

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030406

『數字調查局』--- 你不知道的秘密

學校名稱：桃園縣私立六和高級中學(附設國中)

作者： 國二 張庭維 國二 曾康碩 國二 梁駿武 國二 張駿揚	指導老師： 林忠潔 林青昊
---	-----------------------------

關鍵詞：對稱關係、直式減法、特定演算法

摘要

在國中一年級下學期二元一次方程式常見到一道題目『一個二位數的十位數字與個位數字的和為 15，若將這個數的十位數字與個位數字對調位置，則所得的新數比原數小 9，請問原數為何？』。類似這樣的題型有許許多多，但是都探討到四位數之內，因此我們試著將其延伸到多位數，並試著能否找到一定值，並利用這些關係加以編碼，製作數組只有我們才能進行解碼的數字，利用它來傳遞我們之間的小秘密。

本文介紹關於二位數到八位數的證明過程和結果，我們發現只要依循數字之間的大小關係及既定的運算規則即能得一定值。利用這種關係可將轉換成文字，用來編碼及解碼。

壹、 研究動機

有一天在圖書館裡，我無意間翻到了『**數學 fun 輕鬆**』。這一本書翻著翻著我看見了一篇叫做 1089 的文章，作者說將一個三位數 ABC ($A \neq C$) 調換變成 CBA，兩數相減取絕對值之後得一數 X。將 X 前後調換得另一數 Y，最後將(X)加上(Y)，就會恆等於 1089。這種題型經常出現在國中一年級下學期『二元一次聯立方程式』這個單元，如下：

【例子】：有一個三位數為 792，調換變成 297，二數相減為 495，再將 495 調換成 594 最後兩數相加就成為 1089。而這一篇看似簡單有趣的文章可是花了我不少時間去想證明，但我愈是證明不出來，我就愈想知道結果。我就只好帶著一大堆的問號到學校找老師，老師用一個簡單的直式就證明出來了。我們雖然已經知道三位數的證明了，但老師覺得這個問題很有趣，值得繼續研究，四位數、五位數、六位數……等。我們雖然覺得這很難，但是老師說就是這樣才值得我們去研究。這就是我們的研究動機。

大家在國中小學課程或是在高中的課程都有可能看過某種程度的數學證明題目，但是究竟要怎麼來證明呢？最後解出來的答案是否正確無誤？數學解題最重要的方法就不斷努力創新和發展。本文每道證明過程都有附一條規則，如果想知道怎麼找出規則，就請翻下一頁吧！

792	任取一個百位數字與個位數字不同的三位數
297	再將此數前後顛倒
$792 - 297 = 495$	算出兩數的差 X
594	將X對調得一數Y
$495 + 594 = 1089$	X 與 Y 的和恆為1089

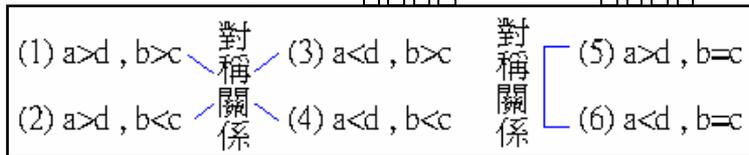
(二) 若 $a < c$ ，則：

	c-1	b-1	10
	c	b	a
-	a	b	c
	c-1-a	9	10+a-c

	c-1-a	9	10+a-c
+	10+a-c	9	c-1-a
	1	0	8
			9

結論：將任一三位數前後對調後兩數相減得一數 X，再將 X 前後對調得另一數 Y，則 $X + Y$ 之值恆為 1089，其中 $1089 = 9 \times 11 \times 11$ 。

三、 四位數的關係：設此四位數字為 \overline{abcd} ，新數為 \overline{dcba} ，其中 $a \neq d$



(一) (1)、(4) 成對稱關係，在此僅證明(1)

原數 - 新數 = X

	b-1	c-1	10
	a	b	c
-	d	c	b
	a-d	b-1-c	c+9-b
			d+10-a

X+Y :

	a-d	b-1-c	c+9-b	d+10-a
+	d+10-a	c+9-b	b-1-c	a-d
	1	0	8	9
				0

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值 10890 = 9 × 11 × 110

(二) (2)、(3) 成對稱關係，在此僅證明(3)

原數 - 新數 = X

	d-1	10	b-1	10
	d	c	b	a
-	a	b	c	d
	d-1-a	c+10-b	b-1-c	a+10-d

X+Y :

	d-1-a	c+10-b	b-1-c	a+10-d
+	a+10-d	b-1-c	c+10-b	d-1-a
	9	9	9	9

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值 9999 = 9 × 11 × 101

(三) (5)、(6) 成對稱關係，在此僅證明(5)

原數 - 新數 = X

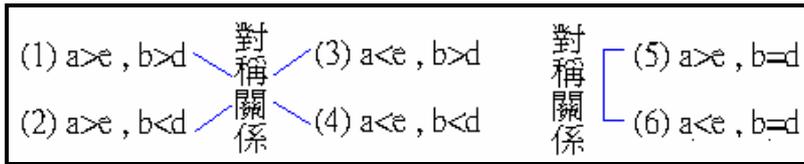
	a-1	b-1	c-1	10
	a	b	c	d
-	d	c	b	a
	a-1-d	9	9	d+10-a

X+Y :

	a-1-d	9	9	d+10-a
+	d+10-a	9	9	a-1-d
	1	0	9	8
				9

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值 10989 = 9 × 11 × 101

四、五位數的關係：設此五位數字為 \overline{abcde} ，新數為 \overline{edcba} ，其中 $a \neq e$



(一) (1)、(4) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a > e, b > d$: 原數 - 新數 = X

		b-1	c-1	d-1	10
	a	b	c	d	e
-	e	d	c	b	a
	a-e	b-1-d	9	d+9-b	e+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109890 = 9 \times 11 \times 1110$

	a-e	b-1-d	9	d+9-b	e+10-a
+	e+10-a	d+9-b	9	b-1-d	a-e
	1	0	9	8	9

(二) (2)、(3) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a > e, b < d$: 原數 - 新數 = X

	a-1	10		d-1	10
	a	b	c	d	e
-	e	d	c	b	a
	a-1-e	b+10-d	0	d-1-b	e+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $99099 = 9 \times 11 \times 1001$

	a-1-e	b+10-d	0	d-1-b	e+10-a
+	e+10-a	d-1-b	0	b+10-d	a-1-e
	9	9	0	9	9

(三) (5)、(6) 成對稱關係，在此僅證明(5)

(5) $a > e, b = d$: 原數 - 新數 = X

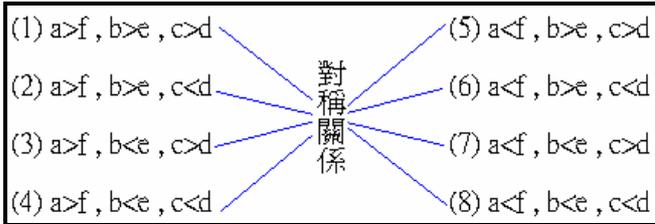
	a-1	b-1	c-1	d-1	10
	a	b	c	d	e
-	e	d	c	b	a
	a-1-e	9	9	9	e+10-a

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109989=9\times 11\times 1111$

	$a-1-e$	9	9	9	$e+10-a$
+	$e+10-a$	9	9	9	$a-1-e$
	1	0	9	9	8
					9

五、 六位數的關係：設此六位數字為 \overline{abcdef} ，新數為 \overline{fedcba} ，其中 $a \neq f$

(一) 若無任一組有等號出現時，可能出現關係：



1. (1)、(8) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a > f, b > e, c > d$ ：原數－新數 = X

			$c-1$	$d-1$	$e-1$	10
	a	b	c	d	e	f
－	f	e	d	c	b	a
	$a-f$	$b-e$	$c-1-d$	$d+9-c$	$e+9-b$	$f+10-a$

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $1098900=9\times 11\times 11100$

	$a-f$	$b-e$	$c-1-d$	$d+9-c$	$e+9-b$	$f+10-a$
+	$f+10-a$	$e+9-b$	$d+9-c$	$c-1-d$	$b-e$	$a-f$
	1	0	9	8	9	0
						0

2. (2)、(7) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a > f, b > e, c < d$ ：原數－新數 = X

		$b-1$	10	$d-1$	$e-1$	10
	a	b	c	d	e	f
－	f	e	d	c	b	a
	$a-f$	$b-1-e$	$c+10-d$	$d-1-c$	$e+9-b$	$f+10-a$

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $1089990=9\times 11\times 11010$

	$a-f$	$b-1-e$	$c+10-d$	$d-1-c$	$e+9-b$	$f+10-a$
+	$f+10-a$	$e+9-b$	$d-1-c$	$c+10-d$	$b-1-e$	$a-f$
	1	0	8	9	9	9
						0

3. (3)、(6) 成對稱關係，在此僅證明(3)

(3) $a > f, b < e, c > d$: 原數 - 新數 = X

	a-1	10	c-1	10	e-1	10
	a	b	c	d	e	f
-	f	e	d	c	b	a
	a-1-f	b+10-e	c-1-d	d+10-c	e-1-b	f+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $999999 = 9 \times 11 \times 10101$

	a-1-f	b+10-e	c-1-d	d+10-c	e-1-b	f+10-a
+	f+10-a	e-1-b	d+10-c	c-1-d	b+10-e	a-1-f
	9	9	9	9	9	9

4. (4)、(5) 成對稱關係，在此僅證明(4)

