中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030407

實現高中職社區化———探討凸多邊形的最佳位置

學校名稱：桃園縣立中興國民中學

作者：	指導老師：
國三 孫育揚	張至瑞
國三 鄭柏珩	陳靜文

關鍵詞：外心、最佳位置、包覆

摘　　　　要

本研究在於探討公立高中職的最佳設立點。考慮一些特殊情況，我們可以把鄉鎮市地圖近似成凸多邊形，並以學校到地圖中最遠點距離最小為原則進行研究。

我們從三角形出發，發現最佳位置與其外心有關，從而推論到頂點共圓的多邊形。在研究頂點不共圓的多邊形時，我們把多邊形以對角線拆成不同之三角形，我們經由觀察得知多邊形最佳位置必落於其分拆之三角形最佳位置上。藉由程式模擬，可求得任意多邊形之解。

我們以研究結果套用到觀音鄉及新屋鄉等真實情況下，並提供該模型可能的其他應用，如可被廣泛應用到設置通訊網路、便利店、服務站台、水庫、醫院、警局、捷運站等問題上。

壹、研究動機

八年級下學期的數學課，我們學到尺規作圖的課程，腦中就浮現建築物或設施的建造，若能考慮建置在地區範圍內的最佳位置，對需要者而言豈不皆大歡喜？

九年級上學期，學到了外心到各頂點等距，就是外接圓的圓心。了解或許外心就是最佳位置。但是，若無外心又如何尋找最佳化位置？引起了我們做這個研究。希望藉此研究，對桃園縣若干鄉鎮將來新設公立高中職位置問題，提出合理並有效的解決方案。

貳、研究目的

一、探討三角形的最佳化位置。

二、利用三角形的最佳化位置找出四邊形的最佳化位置。

三、試推廣至 N 邊形的最佳化位置。

四、針對凸多邊形設計程式，找出最佳位置。

參、研究器材及設備

電腦、軟體(GeoGebra，Visual BASIC 2008 Express Edition)

肆、研究過程或方法

一、基本假設

一般而言，設置學校的原則必須滿足以下兩點：

(一)到校的平均距離短

(二)學校位置分布合理

在真實情況中，還必須滿足交通、地理屏障、人口密度分布以及原有學校密度，學校規模等。然而，在計算上同時考慮以上各因素是非常困難的。爲研究方便，我們從最簡單的情況出發。

我們考慮以下一種特殊城市：

1. 面積小(地圖形狀可以依合理半徑之圓所包覆)。
2. 人口密度均勻且低。
3. 地形平坦。
4. 可以「凸」多邊形近似。

此外，忽略交通狀況，與學校面積，招生人數等因素。

在這種特殊城市中，設置學校的最佳位置(以下簡稱爲**最佳位置**)，可被定義爲**使學校到地圖中最遠點距離爲最短的點**。這種估計合理的原因是可以減少離學校最遠學生的距離且不犧牲大部分人的權益。

準則：令設置點到其地圖上最遠點距離，達到最小化爲最佳位置。

二、名詞定義

(一)最佳位置：滿足準則之學校設立點。

(二)包覆圓：多邊形內一點作為圓心，以點到多邊形中最遠點距離當作半徑，所作之圓。

(三)最佳包覆圓：多邊形中最佳位置為圓心，所作之包覆圓，稱為此多邊形之最佳包覆圓。

(四)大對角分割：頂點不共圓的四邊形，以對角和大於 180° 之一組對角所對之對角線把四邊形分成兩三角形，此種分割方式稱為大對角分割。

三、研究流程

制訂最佳位置準則

↓

探討三角形之最佳位置

↓

歸納特殊四邊形之最佳位置的規則

↓

探討任意四邊形之最佳位置

↓

歸納任意多邊形之最佳位置的規則

↓

設計尋找最佳位置之程式

↓

運作程式進行實際應用

↓

總結

四、研究問題

研究１：以三角形邊長關係判別三角形種類

我們學過畢氏定理，知道直角三角形三邊關係為$a^2+b^2=c^2$(其中c為直角三角形的斜邊長，a、b 為兩股長)。同樣的，我們可以用三邊關係判別銳角與鈍角三角形。我們分別提出證明：

命題１：銳角三角形任意兩邊的平方和大於第三邊的平方。

已知：△ABC 為銳角三角形，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，(如圖一)。

求證：$a^2+b^2>c^2$。

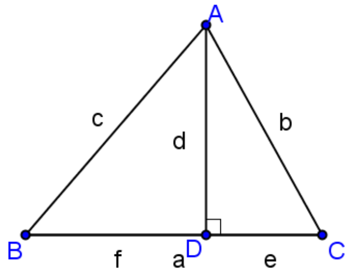
證明：(1)從 A 作$\overline{BC}$垂線交$\overline{BC}$於垂足 D。

(2)在△ABD 中 $f^2+d^2=c^2$(畢氏定理)。

(3)∵直角三角形斜邊大於任一股，∴$b>d$。

(4)$a>f$(全量大於分量)。

(5)由(3)(4)，∴$a^2+b^2>d^2+f^2=c^2$。



(圖一)

命題２：鈍角三角形較小的兩邊的平方和小於最大邊的平方。

已知: △ABC 為鈍角三角形，$\angle ABC>90^\circ$，$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{AC}=c$，(如圖二)。

求證：$a^2+b^2<c^2$(c為三角形中最大邊)。

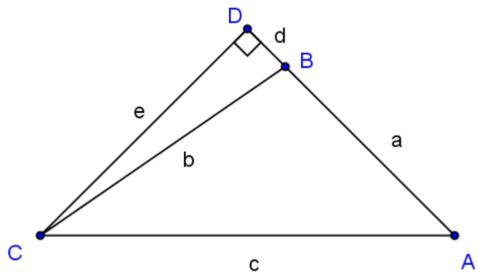
證明：(1)從 C 點作$\overline{AB}$垂線交 AB 延長線於 D。

(2)在△ACD 中，∵$\overline{AD}\perp\overline{CD}$。

∴$(a+d)^2+e^2=c^2$ (畢氏定理)，

同理△BCD 中，$b^2=d^2+e^2$，$e^2=b^2-d^2$，代入上式，

∴$(a^2+2ad+d^2)+b^2-d^2=c^2$，$a^2+b^2=c^2-2ad<c^2$。



(圖二)

結論１：△ABC 中，a ，b ，c 為三角形三邊長，其中 c 為最大邊
若△ABC 為銳角三角形，則 $a^2+b^2>c^2$
△ABC 為直角三角形，則 $a^2+b^2=c^2$
△ABC 為鈍角三角形，則 $a^2+b^2<c^2$

由於結論１中各種情況皆能一一對應，而且沒有例外。故：

命題１推論：△ABC 中，a ，b ，c 為三角形三邊長，其中 c 為最大邊
若　$a^2+b^2>c^2$ ，則△ABC 為銳角三角形
若　$a^2+b^2=c^2$ ，則△ABC 為直角三角形
若　$a^2+b^2<c^2$ ，則△ABC 為鈍角三角形

