中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030405

哎喲！這也是單位分式啊！

學校名稱：花蓮縣立花崗國民中學

作者：	指導老師：
國二 李　浩	陳貞泰
國二 林芷柔	杜炯熏
國二 黃若蓁	
國一 李松融	

關鍵詞：單位分式、埃及分數、最優分解

摘要

本作品討論的多項式均在 $F_5[x]$ 中。本研究的目的是在討論有哪些算法可以展開真分式，並試著去討論「最優的分解」問題及「固定項數的展開」問題。

壹、研究的目的：

一、探討真分式可表成「有限項」相異「單位分式」之和的理由

二、探討將真分式分解成若干個相異的「單位分式」之和的方法

三、探討比較貪心法、高中法、因式法及懶人法的優劣

四、探討將真分式分解成兩個相異的「單位分式」之和的方法

貳、研究設備及器材

一、研究設備：紙、筆、電腦

二、解釋名詞：

(一) F_5 是指用 5 去除的所得餘數的集合。F_5 包含有加、減、乘、除四種運算並且滿足結合律，分配律，交換律。$[a]_5$、$[b]_5$ 為 F_5 中的元素。我們可以定義 F_5 中加、減、乘三種運算分別為：$[a]_5$ 指 a 用 5 去除的所得餘數 $[a]_5+[b]_5=[a+b]_5$；

$[a]_5-[b]_5=[a-b]_5$ ；$[a]_5\times[b]_5=[a\times b]_5$ 。

F_5 中的除法運算：若 $[a]_5\cdot[b]_5=[1]_5$ 。我們把 $[b]_5$ 記為 $[a]_5^{-1}$ ，稱為元素 $[a]_5$ 的逆元素。我們定義 $\dfrac{[a]_5}{[b]_5}=[a]_5\times[b]_5^{-1}$ 。

⊕	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

F_5 的加法運算

⊗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	1
3	0	3	1	4
4	0	4	3	2

F_5 的乘法運算

(二) 設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 為 x 的多項式

1、領導係數：多項式中最高次項之係數(不為 0)稱為此多項式之領導係數。

2、次數：當 $a_n \neq 0$ 時，稱此多項式為 n 次多項式，記為：$\deg f(x)=n$。

3、常數多項式：若一多項式僅含常數項 a_0，則稱此多項式為常數多項式。

當 $a_0 \neq 0$，又稱為零次多項式。當 $a_0 = 0$，又稱為零多項式。

4、分式：兩個多項式函數相除稱為分式。型如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式函數。分式分為真分式與假分式二種，當分子的次數小於分母的次數，稱為真分式。當分子的次數大於等於分母的次數，稱為假分式。

5、互質：若 $\mathrm{HCL}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=t\in \mathrm{F}_5$，則稱 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互質。且稱 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 為最簡分式。

6、單位分式: 就是指分子的次數為 0 的真分式。

(三) 由多項式的係數決定多項式全體所成的集合：

$\mathrm{Z}[x]$、$\mathrm{Q}[x]$、$\mathrm{R}[x]$ 分別表由整係數、有理係數、實係數多項式全體所成的集合。

$\mathrm{F}_5[x]$ 表由以 F_5 為係數之多項式全體所成的集合。

$\mathrm{A}_+=$ 多項式集合 $\mathrm{F}_5[x]$ 中, 領導係數為 1 的多項式所構成的子集合。

(本作品主要討論 $\mathrm{F}_5[x]$ 中的多項式)

(四) 在本文中在計算過程中，我們利用分離係數法計算多項式並儘量減少使用運算符號。

例如：$\left(x^3+2x^2+3x+3\right)+\left(x^4+x^3+3x^2+3x+1\right)$

將 x^3+2x^2+3x+3 寫成 1233、將 $x^4+x^3+3x^2+3x+1$ 寫成 11331、

將 $\left(x^3+2x^2+3x+3\right)+\left(x^4+x^3+3x^2+3x+1\right)$ 寫成 $1233+11331$

則 $\left(x^3+2x^2+3x+3\right)+\left(x^4+x^3+3x^2+3x+1\right)$

$=x^4+2x^3+5x^2+6x+4=x^4+2x^3+x+4$

寫成 $1233+11331=12564=12014$

例如：$\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+3x+1}$

將 x^3+2x^2+3x+4 寫成 1234、將 $x^4+x^3+x^2+3x+1$ 寫成 11131、

將 $\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+3x+1}$ 寫成 $\dfrac{1234}{11131}$

將 $\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+3x+1}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{-2x}{(x^4+x^3+x^2+3x+1)\times(x+4)}$

$$=\frac{1}{x+4}+\frac{3x}{(x^4+x^3+x^2+3x+1)\times(x+4)}$$

寫成 $\dfrac{1234}{11131}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{-20}{11131\times14}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{30}{11131\times14}$ 。

叁、研究過程或方法：

我們看到了學長用數學歸納法證明了「每個真分數 $\dfrac{a}{b}$ 都可以表為若干個相異埃及分數的和」。我們猜想「每個真分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 都可以表為若干個相異單位分式的和」可以用數學歸納法來證明。不過整數可以比較大小、順序，可是對於多項式我們卻不知道如何比較大小與順序。

數學老師提醒我們「如果你的公式是與正整數相關的式子，那麼數學歸納法將是你一個方便的證明方法」。我們突然想起可以利用多項式的次數來做討論，因為數學歸納法的證明方法就如同推骨牌一樣，而這裡的骨牌是可以指所有多項式的次數。

我們利用數學歸納法證明了，對於任意的 $f(x)$ 而言，真分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可以表為若干個相異單位分式的和。

對一般的真分數而言，是否亦一定可以把它分解成相異單位分數之和呢?西元 1202 年，中世紀的數學家斐波那契(Fibonacci,1170-1250) 給予肯定的答案，並記載於其名著「算盤書」之中，但他沒有給出證明。直到 1880 年，才由英國數學家西爾維斯特(Sylvester, 1814-1897) 所補證，因此斐波那契法有時亦被稱為西爾維斯特方法。

我們也利用類似的方法（貪心算法）來說明對一般的真分式而言，可以把它分解成「有限個」相異單位分式之和。

數學家 Golomb 於 1962 年提出的另一個方法(簡稱 Golomb 算法)，也能夠把任意的真分數展成單位分數之和，我們亦從數學老師所教的輾轉相除法中了解了這個方法，所

以我們試著利用類似的步驟(高中算法)去展開分式，也希望能從其中得到較佳結果的展開式。

我們探討分解問題時，一直在想是否可以只用 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{1}{x^2}$ 、 $\frac{1}{x^3}$ ……來展開分式。所以我們就另外設計了神速算法（懶人算法），雖然展開的項數不是很理想，但計算卻是不甚複雜。