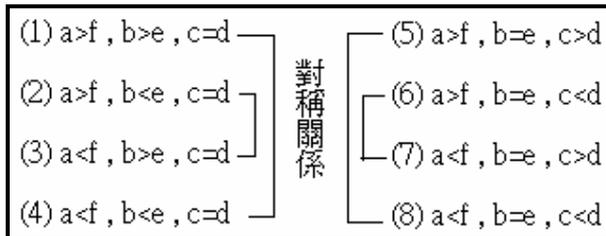
(4) $a > f, b < e, c < d$: 原數 - 新數 = X

	a-1	b-1	10	e-1	10
	a	b	c	d	e
-	f	e	d	c	b
	a-1-f	b+9-e	c+10-d	d-c	e-1-b
	f+10-a				
	a-1-f	b+9-e	c+10-d	d-c	e-1-b
	f+10-a				

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $991089 = 9 \times 11 \times 10011$

	a-1-f	b+9-e	c+10-d	d-c	e-1-b	f+10-a
+	f+10-a	e-1-b	d-c	c+10-d	b+9-e	a-1-f
	9	9	1	0	8	9

(二) 若有任一組 ($b=e$ 或 $c=d$) 出現時，可能出現關係：



1. (1)、(4) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a > f, b > e, c = d$: 原數 - 新數 = X (4) $a < f, b < e, c = d$

		b-1	c-1	d-1	e-1	10
	a	b	c	d	e	f
-	f	e	d	c	b	a
	a-f	b-1-e	9	9	e+9-b	f+10-a

$X+Y$ ($Y=$ 將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $1099890=9\times 11\times 11110$

	$a-f$	$b-1-e$	9	9	$e+9-b$	$f+10-a$
+	$f+10-a$	$e+9-b$	9	9	$b-1-e$	$a-f$
	1	0	9	9	8	9

2. (2)、(3) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a>f, b<e, c=d$: 原數 - 新數 = X (3) $a<f, b>e, c=d$

	$a-1$	10			$e-1$	10
	a	b	c	d	e	f
-	f	e	d	c	b	a
	$a-1-f$	$b+10-e$	0	0	$e-1-b$	$f+10-a$

$X+Y$ ($Y=$ 將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $990099=9\times 11\times 10001$

	$a-1-f$	$b+10-e$	0	0	$e-1-b$	$f+10-a$
+	$f+10-a$	$e-1-b$	0	0	$b+10-e$	$a-1-f$
	9	9	0	0	9	9

3. (5)、(8) 成對稱關係，在此僅證明(5)

(5) $a>f, b=e, c>d$: 原數 - 新數 = X (8) $a<f, b=e, c<d$

			$c-1$	$d-1$	$e-1$	10
	a	b	c	d	e	f
-	f	e	d	c	b	a
	$a-f$	0	$c-1-d$	$d+9-c$	9	$f+10-a$

$X+Y$ ($Y=$ 將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $1098900=9\times 11\times 11100$

	$a-f$	0	$c-1-d$	$d+9-c$	9	$f+10-a$
+	$f+10-a$	9	$d+9-c$	$c-1-d$	0	$a-f$
	1	0	9	8	9	0

4. (6)、(7) 成對稱關係，在此僅證明(6)

(6) $a>f, b=e, c<d$: 原數 - 新數 = X (7) $a<f, b=e, c>d$

	$a-1$	$b-1$	10	$d-1$	$e-1$	10
	a	b	c	d	e	f
-	f	e	d	c	b	a
	$a-1-f$	9	$c+10-d$	$d-1-c$	9	$f+10-a$

$X+Y$ ($Y=$ 將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $1090089=9\times 11\times 11011$

	$\overline{a-1-f}$	9	$\overline{c+10-d}$	$\overline{d-1-c}$	9	$\overline{f+10-a}$
+	$\overline{f+10-a}$	9	$\overline{d-1-c}$	$\overline{c+10-d}$	9	$\overline{a-1-f}$
	1	0	9	0	0	8
						9

(三) 若有任兩組 ($b=e$ 且 $c=d$) 同時出現時，可能出現關係：

(1) $a>f, b=e, c=d$ (2) $a<f, b=e, c=d$ 此兩種情形彼此成對稱關係，在此僅證明(1)。

1. $|原數 - 新數| = X$

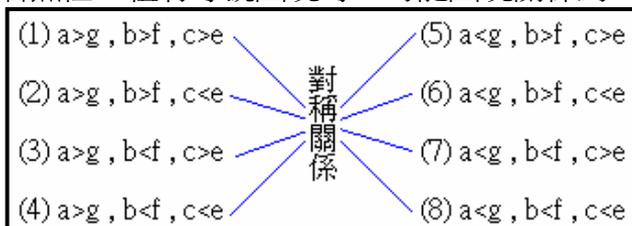
	$a-1$	$b-1$	$c-1$	$d-1$	$e-1$	10
	\overline{a}	\overline{b}	\overline{c}	\overline{d}	\overline{e}	\overline{f}
-	\overline{f}	\overline{e}	\overline{d}	\overline{c}	\overline{b}	\overline{a}
	$\overline{a-1-f}$	9	9	9	9	$\overline{f+10-a}$

$X+Y$ ($Y=$ 將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $1099989 = 9 \times 11 \times 11111$

	$\overline{a-1-f}$	9	9	9	9	$\overline{f+10-a}$
+	$\overline{f+10-a}$	9	9	9	9	$\overline{a-1-f}$
	1	0	9	9	9	8
						9

六、七位數的關係：設此七位數字為 $\overline{a|b|c|d|e|f|g}$ ，新數為 $\overline{g|f|e|d|c|b|a}$ ，其中 $a \neq g$

(一) 若無任一組有等號出現時，可能出現關係為：



1. (1)、(8) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a>g, b>f, c>e$: $原數 - 新數 = X$ (8) $a<g, b<f, c<e$

		$c-1$	$d-1$	$e-1$	$f-1$	10
	\overline{a}	\overline{b}	\overline{c}	\overline{d}	\overline{e}	\overline{f}
-	\overline{g}	\overline{f}	\overline{e}	\overline{d}	\overline{c}	\overline{b}
	$\overline{a-g}$	$\overline{b-f}$	$\overline{c-1-e}$	9	$\overline{e+9-c}$	$\overline{f+9-b}$
						$\overline{g+10-a}$

$X+Y$ ($Y=$ 將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $10998900 = 9 \times 11 \times 111100$

	$\overline{a-g}$	$\overline{b-f}$	$\overline{c-1-e}$	9	$\overline{e+9-c}$	$\overline{f+9-b}$	$\overline{g+10-a}$
+	$\overline{g+10-a}$	$\overline{f+9-b}$	$\overline{e+9-c}$	9	$\overline{c-1-e}$	$\overline{b-f}$	$\overline{a-g}$
	1	0	9	9	8	9	0
							0

2. (2)、(7) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a>g, b>f, c<e$: $原數 - 新數 = X$ (7) $a>g, b<f, c<e$

		b-1	10		e-1	f-1	10
	a	b	c	d	e	f	g
-	g	f	e	d	c	b	a
	a-g	b-1-f	c+10-e	0	e-1-c	f+9-b	g+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 10890990=9×11×110010

	a-g	b-1-f	c+10-e	0	e-1-c	f+9-b	g+10-a
+	g+10-a	f+9-b	e-1-c	0	c+10-e	b-1-f	a-g
	1	0	8	9	0	9	9

3. (3)、(6) 成對稱關係，在此僅證明(3)

(3) a>g, b<f, c>e : 原數-新數=X (6) a<g, b>f, c<e

	a-1	10	c-1	d-1	10	f-1	10
	a	b	c	d	e	f	g
-	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-g	b+10-f	c-1-e	9	e+10-c	f-1-b	g+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 10008999=9×11×101101

	a-1-g	b+10-f	c-1-e	9	e+10-c	f-1-b	g+10-a
+	g+10-a	f-1-b	e+10-c	9	c-1-e	b+10-f	a-1-g
	1	0	0	0	8	9	9

4. (4)、(5) 成對稱關係，在此僅證明(4)

(4) a>g, b<f, c<e : 原數-新數=X (5) a<g, b>f, c>e

	a-1	b-1	10		f-1	10
	a	b	c	d	e	f
-	g	f	e	d	c	b
	a-1-g	b+9-f	c+10-e	0	e-c	f-1-b

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 9901089=9×11×100011

	a-1-g	b+9-f	c+10-e	0	e-c	f-1-b	g+10-a
+	g+10-a	f-1-b	e-c	0	c+10-e	b+9-f	a-1-g
	9	9	0	1	0	8	9

(二) 若有任一組 (b=e 或 c=d) 出現時，可能出現關係為：

(1) $a > g, b > f, c = e$	對稱關係	(5) $a > g, b = f, c > e$
(2) $a > g, b < f, c = e$		(6) $a > g, b = f, c < e$
(3) $a < g, b > f, c = e$		(7) $a < g, b = f, c > e$
(4) $a < g, b < f, c = e$		(8) $a < g, b = f, c < e$

1. (1)、(4) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a > g, b > f, c = e$: 原數 - 新數 = X (4) $a < g, b < f, c = e$

	b-1	c-1	d-1	e-1	f-1	10	
-	a	b	c	d	e	f	g
	g	f	e	d	c	b	a
	a-g	b-1-f	9	9	9	f+9-b	g+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $10999890 = 9 \times 11 \times 111110$

	a-g	b-1-f	9	9	9	f+9-b	g+10-a	
+	g+10-a	f+9-b	9	9	9	b-1-f	a-g	
	1	0	9	9	9	8	9	0

2. (2)、(3) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a > g, b < f, c = e$: 原數 - 新數 = X (3) $a < g, b > f, c = e$

	a-1	10				f-1	10
-	a	b	c	d	e	f	g
	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-g	b+10-f	0	0	0	f-1-b	g+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $9900099 = 9 \times 11 \times 100001$

	a-1-g	b+10-f	0	0	0	f-1-b	g+10-a
+	g+10-a	f-1-b	0	0	0	b+10-f	a-1-g
	9	9	0	0	0	9	9

3. (5)、(8) 成對稱關係，在此僅證明(5)