研究２：探討三角形的最佳位置

根據我們的基本假設，我們希望把學校設置在一個與地圖中最遠點距離最近的點上。在凸多邊形中，學校設置在內部，最遠點一定落在凸多邊形的任一頂點上，所以比較這些點與學校的距離，就可找到設置學校的最佳位置。

然而，這些點與學校的距離是彼此相關的，如果我們把學校設置點視為一動點，在銳角三角形中，我們先把學校放置在三角形內任一點，我們讓動點與某頂點的距離縮減，也必定會使得動點與另一點的距離增加。

如果我們讓最遠距離慢慢縮減而不致使其他距離超過最遠距離時，則動點將會逐步逼近最佳位置，在銳角三角形中，外心是一個合理的猜測。同樣道理，直角三角形中具有同樣性質的點也是外心。

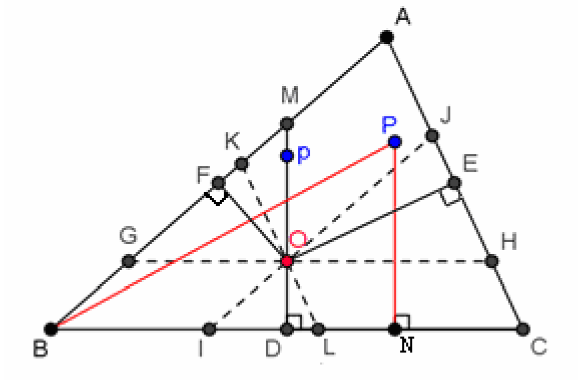
然而，在鈍角三角形中，外心在三角形外部，即使我們容許學校設置在外部，最佳位置也不在外心。我們可以想像一個三角形從銳角、直角慢慢變化鈍角的過程。可以觀察到外心從三角形內部往其中最大邊的方向移動，到直角三角形時，外心直接落在最大邊(斜邊)中點上，此時，外心仍然是最佳位置的合理猜測。但當三角形再往鈍角三角形變化時，外心會落在外部，但動點在最大邊上的中點上已找到距離最遠點的最小值，因此我們猜測鈍角三角形的最

佳位置落在最大邊中點上。以下給出我們的證明：

命題３：銳角三角形的最佳位置落於三角形的外心上。

已知：△ABC 爲銳角三角形，O 是△ABC 的外心，r 爲外心 O 到三頂點距離(如圖三)。

求證：O 爲△ABC 的最佳位置。



(圖三)

證明：(1)∵△ABC 爲銳角△，∴O 一定在△ABC 內部。

(2)∵O 爲△ABC 外心，∴O 一定落在中垂線 $\overline{OD}$ 、$\overline{OE}$ 、$\overline{OF}$ 上(如圖)。

(3)M 爲 $\overline{OD}$ 延長線與 $\overline{AB}$ 之交點。

(4)假設△ABC 中存在另一點 P 使得 $\overline{AP} < r, \overline{BP} < r, \overline{CP} < r$ 。

(5)若 P 在 $\overline{MO}$ 上，$\overline{BP}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{PD}^2 > \overline{BD}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{BO}^2 = r^2$，∴不合。

(6)過 O 作 $\overline{BC}$ 的平行線交 $\overline{AB}$ ，$\overline{AC}$ 於 G、H。

(7)若 P 在 AMOH 中，$\overline{BP}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{PN}^2 > \overline{BD}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{BO}^2 = r^2$，∴不合。

(8)同(7)，P 在△MGO 中不存在。

(9)綜合以上，P 在△AGH 中不存在。

(10)同(9)，P 在△BKL，△CIJ 中皆不存在。

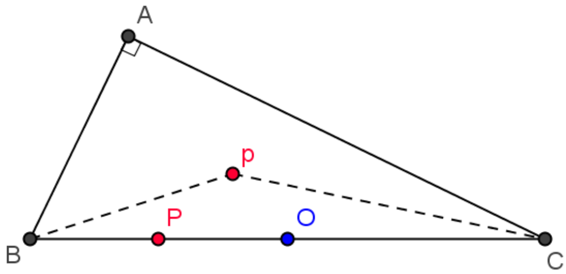
綜合以上得在△ABC 中 P 不存在，即在△ABC 中最佳位置在外心 O 上。事實上，我們利用類似的證明不難觀察出以下推論：

命題３推論：若△ABC 爲一個銳角三角形，O 爲其外心，則在整個平面上無法找到另一點 P 比 O 點來得佳。

命題４：直角三角形的最佳位置落於三角形外心即斜邊中點上。

已知：△ABC 爲直角三角形，∠BAC＝90°，O 是△ABC 的外心，r 爲外心 O 到三頂點距離。

求證：O 爲△ABC 的最佳位置。



(圖四)

證明：(1)△ABC 爲直角三角形，O 在 $\overline{BC}$ 上。

(2)假設△ABC 中存在另一點 P 使得 $\overline{AP}<r,\overline{BP}<r,\overline{CP}<r$ 。

(3)若 P 在 $\overline{BC}$ 上，此時 $\overline{BP}+\overline{CP}=2r$ ，(2)的條件不能同時存在，∴不合。

(4)若 P 在 $\overline{BC}$ 外的三角形區域上，此時 $\overline{BP}+\overline{CP}>2r$ ，(2)的條件也不能同時存在，∴不合。

(5)綜合以上，△ABC 中 P 不存在。

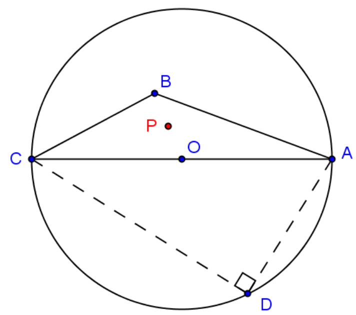
命題４推論：若△ABC 爲一個直角三角形，O 爲其外心，則在整個空間上無法找到另一點 P 比 O 點來得佳。

命題５：鈍角三角形的最佳位置落於三角形最大邊的中點上。

已知：△ABC 爲鈍角三角形，$\angle ABC>90^{\circ}$，O 爲 $\overline{AC}$ 中點，

$\overline{AO}=\overline{CO}=r$ 。

求證：O 爲△ABC 的最佳位置。



(圖五)

證明：(1)∵△ABC 爲鈍角三角形，$\angle ABC$ 爲鈍角，O 爲 $\overline{AC}$ 中點

以 O 爲圓心，$\overline{AO}$ 爲半徑作圓。

(2)在 B 異側的圓上設一點 D，連結 $\overline{AD}$ 、$\overline{CD}$ 。

(3)△ACD 爲直角三角形，$\angle ADC=90^{\circ}$ ，∴ $\angle ABC+\angle ADC>180°$ 。

(4)由於(3)，∴B 在圓 O 內， $\overline{BO} < \overline{AO} = \overline{CO} = r$ 。

(5)假設△ABC 中存在另一點 P 使得 $\overline{AP} < r, \overline{BP} < r, \overline{CP} < r$ 。

(6)若 P 在 $\overline{AC}$ 上，此時 $\overline{AP} + \overline{CP} = 2r$ ，(5)的條件不能同時存在，∴不合。

