中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030404

旋切三角形—旋切比能說的秘密

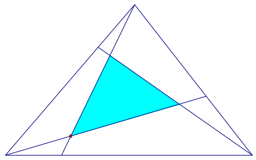
學校名稱：彰化縣立和美國民中學

作者：	指導老師：
國一　洪宜琦 國一　郭建君 國一　黃柏皓 國一　黃楚瑜	粘憲昌

關鍵詞：圖形變動、相似形、比例式

摘要

在三角形的三邊上各取一點，將該點與對面頂點連接成三條「旋切線」，我們把由這三條旋切線所組成的三角形稱作「旋切三角形」。



研究發現旋切三角形與原三角形的面積比及截線比皆與旋切比有關。我們並探討旋切三角形與原三角形相似的「同形旋切」。此外，固定旋切比的旋切三角形與原三角形重心為同一點。我們發現四邊形中的平行四邊形也有這些特性。

壹、研究動機

開派對準備甜點時，要把巧克力醬擠在三角形形狀的吐司上，我們隨意從吐司上的三個頂點擠到對面的邊上，無意中發現裡面出現許多個小三角形和一個較大的三角形（如圖 1-1），我們對這些三角形很有興趣，於是便著手進行研究。

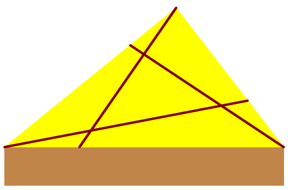


圖 1-1

我們定義「旋切三角形」如下：（如圖 1-2）

△ABC 中，D、E、F 分別在 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 、$\overline{AB}$ 上，則 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 所形成的三角形稱作「旋切三角形」，換句話說，△GHI 稱作△ABC 的旋切三角形。其中 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 稱作△GHI 的「旋切線」。$\overline{AF}$ ：$\overline{FB}$ 、$\overline{BD}$ ：$\overline{DC}$ 、$\overline{CE}$ ：$\overline{EA}$ 稱作旋切比。

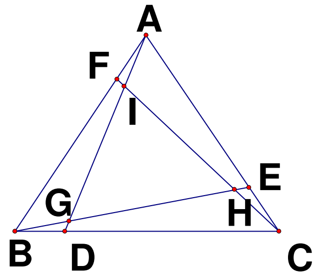


圖 1-2

以 GSP 操作發現，當 D、E、F 任意變動時，有時旋切三角形會不存在，也就是旋切線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於一點，此外無特殊發現。我們無意間想到固定 $\overline{AF}$ ： $\overline{FB}$ ＝ $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}$ ＝ $\overline{CE}$ ： $\overline{EA}$ ＝2：1。觀察後發現△ABC：△GHI 的比值不因圖形變動而改變。（如圖 1-3）

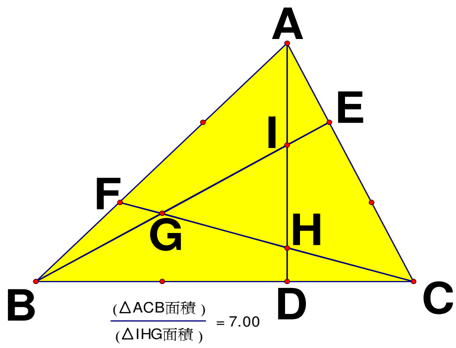


圖 1-3

因此我們定義「完美旋切比」如下：

以逆時針方向取旋切比 $\overline{AF}$ ： $\overline{FB}$ ＝ $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}$ ＝ $\overline{CE}$ ： $\overline{EA}$ ＝m：n 時，m：n 稱作旋切三角形的完美旋切比。其中 m≠n，否則旋切三角形不存在。以完美旋切比進行旋切所得之旋切三角形稱作完美旋切三角形。

貳、研究目的

本研究的研究目的在探討不同的完美旋切比所作出來的完美旋切三角形與原三角形之間的關聯。

叁、研究工具

GSP 繪圖軟體

肆、研究過程及方法

一、完美旋切比為 m：n 時，完美旋切三角形與原三角形面積比值之探討

先將「同高原理」說明如下：（如圖 4-1）

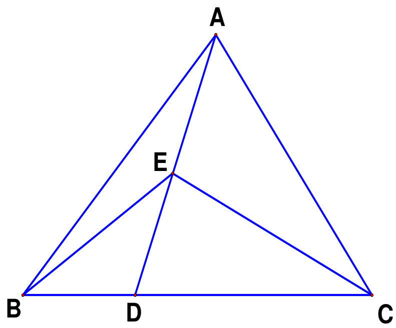


圖 4-1

△ABC 中，因為△ ABD、△ADC，和△BDE、△CDE 的高都各相等，所以△ABD：△ADC＝△BDE：△CDE＝$\overline{BD}$ ：$\overline{DC}$ ，這就是所謂的「同高原理」。

