中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030409

有心？無心？「形動」見真情--解開三角形的周心密碼

學校名稱：彰化縣立和美國民中學

作者：	指導老師：
國三 張鈞濡 國三 李承澤 國三 陳哲甫 國三 李佳鑫	粘憲昌

關鍵詞：圖形變動、圓冪性質、判別式

摘要

重心的等積性質引發我們對等周分割的興趣，本研究的周心定義為與△ABC同平面上，使得$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$的 O 點。我們透過分類技巧與圓冪性質成功找出任意三角形周心的作圖方式、周心存在與否及位置的判別式，並找出與周心息息相關的環圓。我們並成功透過環圓，逆向推導找出另一種周心的作圖方式。

壹、研究動機

將任意三角形的重心與三角形的三頂點相連接可以形成三塊「等積」的三角形。這使我們聯想是否有這樣的點，該點與三角形的三頂點相連接後可形成三塊「等周」的三角形呢？我們稱這樣的點為三角形的「周心」。在歷屆全國科展中並未發現周心的研究。周心能否成為「明日之心」，將有待研究。

貳、 研究目的

周心可能位在三角形的邊上，進而周心與三頂點的連線只形成兩個三角形，因此本研究將周心的定義如下（圖 2-1）：

若與△ABC 同平面存在一點 O，使得

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$$

則 O 稱作△ABC 的周心。

研究目的為周心作圖方法的探討以及相關性質的探討。

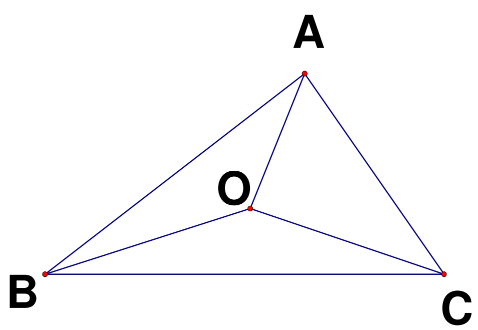

圖 2-1

參、 研究器材

GSP、EXCEL

肆、研究過程

一、等腰三角形的周心作圖方法探究

正三角形的周心恰好與重心重合。等腰三角形的周心一定位在底邊中垂線（圖 4-1）。理由如下：已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，又 O 必須滿足$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$，可推得$\overline{OB}=\overline{OC}$，因此 O 在$\overline{BC}$的中垂線$\overleftrightarrow{AD}$上。又 O 在∠BAC 外部時，△OBC 周長＞△OAC 周長，故周心位於射線$\overrightarrow{AD}$上。

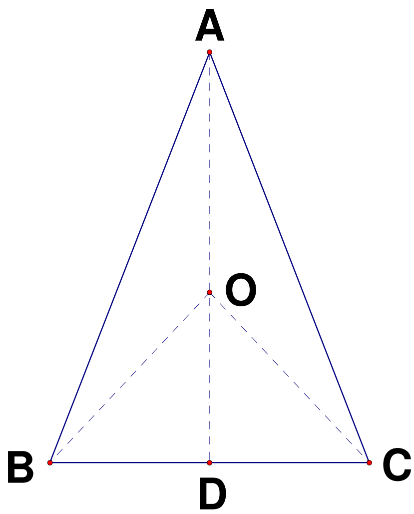

圖 4-1

由$\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{CA}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}$，可推得

$$\overline{OA}+（\overline{CA}-\overline{BC}）=\overline{OB}$$

$\overline{OA}$與$\overline{OB}$並不等長，經$\overline{CA}-\overline{BC}$的調整後，我們可在$\overleftrightarrow{AD}$上找到一點 E，使得$\overline{OE}=\overline{OB}$，因此 O 位在$\overline{BE}$的中垂線上。我們稱$\overline{CA}-\overline{BC}$的值爲「調整距」。調整距的大小及正負值會影響到作圖方法：當調整距爲正數時，$\overline{OA}<\overline{OB}$，須延長$\overline{OA}$，故調整點 E 在∠BAC 外部；當調整距爲負數時，$\overline{OA}>\overline{OB}$，須縮短$\overline{OA}$，故調整點 E 在∠BAC 內部。作圖方法分兩種狀況：

（一）△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}>\overline{BC}$時，調整距爲正數，周心恆存在

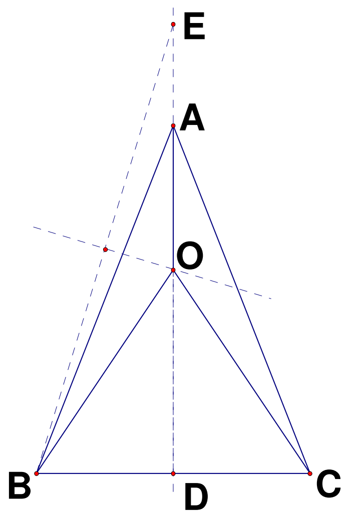

圖 4-2

作法：1.作$\overline{BC}$的中垂線$\overleftrightarrow{AD}$。（圖 4-2）

2.在$\overline{AD}$的延長線上取一點 E（E 在∠BAC 外部），使得$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{BC}$，並連接$\overline{BE}$。

3.作$\overline{BE}$的中垂線交$\overline{AD}$於 O，則 O 即爲所求。

證明：1.因爲 O 在$\overline{BC}$的中垂線上，所以$\overline{OB}=\overline{OC}$，又$\overline{AB}=\overline{AC}$，所以

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$

2.因爲 O 在$\overline{BE}$的中垂線上，所以

$\overline{OB}=\overline{OE}=\overline{OA}+\overline{AE}=\overline{OA}+\overline{AB}-\overline{BC}$

推得$\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OA}+\overline{AB}$，又$\overline{OB}=\overline{OC}$，等號兩邊分別加上$\overline{OC}$、$\overline{OB}$

則$\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}$。

3.由 1.與 2.推得

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$$

故 O 爲△ABC 的周心。

（二）△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}<\overline{BC}$時，調整距爲負數，分兩種情形：

1.｜調整距｜＜底邊上的高，周心恆存在

作法、證明與（一）雷同，唯調整點 E 位在∠BAC 內部（圖 4-3）。

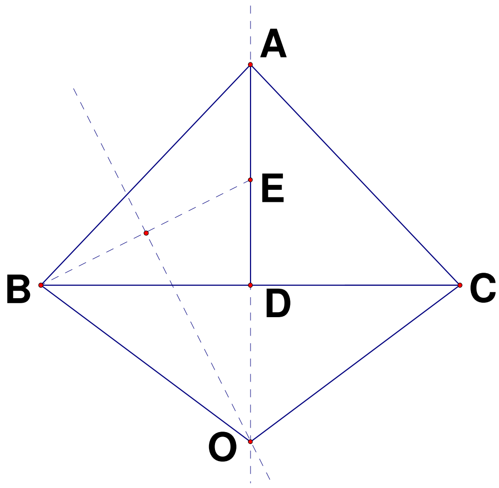

圖 4-3

2.｜調整距｜≥底邊上的高，周心不存在

當調整距＜0 且｜調整距｜＝底邊上的高時，$\overline{BE}$ 的中垂線與 $\overline{AD}$ 平行，而滿足△OBC 周長＝△OAC 周長的 O 點必位在 $\overline{BE}$ 的中垂線上，故周心不存在；當調整距＜0 且｜調整距｜＞底邊上的高時，$\overline{BE}$ 的中垂線與 $\overline{AD}$ 的延長線交於∠BAC 外部，由於周心一定位於∠BAC 內部，故周心亦不存在。（圖 4-4）