此外，我們知道將真分式展成若干個單位分式之和並不是唯一的，於是我們覺得探討固定項數的分解問題應該是個不錯的想法， 譬如是 2 項、3 項或 4 項等的展開。根據數學史家的分析, 當時的埃及人很可能已懂得運用簡略的因數分解，把真分數化成兩個相異單位分數之和。而我們也利用多項式的因式將真分式化成兩個相異單位分式之和（因式算法），不過目前所得的結果仍然十分零碎，沒有較一般的結果。

最後一提，我們用神速算法展開時，發現雖然分解項數不理想，但分母次數是由小至大有規律的，且分解出的各項分母好像跟 $g(x)$ 的因式有關。而我們用因式算法將 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 展開成三或四個相異單位分式之和的表達式時，又隱約覺得跟神速算法有關。所以我們綜合兩者設計了神因算法，也由此我們對固定項數的分解問題與因式算法有更深的了解認識。

後面我們會簡略介紹我們所做的一些結果。

肆、研究結果及討論：

一、定理　每個真分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 都可以表為若干個相異單位分式的和。

證明　我們對分子 $f(x)$ 進行數學歸納法的證明。（$\because \deg f(x)$ 是非負整數 $0,1,2,3,\cdots$）

（一）當 $\deg f(x)=0$ ，設 $f(x)=t\in \mathrm{F}_5$, 　則 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{t}{g(x)}$ =剛好是一個單位分式。

（二）設此定理對所有分子次數小於 a「$\deg f(x) <$ a 」(a ≧1）的最簡真分式都成立。

能分別找出 $t_1,t_2,t_3,\cdots,t_{p-1},t_p\in \mathrm{F_p}$,及相異的多項式

$s_1(x),s_2(x),s_3(x),\cdots s_{p-1}(x),s_p(x)\in \mathrm{A}_+$ 使成立

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{t_1}{s_1(x)}+\frac{t_2}{s_2(x)}+\frac{t_3}{s_3(x)}+\cdots+\frac{t_{p-1}}{s_{p-1}(x)}+\frac{t_p}{s_p(x)}$$

（三）當 $\deg f(x)=a$ ，對最簡真分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 而言，可以找到二個多項式 $q_1(x)$ 及 $r_1(x)$ 滿足 $g(x)=f(x)q_1(x)+r_1(x)$ ，其中 $\deg q_1(x)=\deg g(x)-\deg f(x)$ 而且 $\deg r_1(x)<\deg f(x)=a$ 。使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{f(x)q_1(x)+r_1(x)}=\frac{1}{q_1(x)+\dfrac{r_1(x)}{f(x)}}=\frac{1}{q_1(x)}+\frac{-r_1(x)}{q_1(x)g(x)}$$ 。

又 $\deg r_1(x)<a$ ，故存在 $t_1,t_2,t_3,\cdots,t_{k-1},t_k\in F_p$,及多項式 $s_1(x),s_2(x),s_3(x),\cdots s_{k-1}(x),s_k(x)\in A_+$ 使得

$$\frac{-r_1(x)}{q_1(x)g(x)}=\frac{t_1}{s_1(x)}+\frac{t_2}{s_2(x)}+\frac{t_3}{s_3(x)}+\cdots+\frac{t_{k-1}}{s_{k-1}(x)}+\frac{t_k}{s_k(x)}$$ 從而有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{q_1(x)}+\frac{t_1}{s_1(x)}+\frac{t_2}{s_2(x)}+\frac{t_3}{s_3(x)}+\cdots+\frac{t_{k-1}}{s_{k-1}(x)}+\frac{t_k}{s_k(x)}$$

因此， $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 都可以表為若干個相異單位分式的和。

二：貪心算法

（一）、設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為互質的多項式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 。分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可用以下的步驟分解成若干個相異單位分式之和:

（步驟一）: 用 $f(x)$ 除以 $g(x)$ ，得商數 $q_1(x)$ 及餘數 $r_1(x)$ 。

把 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 記作: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{q_1(x)}+\dfrac{-r_1(x)}{q_1(x)g(x)}$ (註: $\deg q_1(x)=\deg g(x)-\deg f(x)$ 而且 $\deg r_1(x)<\deg f(x)$) ，若 $-r_1(x)=t\in F_5$ ，則分解完成。不然,要進行步驟二。

（步驟二）: 仿照步驟一求與 $\dfrac{-r_1(x)}{q_1(x)g(x)}$ 對應的單位分式及其對應的剩餘分式。重複此步驟,直至剩餘分式成為單位分式為止。

（二）、任何一個最簡真分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 利用貪心算法分解，若 $\deg f(x)=n\geq 1$ ，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可表成不超過 n+1個相異單位真分式的和。

證明：

1、當 $\deg f(x)=n$，對真分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 而言，可以找到二個多項式 $q_1(x)$ 及 $r_1(x)$ 滿足

$g(x)=f(x)q_1(x)-r_1(x)$，其中 $\deg q_1(\mathrm{x})=\deg g(x)-\deg f(x)$ 而且

$\deg r_1(x)<\deg f(x)=n$。使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{f(x)q_1(x)+r_1(x)}=\frac{1}{q_1(x)+\dfrac{r_1(x)}{f(x)}}=\frac{1}{q_1(x)}+\frac{r_1(x)}{q_1(x)g(x)}\ 。$$

設 $q_1(x)$ 的首項係數為 u_1，且 $u_1\times t_1=1$，故 $\dfrac{1}{q_1(x)}=\dfrac{t_1}{t_1\times q_1(x)}$

2、令 $\dfrac{r_1(x)}{q_1(x)g(x)}$ 為最簡真分式，已知 $\deg r_1(x)=\mathrm{n}_1<\mathrm{n}$。（1）若 $\deg r_1(x)=0$，設

$0\neq r_1(x)=t_2\in \mathrm{F}_\mathrm{p}$,則 $\dfrac{r_1(x)}{g(x)}=\dfrac{t_2}{g(x)}$ 是一個單位分式。

（2）若 $\deg r_1(x)\neq 0$，對真分式 $\dfrac{r_1(x)}{g(x)}$ 而言，可以找到二個多項式 $q_2(x)$ 及 $r_2(x)$

滿足 $g(x)=r_1(x)q_2(x)-r_2(x)$，其中 $\deg q_2(\mathrm{x})=\deg g(x)-\deg r_1(x)$ 而且

$\deg r_2(x)<\deg r_1(x)$。使得

$$\frac{r_1(x)}{g(x)}=\frac{r_1(x)}{r_1(x)q_2(x)+r_2(x)}=\frac{1}{q_2(x)+\dfrac{r_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1}{q_2(x)}+\frac{r_2(x)}{q_2(x)g(x)}\ ,$$

設 $q_2(x)$ 的首項係數為 u_2，且 $u_2\times t_2=1$，故 $\dfrac{1}{q_2(x)}=\dfrac{t_2}{t_2\times q_2(x)}$。

則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{t_1}{t_1\times q_1(x)}+\dfrac{t_2}{t_2\times q_1(x)\times q_2(x)}+\dfrac{r_2(x)}{q_1(x)q_2(x)g(x)}$

（3）當 $\deg r_2(x)\neq 0$，則如此繼續下去前面（2）的方法，直到我們得到

$\deg r_k(x)=0$　$g(x)=r_1(x)q_2(x)-r_2(x)$　$g(x)=r_2(x)q_3(x)-r_3(x)$　$\cdots\cdots\cdots$.

