.11）。

五、m×n 棋盤的另一種變型[m×n，j]—改變初始黑棋的數目

我們改變黑棋的初始位置之後，接著又去思考另一個問題。如果初始黑棋的數目不為 1 的話，相關問題的答案有沒有與原棋盤不同之處？所以我們又開始研究獨目棋盤的另一種變型－[m×n，j]。

（一）黑子數目為 0

1、[m×n，0]有解棋盤與無解棋盤

藉由 m×n 有解棋盤的證明，我們推測[m×n，0]有解棋盤的特性，得到以下定理。

定理 3：[m×n，0]有解棋盤$\Rightarrow$[m×n，0]棋盤，其中 m、n 同為偶數或同為奇數。

證明：由之前 m×n 有解棋盤的證明中，可得到所有棋子改變總次數為 $2(m-1)(n-1)+n(m-1)+m(n-1)=2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)$。又因為[$m$×$n$，0]棋盤並無黑棋，所以最後所有棋子改變總次數為偶數，故 $2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)$ 為偶數。

$\because$ $2(m-1)(n-1)$和 $2mn$ 為偶數

$\Rightarrow$ $m+n$ 為偶數

$\Rightarrow$ m、n 同為偶數或同為奇數

要注意的是，這個定理的逆向推論並不成立，主要原因是：依據色變原理，白棋周圍必須有偶數個空格，最後才能變爲白棋。如果是奇數個空格，最後會變爲黑棋。所以我們下第 1 個白棋時，要先檢驗是不是有空格可以放棋。經過一番檢驗後，只有[2×n，0]棋盤無白棋可放的位置，其它[m×n，0]棋盤皆有位置可放白棋。

接著我們要確定除了[2×n，0]外，其餘棋盤都有解，因此我們對每類棋盤設計了一個通用解法。

2、[m×n，0]有解棋盤的通用解法

（1）[m×n，0]（m、n 同爲奇數）

在 P.6 的 m×n 有解棋盤的「雙行交叉連續放法」中 2、（1）有提到[3×n，0]（n 爲奇數）的解法，所以[m×n，0]（m、n 同爲奇數）的通用解法只需把之前的方法加以延伸即可。

第 1 步：重複使用 m×n 有解棋盤的「雙行交叉連續放法」，將白棋從由右往左一直放滿到第 2 行。 第 2 步：最後使用 m×n 有解棋盤的「單行奇偶跳放法」從（1，2）開始放白棋，直到放滿第 1 行。

證明：與之前證明方式相同，詳見附件三（七）。

（2）[m×n，0]（m、n≠2，且同爲偶數）

在 P.19 的[m×n]有解棋盤的通用解法中的 3、（3）③ 有提到過[(m−1)×n，0]（m−1，n 同爲偶數）的通用解法，所以[m×n，0]（m、n 同爲偶數）的通用解法只需把之前的方法直接使用即可。

3、S([m×n，0])的值

（1）[1×n，0]（n 爲奇數）：

因爲將 1×n（n 爲偶數）去掉有黑棋的那一格，就變成[1×(n−1)，0]，此時只要將 1×n 的（1，k）對應到[1×(n−1)，0]的（1，k −1），k＝2、3、⋯、n，則 1×n 的解法就是[1×(n−1)，0]的解法。所以 S([n，0])＝S(n+1)。

（2）[2×n，0]（n 爲偶數）：此時無第 1 個白棋可放的位置，故 S([2×n，0])＝0。

（3）[3×3，0]：S([3×3，0])＝1536。

這裏計算 S([3×3，0])時，使用了棋盤的對稱性與同構性，詳見附件六（在附件 P.14）。

（二）黑子數目爲 j，j≧2。

1、$[m\times n，j]$有解棋盤的判斷方法

（1）$[m\times n，j]$有解棋盤

我們經過研究之後發現，除了黑棋的數目之外，黑棋的相鄰與不相鄰也對$[m\times n，j]$棋盤的有解與無解造成影響。

定理 4：設黑棋相鄰的顏色改變次數爲 α，$[m\times n，j]$有解棋盤

$\Rightarrow$(1) m、n 同爲奇數或同爲偶數，而且 j、α 也同爲奇數或同爲偶數。

(2) m、n 爲一偶數，一奇數，而且 j、α 也爲一偶數，一奇數。

證明：1. 根據之前 $m\times n$ 有解棋盤定理的證明可知原本所有棋子顏色改變總次數爲 $2(m-1)(n-1)+n(m-1)+m(n-1)=2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)$次。