由同高原理可推得△ABE：△AEC＝$\overline{BD}$ ：$\overline{DC}$ 。

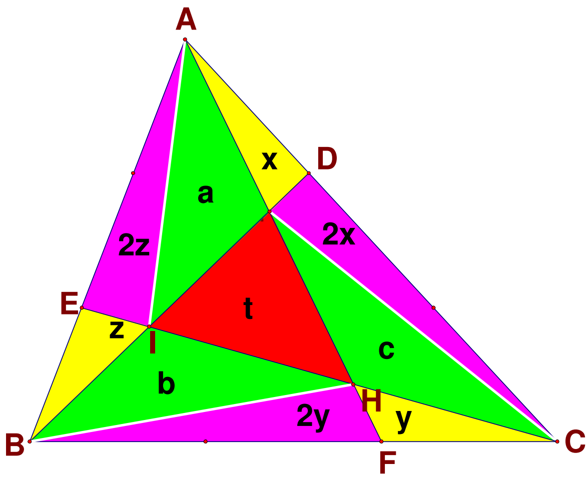


圖 4-2

先以 2∶1 的比例來研究。首先畫輔助線 $\overline{AI}$ 、$\overline{BH}$ 、$\overline{GC}$（如圖 4-2）。因為 $\overline{\mathrm{BF}}$：$\overline{\mathrm{FC}}$＝2：1，所以令△HBF＝2y、△HFC＝y、△GDC＝2x、△GDA＝x、△IEA＝2z、△IEB＝z、△GHI＝t、△AGI＝a、△BHI＝b、△CGH＝c。由 $\overline{\mathrm{BF}}$ ：$\overline{\mathrm{FC}}$ ＝

2：1 推得（b＋t)：c＝2：1，即 b＋t＝2c，同理 t＋c＝2a、a＋t＝2b。

再令 a=kt，則 b= t（4k－3)、c= t（2k－1)，代入 2b＝a＋t 可推得 k=1，那 a、b、c 就都會變成 t。於是△GHI 的面積=△GHC 的面積，得 $\overline{IH}$ ： $\overline{HC}$ =1：1，由同高原理得 3y=t，同理 3x=t、3z=t，則 x＝y＝z＝$\frac{t}{3}$ 。結果如圖 4-3 所示。