$g(x)=r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)-r_{k-1}(x)$　$g(x)=r_{k-1}(x)q_k(x)-r_k(x)$

並得到 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{t_1}{t_1\times q_1(x)}+\dfrac{t_2}{t_2\times q_1(x)q_2(x)}+......+$

$$+......+\frac{t_k}{t_k\times q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)}+\frac{r_k(x)}{q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)g(x)}$$

且 $n>\deg r_1(x)>\deg r_2(x)>\cdots>\deg r_k(x)=0$ 並得 $r_k(x)=t_{k+1}$。

（4）故 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{t_1}{t_1\times q_1(x)}+\dfrac{t_2}{t_2\times q_1(x)q_2(x)}+\text{......}+$

$$+\text{......}+\frac{t_k}{t_k\times q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)}+\frac{t_{k+1}}{q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)g(x)}$$

每進行一步分子次數至少減小 1，所以$1\le \mathrm{k}\le n$ 。

則任何一個最簡真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$，若$\deg f(x)=n\ge 1$，則$\dfrac{f(x)}{g(x)}$可表成不超過n+1個相異單位真分式的和。

（三）、 討論

1、求分母的最大次數

由$g(x)=f(x)q_1(x)-r_1(x)$ 、 $g(x)=r_{h-1}(x)q_h(x)-r_h(x)\ (h=2,3,\cdots,k)$，知

$\deg q_1(x)=\deg g(x)-\deg f(x)$ 、 $\deg q_h(x)=\deg g(x)-\deg r_{h-1}(x)\ (h=2,3,\cdots,k)$，

又$\mathrm{n}>\deg r_1(x)>\deg r_2(x)>\cdots>\deg r_k(x)=0$

故得$\deg q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)g(x)=\deg q_1(x)+\deg q_2(x)\cdots+\deg q_k(x)+\deg g(x)$

$$\le(\deg g(x)-\mathrm{n})+(\deg g(x)-n+1)+\cdots+$$

$$+\cdots+(\deg g(x)-n+k-2)+(\deg g(x)-n+k-1)+\deg g(x)$$

$$=(\deg g(x)-n)\times k+\frac{k\times(k-1)}{2}+\deg g(x)$$

由上述可見，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$利用貪心算法分解，若$\deg g(x)=m$ 、 $\deg f(x)=n\ge 1$

則知展開項數不會大於n+1。

若分解為k+1 項，所得的分母次數不大於$(m-n)\times k+\dfrac{k\times(k-1)}{2}+m$ 。

若分解為n+1 項，所得的分母次數不大於$(n+1)\times m-\dfrac{(n+1)\times n}{2}$ 。

2、分母次數的總和

所求$=\deg q_1(x)+[\deg q_1(x)+\deg q_2(x)]+[\deg q_1(x)+\deg q_2(x)+\deg q_3(x)]+\cdots$

$$+[\deg q_1(x)+\cdots+\deg q_k(x)]+\deg q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)g(x)$$

$$=(k+1)\times\deg q_1(x)+k\times\deg q_2(x)+\cdots+3\times\deg q_{k-1}(x)+2\times\deg q_k(x)+\deg g(x)$$

$$\le(k+1)\times\left(\deg g(x)-n\right)+k\times\left(\deg g(x)-n+1\right)+\cdots$$

$$+2\times\left(\deg g(x)-n+k-1\right)+\deg g(x)$$

$$\le\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times\deg g(x)-\frac{k\times(k+3)}{2}\times n+k\times1+(k-1)\times2+\cdots+2\times(k-1)$$

$$=\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times\deg g(x)-\frac{k\times(k+3)}{2}\times n+\sum_{a=1}^{k-1}a\times(k+1-a)$$

$$=\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times\deg g(x)-\frac{k\times(k+3)}{2}\times n+\frac{(k-1)\times k\times(5k+2)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times m-\frac{k\times(k+3)}{2}\times n+\frac{(k-1)\times k\times(5k+2)}{6}$$

由上述可見，$\frac{f(x)}{g(x)}$利用貪心算法分解，若$\deg g(x)=m$、$\deg f(x)=\mathrm{n}\ge1$

則知展開項數不會大於n+1。

若分解為k+1項，所得的分母次數的總和不大於

$$\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times\mathrm{m}-\frac{k\times(k+3)}{2}\times\mathrm{n}+\frac{(k-1)\times k\times(5k+2)}{6}$$ 。

若分解為n+1項，所得的分母次數的總和不大於

$$\frac{m\times(n+1)\times(n+2)}{2}+\frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3}-2\times n^2$$ 。

（四）、例如：

1、$\frac{x+2}{x^2+3x+4}=\frac{1}{(x+1)}+\frac{-2}{(x+1)(x^2+3x+4)}=\frac{1}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)(x^2+3x+4)}$

$\frac{12}{134}=\frac{1}{11}+\frac{-2}{11\times134}=\frac{1}{11}+\frac{3}{11\times134}$

2、$\frac{x}{x^2+3x+4}=\frac{1}{(x+3)}+\frac{-4}{(x+3)(x^2+3x+4)}=\frac{1}{(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x^2+3x+4)}$

$\frac{10}{134}=\frac{1}{13}+\frac{-4}{\times13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13\times134}$

3、$\frac{x^2}{x^4+3x^3+x^2+3}=\frac{1}{x^2+3x+1}+\frac{-3}{(x^2+3x+1)(x^4+3x^3+x^2+3)}$

$$=\frac{1}{x^2+3x+1}+\frac{2}{(x^2+3x+1)(x^4+3x^3+x^2+3)}$$

$$\frac{100}{13103}=\frac{1}{131}+\frac{-3}{131\times 131}=\frac{1}{131}+\frac{2}{131\times 13103}$$

4、$\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+3x+1}$

$$\frac{1234}{11131}=\frac{1}{14}+\frac{-20}{11131\times 14}=\frac{1}{14}+\frac{30}{100234}=\frac{1}{14}+\frac{1}{20041}+\frac{-4}{100234\times 20041}$$

$$=\frac{1}{14}+\frac{1}{20041}+\frac{1}{100234\times 20041}=\frac{1}{14}+\frac{1}{20041}+\frac{1}{2003233444}$$