但因爲黑棋相鄰的顏色改變次數爲 α，所以最後所有棋子顏色改變總次數爲 $2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)-\alpha$ 次。

2. 因爲$[m\times n，j]$棋盤有 j 個黑子，變白色需要改變顏色奇數次；其他棋子在放入空格時是白色棋子，最後仍爲自己需要改變顏色偶數次。所以所有棋子顏色改變總次數爲$(mn-j)\times$偶數$+j\times$奇數。

又$[m\times n，j]$爲有解棋盤，故 $2(m-1)(n-1)+2mn-(m+n)-\alpha=(mn-j)\times$偶數$+j\times$奇數

$\Rightarrow 2(m-1)(n-1)+2mn-(mn-j)\times$偶數$-(m+n)=j\times$奇數$+\alpha$

$\Rightarrow$(1) $(m+n)$與$(j\times$奇數$+\alpha)$同爲偶數

(2) $(m+n)$與$(j\times$奇數$+\alpha)$同爲奇數

$\Rightarrow$(1) m、n 同爲奇數或同爲偶數，而且 j、α 也同爲奇數或同爲偶數

(2) m、n 爲一偶數，一奇數，而且 j、α 也爲一偶數，一奇數

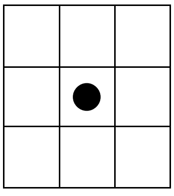
要注意的是，這個定理的逆向推論並不成立，主要原因是：$[m\times n，j]$初始黑棋周圍的空格數目可能是偶數個，或者剩餘空格的分佈可能會違反放棋要點 2 和 3。因此，對於$[m\times n，j]$棋盤，我們可以依照下列 3 點來判斷$[m\times n，j]$棋盤是否爲有解棋盤。

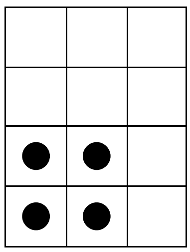
（2）$[m\times n，j]$有解棋盤的判斷方法

① 檢驗每個黑棋周圍的空格數目是否爲奇數

黑棋最後要變成白棋，需改變顏色奇數次，所以周圍的空格數必須爲奇數個。只要周圍的空格數爲偶數個（包括 0），則此棋盤無解。

例：

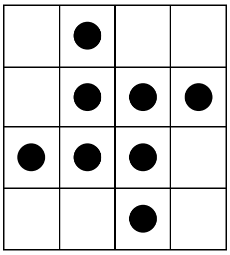


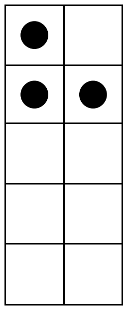


② 使用放棋要點 2 和 3 檢驗剩餘空格的分佈情形

剩餘空格如果爲分散的偶數對 2 格相鄰，則會沒有位置放第 1 個白棋。剩餘空格若有[2×n，0]的矩形，則在某一步會沒有位置放白棋。

例：

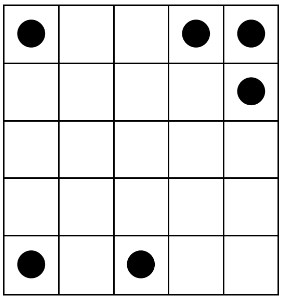




③ 檢驗 m、n、j、α 的奇偶性

我們使用定理的結果，來說明以下例子。

例：下圖爲[5×5，6]棋盤，其中黑棋相鄰的顏色改變次數爲 3 次。因爲 5 爲奇數，而 6 和 3 沒有同爲奇數或偶數，故此[5×5，6]棋盤爲無解棋盤。



2、[m×n，j]（m，j≧2）的解法

因爲我們還未找出一個有效率的方式來歸類黑棋分布的情形，所以沒有去研究[m×n，j]（m，j≧2）的通用解法。但是我們可以確定的是，若[m×n，j]（m，j≧2）爲有解棋盤，使用放棋 3 要點，就可以解出[m×n，j]（m，j≧2）有解棋盤。