(7)若 P 在 $\overline{AC}$ 外的三角形區域上，此時 $\overline{AP} + \overline{CP} > 2r$ ，(5)的條件也不能同時存在，∴不合。

(8)綜合以上，△ABC 中 P 不存在。

命題５推論：若△ABC 爲一個鈍角三角形，O 爲最大邊中點，則在整個空間上無法找到另一點 P 比 O 點來得佳。

綜合命題３、４、５的結論，在任意三角形中，歸納以下結論：

結論２： (1) 銳角三角形最佳位置在外心上(三角形內部)。 (2) 直角三角形最佳位置在外心上(斜邊中點上)。 (3) 鈍角三角形最佳位置在最大邊中點上。

研究３：探討四邊形的最佳位置

探討四邊形的情況，我們可以利用三角形的結論，把四邊形因對角線而拆成四個三角形分別來討論。然而，由於四邊形比起三角形的情況複雜許多，因此，我們希望透過觀察特殊例子，歸納心得。

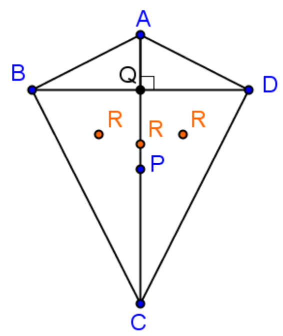
在三角形中，我們找到的最佳位置皆與外心有關，因此，我們先從頂點共圓的四邊形出發。

3-1 頂點共圓的四邊形

3-1-1 具有外接圓之箏形

箏形的性質(1)一對角線垂直平分另一對角線，且其中一條爲圖形對稱軸。

觀察圖(六)，頂點共圓的箏形有兩個直角三角形，△ABC 與△ACD，並和△BCD 三者之最佳位置都在最大對角線 $\overline{AC}$ 中點 P 上，另△ABD 的最佳位置落在 $\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 交點 Q 上，相較而言，發現 P 比 Q 佳，故猜測 P 爲 ABCD 的最佳位置，做出證明如下。



(圖六)

命題６：頂點共圓之箏形最佳位置位於最大對角線中點上(外心)。

已知：四邊形 ABCD 爲頂點共圓之箏形，$\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 爲兩對角線，

P 爲 $\overline{AC}$ 中點，r 爲外心 P 到四頂點距離。

求證：P 爲箏形 ABCD 的最佳位置。

證明：(1)∵有外接圓，對角互補，∠BAD＋∠BCD＝180°

∠ABC＋∠ADC＝180° 。

(2)∵△ABC≌△ADC(SSS)，∴∠ABC＝∠ADC＝90° 。

(3) △ABC 和△ADC 皆爲直角三角形，P 爲其外心。$\therefore \overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{DP}=r$ 。

(4)假設在 ABCD 中存在另一點 R 使得 $\overline{AR}<r, \overline{BR}<r, \overline{CR}<r, \overline{DR}<r$ 。

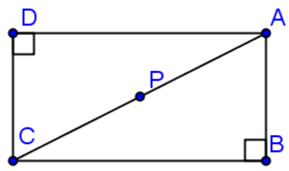
(5)由命題４，△ABC 上不存在另一點 R 使得 $\overline{AR}<r, \overline{BR}<r, \overline{CR}<r$ 。

(6)同理，△ACD 上不存在另一點 R 使得 $\overline{AR}<r, \overline{CR}<r, \overline{DR}<r$ 。

(7)若另一點 R 在 $\overline{AC}$ 上，則 $\overline{AR}+\overline{CR}=2r$ ，(4)不能同時滿足。

(8)綜合上述，R 在 ABCD 中不存在。

3-1-2 矩形



(圖七)

命題７：矩形最佳位置在對角線交點上。

矩形的性質(1)等角四邊形。

(2)兩對角線等長、平分。

矩形中四個三角形皆爲直角三角形，其最佳位置皆位於對角線交點 P 上，同命題６之方法，可以證明，P 點爲矩形 ABCD 的最佳位置。正方形爲矩形的特例。

3-1-3 等腰梯形

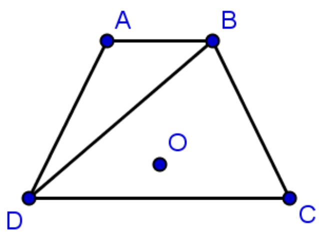
等腰梯形的性質：

(1) 一組對邊平行，另一組對邊等長。

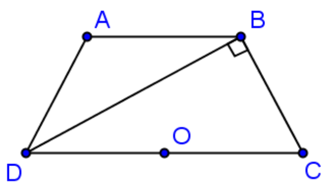
(2) 兩底角相等。

等腰梯形以對角線劃分總共有三種情況：(1)由一鈍角△、一銳角△組成。

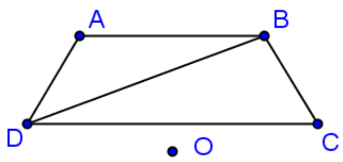
(2)由一鈍角△、一直角△組成。(3)由兩個鈍角△組成。(如下圖)



(1)



(2)



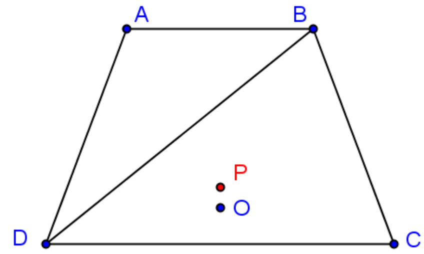
(3)

由於等腰梯形頂點共圓，所以具有外心，在情況(1)，(2)，等腰梯形外心(到四頂點等距)分別落在圖形內部或最大邊中點上，因此我們假設外心爲此種情況下的最佳位置；而情況(3)，外心落於外部，我們利用之前對三角形最佳位置所做的考量，假設外心將會落在等腰梯形最大邊的中點上。證明如下：

命題８－１：由一鈍角△、一銳角△所組成之等腰梯形最佳位置位於外心上。

已知：$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}<\overline{CD}$，△BCD 爲銳角三角形，O 爲 ABCD 外心，r 爲外心 O 到四頂點距離。

求證：O 爲等腰梯形 ABCD 的最佳化位置。



(圖八)

證明：(1)∵O 爲 ABCD 外心，得 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}=r$。

(2)假設在 ABCD 中存在另一點 P 使得

$\overline{AP}<r,\overline{BP}<r,\overline{CP}<r,\overline{DP}<r$。

(3)由命題３推論，空間不存在另一點 P 使得 $\overline{BP}<r,\overline{CP}<r,\overline{DP}<r$。

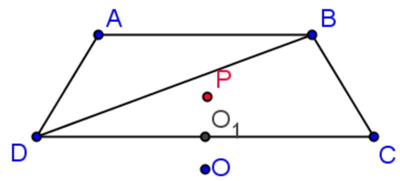
(4)綜合上述，P 在 ABCD 中不存在。

我們以同樣的方法不難證明由一鈍角△、一直角△組成的等腰梯形，其最佳位置位於外心上(最大邊中點上)。

命題８－２：由兩個鈍角三角形組成之等腰梯形最佳位置位於最大邊中點上。

已知：$\overline{AB}//\overline{DC}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}<\overline{CD}$，△BCD 爲鈍角△，O 爲 ABCD 外心，$O_1$ 爲 C、D 中點，$\overline{CO_1}=\overline{DO_1}=r$，如圖九。