三、高中算法

（一）、設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為互質的多項式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 。分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可用以下步驟分解成若干個相異單位分式之和:

（步驟一）求滿足 $f(x)h(x)-g(x)k(x)=1$ 的一組解 $m(x)$、$n(x)$ 是，而且在所有可能 的解中 $m(x)$ 次數最小。

把 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 記作: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)\times m(x)}+\dfrac{n(x)}{m(x)}$ 若 $n(x)=t\in \mathrm{F}_{\mathrm{p}}$ ，則分解完成。不然，要進行步驟二。

（步驟二）仿照步驟一把分解成一個單位分數及另一個分數。重複此步驟，直至所有的分式都化成單位分式為止。

（二）、設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為互質的多項式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 、 $\deg f(x)=n\geq 1$，若利用高中算法則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可表成不超過 n+1 個相異單位真分式的和。

證明：

1、由於 $f(x)$ 、 $g(x)$ 互質，根據推論一可知存在多項式 $h(x)$ 、 $k(x)$ 使得 $f(x)h(x)-g(x)k(x)=1$。且必定存在次數最小的多項式 $m_1(x)$ 及其對應的多項式 $n_1(x)$ 使得 $f(x)m_1(x)-g(x)n_1(x)=1$。因此 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)\times m_1(x)}+\dfrac{n_1(x)}{m_1(x)}$ 。

2、（1）再由 $f(x)$、$g(x)$ 互質及 $\deg f(\mathrm{x})<\deg g(x)$，易知 $\deg n_1(\mathrm{x})<\deg m_1(x)$ ，且由定理一可推出 $m_1(x)$ 、 $n_1(x)$ 互質。

（2）現在要證明$\deg m_1(x) < \deg g(x)$。用反證法進行如下:

若$\deg m_1(x) \ge \deg g(x)$，那麼由$m_1(x) = g(x)q(x) + r(x)$其中

$\deg q(x) = \deg m_1(x) - \deg g(x)$而且 $\deg r(x) < \deg g(x)$及定理一推出

$f(x)r(x) - g(x)\{n_1(x) - f(x)q(x)\} = 1$，則$h(x) = r(x)$、

$k(x) = n_1(x) - f(x)q(x)$是$f(x)h(x) - g(x)k(x) = 1$ 的一組解。但

$\deg r(x) < \deg g(x) \le \deg m_1(x)$，因此$m_1(x)$不可能是$h(x)$的所有可能的解中次數最小。故有矛盾。則$\deg m_1(x) < \deg g(x)$。

3、（1）重複前項2，必定存在次數最小的多項式$m_2(x)$及其對應的多項式$n_2(x)$，

使得$n_1(x)m_2(x) - m_1(x)n_2(x) = 1$。

且$\deg m_1(x) < \deg m_2(x)$。因此

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)\times m_1(x)} + \frac{1}{m_1(x)\times m_2(x)} + \frac{n_2(x)}{m_2(x)}$$ 。

（2）重複前項（1）直到$\deg n_k(x) = 0$，並得到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)\times m_1(x)} + \frac{1}{m_1(x)\times m_2(x)} + \ldots\ldots \quad + \ldots. + \frac{1}{m_{k-1}(x)\times m_k(x)} + \frac{n_k(x)}{m_k(x)}$$

且$\deg g(x) > \deg m_1(x) > \deg m_2(x) > \cdots\cdots > \deg m_k(x)$

4、又因$\deg g(x) - \deg f(x) = \deg m_1(x) - \deg n_1(x) = \cdots\cdots$

$= \cdots\cdots = \deg m_k(x) - \deg n_k(x)$，

則知$n = \deg f(x) > \deg n_1(x) > \deg n_2(x) > \cdots\cdots > \deg n_k(x) = 0$

每進行一步分子次數至少減小1，所以$1 \le k \le n$。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)\times m_1(x)} + \frac{1}{m_1(x)\times m_2(x)} + \ldots\ldots + \ldots. + \frac{1}{m_{k-1}(x)\times m_k(x)} + \frac{n_k(x)}{m_k(x)}$$

則任何一個最簡真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$，若$\deg f(x) = n \ge 1$，則$\dfrac{f(x)}{g(x)}$可表成不超過n+1個相異單位真分式的和。

（三）、討論

若$\deg g(x) = m$、 $\deg f(x) = n \ge 1$

由上述可見，高中算法中的分母次數最大為$\deg g(x) + \deg m_1(x)$，而

$\deg m_1(x) < \deg g(x)$，故知展開時分母的最大次數不會大於$2\times \deg g(x) - 1$。另外，高中算法展開後的項數不會大於n+1。

若分解為$k+1$項，分母次數總和

$$=\left[\deg g(x)+\deg m_1(x)\right]+\left[\deg m_1(x)+\deg m_2(x)\right]+\cdots+\left[\deg m_{k-1}(x)+\deg m_k(x)\right]$$

$$+\deg m_k(x)$$

$$\leq\left[m+(m-1)\right]+\left[(m-1)+(m-2)\right]+\cdots+\left[(m-k+1)+(m-k)\right]+(m-k)$$

$$=2mk-k^2+(m-k)$$

若分解為$n+1$項，分母次數總和不會大於$2mn-n^2+m-n$

（四）、例如：

1、$\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+3x+1}$

因$11131=1234\times14+20$　　　$1234=20\times314+4$

則$4=1234-20\times314\quad=1234-(11131-1234\times14)\times314$

$$=1234-(11131-1234\times14)\times314$$

$$=1234-11131\times314+1234\times14\times314=1234\times3332-11131\times314$$

又$3332=314\times14+1$　　則$4=314\times14-3332$

故$\dfrac{1234}{11131}=\dfrac{314}{3332}+\dfrac{4}{11131\times3332}=\dfrac{314}{3332}+\dfrac{4}{31422442}$

$$=\frac{1}{14}+\frac{4}{14\times3332}+\frac{1}{31422442}$$

2、$\dfrac{2x^4+x^3+4x^2+3x+1}{x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+3}$

因$143213=21431\times33+3140$　　　$21431=3140\times44+$

$3140=421\times23$　　　$421=12\times44$

則$3=421-12\times44\quad=421-(3140-421\times23)\times44$

$$=421\times(1+23\times44)-3140\times44=421\times303-3140\times44$$

$$=(21431-3140\times44)\times303-3140\times44\quad=21431\times303-3140\times2223$$

$$=21431\times303-(143213-21431\times33)$$

$$=21431\times12002-143213\times2223$$

又$12002=2223\times33+303$　　　$2223=303\times4$

$1=2223-303\times44\quad=2223-(12002-2223\times33)\times44$

$$=2223\times(1+33\times44)-12002\times44=2223\times2443-12002\times44$$

$$故\ \frac{21431}{143213}=\frac{3}{143213\times12002}+\frac{2223}{12002}=\frac{3}{143213\times12002}+\frac{1}{12002\times243}+\frac{44}{243}$$

$$=\frac{3}{14321\times3\quad 12002}+\frac{1}{1\times2002}+\frac{1}{2}+\frac{1}{243\times33}$$