3、S([m×n，j])的值，j≧2

我們仍是從小棋盤開始研究，在這裡我們假設黑棋相鄰的顏色改變次數爲 α。

（1）S([n，j])的值

在研究 S([n，j])的計算方法時，我們發現 n，j，α 之間的關係與黑棋相鄰的情形，對 S([n，j])的值有影響。

① [1×n，j]有解棋盤的相關性質

（i）n，j，α 的奇偶性

由 1、（1）的定理可知。當

（a）n 為奇數時，j，α 同為奇數或偶數。

（b）n 為偶數時，j，α 為一偶數、一奇數。

（ii）黑棋相鄰的情形

若有連續 3 個以上的黑棋相鄰，依據色變原理，在中間內部的黑棋必不能變白棋。因此放在[1×n，j]棋盤中，黑棋相鄰的情形必為「2 個黑棋相鄰」。

（iii）n，j，α 的關係式

依據色變原理，單一黑棋只能放在（1，1）和（1，n），所以[1×n，j]棋盤最多只有 2 個單一黑棋，而且其餘黑棋必兩兩相鄰。因此 $\frac{j}{2}-1 \leqq \alpha \leqq \frac{j}{2}$，其中 α 為整數。

另外，相鄰的 2 個黑棋只能放在（1，2）～（1，$n-1$），而且相鄰的 2 個黑棋與另 2 個相鄰的黑棋彼此之間至少需空出一格，所以 $n \geqq j+\alpha+1$。

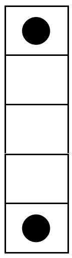
② S([n，j])的計算

（i）j=2

（a）2 黑棋不相鄰

此 2 黑棋只能放在（1，1），（1，n），故剩餘空格為[1×($n-2$)，0]棋盤，所以 S([n，2])＝S([$n-2$，0])。

例：



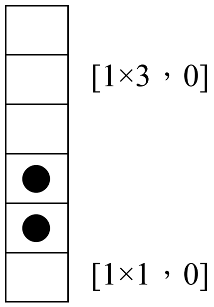
[1×3，0]

（b）2 黑棋相鄰

此 2 黑棋只能放在（1，2）～（1，$n-1$），所以這 2 個黑棋將[1×n，2]分成[1×n_1，0]和[1×n_2，0]兩個子棋盤，其中 $n_1+n_2=n-2$。依據[1×n，0]有解棋盤的定理，n_1、n_2 必須皆為奇數，[1×n_1，0]，[1×n_2，0]才是有解棋盤。如此一來，將[1×n_1，0]和[1×n_2，0]的解法合併之後，就可以是[1×n，2]的一種解法，所以使用兩子棋盤合併法，我們可得

S([n，2])＝S([n_1，0])S([n_2，0])$\frac{(n-2)!}{n_1!n_2!}$，其中 $n_1+n_2=n-2$，n_1、n_2 皆為奇數。