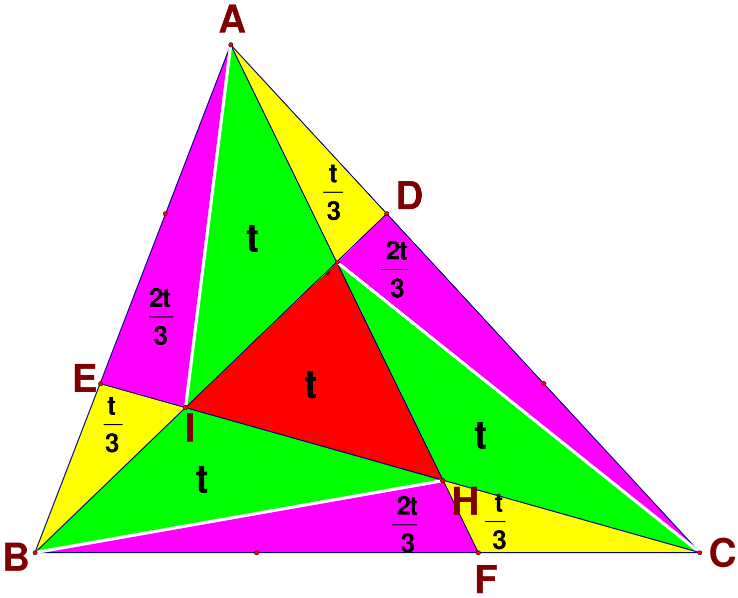


圖 4-3

原三角形的面積爲 7t，旋切三角形的面積爲 t，也就是當完美旋切比爲 2：1 時，不管圖形怎麼變動，原三角形面積：完美旋切三角形面積＝7：1 恆成立 。除此，△AGC：△GHC：△HFC＝t：t：$\frac{t}{3}$ ＝3：3：1，推得 $\overline{AG}$ ： $\overline{GH}$ ： $\overline{HF}$ ＝ 3：3：1，同理，$\overline{CH}:\overline{HI}$ ： $\overline{\mathrm{IE}}$ ＝3：3：1，$\overline{\mathrm{BI}}$ ： $\overline{\mathrm{IG}}$ ： $\overline{\mathrm{GD}}$ ＝3：3：1

我們定義「旋切截線」如下：

旋切三角形的三條旋切線兩兩相截且將彼此截成三個線段，該三線段稱作「旋切截線」。該三線段由頂點出發的連比稱作「旋切截線比」。

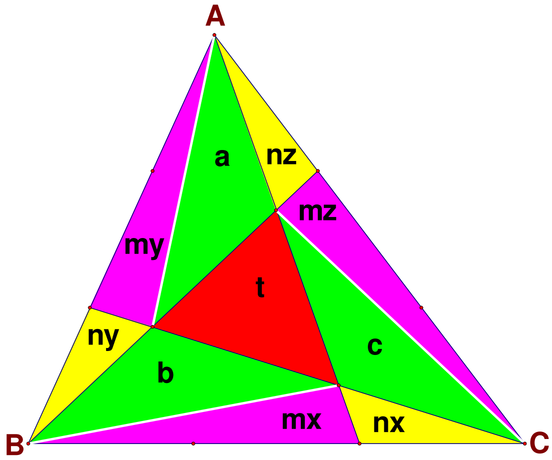


圖 4-4

完美旋切比爲 m：n 時，推得$\begin{cases}(b+t):c=m:n, cm=nb+nt\\(c+t):a=m:n, am=nc+nt\\(a+t):b=m:n, bm=na+nt\end{cases}$，令 a＝kt，則

b＝$\dfrac{nt}{m}$ （k+1），c＝$\dfrac{ktm-nt}{n}$ ，代入 cm＝nb＋nt 得 k＝$\dfrac{n^3+m^2n+mn^2}{m^3-n^3}$ ＝ $\dfrac{n(\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2+\mathrm{nm})}{(\mathrm{m}-\mathrm{n})(\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2+\mathrm{nm})}$＝$\dfrac{n}{m-n}$ 。由 k＝$\dfrac{n}{m-n}$可算出 a＝b＝c＝kt。(如圖 4-4)

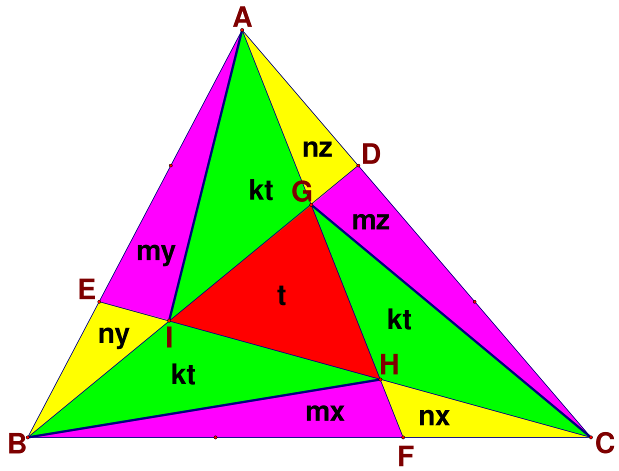


圖 4-5

因△GHC：△GHI＝k：1，由同高原理可知$\overline{HC}$ ：$\overline{IH}$ ：＝k：1＝x(m+n)：kt，

同理，$\overline{BI}$ ：$\overline{IG}$＝k：1＝y(m+n)：kt、$\overline{AG}$ ：$\overline{GH}$＝k：1＝z(m+n)：kt（如圖 4-5），

推得 x＝y＝z＝$\dfrac{k^2}{m+n}\times t$ 。(令$\dfrac{k^2}{m+n}$=h)