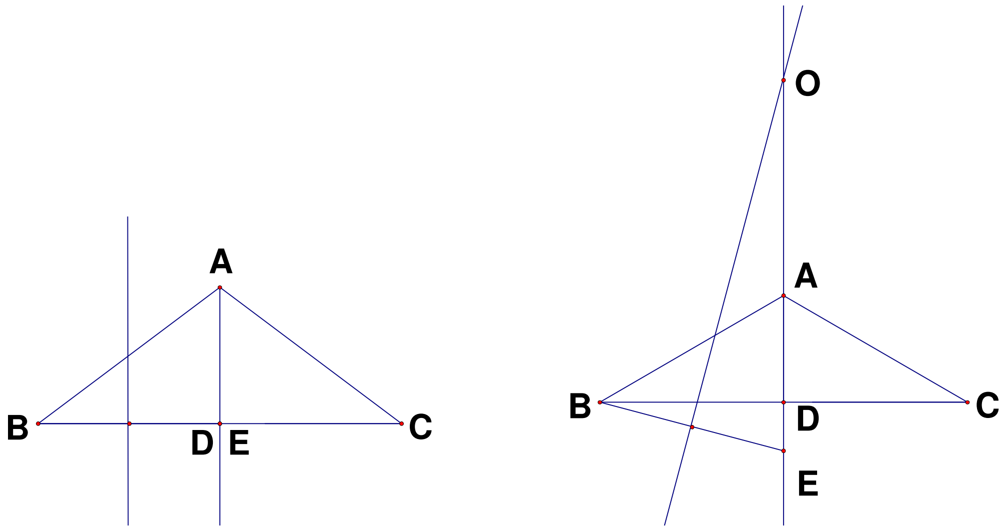

圖 4-4

當調整距爲負數時，等腰三角形周心存在的條件爲｜調整距｜＜底邊上的高。該條件的臨界爲｜調整距｜＝底邊上的高，令 $\overline{AB}$ ＝2x，$\overline{BC}$ ＝2y，則 $\overline{AD}$ ＝

2y－2x，由畢氏定理可推得 x：y＝5：8，也就是腰長：底長＞5：8 時周心才存在。（圖 4-5）

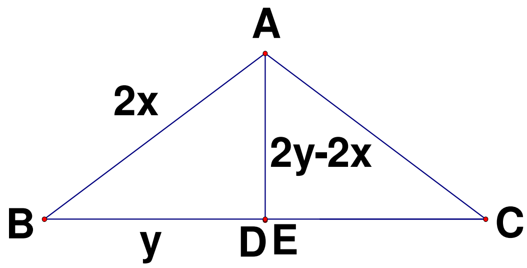

圖 4-5

二、三角形的三邊不等長時，周心作圖方法探究

△ABC 中，若 O 爲周心，$\overline{OA}$＝x；$\overline{OB}$＝y；$\overline{OC}$＝z，$\overline{BC}$＝a，$\overline{CA}$＝b，$\overline{AB}$＝c。（圖 4-6）假設 a＞b＞c，由周心定義可推得 a＋y＋z＝b＋z＋x＝c＋x＋y，因此 a＋y＝b＋x；b＋z＝c＋y；a＋z＝c＋x。由於 a＞b＞c，推得 x＞y＞z。

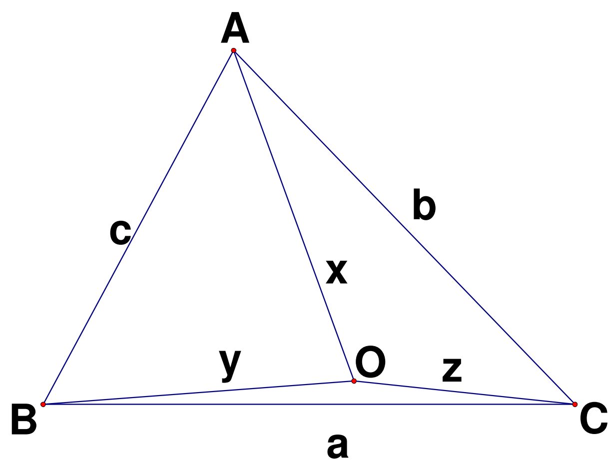

圖 4-6

可把 x、y 皆表示成 z，因而作圖目的轉爲 z 的作圖，其中 x＝z＋（a－c），y＝z＋（b－c）。分別以 A、B 爲圓心，$\overline{AD}$（長度爲 a－c）與 $\overline{BE}$（長度爲 b－c）爲半徑畫圓，推得 $\overline{OC}$＝$\overline{OD}$＝$\overline{OE}$＝z，於是周心變成△CDE 的外心，且△CDE 的外接圓恰好與圓 A 與圓 B 皆外切（因爲連心線＝半徑和）（圖 4-7）。

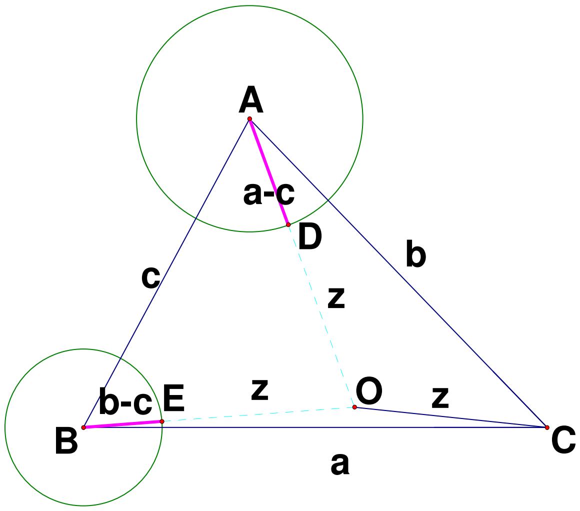

圖 4-7

（一）外冪與切割線性質

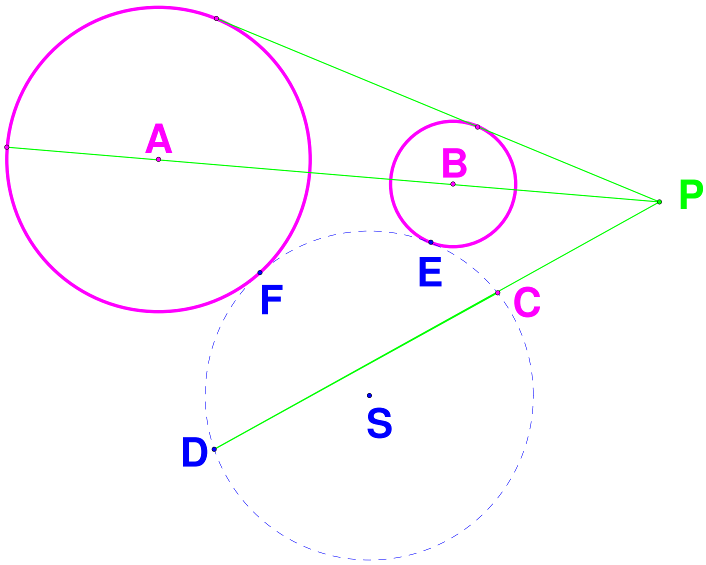

圖 4-8

想通過已知點作出與兩已知圓皆外切的圓，以結果來反推，分析如下（圖 4-8）：

1.已知條件：圓 A、圓 B 及圓外一點 C 為已知條件（粉紅色）。

2. 附帶已知條件：兩圓的公切線、連心線及其交點 P 皆可以作圖，可視為”附帶已知條件”。而 $\overleftrightarrow{PC}$ 也屬於”附帶已知條件”。（黃綠色）

3.待作條件：圓 S、切點 E、F 及弦 $\overline{CD}$ 的端點為作圖目的，乃待作條件。（藍色）

圓冪性質可用，討論如下：

切割線性質一：

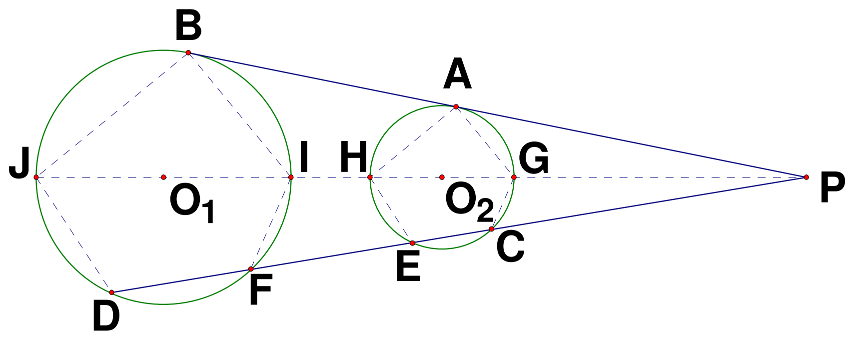

圖 4-9

$\overleftrightarrow{PB}$ 爲圓 O_1 與圓 O_2 的公切線，$\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 交於 P 點，過 P 點作圓 O_1 與圓 O_2 的割線 $\overleftrightarrow{PD}$，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PE}\times\overline{PF}$；此外 A、B、C、D 四點共圓；A、B、E、F 四點共圓；A、B、H、I 四點共圓；E、F、H、I 四點共圓。其逆亦真。（圖 4-9）