例：



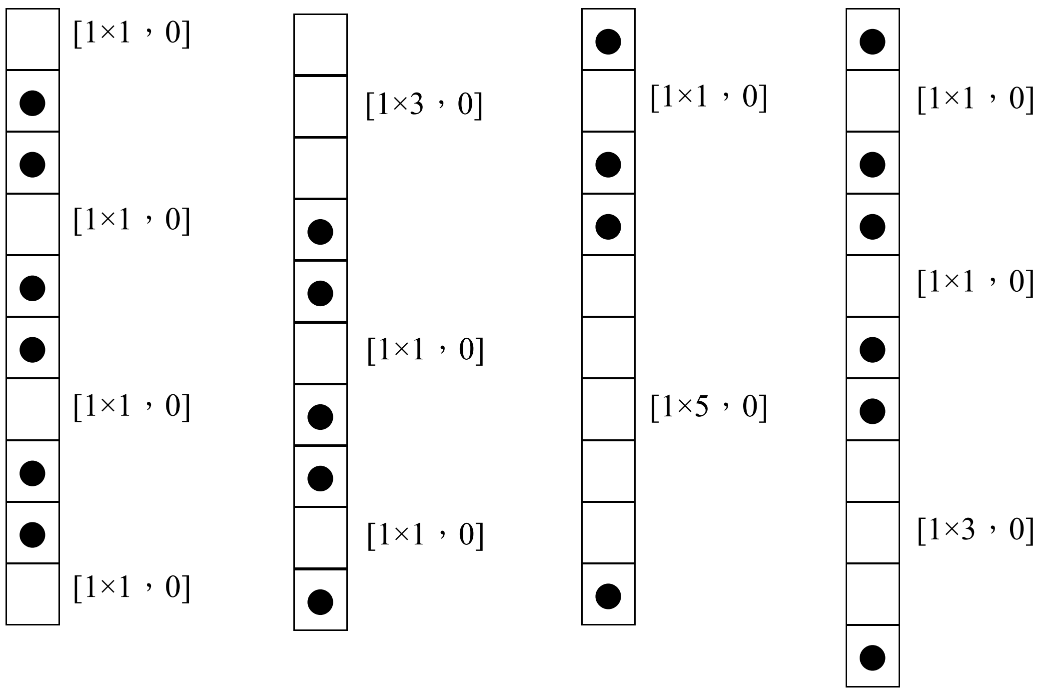
（ii）j≧3

由（1）①（iii）知，此 j 個黑棋將[1×n，j]棋盤分成[1×n_1，0]，[1×n_2，0]，⋯，[1×$n_{\alpha+1}$，0]共 α+1 個子棋盤，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_{\alpha+1}=n-j$。依據[1×$n$，0]有解棋盤的定理，$n_1$、$n_2$、⋯、$n_{\alpha+1}$ 必須皆爲奇數，[1×n_1，0]，[1×n_2，0]，⋯，[1×$n_{\alpha+1}$，0]才是有解棋盤。如此一來，將[1×n_1，0]，[1×n_2，0]，⋯，[1×$n_{\alpha+1}$，0]的個別解法合併之後，就可以是[1×n，j]的一種解法。所以

$$S([n，j])=S([n_1，0])S([n_2，0])\cdots S([n_{\alpha+1}，0])\frac{(n-j)!}{n_1!n_2!\cdots n_{\alpha+1}!}，$$

其中 $n_1+n_2+\cdots+n_{\alpha+1}=n-j$，$n_1$、$n_2$、⋯、$n_{\alpha+1}$ 皆爲奇數。

例：



（2）S([2×n，j])的值

① n，j，α 的奇偶性

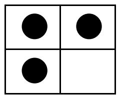
由 1、（1）的定理可知。當

（i）n 爲偶數時，j，α 同爲奇數或偶數。

（ii）n 爲奇數時，j，α 爲一偶數、一奇數。

② S([2×2，j])的值

此時很容易就可以找出只有一種情形是有解棋盤，如下圖。所以 S([2×2，j])＝0 or 1。



③ S([2×3，j])的值

（i）j=2

由 ①（ii）可知，當 α=1 時，[2×3，2]才能是有解棋盤。但是 2 個相鄰黑棋無論放在哪個位置，其周圍皆爲奇數格空格，所以[2×3，2])爲無解棋盤。

（ii）j=3

由 ①（ii）可知，當 α=0、2 時，[2×3，3]才能是有解棋盤。

（a）α=0

當 n≧5，3 個黑棋才能都不相鄰地放入[2×n，3] 中，故此時是不可能做到的。

（b）α=2

3 個黑棋一個一個連續相鄰放入[2×3，3]中，會使得頭尾 2 個棋子其周圍皆爲奇數格空格。

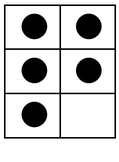
（iii）j=4

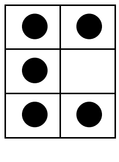
4 個黑棋放入[2×3，4]中會剩下 2 個空格，若此 2 個空格是相鄰的，則會違反放棋要點 2，所以此 2 個空格必須是不相鄰的。若 2 個空格不相鄰，則必然會有至少 1 個黑棋其周圍是奇數格空格。