求證：O_1 爲等腰梯形 ABCD 的最佳化位置。



(圖九)

證明：(1)∵ABCD 爲等腰梯形，又△BCD 爲鈍角三角形，

得∠DAB＞90°,∠DBC＞90°。

(2)由(1)，$\overline{AO_1}=\overline{BO_1}<\overline{CO_1}=\overline{DO_1}=r$。

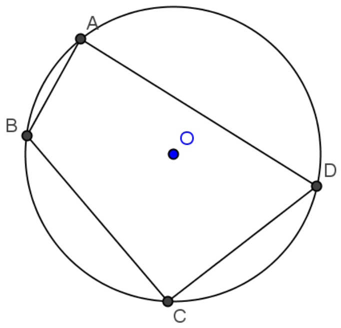
(3)假設在 ABCD 中存在另一點 P 使得

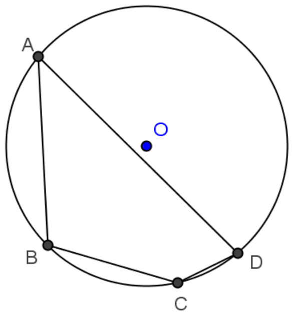
$\overline{AP}<r,\overline{BP}<r,\overline{CP}<r,\overline{DP}<r$。

(4)由命題５推論，空間不存在另一點 P 使得 $\overline{BP}<r,\overline{CP}<r,\overline{DP}<r$。

(5)綜合上述，P 在 ABCD 中不存在。

3-1-4 頂點共圓之任意四邊形



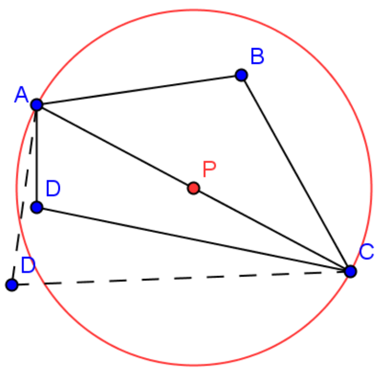


我們可以把頂點共圓之任意四邊形分成兩大類，如上圖，綜合上述特殊四邊形的情況，我們似乎可歸納出以下性質，我們姑且把結論寫出來，到研究４時一併證明，結論如下：

> 結論３－１：
>
> (1) 若四邊形頂點共圓，而其外心落在四邊形內或邊上，則其最佳位置將落在四邊形的外心上。
>
> (2) 若四邊形頂點共圓，而其外心落在四邊形以外，則其最佳位置將落在四邊形最大邊的中點上。

3-2 頂點不共圓的四邊形

頂點不共圓的四邊形，由於沒有外心，討論起來比較複雜。然而，我們利用同樣的方法，把四邊形拆成三角形來討論。



(圖十)

如圖，ABCD 爲一任意頂點不共圓的四邊形，我們先選定其中一個三角形△ABC，以其最佳位置 P 爲圓心作△ABC 之**包覆圓**，D 有兩種落點。若 D 落於圓內， P 到△ABC 中最遠點的距離 r，同時也是 P 到四邊形 ABCD 中最遠點的距離，透過研究２之推論，我們得知 P 即爲 ABCD 最佳位置；然而，當 D 落於圓外時，P 到△ABC 中最遠點的距離 r 不等於 P 到四邊

形 ABCD 中最遠點的距離，所以 P 不為所求。雖然如此，我們可以想像，在四邊形 ABCD 中，必定存在至少一個三角形，其包覆圓，可以把四邊形所有的點給包覆住。由此，我們歸納出以下規則：

(1) 任意四邊形之最佳位置必落於組成四邊形的其中一個三角形的最佳位置上。
(2) 若組成四邊形的某三角形的最佳位置為所求，則其包覆圓也必能把整個四邊形包覆。

根據上述，我們重新觀察一個四邊形，對於任意頂點不共圓四邊形可言，依其對角線共有兩種分割方式，稱為**大對角分割**及**小對角分割**。使用大對角分割，可把四邊形分成五種情況：

(1) **OOA 型**：兩鈍角三角形，兩鈍角互為對角。

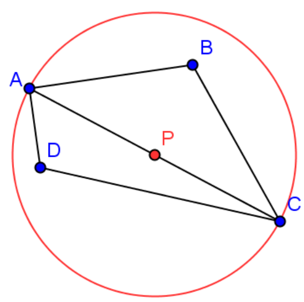
(2) **ORA 型**：鈍角+直角三角形，鈍角、直角互為對角。

(3) **OAA 型：**鈍角+銳角三角形。

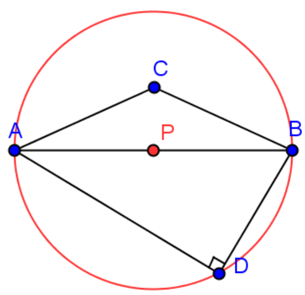
(4) **OAO 型：**兩鈍角三角形，兩鈍角不互為對角。

(5) **OAR 型：**鈍角+直角三角形，鈍角、直角不互為對角。

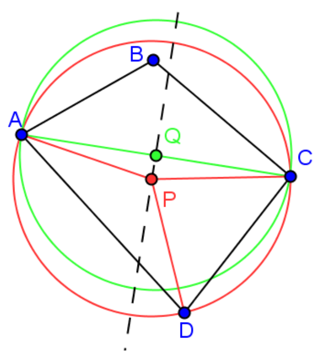
使用大對角分割的原因在於此種分割方式所分割出之兩三角形，其包覆圓都能把四點包覆，在銳角及直角三角形中，外接圓等同於包覆圓，所以使用大對角分割討論最佳位置較簡單。



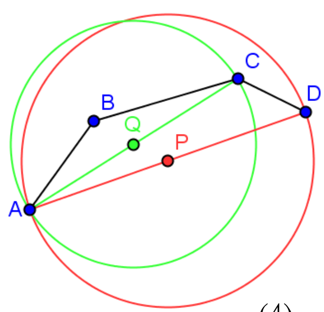
(1) OOA 型



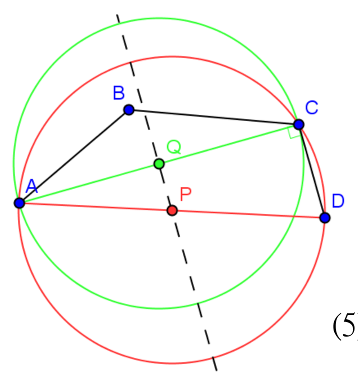
(2) ORA 型



(3) OAA 型



(4) OAO 型



(5) OAR 型

如圖：情況(1)(2)之兩三角形皆有共同的最佳位置 P，根據命題４、５推論，不難證明 P 就是它們的最佳位置。情況(3)(4)(5)中，P、Q 分別表為△ACD、△ABC 最佳位置，$\overline{AC}$ 皆為圓 Q 之直徑。在情況(3)中，$\because \angle ADC < 90°$，$\therefore$D 落於圓 Q 外；同樣地，在情況(4)(5)中，$\because \angle ACD \geq 90°$，$\therefore$D 落於圓 Q 外。根據規則２，我們排除 Q 為 ABCD 最佳位置之可能。此外，在情況(3)(5)中，圓 P 為△ACD 之外接圓，由於採用大對角分割，根據之前的分析，圓 P 必定能把整個四邊形所包覆，再利用命題３、４推論，證明 P 為它們的最佳位置。最後，我們剩下相對較為棘手的情況(4)，猜測 P 為 ABCD 之最佳位置，給出證明。