P、E、F 三點共線，由切割線性質一得知 $\overline{PH}\times\overline{PI}=\overline{PE}\times\overline{PF}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。故推得 H、I、C、D 四點共圓。作出△HIC 的外接圓圓 T 便可找出 D 點的位置。（圖 4-10）

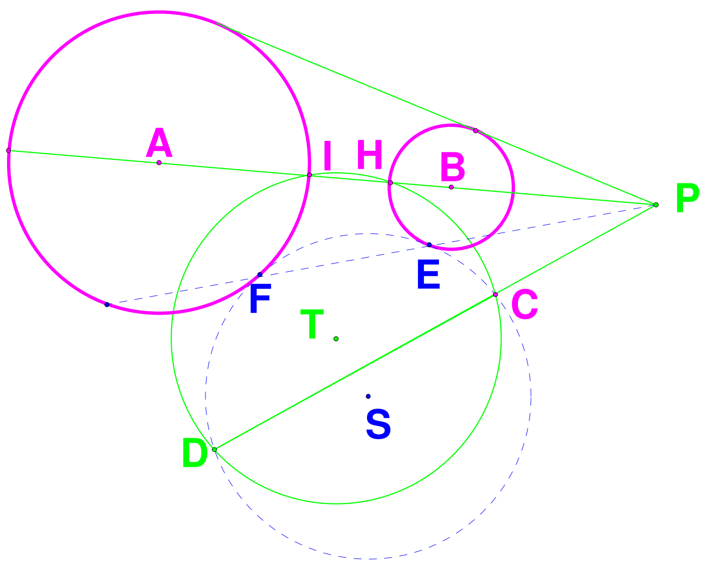

圖 4-10

切割線性質二：

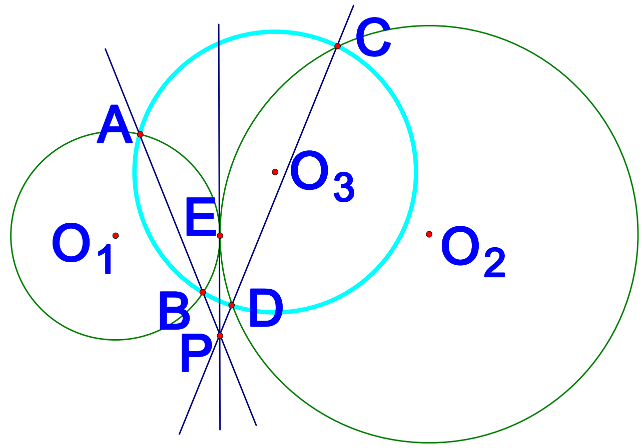

圖 4-11

圓O_1與圓O_2外切於 E 點，圓O_3與圓O_1交於 A、B 兩點，圓O_3與圓O_2交於 C、D 兩點，則圓O_1與圓O_2之內公切線、$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於同一點。我們稱圓O_3爲中介圓。（圖 4-11）

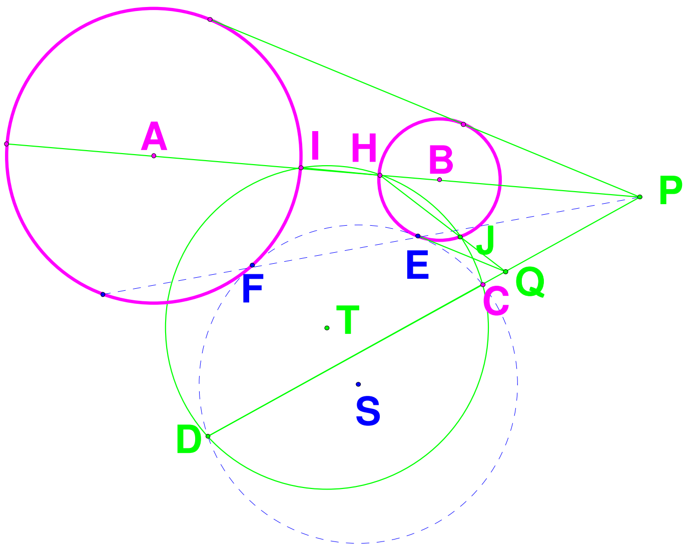

圖 4-12

圓 S 與圓 B 外切於 E 點，圓 T 爲中介圓，分別與圓 S 交於 C、D 兩點，與圓 B 交於 H、J 兩點。則由切割線性質二得知圓 S 與圓 B 之內公切線、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{HJ}$交於同一點。令、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{HJ}$交於 Q，則過 Q 點作出與圓 S（或圓 B）之切線，切點爲 E（圖 4-12）。我們成功找到求作之圓 S 的圓周上相異三點 C、D、E。

（二）三角形的三邊不等長時，周心的作圖

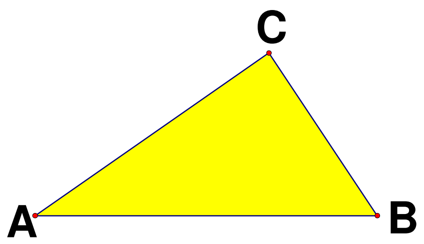

圖 4-13

給定一個△ABC（圖 4-13），令 $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$ ，其周心的作圖如下：

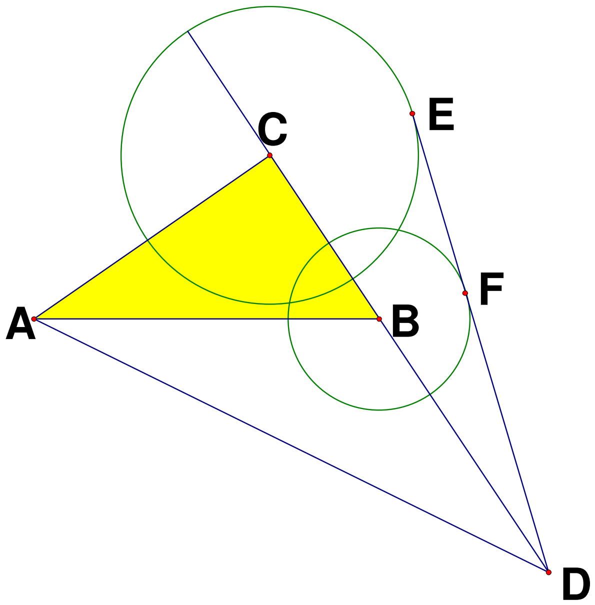

圖 4-14

1.分別以 B、C 爲圓心，$\overline{AC} - \overline{BC}$ 、 $\overline{AB} - \overline{BC}$ 爲半徑作圓，並作出兩圓的外公切線，令圓 B 與圓 C 的外公切線與 $\overleftrightarrow{BC}$ 的交點爲 D，連 $\overleftrightarrow{AD}$ 。(圖 4-14)

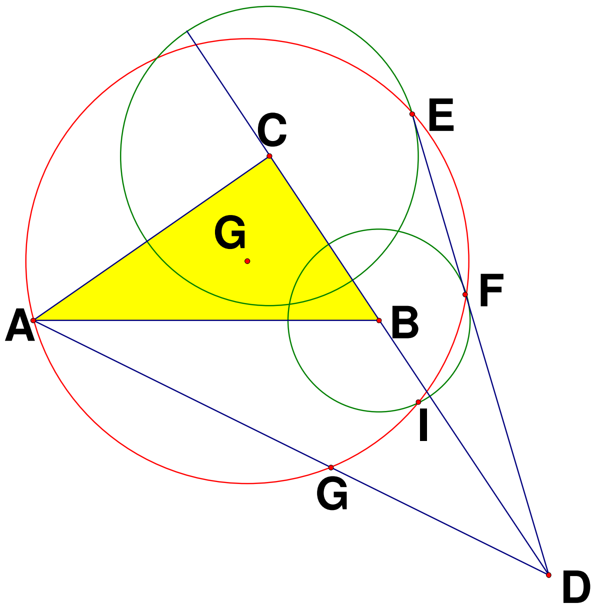

圖 4-15

2.E、F 爲切點，作一圓 G 使圓 G 通過 E、F、A（圓 G 爲中介圓），令圓 G 交 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 H，圓 G 交圓 B 於 I。(圖 4-15)