(5) $a > g, b = f, c > e$: 原數 - 新數 = X (8) $a < g, b = f, c < e$

		c-1	d-1	e-1	f-1	10	
-	a	b	c	d	e	f	g
	g	f	e	d	c	b	a
	a-g	0	c-1-e	9	e+9-c	9	g+10-a

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $10998900=9\times 11\times 111100$

	$a-g$	0	$c-1-e$	9	$e+9-c$	9	$g+10-a$
+	$g+10-a$	9	$e+9-c$	9	$c-1-e$	0	$a-g$
	1	0	9	9	8	9	0

4. (6)、(7) 成對稱關係，在此僅證明(6)

(6) $a>g, b=f, c<e$: 原數 - 新數 = X (7) $a<g, b=f, c>e$

	$a-1$	$b-1$	10		$e-1$	$f-1$	10
	a	b	c	d	e	f	g
-	g	f	e	d	c	b	a
	$a-1-g$	9	$c+10-e$	0	$e-1-c$	9	$g+10-a$

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $10891089=9\times 11\times 110011$

	$a-1-g$	9	$c+10-e$	0	$e-1-c$	9	$g+10-a$
+	$g+10-a$	9	$e-1-c$	0	$c+10-e$	9	$a-1-g$
	1	0	8	9	1	0	8

(三) 若有任兩組 ($b=f$ 且 $c=e$) 同時出現時，可能出現關係：

(1) $a>g, b=f, c=e$ (2) $a<g, b=f, c=e$ ，而此兩種情形彼此成對稱關係，在此僅證明(1)。

1. 原數 - 新數 = X

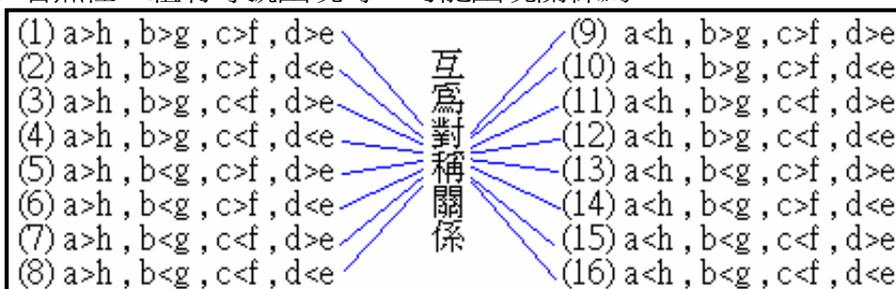
	$a-1$	$b-1$	$c-1$	$d-1$	$e-1$	$f-1$	10
	a	b	c	d	e	f	g
-	g	f	e	d	c	b	a
	$a-1-g$	9	9	9	9	9	$g+10-a$

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $10999989=9\times 11\times 111111$

	$a-1-g$	9	9	9	9	9	$g+10-a$
+	$g+10-a$	9	9	9	9	9	$a-1-g$
	1	0	9	9	9	9	8

七、 八位數的關係：設此八位數字為 $\overline{a b c d e f g h}$ ，新數為 $\overline{h g f e d c b a}$ ，其中 $a \neq h$

(一) 若無任一組有等號出現時，可能出現關係為：



1. (1)、(16) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a>h, b>g, c>f, d>e$: 設 原數 - 新數 = X (8) $a<h, b<g, c<f, d<e$

				d-1	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-g	c-f	d-1-e	e+9-d	f+9-c	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109989000=9 \times 11 \times 1111000$

	a-h	b-g	c-f	d-1-e	e+9-d	f+9-c	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	f+9-c	e+9-d	d-1-e	c-f	b-g	a-h
	1	0	9	9	8	9	0	0

2. (2)、(15) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a>h, b>g, c>f, d<e$: 設 原數 - 新數 = X (8) $a<h, b<g, c<f, d>e$

			c-1	10	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-g	c-1-f	d+10-e	e-1-d	f+9-c	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109899900=9 \times 11 \times 1110100$

	a-h	b-g	c-1-f	d+10-e	e-1-d	f+9-c	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	f+9-c	e-1-d	d+10-e	c-1-f	b-g	a-h
	1	0	9	8	9	9	9	0

3. (3)、(14) 成對稱關係，在此僅證明(3)

(3) $a>h, b>g, c<f, d>e$: 設 原數 - 新數 = X (8) $a<h, b<g, c>f, d<e$

		b-1	10	d-1	10	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-1-g	c+10-f	d-1-e	e+10-d	f-1-c	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $108999990=9 \times 11 \times 1101010$

	a-h	b-1-g	c+10-f	d-1-e	e+10-d	f-1-c	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	f-1-c	e+10-d	d-1-e	c+10-f	b-1-g	a-h
	1	0	8	9	9	9	9	0

4. (4)、(13) 成對稱關係，在此僅證明(4)

(4) $a>h, b>g, c<f, d<e$: 設 原數 - 新數 = X (8) $a<h, b<g, c>f, d>e$

		b-1	c-1	10		f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-1-g	c+9-f	d+10-e	e-d	f-1-c	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 108910890 = 9×11×1100110

	a-h	b-1-g	c+9-f	d+10-e	e-d	f-1-c	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	f-1-c	e-d	d+10-e	c+9-f	b-1-g	a-h
	1	0	8	9	1	0	8	9

5. (5)、(12) 成對稱關係，在此僅證明(5)

(5) $a>h, b<g, c>f, d>e$: 設 |原數-新數| = X (8) $a<h, b>g, c<f, d<e$

	a-1	10		d-1	e-1	10	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+10-g	c-f	d-1-e	e+9-d	f+10-c	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 100089099 = 9×11×1011001

	a-1-h	b+10-g	c-f	d-1-e	e+9-d	f+10-c	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	f+10-c	e+9-d	d-1-e	c-f	b+10-g	a-1-h
	1	0	0	0	8	9	0	9

6. (6)、(11) 成對稱關係，在此僅證明(6)

(6) $a>h, b<g, c>f, d<e$: 設 |原數-新數| = X (11) $a<h, b>g, c<f, d>e$

	a-1	10	c-1	10	e-1	10	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+10-g	c-1-f	d+10-e	e-1-d	f+10-c	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 99999999 = 9×11×1010101

	a-1-h	b+10-g	c-1-f	d+10-e	e-1-d	f+10-c	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	f+10-c	e-1-d	d+10-e	c-1-f	b+10-g	a-1-h
	9	9	9	9	9	9	9	9

7. (7)、(10) 成對稱關係，在此僅證明(7)

(7) $a>h, b<g, c<f, d>e$: 設 |原數-新數| = X (10) $a<h, b>g, c>f, d<e$

	a-1	b-1	10	d-1	10		g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+9-g	c+10-f	d-1-e	e+10-d	f-c	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 99100089=9×11×1001011

	a-1-h	b+9-g	c+10-f	d-1-e	e+10-d	f-c	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	f-c	e+10-d	d-1-e	c+10-f	b+9-g	a-1-h
	9	9	1	0	0	0	8	9

8. (8)、(9) 成對稱關係，在此僅證明(8)

(8) $a>h, b<g, c<f, d<e$: 設 原數-新數 = X (9) $a<h, b>g, c>f, d>e$

	a-1	b-1	c-1	10		g-1	10	
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+9-g	c+9-f	d+10-e	e-d	f-c	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 99010989=9×11×1000111

	a-1-h	b+9-g	c+9-f	d+10-e	e-d	f-c	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	f-c	e-d	d+10-e	c+9-f	b+9-g	a-1-h
	9	9	0	1	0	9	8	9

(二) 若有任一組 ($b=g$ 或 $c=f$ 或 $d=e$) 出現時，可能出現關係為：

互為對稱關係				互為對稱關係			
(1) $a>h, b>g, c>f, d=e$	(9) $a>h, b>g, c=f, d>e$	(17) $a>h, b=g, c>f, d>e$					
(2) $a>h, b>g, c<f, d=e$	(10) $a>h, b>g, c=f, d<e$	(18) $a>h, b=g, c>f, d<e$					
(3) $a>h, b<g, c>f, d=e$	(11) $a>h, b<g, c=f, d>e$	(19) $a>h, b=g, c<f, d>e$					
(4) $a>h, b<g, c<f, d=e$	(12) $a>h, b<g, c=f, d<e$	(20) $a>h, b=g, c<f, d<e$					
(5) $a<h, b>g, c>f, d=e$	(13) $a<h, b>g, c=f, d>e$	(21) $a<h, b=g, c>f, d>e$					
(6) $a<h, b>g, c<f, d=e$	(14) $a<h, b>g, c=f, d<e$	(22) $a<h, b=g, c>f, d<e$					
(7) $a<h, b<g, c>f, d=e$	(15) $a<h, b<g, c=f, d>e$	(23) $a<h, b=g, c<f, d>e$					
(8) $a<h, b<g, c<f, d=e$	(16) $a<h, b<g, c=f, d<e$	(24) $a<h, b=g, c<f, d<e$					

1. (1)、(8) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a>h, b>g, c>f, d=e$: 設 原數-新數 = X (8) $a<h, b<g, c<f, d=e$

		c-1	d-1	e-1	f-1	g-1	10	
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-g	c-1-f	9	9	f+9-c	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 109998900=9×11×1111100

	a-h	b-g	c-1-f	9	9	f+9-c	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	f+9-c	9	9	c-1-f	b-g	a-h
	1	0	9	9	9	8	9	0