四、神速算法

（一）、設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為互質的多項式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 。分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 可用以下的步驟分解成若干個相異單位分式之和:

不失一般性，設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$$g(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b$$

（步驟一）:把 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 記作:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{x^{m-n}}+\frac{a_{n-1}x^{m-1}+a_{n-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x^{m-n+1}+a_0x^{m-n}}{x^{m-n}g(x)}$$

$$-\frac{a_nb_{m-1}x^{m-1}+a_nb_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_nb_1x+a_nb_0}{x^{m-n}g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{x^{m-n}}-\frac{a_nb_{m-n}x^{m-n}+\cdots+a_nb_1x+a_nb_0}{x^{m-n}g(x)}$$

$$+\frac{(a_{n-1}-a_nb_{m-1})x^{m-1}+(a_{n-2}-a_nb_{m-2})x^{m-2}+\cdots+(a_1-a_nb_{m-n+1})x^{m-n+1}}{x^{m-n}g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{x^{m-n}}-\frac{a_nb_{m-n}}{g(x)}-\frac{a_nb_{m-n-1}}{xg(x)}-\cdots-\frac{a_nb_1}{x^{m-n-1}g(x)}-\frac{a_nb_0}{x^{m-n}g(x)}$$

$$+\frac{(a_{n-1}-a_nb_{m-1})x^{n-1}+(a_{n-2}-a_nb_{m-2})x^{n-2}+\cdots+(a_1-a_nb_{m-n+1})x}{g(x)}$$

$$令\ \frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{(a_{n-1}-a_nb_{m-1})x^{n-1}+(a_{n-2}-a_nb_{m-2})x^{n-2}+\cdots+(a_1-a_nb_{m-n+1})x}{g(x)}$$

設若 $\deg f_1(x)=0$ ，則分解完成。不然,要進行步驟二。

（步驟二）: 仿照步驟一求與 $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 對應的單位分式及其對應的剩餘分式。重複此步餘分式成為單位分式為止。

（二）、討論

1、由步驟一 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 得到的單位分式中，分母的次數最高是 $m-n+\deg g(x)$，而 $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

得到的單位分式，其分母的次數最高不大於$m-(n-1)+\deg g(x)$，而$\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$得到的單位分式，其分母的次數最高不大於$m-(n-2)+\deg g(x)$，而$\dfrac{f_k(x)}{g_k(x)}$得到的單位分式，其最高次數的分母是$m-(n-k)+\deg g(x)$。（$k=1$、2、3、……、$n-1$）。故$\dfrac{f(x)}{g(x)}$完全展開後得到的單位分式，其分母最高次數不超過$2\times\deg g(x)-1$。

2、所有分母次數總和不超過$\deg f(x)\times\left[\deg g(x)+\deg f(x)+1\right]$

3、至多進行n=$\deg f(x)$個步驟，故至多分解成$1+2\times\deg f(x)$個單位分式之和。

（三）、例如：

1、$\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+3x+1}$

$$\frac{1234}{11131}=\frac{1}{10}+\frac{1214}{111310} \qquad \left(\frac{1234}{11131}-\frac{1}{10}=\frac{12340-11131}{11131\times 10}=\frac{1214}{111310}\right)$$

$$\frac{1234}{11131}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1014}{1113100} \qquad \left(\frac{1214}{111310}-\frac{1}{100}=\frac{121400-111310}{111310\times 100}=\frac{1014}{1113100}\right)$$

$$\frac{1234}{11131}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4014}{11131000}$$

$$\left(\frac{1014}{1113100}-\frac{1}{1000}=\frac{1014000-1113100}{1113100\times 1000}=\frac{4014}{11131000}\right)$$

$$\frac{1234}{11131}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4014}{11131000}$$

$$\frac{1234}{11131}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4}{11131000}+\frac{1}{1113100}+\frac{4}{11131}$$

2、$\dfrac{2x^4+x^3+4x^2+3x+1}{x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+3}$

$$\frac{21431}{143213}=\frac{2}{10}+\frac{33444}{1432130} \qquad \left(\frac{21431}{143213}-\frac{2}{10}=\frac{214310-231421}{143213\times 10}=\frac{33444}{1432130}\right)$$

$$\frac{21431}{143213}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{103110}{143213000}$$

$$\left(\frac{33444}{1432130}-\frac{3}{100}=\frac{3344400-3241340}{1432130\times 100}=\frac{103110}{143213000}\right)$$

$$\frac{21431}{143213}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{10402000}{143213000000}$$

$$\left(\frac{103110}{143213000}-\frac{1}{1000}=\frac{103110000-143213000}{143213000\times 1000}=\frac{\quad}{143213000000}\right)$$

$$\frac{21431}{143213}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{10402000}{143213000000}$$

$$\left(\frac{10402}{143213000}-\frac{1}{10000}=\frac{104020000-143213000}{143213000\times 10000}=\frac{\quad}{1432130000000}\right)$$

$$\frac{21431}{143213}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{143213}+\frac{1}{1432130}+\frac{3}{14321300}$$
$$+\frac{1}{143213000}+\frac{2}{1432130000}$$

五、因式算法

（一）、設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為互質的多項式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 。找出分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 中所有能化成兩個相異單位分式之和的表達式。:

（步驟一）計算分母 $g(x)$ 的任兩個不同因式之和。（取不同的兩個因式，得到的因式之和也可能不同）

（步驟二）檢驗此兩個因式和是否為分子 $f(x)$ 的倍式，若為「是」，則分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 能化成兩個相異單位分式之和。若為「否」，則重複步驟一,直至所有的因式和都檢驗完畢。

（步驟三）把分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的分子和分母都乘以此兩個因式和。將 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 分解成兩個相異單位分式之和。

（二）、找出 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 中所有能化成兩個相異單位分式之和的表達式。

想法：

1、我們先找出 $\dfrac{1}{g(x)}$ 中所有能化成兩個相異單位分式之和的表達式。

（1）設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 為兩個相異多項式，且 $p(x)$ 、 $q(x)$ 互質。

設 $\deg p(x)\geq\deg q(x)$ 　　　　則 $\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)}\times\left\{\dfrac{p(x)}{p(x)+q(x)}+\dfrac{q(x)}{p(x)+q(x)}\right\}$

若 $p(x)$ 不是 $g(x)$ 的因式，則設 $p(x)=a(x)\times p_1(x)$ ，其中 $a(x)$ 是 $g(x)$ 的因式，而 $p_1(x)$ 是 $p(x)+q(x)$ 的因式。所以 $p_1(x)$ 是 $q(x)$ 的因式。易得矛盾，