已知：ABCD 為 OAO 型四邊形，O 為 △ACD 外心，$\overline{AC}$ 為大對角分割對角線，P 為 $\overline{AD}$ 中點，

$\overline{AP} = \overline{DP} = r$，如圖十一。

求證：P 為 ABCD 之最佳位置。

證明：(1)ABCD 為 OAO 型四邊形，$\overline{AC}$ 為大對角分割對角線，P 為 $\overline{AD}$ 中點。

(2)$\because \angle ABC + \angle ADC > 180°$，O 為 △ACD 外心，$\therefore$B 在圓 O 內。

(3)連結 $\overline{DB}$ 並延長交圓 O 於一點 E，連結 $\overline{AE}$。

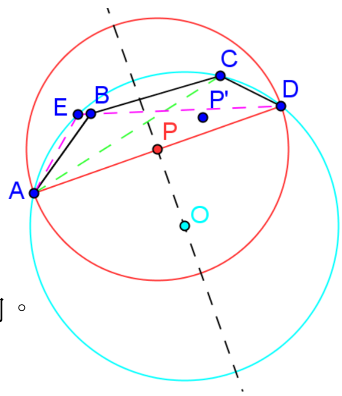
(4)$\because$同弧所對圓周角相等，$\therefore \angle ACD = \angle AED$。

(5)$\because$三角形外角大於其內對角，$\therefore \angle ABD > \angle AED = \angle ACD > 90°$。

(6)$\because$△ABD 為鈍角三角形，從命題５證明過程中我們得知，$\overline{BP}, \overline{CP} < \overline{AP} = \overline{DP} = r$

(7)根據命題５推論，在空間中無法找到另一點 P’ 同時 $\overline{AP'} < r, \overline{CP'} < r, \overline{DP'} < r$。

(8)綜合以上，P 為 ABCD 之最佳位置。



(圖十一)

結論３－２：

(1) OOA 型四邊形，其最佳位置位於兩鈍角所對之對角線中點上。
(2) ORA 型四邊形，其最佳位置位於鈍角及直角所對之對角線中點上。
(3) OAA 型四邊形，其最佳位置位於銳角三角形的外心上。
(4) OAO 型四邊形，其最佳位置位於四邊形中最大邊的中點上。
(5) OAR 型四邊形，其最佳位置位於直角所對對邊中點上。

研究４：任意多邊形的最佳位置

4-1 頂點共圓之多邊形

在研究３中，我們已歸納出頂點共圓之四邊形的最佳位置，事實上，在頂點共圓之多邊形也可以歸納出同樣的結論：

結論４－１：

(1) 若多邊形頂點共圓，而其外心落在多邊形內或邊上，則最佳位置將落在多邊形的外心上。

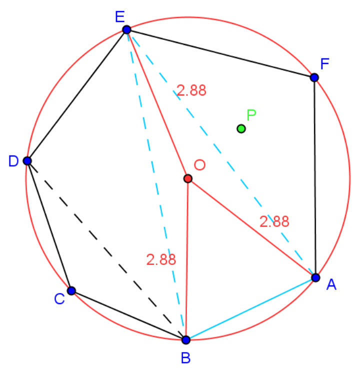
(2) 若多邊形頂點共圓，而其外心落在多邊形以外，則最佳位置將落在多邊形最大邊的中點上。

以下我們將提出證明：(以下以六邊形爲例)

命題９：外心落在多邊形內之任意頂點共圓多邊形，其最佳位置必落在外心。

已知：ABCDEF 爲任意六邊形，其內一點 O 爲 ABCDEF 外心，r 爲 O 到各頂點距離。

求證：O 爲 ABCDEF 最佳位置。



(圖十二)

證明：(1)ABCDEF 爲任意六邊形，其內一點 O 爲 ABCDEF 外心，r 爲 O 到各頂點距離。

(2)連結 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{BD}$ ，得四個三角形。

(3)∵O 位於 ABCDEF 內，∴也必在其中一個三角形內。

(4)∵外心在內，如圖，△ABE 爲銳角三角形。

(5)根據命題３，O 爲△ABE 最佳位置。

(6)假設在 ABCDEF 中存在另一點 P 使得 $\overline{AP} < r, \overline{BP} < r, \overline{CP} < r, \overline{DP} < r, \overline{EP} < r, \overline{FP} < r$ 。

(7)由命題３推論，空間不存在另一點 P 使得 $\overline{AP} < r, \overline{BP} < r, \overline{EP} < r$ 。

(8)綜合上述，P 在 ABCDEF 中不存在。

命題１０：外心在多邊形外之任意頂點共圓多邊形，其最佳位置在多邊形最大邊中點上。

利用命題９類似的方法，改用命題５及其推論，可證明命題１０。

4-2 頂點不共圓之多邊形

在我們討論頂點不共圓四邊形時，我們有討論到一些規則，事實上，這些規則可以延伸到任意頂點不共圓之多邊形的情況。

我們想像一個任意多邊形，以下，我們以八邊形 ABCDEFGH 為例，如圖１，先在 ABCDEFGH 中選擇一動點 P_0，我們以 P_0 為圓心作 ABCDEFGH 之包覆圓，C 落在圓上，此時，$\overline{CP_0}$ 為 P_0 到 ABCDEFGH 最遠點的距離，為了讓最遠點距離縮減，動點可沿 P_0 到 C 的方向移動到達 P_1，此時，A、B、C、G 同時落在以 P_1 為圓心所作 ABCDEFGH 的包覆圓上，但 A、B、C、G 皆位於圓的同一側，所以最遠距離仍然有縮減的空間，我們連結 C、G 作 $\overline{CG}$ 之中垂線，動點沿著中垂線往 C、G 中點方向移動，到達 P_2，如圖３，此時最遠距離無法縮減，P_2 為所求。然而，我們刻意把多邊形中一點 F 往外拉到 F’之位置，我們可以觀察動點尚未到達 P_2 時已找到最佳位置 P_2’， 如圖 4 所示。所以，對於任意頂點不共圓之多邊形，其最佳包覆圓，只有兩種可能情況：

(1) 只有兩點落在圓上，最佳位置位於此兩點之中點上(也就是鈍角三角形的最佳位置)。
(2) 至少三點落在圓上，最佳位置為其中任意三點之外心上(也就是銳角或直角三角形的最佳位置)。