由（i）（ii）（iii）可知，S([2×3，j])＝0，2≦j≦4。

（iv）j=5

5 個黑棋放入 6 個空格，只有以下 2 種不同類型（對稱算同一種），而只有右圖是有解棋盤，故 S([2×3，5])＝1。





④ S([2×4，j])的值　　S([2×4，j])＝0 or 2 or 8 or 24 or 32

我們求 S([2×4，j])，仍然使用計算 S([2×3，j])的方式逐一討論，詳見附件七（在附件 P.16）。

⑤ S([2×5，j])的值　　S([2×5，j])＝0 or 2 or 24 or 32 or 48 or 96

我們求 S([2×5，j])，仍然使用計算 S([2×3，j])、S([2×4，j])的方式逐一討論，詳見附件八（在附件 P.18）。

⑥ S([2×n，j])的值，n≧6

雖然由 n，j，α 的奇偶性與範圍可以逐一計算 S([2×n，j])的值，但 n，j，α 的值越來越大時，所要分類討論的情形越來越多，這樣會很沒有效率。目前我們仍未想到其他方式可以簡化這個問題，希望我們之後可以解決它。

伍、研究結果

一、對於獨目與變型棋盤，我們有以下 4 定理與判斷方法。

（一）定理 1：m×n 為有解棋盤 ⇔ m×n 獨目棋盤，其中 m、n 為一偶數，一奇數。

（二）定理 2：[m×n]為有解棋盤 ⇒ [m×n]棋盤，其中 m、n 為一偶數，一奇數。

（三）定理 3：[m×n，0]有解棋盤 ⇒ [m×n，0]棋盤，其中 m、n 同為偶數或同為奇數。

（四）定理 4：設黑棋相鄰的顏色改變次數為 α，[m×n，j]有解棋盤

⇒ (1) m、n 同為奇數或同為偶數，而且 j、α 也同為奇數或同為偶數。

(2) m、n 為一偶數，一奇數，而且 j、α 也為一偶數，一奇數。

（五）[m×n，j]有解棋盤的判斷方法

1、檢驗每個黑棋周圍的空格數目是否為奇數。

2、使用放棋要點 2 和 3 檢驗剩餘空格的分佈情形。

3、檢驗 m、n、j、α 的奇偶性。

二、我們對獨目與變型棋盤設計了通用解法。

（一）m×n 有解棋盤：「單跳單連雙交連綜合解法」。

（二）[m×n]有解棋盤：使用「單跳單連雙交連綜合解法」或作變型。

（三）[m×n，0]有解棋盤：使用「單跳單連雙交連綜合解法」或作變型。

三、如果不用我們所設計的解法，只要依照放棋 3 要點，也可以解出獨目與變型有解棋盤。

四、對於一些 m×n、[m×n]、[m×n，j]，我們已經知道 S(m×n)、S([m×n])、S([m×n，j])的值。

（一）m×n 棋盤

1、1×2：S(2)＝1。

2、1×n（n≧4，且為偶數）：$S(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} S(2k)S(n-2k)\dfrac{(n-2)!}{(2k-1)!(n-2k-1)!}$ 。

3、2×1：S(2×1)＝1。

4、2×n（n≧3，且為奇數）：

S(2×n)＝S(L(n，n−1))，而 S(L(n，n−1))可用以下關係式計算出來。

$S(L(r,s))=\sum_{k=1}^{w} S([2k-1,0])S(L(r-2k,s))\dfrac{(r+s-1)!}{(2k-1)!(r+s-2k)!}+2S(L(r,s-1))$，其中

$w=\dfrac{r-s-1}{2}$ 的整數部份。

（二）[m×n]棋盤

1、1×n（n 為偶數）：S([1×n])＝0 or S(n)。

2、2×3：S([2×3])＝8 or 16。

3、2×5：S([2×5])＝608 or 2048 or 2880。

（三）$[m\times n，0]$棋盤

1、$[1\times n，0]$（n 為奇數）：$S([n，0])=S(n+1)$。

2、$[2\times n，0]$（n 為偶數）：$S([2\times n，0])=0$。

3、$[3\times 3，0]$：$S([3\times 3，0])=1536$。

（四）$[m\times n，j]$棋盤（$j\geqq 2$）

1、$[1\times n，j]$，$n\geqq j+\alpha+1$：

（1）$j=2$

① 2 黑棋不相鄰

$S([n，2])=S([n-2，0])$。

② 2 黑棋相鄰

$S([n，2])=S([n_1，0])S([n_2，0])\dfrac{(n-2)!}{n_1!\,n_2!}$，其中 $n_1+n_2=n-2$，n_1、n_2 皆為奇數。