故知 $p(x)$ 是 $g(x)$ 的因式。

（2）我們設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 為 $g(x)$ 中任兩個不同的因式，$a\in \mathrm{F}_{\mathrm{p}}$ 、 $b\in \mathrm{F}_{\mathrm{p}}$

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}\times\frac{ap(x)+bq(x)}{ap(x)+bq(x)}=\frac{ap(x)}{g(x)\{ap(x)+bq(x)\}}+\frac{bq(x)}{g(x)\{ap(x)+bq(x)\}}$$

$$=\frac{a}{\frac{g(x)}{p(x)}\{ap(x)+bq(x)\}}+\frac{b}{\frac{g(x)}{q(x)}\{ap(x)+bq(x)\}}$$

$$=\frac{1}{\frac{g(x)}{p(x)}\left\{p(x)+\frac{b}{a}\times q(x)\right\}}+\frac{\frac{b}{a}}{\frac{g(x)}{q(x)}\left\{p(x)+\frac{b}{a}\times q(x)\right\}}$$

不失一般性，令 $\frac{b}{a}=m\in \mathrm{F}_{\mathrm{p}}$ 、 $\deg p(x)\geq \deg q(x)$ ，且 $p(x)$ 與 $q(x)$ 的領導係數均為1 則 $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{g(x)}{p(x)}\{p(x)+m\times q(x)\}}+\frac{m}{\frac{g(x)}{q(x)}\{p(x)+m\times q(x)\}}$

（3）我們注意到

（a1）分母次數最大為 $\deg g(x)+\deg p(x)-\deg q(x)$

（a2）分母的次數總和為 $2\times\deg g(x)+\deg p(x)-\deg q(x)$

2、找出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 中所有能化成兩個相異單位分式之和的表達式。

若 $p(x)$ 、 $q(x)$ 為 $g(x)$ 中任兩個相異因式，且 $p(x)$ 與 $q(x)$ 的領導係數均為1，$m\in \mathrm{F}_{\mathrm{p}}$ 。

則 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\frac{g(x)}{p(x)}\left\{\frac{p(x)+m\times q(x)}{f(x)}\right\}}+\frac{m}{\frac{g(x)}{q(x)}\left\{\frac{p(x)+m\times q(x)}{f(x)}\right\}}$

我們就得到 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 化成兩個相異單位分式之和的表達式。

（三）、找出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 中所有能化成三個相異單位分式之和的表達式。

1、想法：先找出 $\frac{1}{g(x)}$ 中所有能化成三個相異單位分式之和的表達式。設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 為三個相異多項式， $\deg p(x)\geq \deg q(x)\geq \deg r(x)$

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}\times\left\{\frac{p(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}+\frac{q(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}+\frac{r(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}\right\}$$

$$=\frac{1}{g(x)}\times\left\{\frac{p(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}+\frac{q(x)+r(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}\right\}$$

$$=\frac{1}{g(x)}\times\left\{\frac{p(x)+q(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}+\frac{r(x)}{p(x)+q(x)+r(x)}\right\}$$

由（二）知 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 為 $g(x)$ 中任三個相異因式。

不失一般性，設 $p(x)$、$q(x)$、$r(x)$ 為 $g(x)$ 中領導係數均為1的三個相異因式，

且 $\deg p(x)\geq\deg q(x)\geq\deg r(x)$ 。 $m\in\mathrm{F}_5$ 、 $n\in\mathrm{F}_5$ 。

則 $$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{p(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}+\dfrac{m\times q(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}\\+\dfrac{n\times r(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}\end{array}\right\}$$

2、找出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 中所有能化成三個相異單位分式之和的表達式。

我們先令 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ，其中 $g_1(x)$ 至少有三個因式。

若 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 為 $g_1(x)$ 中任三個領導係數均為1的相異因式，且

$\deg p(x)\geq\deg q(x)\geq\deg r(x)$ 。又設 $m\in\mathrm{F}_5$ 、 $n\in\mathrm{F}_5$ 。

若 $f_1(x)$ 是 $p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)$ 的因式，則設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 為 $g(x)$ 中領導係數均的三個，且 $\deg p(x)\geq\deg q(x)\geq\deg r(x)$ 。

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{p(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}+\dfrac{m\times q(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}\\+\dfrac{n\times r(x)}{p(x)+q(x)+n\times r(x)}\end{array}\right\}$$

（四）、討論

我們可以找出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 中能化成三或四個相異單位分式之和的表達式嗎？有無具體的分解法呢? 雖然我們還沒找到一個圓滿的答案。不過我們有以下的推斷:若 $f(x)$ 有 k 項、而 $g(x)$ 可以找到 k 個相異因式，則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 能化成 k 個相異單位分式之和。

（四）、例如：

1、 $$\frac{1}{(x^2+4x+1)(x^2+2x+3)}$$

$$=\frac{1}{(x^2+4x+1)(x^2+2x+3)}\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+4x+1+4\times(x^2+2x+3)}\\+\dfrac{4\times(x^2+2x+3)}{x^2+4x+1+4\times(x^2+2x+3)}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{(x^2+2x+3)\times(2x+3)}+\frac{4}{(x^2+4x+1)\times(2x+3)}$$

$$=\frac{3}{(x^2+2x+3)\times(x+4)}+\frac{2}{(x^2+4x+1)\times(x+4)}$$

$$\frac{1}{141\times123}=\frac{1}{141\times123}\times\left\{\frac{141}{141+4\times123}+\frac{4\times123}{141+4\times123}\right\}$$

$$=\frac{1}{141\times123}\times\left\{\frac{141}{23}+\frac{4\times123}{23}\right\}=\frac{1}{123\times23}+\frac{4}{141\times23}=\frac{3}{123\times14}+\frac{2}{141\times14}$$

2、$\dfrac{1}{(x^2+4x+1)\times(x+3)}$

$$\frac{1}{141\times13}=\frac{1}{141\times13}\times\left\{\frac{141}{141+13}+\frac{13}{141+13}\right\}=\frac{1}{104\times13}+\frac{1}{141\times104}$$