圖５同時展示了此兩種情況。綜合以上，我們歸納出結論４－２。

結論４－２：
(1) 任意多邊形之最佳位置必落於組成多邊形的其中一個三角形的最佳位置上。
(2) 若組成多邊形的某三角形的最佳位置為所求，則其包覆圓也必能把整個多邊形包覆。

圖 1. ABCDEFGH 中選任一點 P_0

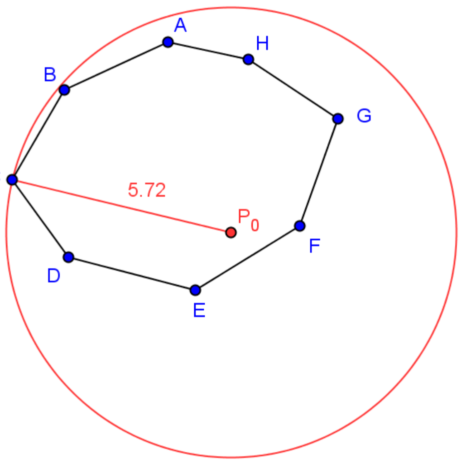


圖 2. 沿 P_0 到 C 方向到 P_1

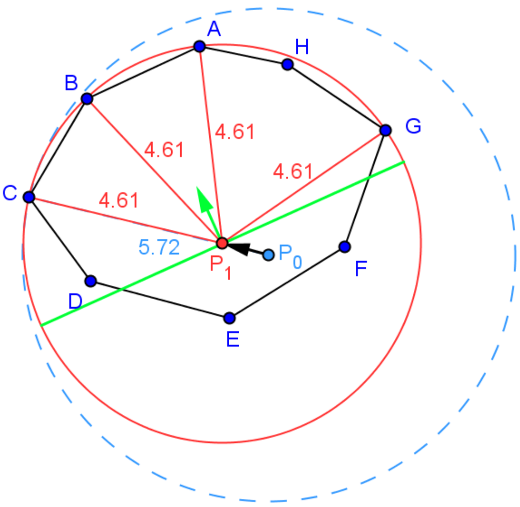


圖 3.沿 P_1 到 C、G 中點方向到 P_2

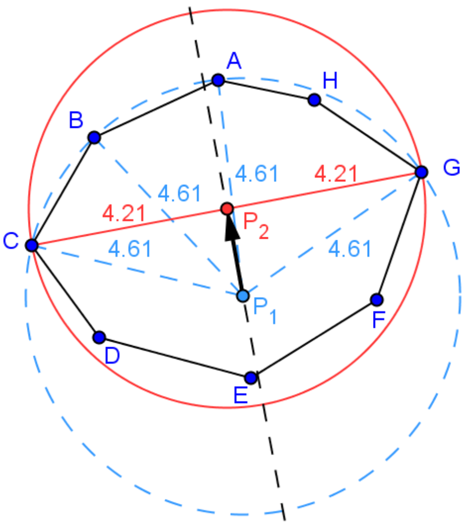


圖 4.把 F 之位置往外拉到 F’ ，動點只能到達 P_2’

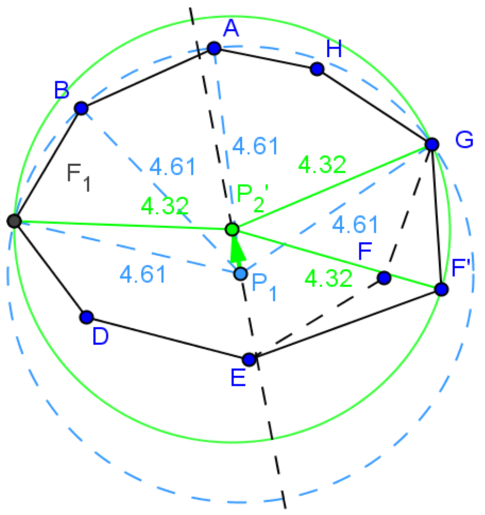
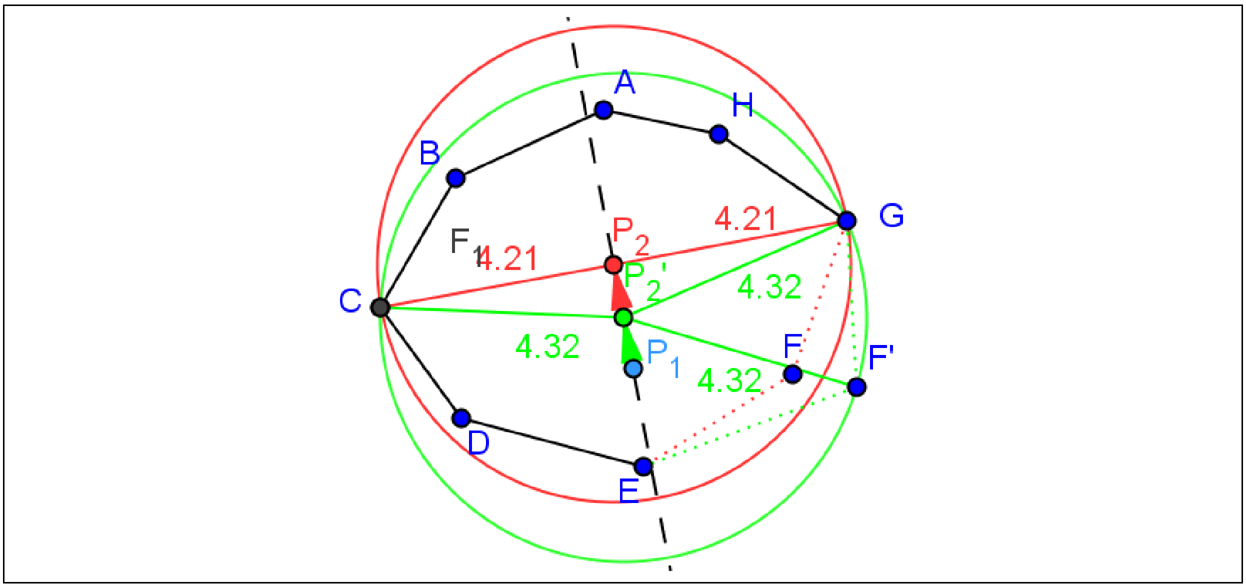


圖 5.任意多邊形最佳位置的兩種情況



研究 5 ：程式設計與實際應用

5-1 程式設計

當多邊形的邊數越多，在尋找最佳位置時，需要考慮的三角形也越多，計算就越困難。以八邊形為例，我們就要考慮 56 個三角形了。因此，我們需要利用程式模擬，以加快計算的速度。在設計程式之前，我們需要一些解析幾何的相關基礎。(詳閱附錄 1)