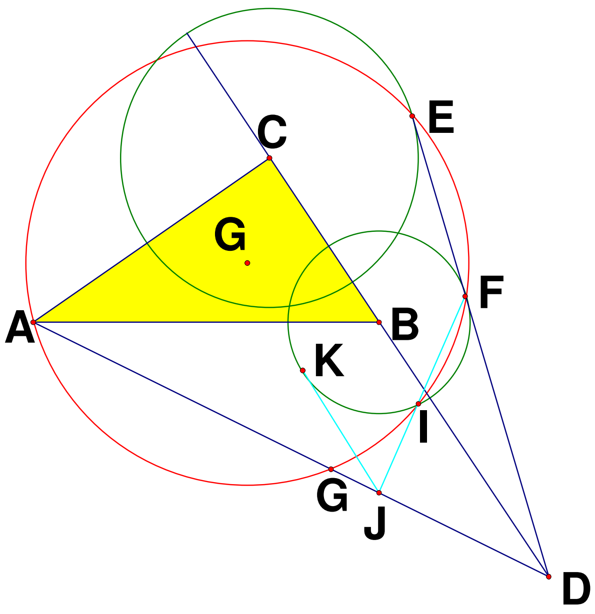

圖 4-16

3.連 $\overrightarrow{FI}$ 交 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 J，過 J 作圓 B 之切線交圓 B 於 K。(圖 4-16)

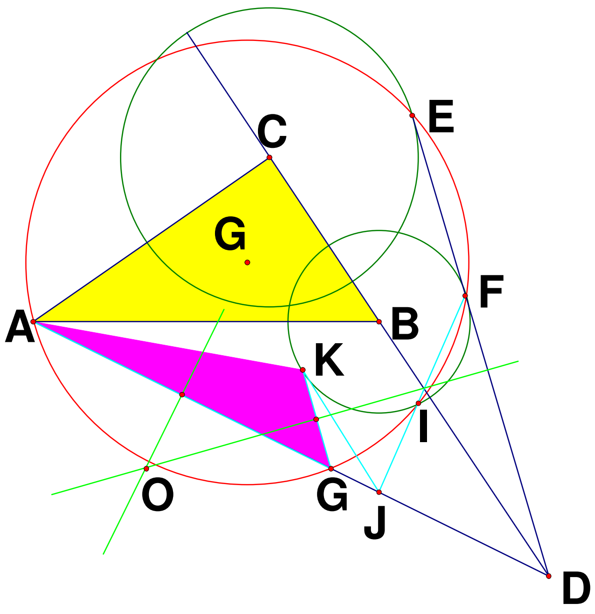

圖 4-17

4.作出△AKH 的外心 O，則 O 即爲△ABC 的周心。(圖 4-17)

(三) 三角形的三邊不等長時，周心存在性的探討

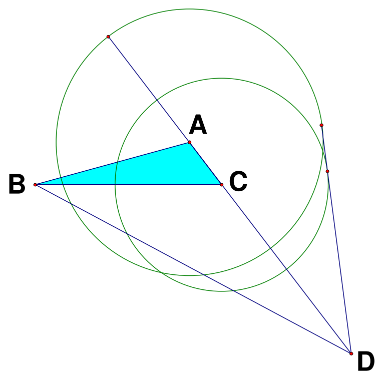

圖 4-18

有些三角形（如圖 4-18）以直觀方式可察覺所有與圓 A、圓 C 皆外切皆不可能通過 B 點。我們以 GSP 的”追蹤功能”進行驗證。

由△AOB 周長＝△COA 周長推得 $\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OC}+\overline{CA}$，因 $\overline{AB}>\overline{AC}$，故 $\overline{OC}-\overline{OB}=\overline{AB}-\overline{CA}>0$，由於 $\overline{AB}-\overline{CA}=$k 爲定值，所以 $\overline{OC}-\overline{OB}=$k。因此 O 位在以 B、C 爲焦點的單側雙曲線的軌跡上，以 GSP 的追蹤功能作出該雙曲線的軌跡，方法如下：(圖 4-19)

1. 在$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{AC}$上作出以 B、C 爲起點的射線作爲動點的移動區。

2.以 A 爲圓心，取半徑大於$\overline{AB}$作圓，使該圓分別交兩射線於 P、Q，設定 P、Q 爲動點。

3. 分別以 B、C 爲圓心，$\overline{BP}$、$\overline{CQ}$爲半徑畫圓，令兩圓交點爲 R、S，則$\overline{AP}=\overline{RB}+\overline{AB}=\overline{RC}+\overline{CA}=\overline{AQ}$；$\overline{AP}=\overline{SB}+\overline{AB}=\overline{SC}+\overline{CA}=\overline{AQ}$；

4.追蹤 R 與 S 的軌跡得一單側雙曲線，周心須位於該軌跡上。

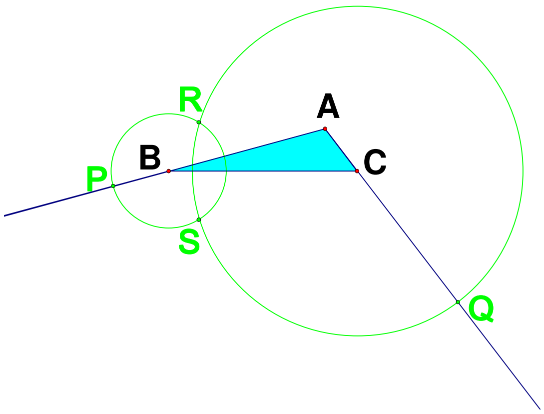

圖 4-19

以同樣的方式進行追蹤下列軌跡：(圖 4-20)

粉紅色軌跡：滿足△AOB、△BOC 等周長

淺藍色軌跡：滿足△BOC、△COA 等周長

淺綠色軌跡：滿足△AOB、△COA 等周長

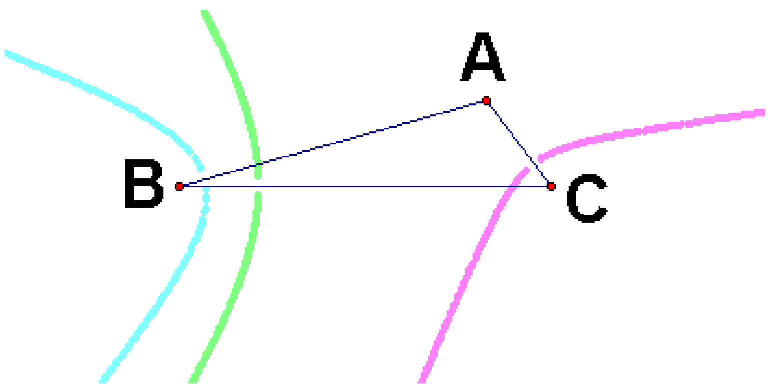

圖 4-20

這些軌跡並沒有共同交點，表示△ABC 沒有周心。

三角形的三邊$\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$時，以 B、C 為圓心，$\overline{AC} - \overline{BC}$、$\overline{AB} - \overline{BC}$為半徑作圓，並作出兩圓的外公切線，令圓 B 與圓 C 的外公切線與$\overleftrightarrow{BC}$的交點為 D，連接$\overline{AD}$。$\overline{AD}$與圓 B 與圓 C 的交點有三種：

1. $\overline{AD}$為圓 B 與圓 C 的割線，與圓 B、圓 C 皆外切的圓皆位於$\overline{AD}$的下側，而 A 點位於$\overline{AD}$的上側，所以這些圓皆無法通過 A 點。（圖 4-21）