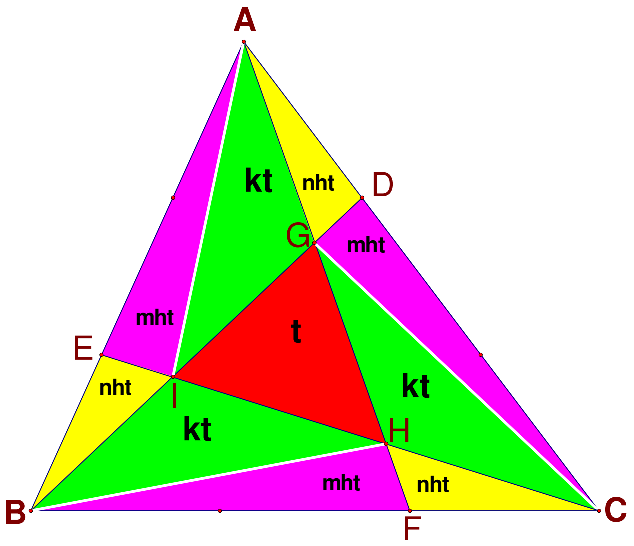


圖 4-6

△ABC=〔3（mh+nh+k）+1〕t= 〔$3k^2+3k+1$〕t（如圖 4-6），△GHI=t，因此，△ABC：△GHI=（$3k^2+3k+1$）：1，又 $k=\frac{n}{m-n}$，所以

原三角形面積：完美旋切三角形面積=（m^2+mn+n^2）：$(m-n)^2$

由同高原理推得△AGC：△GHC：△HFC

=h（m+n）：k：nh

=n（m+n）：（m−n）（m+n）：n^2

，所以 $\overline{AG}:\overline{GH}:\overline{HF}$ =n（m+n）：（m−n）（m+n）：n^2，同理 $\overline{BI}:\overline{IG}:\overline{GD}$ $=\overline{CH}:\overline{HI}:\overline{IE}$ =n（m+n）：（m−n）（m+n）：n^2。

旋切截線比 n（m+n）：（m−n）（m+n）：n^2 成立的條件爲 m−n>0，因此我們就 m−n 的正負值進行討論：

1.m−n>0，從∠A 的頂點出發，以逆時針方向往 $\overline{AB}$ 取完美旋切比 m：n，此時完美旋切三角形外繞的三角形的一邊不會與 $\overline{AB}$ 重合。此種旋切稱作正旋切；

2. m−n<0，從∠A 的頂點出發，以逆時針方向往 $\overline{AB}$ 取完美旋切比 m：n，此時完美旋切三角形外繞三角形的一邊會與 $\overline{AB}$ 重合。此種旋切稱作反旋切。