（2）$j\geqq 3$

$S([n，j])=S([n_1，0])S([n_2，0])\cdots S([n_{\alpha+1}，0])\dfrac{(n-j)!}{n_1!n_2!\cdots n_{\alpha+1}!}$，其中

$n_1+n_2+\cdots+n_{\alpha+1}=n-j$，$n_1$、$n_2$、…、$n_{\alpha+1}$ 皆為奇數。

2、$[2\times 2，j]$，$j\leqq 3$：$S([2\times 2，j])=0$ or 1。

3、$[2\times 3，j]$，$j\leqq 5$：$S([2\times 3，j])=0$ or 1。

4、$[2\times 4，j]$，$j\leqq 7$：$S([2\times 4，j])=0$ or 2 or 8 or 24 or 32。

5、$[2\times 5，j]$，$j\leqq 9$：$S([2\times 5，j])=0$ or 2 or 24 or 32 or 48 or 96。

陸、討論

一、獨目棋盤的推廣

當研究完$[m\times n，j]$之後，我們有 2 個想法。

（一）是不是可以任意指定某些格子，在放完棋子後，只有這些格子上的棋子都變成白色。

（一）如果可以辦到，哪些棋盤才有可能是有解棋盤？而且其解法為何？

（二）如果把棋盤的形狀改變，例如：虧格、多邊形的棋盤，相關問題的答案是否不同？

我們目前尚未深入研究這 2 個問題，希望之後能繼續研究這 2 個問題。

二、$S(m\times n)$，$m\geqq 3$ 的精確值與上下界

首先我們使用兩子棋盤合併法找出了 $S(n)$的關係式。接著運用樹狀圖，再配合棋盤的對稱性與同構性計算出 $S(2\times 5)$的值。最後，我們應用 $2\times n$ 棋子放置順序性質與 $L(r，s)$ 找出了 $S(2\times n)$的關係式。但是目前我們沒有好的方式來計算 $S(3\times n)$，希望我們之後能攻克它，再更進一步算出 $S(m\times n)$的值。

我們曾經也有過一種想法：如果 $S(m\times n)$的值無法精確計算，我們是不是可以找出 $S(m\times n)$的上界與下界，至少能讓我們更接近 $S(m\times n)$。不過到目前為止，我們仍未找出好的方式可以計算它，所以這個問題也是我們之後想要繼續研究的問題。

三、S([m×n，j])

本文對於[m×n，j]棋盤的有解與無解做了完整的討論，並計算出一些 S([m×n，j])的值。但仍有很多 S([m×n，j])值未計算出來，所以希望我們之後能找到一個更好的方法，進而去計算 S([m×n，j])。

柒、結論

本文研究了獨目（變型）棋盤的相關問題，其中最重要的原理與解法原則是色變原理與放棋要點 1、2、3。如果棋盤是有解棋盤，只要依照此 3 要點就可以解出棋盤。除此之外，棋盤的對稱性與同構性也是重要的性質，這 2 個性質簡化了 S(2×5)、S([2×5])、S([3×3，0])的計算。

到目前爲止，對於 m×n、[m×n]、[m×n，j]棋盤有解與無解的判斷，我們已找到完整的答案。另外，我們算出了 S(n)、S([n])、S([n，j])的值，但對於 S(m×n)、S([m×n])、S([m×n，j])，我們只知道一小部分的答案。這是獨目（變型）棋盤的問題裏，較困難的部分，希望我們之後能解決它。

捌、參考資料

一、建中數學科網站（通訊解題）：http://math1.ck.tp.edu.tw/default.htm。
二、國中數學第 4 冊（康版）2−2：對稱圖形。
三、國中數學第 4 冊（康版）1−1～1−2：數列與級數。
四、國中數學第 5 冊（康版）3−1：幾何證明。
五、國中數學第 6 冊（康版）3−1：機率。
六、高中數學第 1 冊：簡單的邏輯概念與認識證明。
七、高中數學第 1 冊：數列與級數。
八、高中數學第 4 冊：排列與組合。

【評語】030410

由一個簡單的奇偶性問題出發，考慮更一般化問題的解答，想法很好，能給出在甚麼條件下問題是有解的完整答案。對國中生而言實屬不易。很不錯的結果。在構造解的過程中，如果能給出更簡單的規則或是更方便的化約方式將會更好。