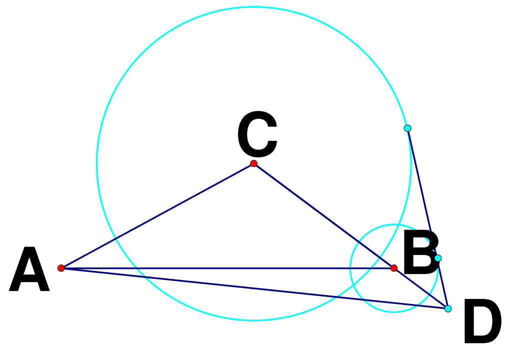

圖 4-21：

2. $\overline{AD}$為圓 B 與圓 C 的切線，該情形無法作出與通過 A 點作出與圓 B、圓 C 皆外切的圓。（圖 4-22）

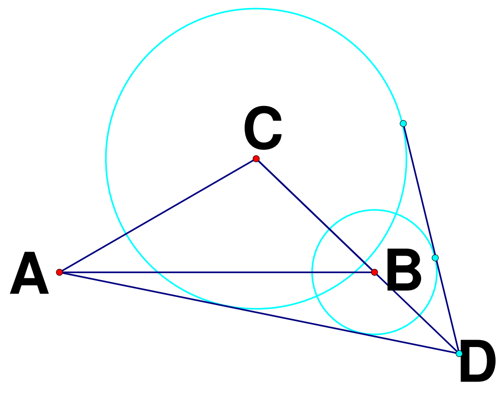

圖 4-22

3. $\overline{AD}$與圓 B 與圓 C 沒有交點，該情形皆可作出與通過 A 點作出與圓 B、圓 C 皆外切的圓。（圖 4-23）

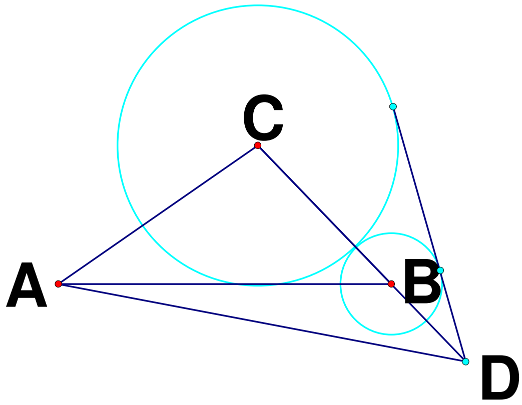

圖 4-23

以下我們將導出已知三角形三邊長時，以三邊長判斷周心是否存在的判別式。(圖 4-24)

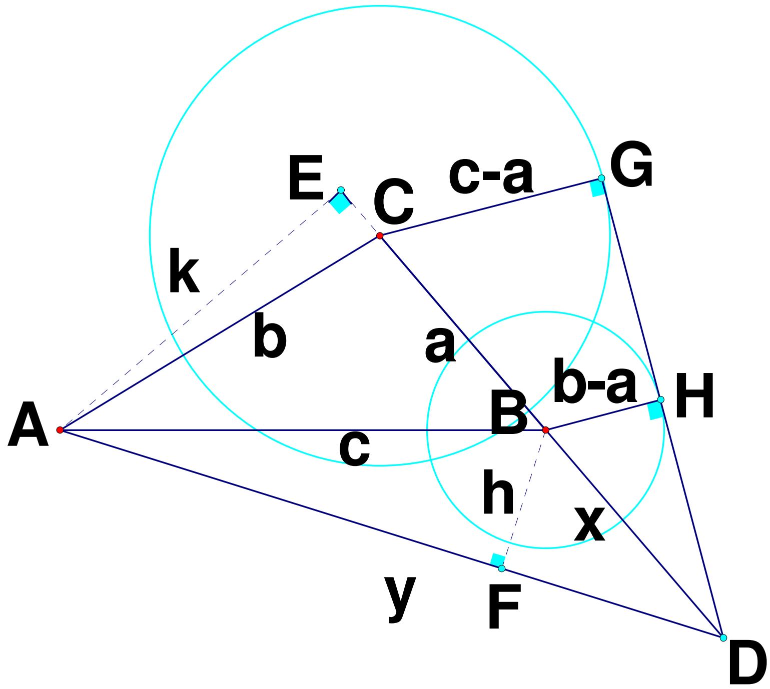

圖 4-24

△ABC 的周心存在充要條件爲圓心 B 到 $\overline{AD}$ 的距離大於圓 B 的半徑。令 $\overline{BC}$ ＝a，$\overline{CA}$ ＝b，$\overline{AB}$ ＝c，$\overline{BD}$ ＝x，$\overline{AD}$ ＝y，B 到 $\overline{AD}$ 的距離 $\overline{BF}$ ＝h，A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離 $\overline{AE}$ ＝k（其中 c＞b＞a）。

由於△BDH~△CDG（AA），x：（x＋a）＝（b－a）：（c－a），推得 x＝$\dfrac{a(b-a)}{c-b}$；

由於 cos∠ABC＝－cos∠ABD，$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{c^2+x^2-y^2}{2cx}$（餘弦定理），推得

$$y=\frac{\sqrt{a^2(b-a)^2+(b-a)(c-b)(a^2+c^2-b^2)+c^2(c-b)^2}}{c-b};$$

由於△ABC 的面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（s＝$\dfrac{a+b+c}{2}$），

推得 k＝$\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$；

由於△DBF~△DAE（AA），x：y＝h：k，推得 h＝$\dfrac{xk}{y}$

周心存在⇔h＞b－a⇔

$6s^4-\left(a^4+b^4+c^4\right)-4(ab+bc+ca)s^2>0$（s＝$\dfrac{a+b+c}{2}$）

三、周心位置的探討

（一）等腰三角形的周心位置

等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，由前述周心的作圖知道調整距（腰長－底長）的正負值決定周心的作圖方式與位置。隨著調整距的遞減（由正值轉負），周心的位置由三角形內部逐漸轉移到外部終至消失。

其分野呢？當等腰△ABC 的周心 O 在底邊$\overline{BC}$的中點，令$\overline{AB}=\overline{AC}$＝x，$\overline{BC}$＝2y，$\overline{AO}$＝z，由周心定義及畢式定理可推得，4y＝x＋y＋z 以及 $x^2=y^2+z^2$，因此推出 x：y：z＝5：3：4。（圖 4-25）

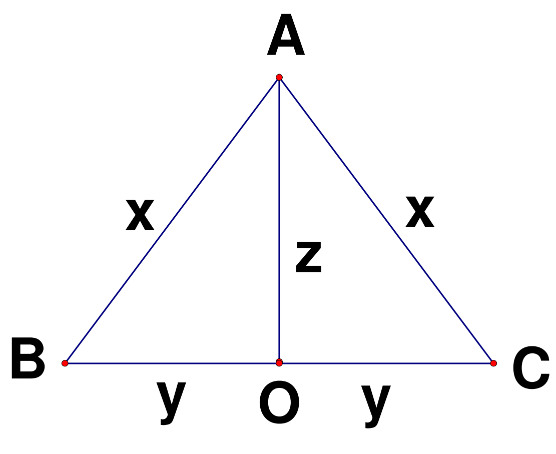

圖 4-25

我們得到以下結論：

1.等腰三角形中，腰長：底長之半＞5：3 時，其周心位於三角形的內部；

2.等腰三角形中，腰長：底長之半＝5：3 時，其周心位於底邊中點；

3.等腰三角形中，5：4＜腰長：底長之半＜5：3 時，其周心位於三角形外部；

4.等腰三角形中，5：4≥腰長：底長之半時，其周心不存在。

（二）三邊不等長的三角形周心位置

先討論在邊上的情形。△ABC 中的三邊皆不等長，由前述周心的作圖知道周心的位置一定在最大角的內部。假設周心 O 在最大邊 $\overline{BC}$ 上，令 $\overline{BC}=2a$，$\overline{CA}=2b$，$\overline{AB}=2c$，其中 a＞b＞c，令 $\overline{OA}=y$，$\overline{OC}=x$，則 $\overline{OB}=2a-x$，由周心定義推得 $4a=x+y+2b=y+2c+2a-x$，可解出 $x=a-b+c$；$y=3a-b-c$。因此推得 $\overline{OA}=3a-b-c$，$\overline{OB}=a+b-c$，$\overline{OC}=a-b+c$。

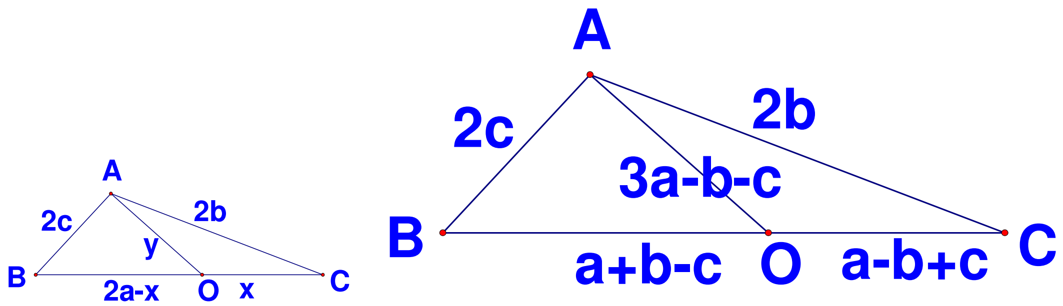

圖 4-26

由餘弦定理得知，cos∠AOB＋cos∠AOC＝0

$$\frac{(a+b-c)^2+(3a-b-c)^2-4c^2}{2(a+b-c)(3a-b-c)}+\frac{(a-b+c)^2+(3a-b-c)^2-4b^2}{2(a-b+c)(3a-b-c)}=0$$