2. (2)、(7) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a>h, b>g, c<f, d=e$: 設 |原數-新數| = X (7) $a<h, b<g, c>f, d=e$

	a	b-1	10	d	e	f-1	g-1	10
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-1-g	c+10-f	0	0	f-1-c	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $108900990 = 9 \times 11 \times 1100010$

	a-h	b-1-g	c+10-f	0	0	f-1-c	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	f-1-c	0	0	c+10-f	b-1-g	a-h
	1	0	8	9	0	0	9	9

3. ((3)、(6) 成對稱關係，在此僅證明(3)

(3) $a>h, b<g, c>f, d=e$: 設 |原數-新數| = X (6) $a<h, b>g, c<f, d=e$

	a-1	10	c-1	d-1	e-1	10	g-1	10
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+10-g	c-1-f	9	9	f+10-c	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $100098999 = 9 \times 11 \times 1011101$

	a-1-h	b+10-g	c-1-f	9	9	f+10-c	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	f+10-c	9	9	c-1-f	b+10-g	a-1-h
	1	0	0	0	9	8	9	9

4. (4)、(5) 成對稱關係，在此僅證明(4)

(4) $a>h, b<g, c<f, d=e$: 設 |原數-新數| = X (5) $a<h, b>g, c>f, d=e$

	a-1	b-1	10	d	e	f	g-1	10
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+9-g	c+10-f	0	0	f-c	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $99001089 = 9 \times 11 \times 1000011$

	a-1-h	b+9-g	c+10-f	0	0	f-c	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	f-c	0	0	c+10-f	b+9-g	a-1-h
	9	9	0	0	1	0	8	9

5. (9)、(16) 成對稱關係，在此僅證明(9)

(9) $a>h, b>g, c=f, d>e$: 設 |原數-新數| = X (16) $a<h, b<g, c=f, d<e$

	a	b	c	d-1	e-1	f-1	g-1	10
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-g	0	d-1-e	e+9-d	9	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109989000 = 9 \times 11 \times 1111000$

	a-h	b-g	0	d-1-e	e+9-d	9	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	9	e+9-d	d-1-e	0	b-g	a-h
	1	0	9	9	8	9	0	0

6. (10)、(15) 成對稱關係，在此僅證明(10)

(10) $a>h, b>g, c=f, d<e$: 設 |原數-新數| = X (15) $a<h, b<g, c=f, d>e$

	a	b-1	c-1	10	e-1	f-1	g-1	10
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-1-g	9	d+10-e	e-1-d	9	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109900890 = 9 \times 11 \times 1110110$

	a-h	b-1-g	9	d+10-e	e-1-d	9	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	9	e-1-d	d+10-e	9	b-1-g	a-h
	1	0	9	9	0	0	8	9

7. (11)、(14) 成對稱關係，在此僅證明(11)

(11) $a>h, b<g, c=f, d>e$: 設 |原數-新數| = X (14) $a<h, b>g, c=f, d<e$

	a-1	10	c	d-1	10	f	g-1	10
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+10-g	0	d-1-e	e+10-d	0	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $99099099 = 9 \times 11 \times 1001001$

	a-1-h	b+10-g	0	d-1-e	e+10-d	0	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	0	e+10-d	d-1-e	0	b+10-g	a-1-h
	9	9	0	9	9	0	9	9

8. (12)、(13) 成對稱關係，在此僅證明(12)

(12) $a > h, b < g, c = f, d < e$: 設 |原數 - 新數| = X (13) $a < h, b > g, c = f, d > e$

	a-1	b-1	c-1	10			g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+9-g	9	d+10-e	e-d	0	g-1-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 99010989 = 9×11×1000111

	a-1-h	b+9-g	9	d+10-e	e-d	0	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	0	e-d	d+10-e	9	b+9-g	a-1-h
	9	9	0	1	0	9	8	9

9. (17)、(24) 成對稱關係，在此僅證明(17)

(17) $a > h, b = g, c > f, d > e$: 設 |原數 - 新數| = X (24) $a < h, b = g, c < f, d < e$

				d-1	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	0	c-f	d-1-e	e+9-d	f+9-c	9	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 109989000 = 9×11×1111000

	a-h	0	c-f	d-1-e	e+9-d	f+9-c	9	h+10-a
+	h+10-a	9	f+9-c	e+9-d	d-1-e	c-f	0	a-h
	1	0	9	9	8	9	0	0

10. (18)、(23) 成對稱關係，在此僅證明(18)

(18) $a > h, b = g, c > f, d < e$: 設 |原數 - 新數| = X (23) $a < h, b = g, c < f, d > e$

			c-1	10	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	0	c-1-f	d+10-e	e-1-d	f+9-c	9	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 109899900 = 9×11×1110100

	a-h	0	c-1-f	d+10-e	e-1-d	f+9-c	9	h+10-a
+	h+10-a	9	f+9-c	e-1-d	d+10-e	c-1-f	0	a-h
	1	0	9	8	9	9	9	0

11. (19)、(22) 成對稱關係，在此僅證明(19)

(19) $a>h, b=g, c<f, d>e$: 設 原數-新數 = X (22) $a<h, b=g, c>f, d<e$

	a-1	b-1	10	d-1	10	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	9	c+10-f	d-1-e	e+10-d	f-1-c	9	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 109000089 = 9×11×1101011

	a-1-h	9	c+10-f	d-1-e	e+10-d	f-1-c	9	h+10-a
+	h+10-a	9	f-1-c	e+10-d	d-1-e	c+10-f	9	a-1-h
	1	0	9	0	0	0	0	8
								9

12. (20)、(21) 成對稱關係，在此僅證明(20)

(20) $a>h, b=g, c<f, d<e$: 設 原數-新數 = X (21) $a<h, b=g, c>f, d>e$

	a-1	b-1	c-1	10		f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	9	c+9-f	d+10-e	e-d	f-1-c	9	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 108910989 = 9×11×1100111

	a-1-h	9	c+9-f	d+10-e	e-d	f-1-c	9	h+10-a
+	h+10-a	9	f-1-c	e-d	d+10-e	c+9-f	9	a-1-h
	1	0	8	9	1	0	9	8
								9

(三) 若有任兩組 ($b=g$ 或 $c=f$ 或 $d=e$) 出現時，可能出現關係為：

互為對稱關係	互為對稱關係	互為對稱關係
(1) $a>h, b>g, c=f, d>e$	(5) $a>h, b=g, c=f, d>e$	(9) $a>h, b=g, c>f, d>e$
(2) $a>h, b<g, c=f, d>e$	(6) $a>h, b=g, c=f, d<e$	(10) $a>h, b=g, c<f, d>e$
(3) $a<h, b>g, c=f, d>e$	(7) $a<h, b=g, c=f, d>e$	(11) $a<h, b=g, c>f, d>e$
(4) $a<h, b<g, c=f, d>e$	(8) $a<h, b=g, c=f, d>e$	(12) $a<h, b=g, c<f, d>e$

1. (1)、(4) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a>h, b>g, c=f, d=e$ (4) $a<h, b<g, c=f, d=e$ 設 原數-新數 = X

		b-1	c-1	d-1	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	b-1-g	9	9	9	9	g+9-b	h+10-a

X+Y (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 109999890 = 9×11×1111110

	a-h	b-1-g	9	9	9	9	g+9-b	h+10-a
+	h+10-a	g+9-b	9	9	9	9	b-1-g	a-h
	1	0	9	9	9	9	8	9

2. (2)、(3) 成對稱關係，在此僅證明(2)

(2) $a > h, b < g, c = f, d = e$: 設 |原數 - 新數| = X (3) $a < h, b > g, c = f, d = e$

	a-1	10					g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	b+10-g	0	0	0	0	g-1-b	h+10-a

$X+Y$ (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $99000099 = 9 \times 11 \times 1000001$

	a-1-h	b+10-g	0	0	0	0	g-1-b	h+10-a
+	h+10-a	g-1-b	0	0	0	0	b+10-g	a-1-h
	9	9	0	0	0	0	9	9

3. (5)、(8) 成對稱關係，在此僅證明(5)

(5) $a > h, b = g, c = f, d > e$: 設 |原數 - 新數| = X (4) $a < h, b = g, c = f, d < e$

			d-1	e-1	f-1	g-1	10	
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	0	0	d-1-e	e+9-d	9	9	h+10-a

$X+Y$ (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109989000 = 9 \times 11 \times 1111000$

	a-h	0	0	d-1-e	e+9-d	9	9	h+10-a
+	h+10-a	9	9	e+9-d	d-1-e	0	0	a-h
	1	0	9	9	8	9	0	0

4. (6)、(7) 成對稱關係，在此僅證明(6)

(6) $a > h, b = g, c = f, d < e$: 設 |原數 - 新數| = X (7) $a < h, b = g, c = f, d > e$

	a-1	b-1	c-1	10	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	9	9	d+10-e	e-1-d	9	9	h+10-a

$X+Y$ (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109900989 = 9 \times 11 \times 1110111$

		a-1-h	9	9	d+10-e	e-1-d	9	9	h+10-a
+		h+10-a	9	9	e-1-d	d+10-e	9	9	a-1-h
	1	0	9	9	0	0	9	8	9

5. (9)、(12) 成對稱關係，在此僅證明(9)

(9) $a>h, b=g, c>f, d=e$: 設 |原數-新數| = X (12) $a<h, b=g, c<f, d=e$

			c-1	d-1	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-h	0	c-1-f	9	9	f+9-c	9	h+10-a

$X+Y$ (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109998900 = 9 \times 11 \times 1111100$

		a-h	0	c-1-f	9	9	f+9-c	9	h+10-a
+		h+10-a	9	f+9-c	9	9	c-1-f	0	a-h
	1	0	9	9	9	8	9	0	0

6. (10)、(11) 成對稱關係，在此僅證明(10)

(10) $a>h, b=g, c<f, d=e$: 設 |原數-新數| = X (11) $a<h, b=g, c>f, d=e$

	a-1	b-1	10			f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	9	c+10-f	0	0	f-1-c	9	h+10-a