以下是我們程式的簡單介紹以及設計圖(程式碼見附錄 3)：

(1) 程式開始時，要先輸入多邊形點數及點坐標。

(2) 程式會依序找出三點形成三角形，利用坐標，則可以找出邊長。

(3) 再利用三邊長之平方的大小關係，即能分辨三角形類型(銳角三角形、鈍角三角形、直角三角形)。

(4) 把銳角三角形分為一類(最佳位置在外心)，鈍角直角三角形分為一類(最佳位置在對邊中點上)。

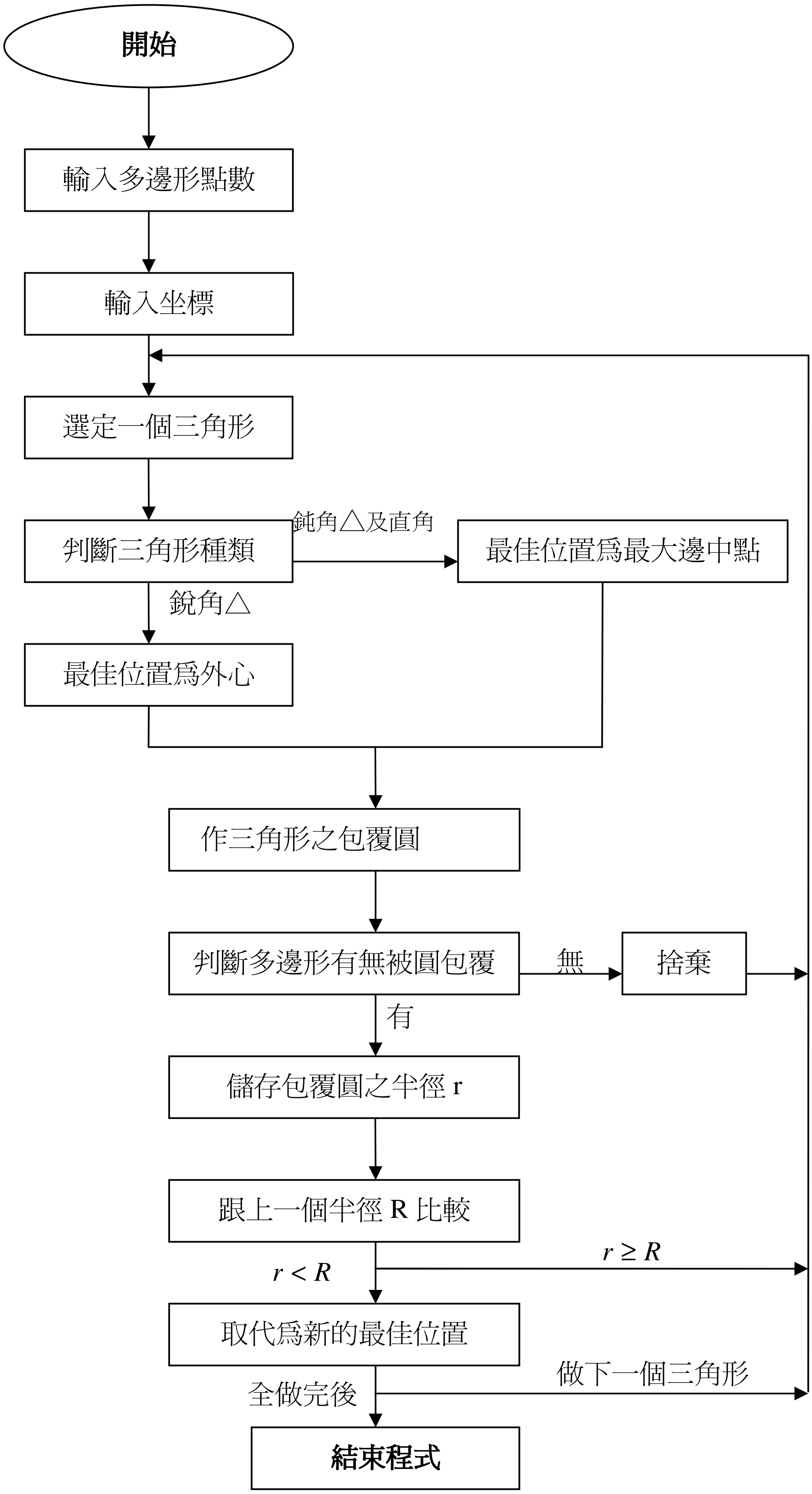
(5) 鈍角與直角三角形能由“中點坐標公式”找出最大邊的中點。(附錄 1)

(6) 銳角三角形，則是依“三角形外心公式”找出外心。(附錄 2)

(7) 找出最佳位置以後利用“兩點距離公式”找出此三角形最佳位置至最遠點距離(此距離則是後來的圓半徑)。

(8) 再以此為半徑畫圓，判斷整個多邊形有無被圓包覆住，如沒有，則不採用此點；如有包覆，則取代為新的最佳點。

(9) 重複此動作直到所有三角形都被計算過，其中若有包覆住整個多邊形且半徑小於上一個最佳位置的包覆圓之半徑，則取代上一點之坐標。意即比較半徑之大小，較小的保留，做完後，則會留下最佳位置，以及最小的半徑。


開始
輸入多邊形點數
輸入坐標
選定一個三角形
判斷三角形種類
鈍角△及直角
最佳位置為最大邊中點
銳角△
最佳位置為外心
作三角形之包覆圓
判斷多邊形有無被圓包覆
無
捨棄
有
儲存包覆圓之半徑 r
跟上一個半徑 R 比較
r ≥ R
r < R
取代為新的最佳位置
做下一個三角形
全做完後
結束程式

伍、研究結果

總括以上討論，我們歸納出以下重點：

一、三角形

(一) 銳角三角形最佳位置在外心上(三角形內部)。

(二) 直角三角形最佳位置在外心上(斜邊中點上)。

(三) 鈍角三角形最佳位置在最大邊中點上。

二、四邊形

二－1、頂點共圓之四邊形

(一) 若四邊形頂點共圓，而其外心落在四邊形內或邊上，則其最佳位置將落在四邊形的外心上。

(二) 若四邊形頂點共圓，而其外心落在四邊形以外，則其最佳位置將落在四邊形最大邊的中點上。

二－2、頂點不共圓之四邊形

(一) OOA 型四邊形，其最佳位置位於兩鈍角所對之對角線中點上。

(二) ORA 型四邊形，其最佳位置位於鈍角及直角所對之對角線中點上。

(三) OAA 型四邊形，其最佳位置位於銳角三角形的外心上。

(四) OAO 型四邊形，其最佳位置位於四邊形中最大邊的中點上。

(五) OAR 型四邊形，其最佳位置位於直角所對對邊中點上。

三、任意凸多邊形

三－1 頂點共圓之多邊形

(一) 若多邊形頂點共圓，而其外心落在多邊形內或邊上，則最佳位置將落在多邊形的外心上。

(二) 若多邊形頂點共圓，而其外心落在多邊形以外，則最佳位置將落在多邊形最大邊的中點上。

三－2 頂點不共圓之多邊形

(一) 任意多邊形之最佳位置必落於組成多邊形的其中一個三角形的最佳位置上。

(二) 若組成多邊形的某三角形的最佳位置為所求，則其包覆圓也必能把整個多邊形包覆。

三－2－1 多邊形中最佳包覆圓的兩種情況

(一) 只有兩點落在圓上，最佳位置位於此兩點之中點上(也就是鈍角三角形的最佳位置)。

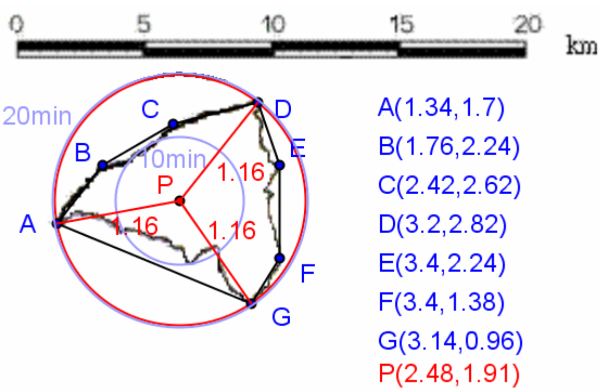
(二) 至少三點落在圓上，最佳位置為其中任意三點之外心上(也就是銳角或直角三角形的最佳位置)。