化簡得 $8a^3-(a+b+c)[3a^2+(b-c)^2]=0$，該式爲周心位於不等邊三角形的邊上的判別式。

此外，由 $\overline{OA}>\overline{OB}$、$\overline{OA}>\overline{OC}$ 可推得△ABC 爲銳角三角形，故周心在邊上的不等邊三角形必爲銳角三角形。

我們以實例成功驗證了此判別式（圖 4－27）

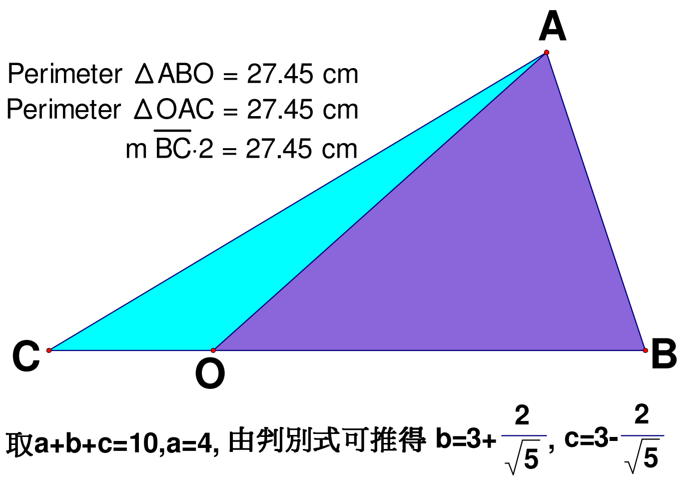

圖 4-27

如何判斷周心在△ABC 中的內部還是外部呢？我們分鈍角三角形、直角三角形、銳角三角形來討論：

1.三邊不等長的鈍角三角形周心位置

由窮舉法可推得三邊不等長的鈍角三角形周心位在三角形外部。

證明：△ABC 中，$\overline{BC}>\overline{CA}>\overline{AB}$，$\angle A>90^{\circ}$，令周心 O 存在，則周心的位置有三種可能：分別是位於△ABC 內部、邊上及外部

(1)若周心位於△ABC 內部，因爲$\overline{BC}>\overline{CA}>\overline{AB}$，由周心定義推得$\overline{OA}>\overline{OB}>\overline{OC}$，由大角對大邊可推得∠2>∠1；∠4>∠3，則由外角定理可推得∠BOC=∠1+∠2+∠3+∠4>2（∠1+∠3）=2∠A>180°，與凹四邊形的角度性質矛盾。

(2)若周心位於△ABC 邊上，與周心在邊上的不等邊三角形必爲銳角三角形的性質矛盾。

由(1)(2)得知，三邊不等長的鈍角三角形周心位在三角形外部。

（圖 4-28）

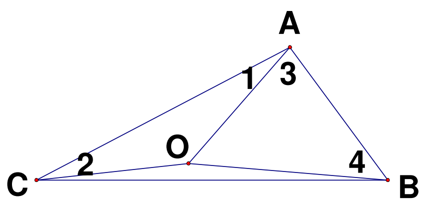

圖 4-28

2.三邊不等長的直角三角形周心位置

我們宣稱三邊不等長的直角三角形周心位在三角形斜邊中線的延長線上，與直角頂點距離兩倍於斜邊中線的位置。（圖 4-29）

證明：△ABC 中，$\overline{BC} > \overline{CA} > \overline{AB}$，$\angle A = 90^\circ$，$\overline{AM}$ 是中線，將 $\overline{AM}$ 延長至 O，使得 $\overline{AM} = \overline{MO}$，連 $\overline{OB} = \overline{OC}$，則△ABC≅△OCB≅△COA≅△BAO，因此 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{BC} = \overline{OC} + \overline{OA} + \overline{CA}$，故 O 為△ABC 的周心。

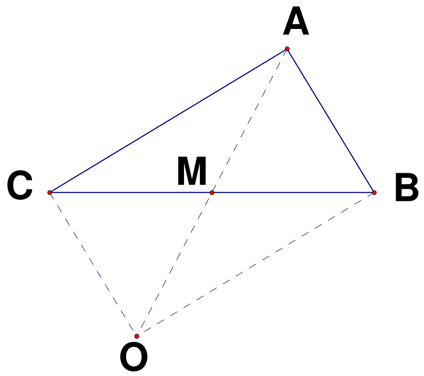

圖 4-29

2.三邊不等長的銳角三角形周心位置

三邊不等長的銳角三角形周心位置時而在三角形內部，時而在三角形外部。（圖 4-30）

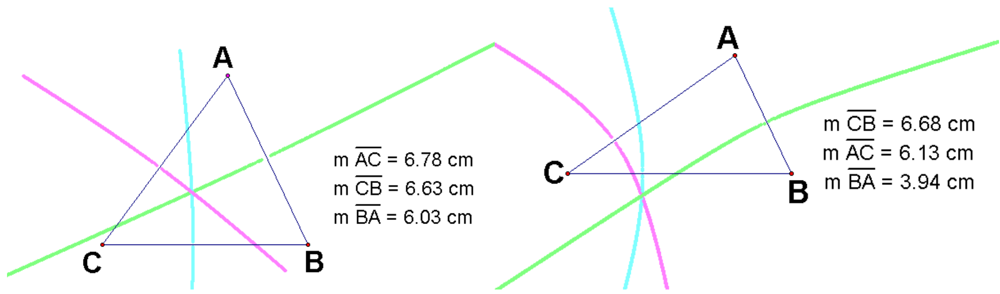

圖 4-30

O 是銳角三角形 ABC 的周心，若 $\overline{BC} > \overline{CA} > \overline{AB}$，則 $\overline{OA} > \overline{OB} > \overline{OC}$。令 $\overline{BC} = a$，$\overline{CA} = b$，$\overline{AB} = c$，$\overline{OA} = a - t$，$\overline{OB} = b - u$，$\overline{OC} = c - v$，由於△AOB 與△AOC 的周長相等，得 $a - t + b - u + c = a - t + c - v + b$，推得 $u = v$，同理可推得 $t = u$，故 $t = u = v = x$。（圖 4-31），因此 $\overline{OA} = a - x$，$\overline{OB} = b - x$，$\overline{OC} = c - x$，

相當於分別將 a、b、c 接上 x，因此我們稱 x 為「接距」。

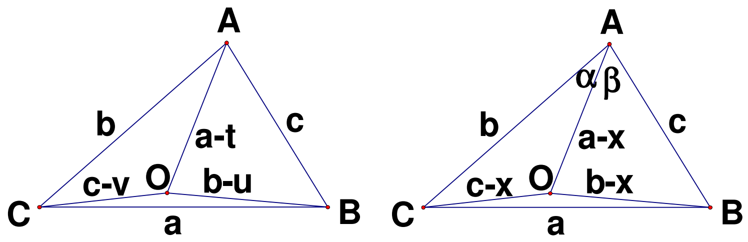

圖 4-31

我們得到兩個結果：

（1）接距 x 的公式解

將和角公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 改寫成

$$\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta-1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta=0$$

由餘弦定理知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos\alpha=\dfrac{b^2+(a-x)^2-(c-x)^2}{2b(a-x)}$，$\cos\beta=\dfrac{c^2+(a-x)^2-(b-x)^2}{2c(a-x)}$，令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，代入化簡得下列一元二次方程式：$Tx^2+Ux+V=0$，我們稱該方程式為「接距方程式」。

其中 $T=-4s^4+4(a^2+b^2+c^2)s^2-2(a^4+b^4+c^4)$

$U=-4(a^3+b^3+c^3)s^2+3(a^4+b^4+c^4)s+(a^5+b^5+c^5)$
$\quad +2abc(a^2+b^2+c^2)+abc(ab+bc+ca)$

$V=2(a^4+b^4+c^4)s^2-2(a^5+b^5+c^5)s-abc(a^3+b^3+c^3)-a^2b^2c^2$

解方程式得知 $x=\dfrac{-U-\sqrt{U^2-4TV}}{2T}$（x 須滿足邊角關係 $b+c-2x>a$，以 excel 計算後發現 $x=\dfrac{-U+\sqrt{U^2-4TV}}{2T}$ 不合）