$X+Y$ (Y=將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $108901089 = 9 \times 11 \times 1100011$

		a-1-h	9	c+10-f	0	0	f-1-c	9	h+10-a
+		h+10-a	9	f-1-c	0	0	c+10-f	9	a-1-h
	1	0	8	9	0	1	0	8	9

(四) 若三組 ($b=g$ 且 $c=f$ 且 $d=e$) 同時出現時，可能出現關係為：

(1) $a>h, b=g, c=f, d=e$] 互 為 對 稱 關 係
(2) $a<h, b=g, c=f, d=e$	

1. (1)、(2) 成對稱關係，在此僅證明(1)

(1) $a>h, b=g, c=f, d=e$: 設 |原數-新數| = X (2) $a<h, b=g, c=f, d=e$

	a-1	b-1	c-1	d-1	e-1	f-1	g-1	10
	a	b	c	d	e	f	g	h
-	h	g	f	e	d	c	b	a
	a-1-h	9	9	9	9	9	9	h+10-a

$X+Y$ (Y =將 X 對調所得的數) 所得之值恆為 $109999989=9\times 11\times 111111$

	$a-1-h$	9	9	9	9	9	9	$h+10-a$
+	$h+10-a$	9	9	9	9	9	9	$a-1-h$
	1	0	9	9	9	9	9	8

八、由以上證明可知，只要照著規則，所得結果皆為 99 的倍數，而除以 99 之後所得的商皆為由 1 與 0 所組成的數字。以下將會把之前的證明結果加以整理與編碼，作出一個統整的表格出來。

二位數	原數：ab	計算結果	除以 99	編碼
可能情形	(1) $a>b$	99	1	輕聲 •
無等號出現	(2) $a<b$	99	1	輕聲 •

三位數	原數：abc	計算結果	除以 99	編碼
可能情形	(1) $a>c$	1089	11	一聲
無等號出現	(2) $a<c$	1089	11	一聲

四位數	原數：abcd	計算結果	除以 99	編碼
可能情形 無等號出現	(1) $a>d, b>c$	10890	110	二聲 ✓
	(2) $a>d, b<c$	9999	101	三聲 ✓
	(3) $a<d, b>c$	9999	101	三聲 ✓
	(4) $a<d, b<c$	10890	110	二聲 ✓
一個等號 出現	(5) $a>d, b=c$	10989	111	四聲 ✗
	(6) $a<d, b=c$	10989	111	四聲 ✗

五位數	原數：abcde	計算結果	除以 99	編碼
可能情形 無等號出現	(1) $a>e, b>d$	109890	1110	ㄅ
	(2) $a>e, b<d$	99099	1001	ㄆ
	(3) $a<e, b>d$	99099	1001	ㄆ
	(4) $a<e, b<d$	109890	1110	ㄅ
一個等號 出現	(5) $a>e, b=d$	109989	1111	ㄇ
	(6) $a<e, b=d$	109989	1111	ㄇ

六位數	原數：abcdef	計算結果	除以 99	編碼
可能情形	(1) $a>f, b>e, c>d$	1098900	11100	ㄈ
無等號出現	(2) $a>f, b>e, c<d$	1089990	11010	ㄉ

	(3) $a > f, b < e, c > d$	999999	10101	去
	(4) $a > f, b < e, c < d$	991089	10011	子
	(5) $a < f, b > e, c > d$	991089	10011	子
	(6) $a < f, b > e, c < d$	999999	10101	去
	(7) $a < f, b < e, c > d$	1089990	11010	勿
	(8) $a < f, b < e, c < d$	1098900	11100	匸
一個等號 出現	(1) $a > f, b > e, c = d$	1099890	11110	为
	(2) $a > f, b < e, c = d$	990099	10001	《
	(3) $a < f, b > e, c = d$	990099	10001	《
	(4) $a < f, b < e, c = d$	1099890	11110	为
	(5) $a > f, b = e, c > d$	1098900	11100	匸
	(6) $a > f, b = e, c < d$	1090089	11011	丂
	(7) $a < f, b = e, c > d$	1090089	11011	丂
	(8) $a < f, b = e, c < d$	1098900	11100	匸
二個等號 出現	(1) $a > f, b = e, c = d$	1099989	11111	厂
	(2) $a < f, b = e, c = d$	1099989	11111	厂

七位數	原數 : abcdefg	計算結果	除以 99	編碼
可能情形： 無等號出現	(1) $a > g, b > f, c > e$	10998900	111100	凵
	(2) $a > g, b > f, c < e$	10890990	110010	〈
	(3) $a > g, b < f, c > e$	10008999	101101	丅
	(4) $a > g, b < f, c < e$	9901089	100011	虫
	(5) $a < g, b > f, c > e$	9901089	100011	虫
	(6) $a < g, b > f, c < e$	10008999	101101	丅
	(7) $a < g, b < f, c > e$	10890990	110010	〈
	(8) $a < g, b < f, c < e$	10998900	111100	凵
一個等號 出現	(1) $a > g, b > f, c = e$	10999890	111110	凵
	(2) $a > g, b < f, c = e$	9900099	100001	彳
	(3) $a < g, b > f, c = e$	9900099	100001	彳
	(4) $a < g, b < f, c = e$	10999890	111110	凵
	(5) $a > g, b = f, c > e$	10998900	111100	凵
	(6) $a > g, b = f, c < e$	10891089	110011	尸
	(7) $a < g, b = f, c > e$	10891089	110011	尸
	(8) $a < g, b = f, c < e$	10998900	111100	凵
二個等號 出現	(1) $a > g, b = f, c = e$	10999989	111111	尸
	(2) $a < g, b = f, c = e$	10999989	111111	尸

八位數	原數 : abcdefgh	計算結果	除以 99	編碼
可能情形 無等號出現	(1) $a>h, b>g, c>f, d>e$	109989000	1111000	ㄉ
	(2) $a>h, b>g, c>f, d<e$	109899900	1110100	ム
	(3) $a>h, b>g, c<f, d>e$	108999990	1101010	ㄚ
	(4) $a>h, b>g, c<f, d<e$	108910890	1100110	ㄊ
	(5) $a>h, b<g, c>f, d>e$	100089099	1011001	ㄊ
	(6) $a>h, b<g, c>f, d<e$	99999999	1010101	ㄊ
	(7) $a>h, b<g, c<f, d>e$	99100089	1001011	ㄚ
	(8) $a>h, b<g, c<f, d<e$	99010989	1000111	へ
	(9) $a<h, b>g, c>f, d>e$	99010989	1000111	へ
	(10) $a<h, b>g, c>f, d<e$	99100089	1001011	ㄚ
	(11) $a<h, b>g, c<f, d>e$	99999999	1010101	ㄊ
	(12) $a<h, b>g, c<f, d<e$	100089099	1011001	ㄊ
	(13) $a<h, b<g, c>f, d>e$	108910890	1100110	ㄊ
	(14) $a<h, b<g, c>f, d<e$	108999990	1101010	ㄚ
	(15) $a<h, b<g, c<f, d>e$	109899900	1110100	ム
	(16) $a<h, b<g, c<f, d<e$	109989000	1111000	ㄉ
一個等號	(1) $a>h, b>g, c>f, d=e$	109998900	1111100	么
	(2) $a>h, b>g, c<f, d=e$	108900990	1100010	又
一個等號 出現	(3) $a>h, b<g, c>f, d=e$	100098999	1011101	ㄚ
	(4) $a>h, b<g, c<f, d=e$	99001089	1000011	ㄣ
	(5) $a<h, b>g, c>f, d=e$	99001089	1000011	ㄣ
	(6) $a<h, b>g, c<f, d=e$	100098999	1011101	ㄚ
	(7) $a<h, b<g, c>f, d=e$	108900990	1100010	又
	(8) $a<h, b<g, c<f, d=e$	109998900	1111100	么
	(9) $a>h, b>g, c=f, d>e$	109989000	1111000	ㄉ
	(10) $a>h, b>g, c=f, d<e$	109900890	1110110	ㄤ
	(11) $a>h, b<g, c=f, d>e$	99099099	1001001	ム
	(12) $a>h, b<g, c=f, d<e$	99010989	1000111	へ
	(13) $a<h, b>g, c=f, d>e$	99010989	1000111	へ
	(14) $a<h, b>g, c=f, d<e$	99099099	1001001	ム
	(15) $a<h, b<g, c=f, d>e$	109900890	1110110	ㄤ
	(16) $a<h, b<g, c=f, d<e$	109989000	1111000	ㄉ
	(17) $a>h, b=g, c>f, d>e$	109989000	1111000	ㄉ
	(18) $a>h, b=g, c>f, d<e$	109899900	1110100	ム
	(19) $a>h, b=g, c<f, d>e$	109000089	1101011	儿
	(20) $a>h, b=g, c<f, d<e$	108910989	1100111	一
	(21) $a<h, b=g, c>f, d>e$	108910989	1100111	一
	(22) $a<h, b=g, c>f, d<e$	109000089	1101011	儿

	(23) a<h, b=g, c<f, d>e	109899900	1110100	厶
	(24) a<h, b=g, c<f, d<e	109989000	1111000	ㄣ
	(1) a>h, b>g, c=f, d=e	109999890	1111110	ㄨ
	(2) a>h, b<g, c=f, d=e	99000099	1000001	凵
	(3) a<h, b>g, c=f, d=e	99000099	1000001	凵
	(4) a<h, b<g, c=f, d=e	109999890	1111110	ㄨ
	(5) a>h, b=g, c=f, d>e	109989000	1111000	ㄣ
二個等號	(6) a>h, b=g, c=f, d<e	109900989	1110111	冂
出現	(7) a<h, b=g, c=f, d>e	109900989	1110111	冂
	(8) a<h, b=g, c=f, d<e	109989000	1111000	ㄣ
	(9) a>h, b=g, c>f, d=e	109998900	1111100	ㄨ
	(10) a>h, b=g, c<f, d=e	108901089	1100011	匸
	(11) a<h, b=g, c>f, d=e	108901089	1100011	匸
	(12) a<h, b=g, c<f, d=e	109998900	1111100	ㄨ
三個等號	(1) a>h, b=g, c=f, d=e	109999989	1111111	ㄣ
出現	(2) a<h, b=g, c=f, d=e	109999989	1111111	ㄣ