3、$\dfrac{x^2+4x+2}{x^4+3x^3+x^2+3}=\dfrac{x^2+4x+2}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}$

$$=\frac{x^2+4x+2}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}\left\{\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}+\frac{x^2+x+1}{2x^2+3x+4}\right\}$$

$$=\frac{x^2+4x+2}{(x^2+x+1)(2x^2+3x+4)}+\frac{x^2+4x+2}{(x^2+2x+3)(2x^2+3x+4)}$$

$$=\frac{1}{(x^2+x+1)\times2}+\frac{1}{(x^2+2x+3)\times2}\quad=\frac{3}{(x^2+x+1)}+\frac{3}{(x^2+2x+3)}$$

$$\frac{142}{13103}=\frac{142}{111\times123}=\frac{142}{111\times123}\left\{\frac{111}{111+123}+\frac{123}{111+123}\right\}\quad=\frac{142}{111\times234}+\frac{142}{123\times234}$$

$$=\frac{1}{111\times2}+\frac{1}{123\times2}=\frac{3}{111}+\frac{3}{123}$$

4、$\dfrac{x^2+1}{x^3+3x^2+3}=\dfrac{x^2+1}{\left(x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}$

$$=\frac{x^2+1}{\left(x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)}\left\{\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+3+3\times(x+1)}+\frac{3\times(x+1)}{x^2+2x+3+3\times(x+1)}\right\}$$

$$=\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+2x+3)}\left\{\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}+\frac{3\times(x+1)}{x^2+1}\right\}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{101}{1303}=\frac{101}{11\times123}=\frac{101}{123\times11}\left\{\frac{123}{123+3\times11}+\frac{3\times11}{123+3\times11}\right\}$$

$$=\frac{101}{11\times123}\left\{\frac{123}{101}+\frac{3\times11}{101}\right\}\quad=\frac{1}{11}+\frac{3}{123}$$

六、神因算法

（一）、設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為互質的多項式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 。找出分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 中所有能化成相異單位分式之和的表達式。

設 $\deg g(x)=m$ 、 $\deg f(x)=n$

（步驟一）設 $d_1(x)$ 、 $d_2(x)$ 、 $d_3(x)$ 、…、 $d_{h-1}(x)$ 、 $d_h(x)$ 是 $g(x)$ 所有的因式，

逐一檢查是否存在 $d_{i,1}(x)$ 、 $d_{i,2}(x)$ 、 $d_{i,3}(x)$ 、…、 $d_{i,m}(x)$ ，使得 $\deg d_{i,1}(x)=1$ 、 $\deg d_{i,2}(x)=2$ 、 $\deg d_{i,3}(x)=3$ 、…、 $\deg d_{i,m}(x)=m$

（步驟二）假設存在 $d_{i,k}(x)$，但有最多連續 j 個因式 $d_{i,k+1}(x)$、…、 $d_{i,k+j}(x)$ 不存在，

則令 $d_{i,k+1}(x)=x\times d_{i,k}(x)$ 、 $d_{i,k+2}(x)=x^2\times d_{i,k}(x)$ 、…、 $d_{i,k+j}(x)=x^j\times d_{i,k}(x)$ ，

又令 $d_{i,t+1}(x)=x\times d_{i,t}(x)$ 、 $d_{i,t+2}(x)=x^2\times d_{i,t}(x)$ 、…、 $d_{i,t+j}(x)=x^j\times d_{i,t}(x)$ ，使得 $x^j\times f(x)=a_0+a_1\times d_{i,1}(x)+a_2d_{i,2}(x)+\cdots+a_{\mathrm{n}+j}d_{i,\mathrm{n}+j}(x)$

（步驟三）展開 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^j\times f(x)}{x^j\times g(x)}$ ，得到所求的單位分式之和。

（二）、討論

設 $\deg g(x)=m$ 、 $\deg f(x)=n$ 。由上述可見, 神因算法的分母的為 $x^j\times g(x)$, 而展開時分母的次數不會大於 $m+j$ 且不小於 $m-n$ 。另外, 高中算法展開後的項數不會大於 n+1 。

又分母次數總和不會大於

$$(m+j)+(m+j-1)+\cdots+(m-n)=\frac{(2m-n-j)(n+j+1)}{2}$$

（3）我們注意到

（a1）分母次數不會大於 $m+j$ 且不小於 $m-n$ 。

（a2）分母的次數總和為$\dfrac{(2m-n-j)(n+j+1)}{2}$

（三）、例如：

1、$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^5+x^4+2x^3+x^2+4x+2}{(x^3+x+1)(x^4+x^3+x^2+2x+1)}$

$\deg(x^3+x+1)=3$、$\deg(x^4+x^3+x^2+2x+1)=4$，無法表示 1、2、5、6

因$2=1+1$、$5=1+4$、$6=2+4$

令$\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=\dfrac{x^2}{x^2}\times\dfrac{x^5+x^4+2x^3+x^2+4x+2}{(x^3+x+1)(x^4+x^3+x^2+2x+1)}$

則$\deg x=1$、$\deg x^2=2$、$\deg(x^3+x+1)=3$、$\deg(x^4+x^3+x^2+2x+1)=4$、

$\deg(x^4+x^3+x^2+2x+1)x=5$、

$\deg(x^4+x^3+x^2+2x+1)x^2=6$、$\deg(x^4+x^3+x^2+2x+1)(x^3+x+1)=7$

設$x^7+x^6+2x^5+x^4+4x^3+2x^2=a\times(x^7+x^6+2x^5+4x^4+3x^3+3x^2+3x+1)$

$+b\times(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2)+c\times(x^5+x^4+x^3+2x^2+x)$

$+d\times(x^4+x^3+x^2+2x+1)+e\times(x^3+x+1)+f\times x^2+g\times x+h$

$=ax^7+(a+b)x^6+(2a+b+c)x^5+(4a+b+c+d)x^4+(3a+b+c+d+e)x^3$

$+(3a+b+2c+d+f)x^2+(3a+c+2d+e+g)x+(a+d+e+h)$

得 $a=1$、$b=0$、$c=0$、$d=2$、$e=4$、$f=2$、$g=4$、$h=3$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2(x^3+x+1)}+\frac{4}{x^2(x^4+x^3+x^2+2x+1)}$$
$$+\frac{2}{(x^3+x+1)(x^4+x^3+x^2+2x+1)}+\frac{4}{x(x^3+x+1)(x^4+x^3+x^2+2x+1)}$$
$$+\frac{3}{x^2(x^3+x+1)(x^4+x^3+x^2+2x+1)}$$

伍、結論：若$\deg g(x)=m$、$\deg f(x)=n\ge 1$。

一、每個真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$都可以表為若干個相異單位分式的和。

二、任何一個最簡真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$，若$\deg f(x)=n\ge 1$，則$\dfrac{f(x)}{g(x)}$可表成不超過$n+1$個相異單位真分式的和。

三、貪心算法與高中算法的展開項數均不會大於n+1。

四、真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$用貪心算法分解為k+1項相異單位分式的和時，則

（一）所得的分母次數均不大於$\left(m-n\right)\times k+\dfrac{k\times(k-1)}{2}+m$

（二）所有分母次數的總和不大於$\dfrac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times m-\dfrac{k\times(k+3)}{2}\times n+\dfrac{(k-1)\times k\times(5k+2)}{6}$