（2）周心在銳角三角形內部的判別式

周心 O 在銳角三角形 ABC 的內部的充分條件為∠ACO＜∠ACB；∠ABO＜∠ABC。由於餘弦函數為遞減函數，可推得 O 在銳角三角形 ABC 的內部的充分條件為

$$\cos\angle ACO > \cos\angle ACB\text{；}\cos\angle ABO > \cos\angle ABC$$

$$\frac{b^2+(c-x)^2-(a-x)^2}{2b(c-x)} > \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\text{；}\frac{c^2+(b-x)^2-(a-x)^2}{2c(b-x)} > \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

合併化簡得（3a－b－c）x＋bc（2cosA－cosB－cosC）＞0

四、周心的性質

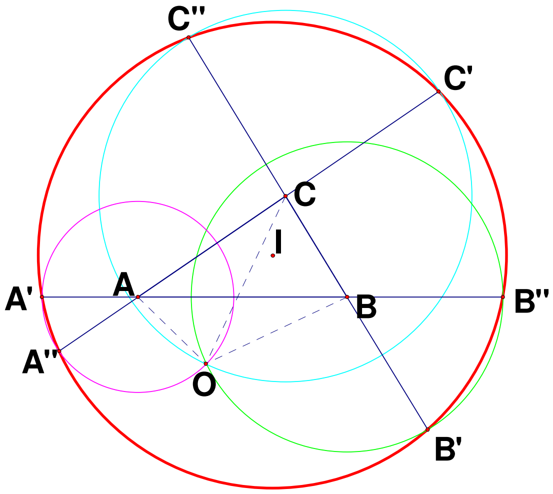

圖 4-32

O 爲△ABC 的周心，分別以 A、B、C 爲圓心，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 爲半徑畫圓，三圓與 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 交於 A'、A"、B'、B"、C'、C" 六點（圖 4-32），可推得以下性質：

（一）$\overline{A'B''}=\overline{B'C''}=\overline{C'A''}$；

（二）A'、A"、B'、B"、C'、C" 六點共圓，其外接圓心恰爲△ABC 的內心。我們稱此圓爲△ABC 的「環圓」

證明：1.因爲 O 爲△ABC 的周心，所以 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$，又 $\overline{AA''}=\overline{AA'}=\overline{OA}$；$\overline{BB'}=\overline{BB''}=\overline{OB}$；$\overline{CC'}=\overline{CC''}=\overline{OC}$。

所以可推得 $\overline{A'B''}=\overline{B'C''}=\overline{C'A''}$；

2.因爲△BB'B"~△BA'C"；△CC'C"~△CB'A"；△AA'A"~△AC'B"，；又六塊皆爲等腰三角形。所以可推得 4x＋4y＋4z＝720，因此 x＋y＋z＝180，故由對角互補可推得 C'C"A'A" 爲圓內接四邊形；A'A"B'B" 爲圓內接四邊形；B'B"C'C" 爲圓內接四邊形，因此 A'、A"、B'、B"、C'、C" 六點共圓；

3.等腰三角形之故，弦$\overline{B'B''}$的中垂線恰爲∠B’ BB” 及∠A’ BC” 之角平分線，所以弦$\overline{B'B''}$的中垂線通過△ABC 的內心；同理弦$\overline{A'A''}$的中垂線通過△ABC 的內心，所以 A’ 、A” 、B’ 、B” 、C’ 、C” 六點共圓，其外接圓心恰爲△ABC 的內心。(圖 4-32)

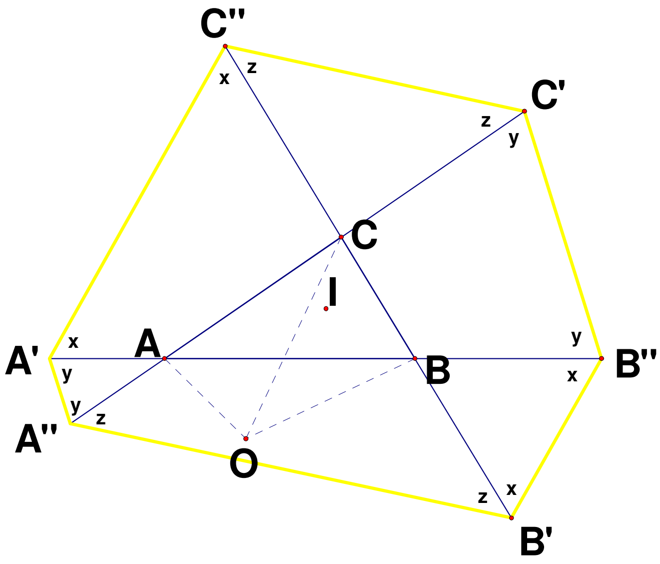

圖 4-32

五、透過環圓來找周心

（一）環圓半徑公式

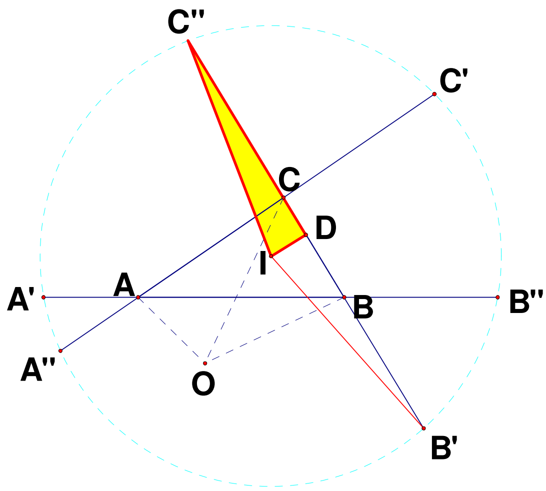

圖 4-33

△ABC「環圓」的圓心爲△ABC 的內心，而$\overline{B'C''}$的弦心距$\overline{ID}$恰好爲△ABC 內切圓半徑 r；且$\overline{A'B''}=\overline{B'C''}=\overline{C'A''}$＝a＋b＋c－2x（x 爲接距），用畢式定理

可推算出環圓半徑為 $\sqrt{r^2+(s-x)^2}$ （s＝$\frac{a+b+c}{2}$）。（圖 4-33）

（二）以邊長 7、6、5 的三角形為例，透過環圓來找周心。

△ABC 的三邊長分別為 7、6、5。以 excel 算出該三角形的「接距方程式」為 $752x^2-8544x+13680=0$，解得接距 x＝$\frac{267-72\sqrt{6}}{47}$；內切圓半徑 r＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}/s=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以環圓半徑為 $\sqrt{r^2+(s-x)^2}=\sqrt{\frac{183922+67392\sqrt{6}}{6627}}$，以 GSP 作出△ABC 的環圓圓 I（圓心為△ABC 的內心），並延長 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 交環圓於 A'、B'、C'，然後分別以 A、B、C 為圓心，$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 為半徑作三圓，該三圓交於同一點 O，該點即為△ABC 的周心。（圖 4-34）