伍、 研究結果

利用以上的編碼表，我們可以將一個國字的注音符號加以分解，接著再將注音符號轉換成對照的數字；不同的組員將能找出不同的數字，編出不同的密碼，但是卻能對應到相同的注音符號，讓不知情的人丈二金剛摸不著頭。而且注音符號又能隨時調換，產生數種變化！以下用一首五言絕句來試試看：

<table border="1"> <tr><th colspan="4">江</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>一</td><td>ㄨ</td><td></td></tr> <tr><td>7592613</td><td>51329819</td><td>42561597</td><td>429</td></tr> </table>				江				ㄣ	一	ㄨ		7592613	51329819	42561597	429	<table border="1"> <tr><th colspan="4">雪</th></tr> <tr><td>ㄊ</td><td>ㄣ</td><td>ㄗ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>4375392</td><td>82377396</td><td>73817265</td><td>5217</td></tr> </table>				雪				ㄊ	ㄣ	ㄗ	ㄨ	4375392	82377396	73817265	5217																																	
江																																																																
ㄣ	一	ㄨ																																																														
7592613	51329819	42561597	429																																																													
雪																																																																
ㄊ	ㄣ	ㄗ	ㄨ																																																													
4375392	82377396	73817265	5217																																																													
<table border="1"> <tr><th colspan="4">千</th></tr> <tr><td>ㄨ</td><td>一</td><td>ㄣ</td><td></td></tr> <tr><td>8354612</td><td>87467672</td><td>45233987</td><td>458</td></tr> </table>	千				ㄨ	一	ㄣ		8354612	87467672	45233987	458	<table border="1"> <tr><th colspan="4">山</th></tr> <tr><td>ㄖ</td><td>ㄣ</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4276927</td><td>28855946</td><td></td><td>384</td></tr> </table>	山				ㄖ	ㄣ			4276927	28855946		384	<table border="1"> <tr><th colspan="4">鳥</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>一</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>724935</td><td>83652139</td><td>78544172</td><td>2539</td></tr> </table>	鳥				ㄣ	一	ㄨ	ㄨ	724935	83652139	78544172	2539	<table border="1"> <tr><th colspan="4">飛</th></tr> <tr><td>匸</td><td>ㄨ</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>732869</td><td>43726952</td><td></td><td>845</td></tr> </table>	飛				匸	ㄨ			732869	43726952		845	<table border="1"> <tr><th colspan="4">絕</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>ㄣ</td><td>ㄗ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>2364786</td><td>73499463</td><td>57259183</td><td>3278</td></tr> </table>	絕				ㄣ	ㄣ	ㄗ	ㄨ	2364786	73499463	57259183	3278
千																																																																
ㄨ	一	ㄣ																																																														
8354612	87467672	45233987	458																																																													
山																																																																
ㄖ	ㄣ																																																															
4276927	28855946		384																																																													
鳥																																																																
ㄣ	一	ㄨ	ㄨ																																																													
724935	83652139	78544172	2539																																																													
飛																																																																
匸	ㄨ																																																															
732869	43726952		845																																																													
絕																																																																
ㄣ	ㄣ	ㄗ	ㄨ																																																													
2364786	73499463	57259183	3278																																																													
<table border="1"> <tr><th colspan="4">萬</th></tr> <tr><td>ㄨ</td><td>ㄣ</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>28744741</td><td>62533968</td><td></td><td>5337</td></tr> </table>	萬				ㄨ	ㄣ	ㄨ	ㄨ	28744741	62533968		5337	<table border="1"> <tr><th colspan="4">徑</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>一</td><td>厶</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>1283969</td><td>46826963</td><td>81732762</td><td>7881</td></tr> </table>	徑				ㄣ	一	厶	ㄨ	1283969	46826963	81732762	7881	<table border="1"> <tr><th colspan="4">人</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>ㄣ</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>3757594</td><td>43833991</td><td></td><td>7399</td></tr> </table>	人				ㄣ	ㄣ	ㄨ	ㄨ	3757594	43833991		7399	<table border="1"> <tr><th colspan="4">蹤</th></tr> <tr><td>ㄖ</td><td>ㄨ</td><td>厶</td><td></td></tr> <tr><td>4726275</td><td>42611667</td><td>63942975</td><td>419</td></tr> </table>	蹤				ㄖ	ㄨ	厶		4726275	42611667	63942975	419	<table border="1"> <tr><th colspan="4">滅</th></tr> <tr><td>冂</td><td>一</td><td>ㄗ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>43632</td><td>42731526</td><td>94324171</td><td>4558</td></tr> </table>	滅				冂	一	ㄗ	ㄨ	43632	42731526	94324171	4558
萬																																																																
ㄨ	ㄣ	ㄨ	ㄨ																																																													
28744741	62533968		5337																																																													
徑																																																																
ㄣ	一	厶	ㄨ																																																													
1283969	46826963	81732762	7881																																																													
人																																																																
ㄣ	ㄣ	ㄨ	ㄨ																																																													
3757594	43833991		7399																																																													
蹤																																																																
ㄖ	ㄨ	厶																																																														
4726275	42611667	63942975	419																																																													
滅																																																																
冂	一	ㄗ	ㄨ																																																													
43632	42731526	94324171	4558																																																													
<table border="1"> <tr><th colspan="4">孤</th></tr> <tr><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>724483</td><td>67122113</td><td></td><td>241</td></tr> </table>	孤				ㄨ	ㄨ			724483	67122113		241	<table border="1"> <tr><th colspan="4">舟</th></tr> <tr><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td><td></td></tr> <tr><td>3784625</td><td>47355912</td><td></td><td>841</td></tr> </table>	舟				ㄨ	ㄨ	ㄨ		3784625	47355912		841	<table border="1"> <tr><th colspan="4">囊</th></tr> <tr><td>厶</td><td>ㄨ</td><td>ㄗ</td><td></td></tr> <tr><td>72339529</td><td>83488479</td><td>73863215</td><td>964</td></tr> </table>	囊				厶	ㄨ	ㄗ		72339529	83488479	73863215	964	<table border="1"> <tr><th colspan="4">笠</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>一</td><td>ㄨ</td><td></td></tr> <tr><td>371195</td><td>95315751</td><td></td><td>2331</td></tr> </table>	笠				ㄣ	一	ㄨ		371195	95315751		2331	<table border="1"> <tr><th colspan="4">翁</th></tr> <tr><td>ㄨ</td><td>厶</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>13499468</td><td>72451498</td><td></td><td>743</td></tr> </table>	翁				ㄨ	厶			13499468	72451498		743
孤																																																																
ㄨ	ㄨ																																																															
724483	67122113		241																																																													
舟																																																																
ㄨ	ㄨ	ㄨ																																																														
3784625	47355912		841																																																													
囊																																																																
厶	ㄨ	ㄗ																																																														
72339529	83488479	73863215	964																																																													
笠																																																																
ㄣ	一	ㄨ																																																														
371195	95315751		2331																																																													
翁																																																																
ㄨ	厶																																																															
13499468	72451498		743																																																													
<table border="1"> <tr><th colspan="4">獨</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>345912</td><td>32622657</td><td></td><td>4521</td></tr> </table>	獨				ㄣ	ㄨ	ㄨ	ㄨ	345912	32622657		4521	<table border="1"> <tr><th colspan="4">釣</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>一</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>583721</td><td>73489632</td><td>37633431</td><td>4226</td></tr> </table>	釣				ㄣ	一	ㄨ	ㄨ	583721	73489632	37633431	4226	<table border="1"> <tr><th colspan="4">寒</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>ㄣ</td><td>ㄨ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>461165</td><td>72811759</td><td></td><td>7325</td></tr> </table>	寒				ㄣ	ㄣ	ㄨ	ㄨ	461165	72811759		7325	<table border="1"> <tr><th colspan="4">江</th></tr> <tr><td>ㄣ</td><td>一</td><td>ㄨ</td><td></td></tr> <tr><td>5378432</td><td>42531427</td><td>83483469</td><td>642</td></tr> </table>	江				ㄣ	一	ㄨ		5378432	42531427	83483469	642	<table border="1"> <tr><th colspan="4">雪</th></tr> <tr><td>ㄊ</td><td>ㄣ</td><td>ㄗ</td><td>ㄨ</td></tr> <tr><td>8468257</td><td>43455472</td><td>78536394</td><td>7423</td></tr> </table>	雪				ㄊ	ㄣ	ㄗ	ㄨ	8468257	43455472	78536394	7423
獨																																																																
ㄣ	ㄨ	ㄨ	ㄨ																																																													
345912	32622657		4521																																																													
釣																																																																
ㄣ	一	ㄨ	ㄨ																																																													
583721	73489632	37633431	4226																																																													
寒																																																																
ㄣ	ㄣ	ㄨ	ㄨ																																																													
461165	72811759		7325																																																													
江																																																																
ㄣ	一	ㄨ																																																														
5378432	42531427	83483469	642																																																													
雪																																																																
ㄊ	ㄣ	ㄗ	ㄨ																																																													
8468257	43455472	78536394	7423																																																													