陸、討論

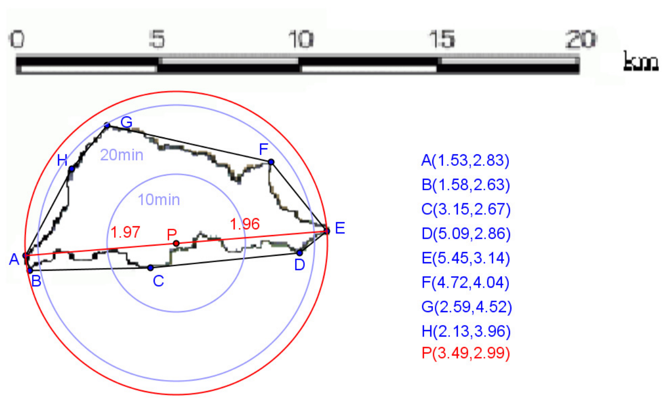
到目前為止，以我們對多邊形最佳位置性質的了解加上我們的程式工具，我們絕對有能力找出任何凸多邊形的最佳位置。所以對於任意一個鄉鎮市，若滿足我們當初訂立的基本假設，也必能被應用。

在桃園縣中，我們以觀音鄉與新屋鄉為例，找出它們的最佳位置。選擇它們的原因在於這兩個地方同時具有面積不大、地形平坦、交通情況簡單、可近似成凸多邊形等與我們的基本假設相符合的特點。

1.觀音鄉



2.新屋鄉



如上圖，我們先利用 GeoGebra，找出近似地圖之凸多邊形各點坐標，把坐標輸入到程式中進行運算，再把計算出來的最佳位置坐標輸入到 GeoGebra，再估計自行車每 10min 可到達之範圍，標示於圖上。由圖，我們發現觀音鄉與新屋鄉的最佳位置到最遠點時程都不超過 25min。由此，說明我們尋找最佳位置的準則真正符合實際效益。

自行車每 10min 騎乘半徑的估計方法：一般平均自行車的騎乘速度約爲 15~20km/h，若以 15km/h 來估計，騎乘 10min 的里程數大約爲 2.5km。

柒、結論

我們是應屆畢業生，高中職社區化才是我們切身的問題，也是莘莘學子們的希望。但是桃園縣有若干鄉鎮連一所公立高中職都沒有，所以要實現此希望猶如緣木求魚。針對本縣無公立高中職的觀音鄉、新屋鄉實際運用研究結果，分別找出這兩個鄉鎮最能照顧到全體鄉民的學校最佳設立位置。但願這一結果有助於本縣教育單位設校的考量依據。

由觀音鄉與新屋鄉的實例中可以看出，我們對最佳位置的估計，對於符合基本假設之任意凸多邊形，都能找到有效合理的答案。因此，此準則可被廣泛應用到設置通訊網路、便利店、服務站台、水庫、醫院、警局等問題上。

在講求服務品質、公平原則和產業建立全球服務脈絡的需求下，服務據點的分佈，必須兼顧周全，主辦者將需要服務的區域框架出來，再使用本研究的結果找出最佳設立地點，一定可讓服務範圍達到需求以上，因此，我們的模型有望解決相關問題。

最後，非常希望這一研究能得到大家的認同及作爲解決問題的參考。

捌、參考資料及其他

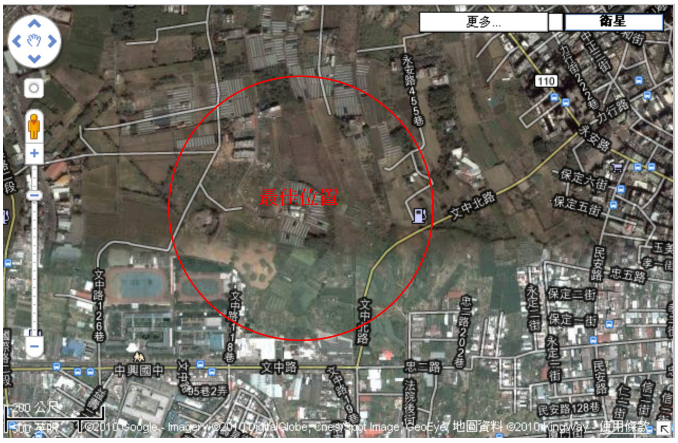
一、參考資料

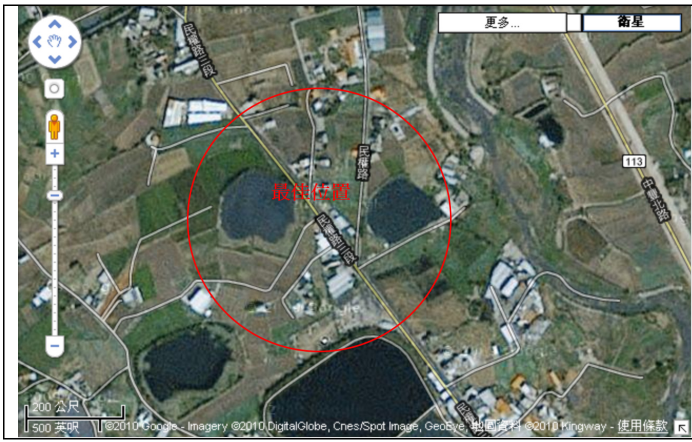
程式設計基礎(2010)。國交通大學如意網站教學網。2010年3月5日，取自 http://yes.nctu.edu.tw/vb/

桃園縣地圖(2010)。google earth。2010 年 3 月 5 日，取自 http://maps.google.com.tw/

聯合報(2009)。聯合報新聞。2009 年 12 月 22 日，取自 http://blog.udn.com/tpa285/3613120

二、附錄

	觀音鄉： 中山路一段 1102 巷附近
	新屋鄉： 新屋鄉 2-5 號池附近
	桃園市： 中興國中後方工廠 文中北路旁



中壢市：
民權路三段與民權路的交叉口附近

【評語】030407

從尋找凸多邊形的〝最佳化位置〞，探討公立高中職的最佳設立點—嘗試從數學的觀點，實現高中職社區化的理念；過程中，除能循序漸進地探討問題，亦能善用電腦軟體來解決問題，是一篇生活化且具應用性的作品，惟因僅限於〝理想〞狀態下討論，致使結果的推廣難免受限。