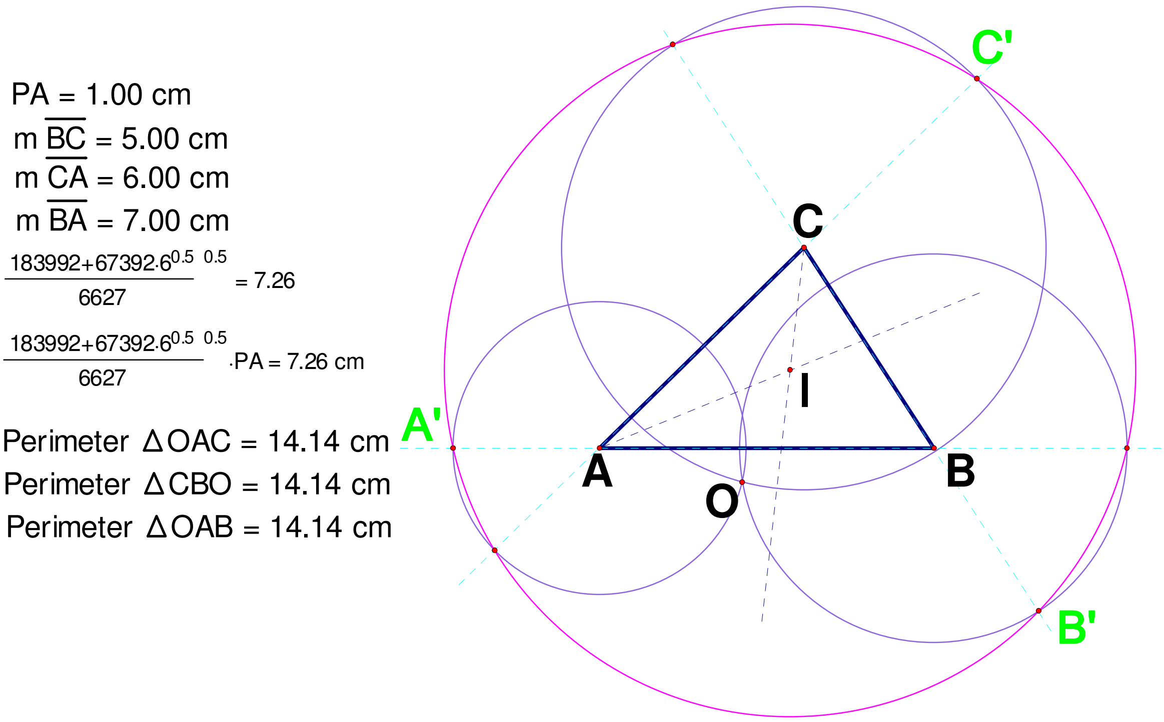

圖 4-34

伍、研究結果

△ABC 的周心 O 為與△ABC 同平面上，滿足$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$的點，研究結果如下：

一、等腰三角形的周心

（一）作圖原理：對稱原理、中垂線性質及周心定義

（二）作圖方法概述：在高或高的延長線上取一點，該點與頂角頂點的距離腰長與底長之差，作出該點與底角頂點連線之中垂線，周心為高或高的延長線與該中垂線的交點。

（三）等腰三角形的周心存在的條件為腰長：底長＞5：8

（四）周心位置：1.等腰三角形中，腰長：底長之半＞5：3 時，其周心位於三角形內部；

2.等腰三角形中，腰長：底長之半＝5：3 時，其周心位於底邊中點；

3.等腰三角形中，5：4＜腰長：底長之半＜5：3 時，其周心位於三角形外部。

二、三邊不等長的三角形周心

（一）作圖原理：切割線性質、外心作圖、周心定義

（二）作圖方法概述：先以分別以最大角與次大角頂點為圓心，最大邊與最小邊之差、次大邊與最小邊之差為半徑作出兩圓。然後以切割線性質作出一圓，該圓必須通過最小角頂點且與前述兩圓皆外切，則此圓圓心為該三邊不等長的三角形周心。

（三）三邊不等長的三角形周心可能不存在，三邊為 a、b、c 的不等邊三角形，其周心存在與否的判別式如下：

$$6s^4-\left(a^4+b^4+c^4\right)-4\left(ab+bc+ca\right)s^2>0 \quad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

（四）周心位置：1.周心位於不等邊三角形邊上的判別式為

$8a^3-(a+b+c)\left[3a^2+(b-c)^2\right]=0$，

其中 a＞b＞c

2.三邊不等長的鈍角三角形周心位在三角形外部；

3.三邊不等長的直角三角形周心位在三角形斜邊中線的延長線上，與直角頂點距離兩倍於斜邊中線的位置；

4.三邊不等長的銳角三角形周心位置時而在三角形內部或外部。△ABC 中，$\overline{BC}$ ＝a，$\overline{CA}$ ＝b，$\overline{AB}$ ＝c（a＞b＞c），其周心位在三角形內部的判別式為

（3a－b－c）x＋bc（2cosA－cosB－cosC）＞0

接距 x＝$\dfrac{-U-\sqrt{U^2-4TV}}{2T}$ 其中

$T=-4s^4+4(a^2+b^2+c^2)s^2-2(a^4+b^4+c^4)$

$U=-4(a^3+b^3+c^3)s^2+3(a^4+b^4+c^4)s+$
$(a^5+b^5+c^5)+2abc(a^2+b^2+c^2)$
$+abc(ab+bc+ca)$

$V=2(a^4+b^4+c^4)s^2-2(a^5+b^5+c^5)s$
$-abc(a^3+b^3+c^3)-a^2b^2c^2$

三、周心的性質：O 為△ABC 的周心，分別以 A、B、C 為圓心，$\overline{OA}$ 、$\overline{OB}$ 、$\overline{OC}$ 為半徑畫圓，三圓與 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CA}$ 交於 A’、A”、B’、B”、C’、C” 六點，我們推得以下性質：

（一）$\overline{A'B''}=\overline{B'C''}=\overline{C'A''}$ ；

（二）A’、A”、B’、B”、C’、C” 六點共圓，其外接圓心恰為△ABC 的內心。此圓為△ABC 的「環圓」

四、三角形環圓的半徑公式為 $\sqrt{r^2+(s-x)^2}$ ，其中 r 為△ABC 的內切圓半徑，s 為周長之半，x 為接距。我們可透過環圓來找周心。

陸、討論及結論

我們搜尋歷屆全國科展作品並未發現類似或相關研究，討論部份分兩點：

一、尋求周心的策略

給定三邊長為 a、b、c 三角形時，s＝$\frac{a+b+c}{2}$

（一）以判別式判定周心是否存在：

1.等腰三角形周心存在的判別式為⇒腰長：底長＞5：8；

2.不等邊三角形周心存在的判別式為⇒ $6s^4-\left(a^4+b^4+c^4\right)-4(ab+bc+ca)s^2>0$

（二）周心的作圖分兩類：分別是以定義推理作圖以及環圓逆向作圖。

（三）周心位置可依下列方式判斷：

1. 等腰三角形周心位置在邊上的臨界判斷值⇒腰長：底長之半＝5：3

2.不等邊三角形周心位置的判別式⇒（3a－b－c）x＋bc（2cosA－cosB－cosC）

二、圖形變動時，周心的變動情形之探討

周心位置判斷不易，以周長固定為 30 的整數邊三角形進行追蹤，發現下列現象：(圖 5-1、表 5-1）

1.周長固定時且次長邊固定時，當邊長變動時，周心位置的變動隨餘弦值的遞減而由三角形內部變動至外部終至消失。

2. 周長固定時且次長邊固定時，當邊長變動時，周心位置的變動隨著邊與邊的離差平方和 D＝$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 的遞增而由三角形內部變動至外部終至消失。

表 5-1

a	b	c	s	存在判別式	最大角餘弦	位置	D	備註
10	10	10	15	3750	0.5	內部	0	等腰三角形腰比底之半大於 5/3
11	10	9	15	3448	0.333333333	內部	6	作圖 5-1
12	10	8	15	2518	0.125	外部	24	作圖 5-1
13	10	7	15	888	-0.142857143	外部	54	鈍角三角形
14	10	6	15	-1562	-0.5	消失	96	判別式小於 0

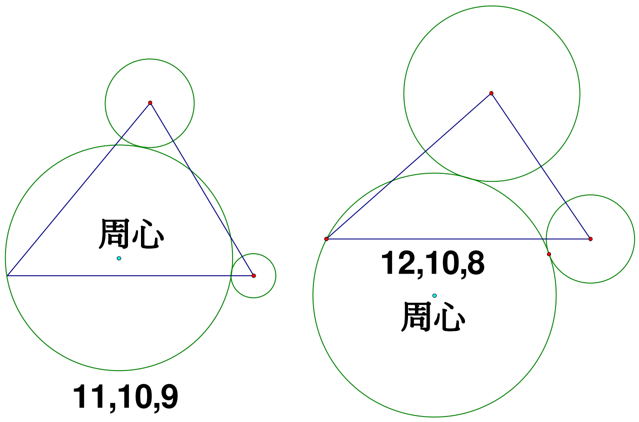

圖 5-1

以逼近法可找出周心位置變動時的臨界，而臨界點與最大角餘弦值、D、周長與次長邊長之比值的是否有函數關係，將有待深入研究。

結論：周心可視爲三角形三邊長的函數。其存在與否、作圖方式、位置皆由三角形的三邊長來決定。本研究成功地破解了隱藏在三邊長中的「周心密碼」，期待給後續研究者有拋磚引玉的啓發。

【評語】030409

本作品引進三角形周心的觀念，探討三角形周心存在的條件，與以作圖方法及分析求分周心位置。數學解析作圖有條理，敘說清楚，具創意，成果有數學價值及應用性。