好奇心是人類最普遍的特性之一，與之對應的是隱藏個人訊息的願望。情人、間諜和軍隊都會採用訊息隱藏技術來安全地傳遞訊息，有時還故意傳送一些使人產生誤解的訊息。隨著運算能力的改良和進階數學技術的發展，目前有可能建構出很難被有效破解的密碼。

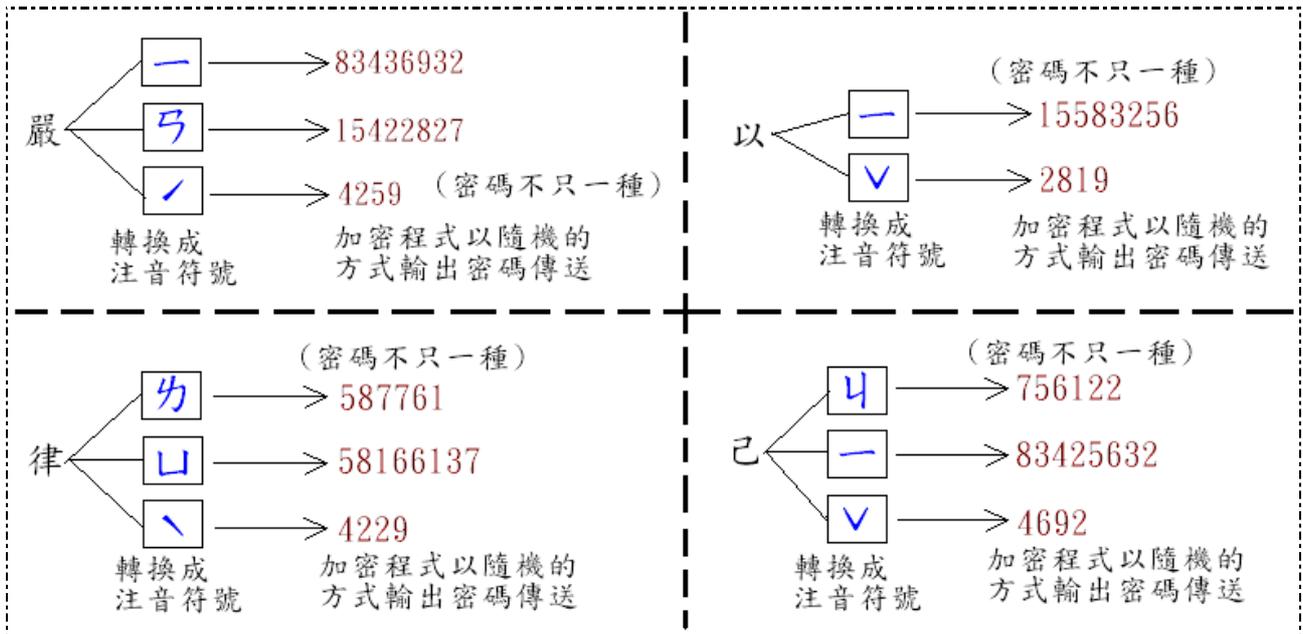
根本上來說，加密在於擾亂訊息，這樣它的內容就無法輕易獲取，而解密是這一過程的逆向過程。這些過程取決於**特定的演算法**，稱為密碼，而我們則稱它『99 演算法』：我們經由計算發現只要將某一個數字前後顛倒再相減，將所得的差與將差前後顛倒所得之數兩數相加，所得結果必為 99 的倍數。因此，**同一種數字的大小關係與對稱關係若相同的話，即能找到相同對應的注音符號**，我們即是利用這種方法來將數字轉換成文字。傳送者要將一串訊息傳遞需經過加密的過程再傳輸到接收者一端，而接受者則須經過解碼的過程才能將訊息還原出來。

首先傳送者要先將訊息輸入加密程式中，由於技術問題我們還沒想出要怎樣設計出這個程式來。加密程式的構想是：譬如我要傳送『國』這個字，程式會將這個字自動轉換成ㄍ、ㄨㄣˊ、ㄥ、二聲ㄨ，四個部分對照上方編碼表分別依亂碼輸出 724464、48311352、34831679、4762（當然不止這一種情形）傳送出去到接收者這一端。

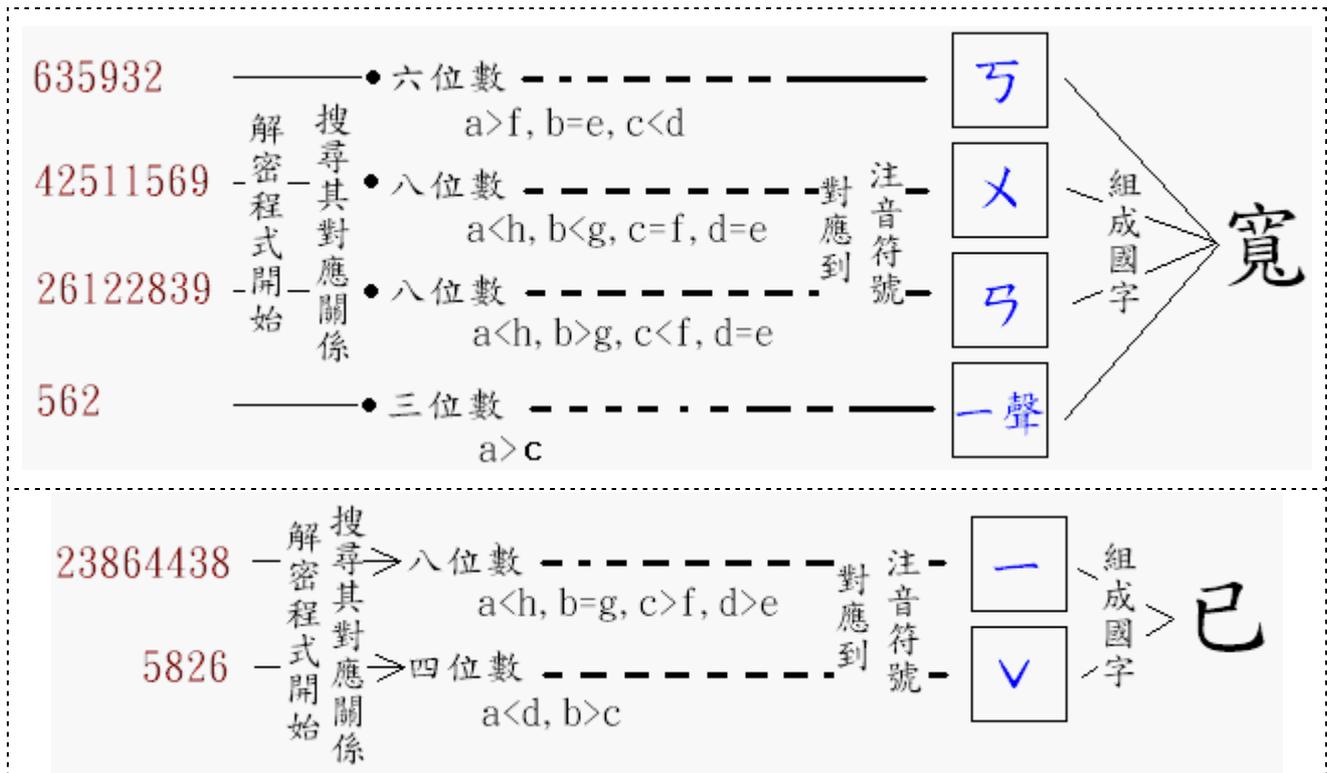
當接收者接收到這一串數字，如：4564928、83527932、75422973、854，這時接收端要設計出解碼程式，當這一串數字輸入 4564928 由程式可知為七位數中 $a < g, b > f, c < e$ 這一組而輸出『ㄊ』；輸入 83527932 可知為八位數中 $a > h, b = g, c < f, d < e$ 這一組而輸出『一』；輸入 75422973 而知道為八位數中 $a > h, b < g, c < f, d = e$ 這一組而輸出『ㄨ』；輸入 854 這一組則能輸出『一聲』：將以上四個符號組合而輸出『新』這個字，當然還要搭配**自動選字功能**才能將整個訊息完整翻譯出來。