五、真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$用高中算法分解時，則

（一）所得的分母次數均不大於$2\times m-1$

（二）所有分母次數的總和不大於$m+2\times m\times k-k\times(k+1)$（分解為$k$+1項的和時）

六、真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$用神速算法分解時，最多分解為$m+n$項，又

（一）所得的分母次數均不大於$2\times m-1$且不小於$m-n$

（二）所有分母次數的總和不大於$\dfrac{(3\times m-n-1)(m+n)}{2}$。

七、真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$用神因算法分解時，最多分解為$n+j+1$項，又

（一）所得的分母次數均不大於$m+j$且不小於$m-n$

（二）所有分母次數的總和不大於$\dfrac{(2m-n-j)(n+j+1)}{2}$。

八、若$p(x)$、$q(x)$為$g(x)$中任兩個相異因式，且$p(x)$與$q(x)$的領導係數均為1，$m\in \mathrm{F}_{\mathrm{p}}$。

則 $$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{g(x)}{p(x)}\left\{p(x)+m\times q(x)\right\}}+\frac{m}{\frac{g(x)}{q(x)}\left\{p(x)+m\times q(x)\right\}}$$

九、由八我們注意到：若$\deg p(x)\geq \deg q(x)$

（一）分母次數最大為$\deg g(x)+\deg p(x)-\deg q(x)$

（二）分母的次數總和為$2\times\deg g(x)+\deg p(x)-\deg q(x)$

十、由八，若$f(x)$是$p(x)+m\times q(x)$的因式，則

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\frac{g(x)}{p(x)}\left\{\frac{p(x)+m\times q(x)}{f(x)}\right\}}+\frac{m}{\frac{g(x)}{q(x)}\left\{\frac{p(x)+m\times q(x)}{f(x)}\right\}}$$

十一、我們先設$\dfrac{f(x)}{g(x)}$們先令，其中$g(x)$至少有三個因式。若$p(x)$、$q(x)$、$r(x)$為$g(x)$

中任三個領導係數均為1的相異因式，且 $\deg p(x) \geq \deg q(x) \geq \deg r(x)$ 。又設 $m \in \mathrm{F}_5$ 、$n \in \mathrm{F}_5$ 。若 $f(x)$ 是 $p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)$ 的因式，

則 $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{p(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}+\dfrac{m\times q(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}\\ +\dfrac{n\times r(x)}{p(x)+m\times q(x)+n\times r(x)}\end{array}\right\}$$

是單位分式

十二、 $f(x)$ 若可用 $g(x)$ 的 k 個相異因式的和表示，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 能化成 k 個相異單位分式之和。

十三、各種算法比較表

	展開項數 （最大可能值）	所得的分母次數 （最大可能值）	所有分母次數的總和 （最大可能值）
貪心	$n+1$	（分解為 $k+1$ 項的和時） $(m-n)\times k+\dfrac{k\times(k-1)}{2}+m$ （分解為 $n+1$ 項的和時） $(n+1)\times m-\dfrac{(n+1)\times n}{2}$	（分解為 $k+1$ 項的和時） $\dfrac{(k+1)\times(k+2)}{2}\times m-\dfrac{k\times(k+3)}{2}\times n$ $+\dfrac{(k-1)\times k\times(5k+2)}{6}$ （分解為 $n+1$ 項的和時） $\dfrac{m\times(n+1)\times(n+2)}{2}+\dfrac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3}$ $-2\times n^2$
高中	$n+1$	（分解為 $k+1$ 項的和時） $2\times m-1$ （分解為 $n+1$ 項的和時） $2\times m-1$	（分解為 $k+1$ 項的和時） $m+2\times m\times k-k\times(k+1)$ （分解為 $n+1$ 項的和時） $m+2mn-n^2-n$
神速	$m+n$	不大於 $2\times m-1$ 且不小於 $m-n$	$\dfrac{(3\times m-n-1)(m+n)}{2}$
神因	$n+j+1$ （ $j\leq m-1$ ）	不大於 $m+j$ 不小於 $m-n$	$\dfrac{(2m-n-j)(n+j+1)}{2}$

十四、貪心算法表(略舉)

$\dfrac{x+a_0}{x^2+b_1x+b_0}$	$=\dfrac{1}{x+b_1-a_0}+\dfrac{-a_0^2+a_0b_1-b_0}{(x+b_1-a_0)(x^2+b_1x+b_0)}$
$\dfrac{x+a_0}{x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}$	$=\dfrac{1}{x^2+(b_2-a_0)x+(b_1-a_0b_2+a_0{}^2)}+\dfrac{a_0{}^3-a_0{}^2b_2+a_0b_1-b_0}{\left(x^2+(b_2-a_0)x+(b_1+a_0{}^2-a_0b_2)\right)(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)}$
$\dfrac{x+a_0}{x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}$	$=\dfrac{1}{x^3+(b_3-a_0)x^2+(b_2-a_0b_3+a_0^2)x+(b_1-a_0b_2+a_0^2b_3-a_0^3)}$ $+\dfrac{-a_0{}^4+a_0{}^3b_3-a_0{}^2b_2+a_0b_1-b_0}{x^3+(b_3-a_0)x^2+(b_2-a_0b_3+a_0^2)x+(b_1-a_0b_2+a_0^2b_3-a_0^3)(x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)}$
$\dfrac{x^2+a_1x+a_0}{x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}$	$=\dfrac{1}{x+b_2-a_1}+\dfrac{(b_1-a_0^2-a_1b_2+a_1^2)x+(b_0-a_0b_2-a_0a_1)}{(x+b_2-a_1)(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)}$
$\dfrac{x^2+a_1x+a_0}{x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}$	$=\dfrac{1}{x^2+(b_3-a_1)x+(b_2-a_0-a_1b_3+a_1{}^2)}+\dfrac{(b_1-a_0b_3+2a_0a_1-a_1b_2+a_1^2b_3-a_1^3)x+(b_0-a_0b_2+a_0{}^2+a_0a_1b_3-a_0a_1{}^2)}{\left(x^2+(b_3-a_1)x+(b_2-a_0-a_1b_3+a_1{}^2)\right)(x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)}$

陸、參考資料：

一、李毓佩著「不知道的世界(數學篇)」(民國89年6月初版)(凡異出版社)

二、柯召孫琦著「單位分數」(民國92年11月初版)(智能教育出版社)

三、趙文敏著「淺談數論」(民國70年1月初版)(書銘出版社)

四、文耀光，91年「古埃及的單位分數問題」， (數學傳播) 第26卷 第4期 p52~p59

五、文耀光，92年「Golomb 算法與埃及單位分數」， (數學傳播)第27卷 第1期 p24~p26

六、江選平、李奕璟、陳彥家，94年「單位分數的探密」,（中華民國第四十五屆中小學科學展覽會—國中組數學科作品說明書）

【評語】030405

本作品在單位分式的討論，以多種方法呈現並加以比較，值得鼓勵。唯應用性與討論範圍較為受限，甚為可惜。