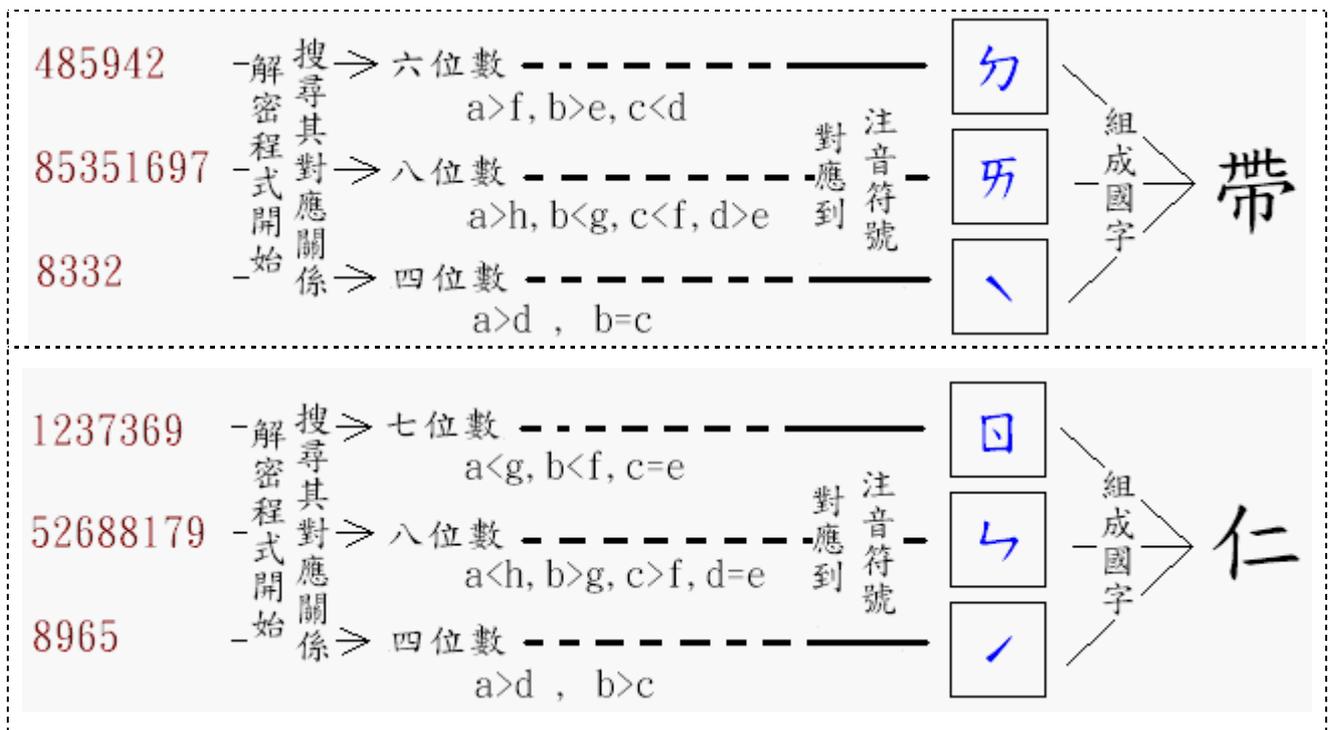
如果能將加密程式與解密程式利用程式語言作出，就能減輕繁雜計算的負擔，並能隨時調換編碼表中注音符號的位置，但這個部分尚不是我們的能力所及，因此我們只能將此構想寫在報告中。以下我們利用圖示將加密程式與解密程式表達出來：

加密過程：加密程式先將國字分解成注音符號，再將分別的注音符號對照編碼表以亂數尋找符合的數字。



解密過程：當訊息傳遞到接受者一方，接收者只有看到一組數字，因此需要利用解密程式將訊息還原出來。





利用解密程式所組出來訊息看起並不連貫，因此還要再設計一**自動選字功能**（能自動轉換為常用的詞彙或成語）才能將訊息完整表達出來，而自動選字功能就類似電腦裡的『新注音』輸入法一樣：

寬已帶仁 — 自動選字功能 —▶ 寬以待人 —▶ 訊息輸出

陸、 討論

一開始的時候我們從書上看到『**數字幻想曲**』這篇文章，內容說明只要將一個三位數(百位數字與個位數字不同)依照規則計算後，所得結果皆為 1089，這個問題引起我們極大的興趣。

後來，我們開始著手證明，我們發現只要將任意多位數（首位數字與個位數字不同）的首位數字與個位數字對調所得結果皆為定值，而且**此值必為 99 的倍數**，而且其商恆為數字 1 的多位數，因此我們將此結果整理如下：

	原數	新數	計算結果	整理換算(1)	整理換算(2)	整理換算(3)
二位數	ab	ba	99	99×1	11×9	$11 \times (10^1 - 1)$
三位數	abc	cba	1089	99×11	11×99	$11 \times (10^2 - 1)$
四位數	abcd	dbca	10989	99×111	11×999	$11 \times (10^3 - 1)$
五位數	abcde	ebcda	109989	99×1111	11×9999	$11 \times (10^4 - 1)$
六位數	abcdef	fbcdea	1099989	99×11111	11×99999	$11 \times (10^5 - 1)$
七位數	abcdefg	gbcdefa	10999989	99×111111	11×999999	$11 \times (10^6 - 1)$
八位數	abcdefgh	hbcdefga	109999989	99×1111111	11×9999999	$11 \times (10^7 - 1)$
n 位數	$x_1 x_2 \dots x_n$	$x_n x_2 \dots x_1$	$109 \dots 989$	$99 \times 11 \dots 11 (n-1 \text{ 個})$	$11 \times 99 \dots 99 (n-1 \text{ 個})$	$11 \times (10^{n-1} - 1)$

找到這樣的結果尚不能滿足我們的好奇心，因此我們試著將數字的順序完全顛倒，找到了對稱關係，省了不少的證明步驟，而且同樣的找到一個固定的數值，這無疑是一劑強心針：只要照著數字的大小相對關係，依照規定的計算方式，皆能得一固定值。

演算證明到此，卻不知道要如何向下延伸推廣？只好去請教學校老師們，老師們讚賞我們找到這樣的結果，大家集思廣益來思考後續延伸問題。後來我們利用這些結果來代表注音符號進行編碼，因為數字有許許多多變化，但只要照著相同規則就能找到相同的答案，並且能隨時改變注音符號順序，密碼出來的結果也跟著改變了。

要將國字編成密碼的過程中，首先要將國字分解成注音符號，再將注音符號轉換成數字編成密碼。而這些數字只要有相同的大小關係即能對應到相同的注音符號，一個字至少由 3 組編成數字的密碼組成輸出。乍看之下十分繁雜，但也因為如此才會讓想要破解的人想破腦袋。簡單的一句話即需要許多組數字組成，這樣的一大串數字總是讓我們焦頭爛額，但卻也樂在其中。這裡有值得改變修改的空間，亦是我們接下來要努力改進的方向。

設計程式的部分非我們能力所及，我們只有這個初步的構想，下次如果還有機會參展，我們將再向下探索 9 位數、10 位數、或含有小數的部分是否仍有相同的關係，試著與電腦方面結合並請教老師們程式方面的問題。

柒、 結論

一、結論部份

(一) 依照既定的計算步驟，只要數字的大小相對位置相同者，其計算出來的結果皆為定值。

【例如】：任意六位數 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}\boxed{f}$ 中，其中 $a \neq f$ ，若 $a > f$ ， $b > e$ ， $c < d$ ，則經過計算所得到的值恆為 1089990。

(二) 承(一)，六位數中符合條件的數字不只一個，因此更增加解碼的困難度。

(三) 計算規則：取一個兩位數以上的數字（首位數字與個位數字不同），將此數字前後顛

倒得到一新數，兩數相減之後得一數 X ，再將相減之後的值調換得另一數 Y ，最後將 X 與 Y 相加，就會恆找到一定值。

除了這種方法之外，應該還能找到其他的計算步驟進而找出定值。

(四) 發現不管用幾位數下來計算，所得結果必為 99 的倍數，而除以 99 後所得的商為由 1 和 0 所組成的多位數。

(五) 不同的數字能對應到相同的注音符號。

【例如】：注音符號『ㄨ』在編碼表中是代表七位數中 $a>g, b>f, c<e$ 這一組，所以符合這個條件可以找出 2211211、4433433、9911911、6611611、3322322、7711711…許多組數字。

(六) 七位數中 $a>g, b>f, c<e$ 這組與 $a<g, b<f, c>e$ 這組，他們的大小剛好相反，而我們的計算規則是將原數與新數兩數相減取正值，因此兩者求出來的結果是相同的，我們稱此關係為對稱關係。

(七) 若有其中兩組成對稱關係，則這兩組皆能對應到相同的注音符號。

(八) 編碼表可以隨時更改所對應的注音符號，因此輸出的密碼所代表的意義也隨著改變了。

(九) 程式設計部分是我們接下來要解決的問題，我們可能會請教學校的電腦教師協助指導。

二、心路歷程

在整個報告的最後，我們都很清楚還有許多需要改進的部分，尚有很大的發展空間，希望評審老師們能再給予指導，提示我們更寬廣的發展空間。要尋找數字的關係一開始就要很仔細不能有所遺漏。而證明的過程我們總是被一堆數字搞的眼花撩亂，若有分心答案就算錯過程也就白費了。在不知道將幾張計算紙寫的密密麻麻，最後才將整個過程整理歸納出來，進而編出密碼表時，夥伴們內心悸動不已，只差沒有熱淚兩行。

在參與科展研究的過程中，無形中大家的向心力更加凝聚，也改變我們的學習態度。接下來要用更積極的態度來探索數學領域。未來也許我們這個報告可以運用在傳遞機密訊息的單位上，類似旗語、摩斯電碼…，再加以修整能應用在軍事或商業機構中。

如果有一天你接受到以下『

48377325、35872861、4998

；

7541293、82751629、48566316、483

；

3126251、32611657、18344567、769

；

83617934、45355016、4831

』，『

4879761、15347546、7005

；

3846459、18639654、5378

；

86311349、9873

；

3437628、53841737、27533866、4881

』這段加密訊息，你能試著破解它嗎？

捌、 參考資料及其他

- 一、 **【數學「fun」輕鬆】** The Magic of Mathematics
Theoni Pappas (2004) 物理學博士 李精益◎審訂 陳以鴻◎譯
數字幻想曲 (133 頁)。世茂出版社

- 二、 昌爸工作坊 **【總是 1089】**
李信昌 (無日期)。趣味數學—趣味代數—1089
取自：<http://www.mathland.idv.tw/>

- 三、 **【爲什麼得數真的永遠是 1089？】**
小美猴~Ayu (2005 年 4 月 5)
取自：<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1005040509133>

- 四、 **【密碼學基礎入門】**
幸福車站,過站不等人 (2005 年 8 月 31 日)
取自：<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1305082619920>

- 五、 **【數學奧祕】**
建民王 (2008 年 3 月 30 日)。1089
取自：
<http://tw.myblog.yahoo.com/wang40-40/article?mid=657&prev=658&next=468&l=f&fid=16>

- 六、 **【奇怪的問題。。。爲啥都是 1 0 8 9】**
別問我是誰 (2005 年 7 月 20 日)
取自：<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1205071903314>

【評語】 030406

藉數字左右對調相減後的性質後 Y2 製造密碼，作品頗見巧思，對增進國中生學習數學，將有助益。