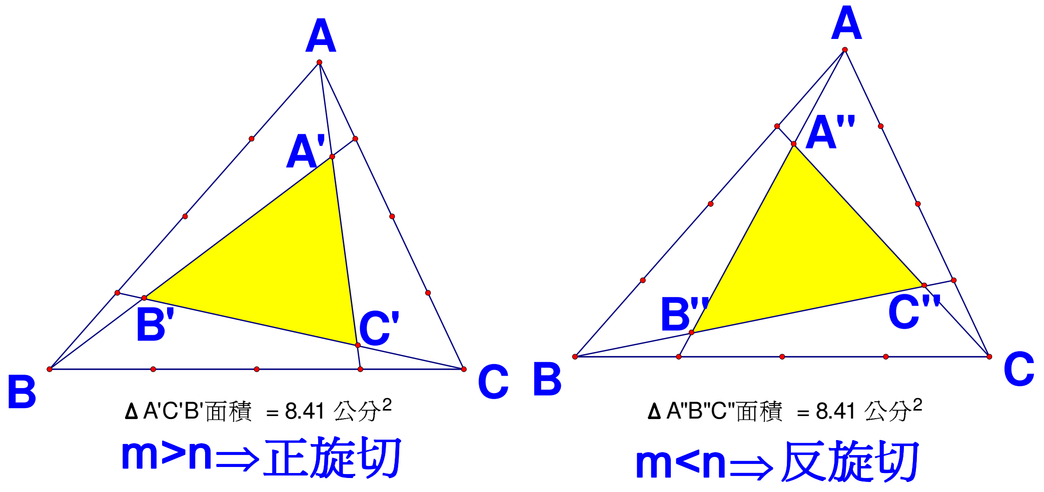


圖 4-7

除此，同一個三角形中，完美正旋切三角形與完美反旋切三角形面積相等。（如圖 4-7）

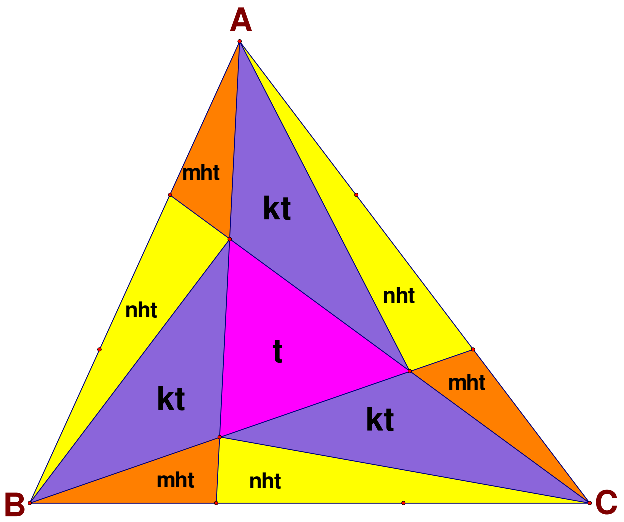


圖 4-8

當完美旋切比 m∶n 爲反旋切時，用同樣的方法推算得到圖 4-8，其中 $k=\dfrac{m}{n-m}$ $h=\dfrac{k^2}{m+n}$ ，推得反旋切截線比＝m（n＋m）∶（－m＋n）（m＋n）∶m^2

結論：完美旋切比爲 m：n 時，原三角形的面積：完美旋切三角形的面積有一定的比值，正反旋切截線也有一定的比例：

1.原三角形面積：完美旋切三角形面積＝（m^2+mn+n^2）:（m－n）^{2}

2. 正旋切（m＞n）的旋切截線比＝n（m＋n）:（m－n）（m＋n）: n^2

反旋切（m＜n）的旋切截線比＝m（n＋m）:（－m＋n）（m＋n）: m^2

二、同形旋切

透過旋切，新的旋切三角形會不會跟原來的三角形相似？先正旋切再反旋切，結果會如何？

先以完美旋切比 2：1 作正旋切得到一個「正旋切三角形」，再以完美旋切比 1：2 對該「正旋切三角形」作旋切得到一個「反旋切三角形」，該「反旋切三角形」恰好與原三角形相似。其證明如下

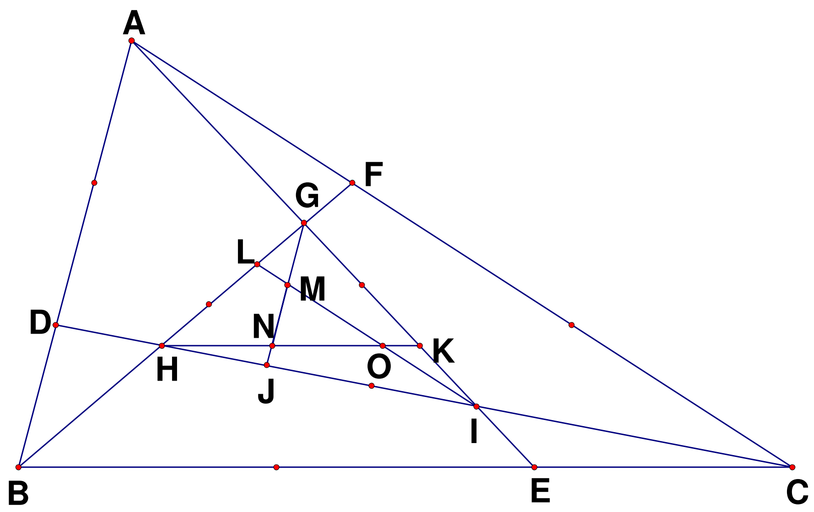


圖 4-9

令 A（a，b）、B（c，d）、C（e，f），以分點公式計算每個截點的座標（如圖 4-9）。

由於正旋切比為 2：1，用分點公式推算出正旋切的截點 D、E、F 的座標分別為 D（$\dfrac{2c+a}{3}$，$\dfrac{2d+b}{3}$）、E（$\dfrac{2e+c}{3}$，$\dfrac{2f+d}{3}$）、F（$\dfrac{2a+e}{3}$，$\dfrac{2b+f}{3}$）

而 $\overline{FG}:\overline{GB}=\overline{DH}:\overline{HC}=\overline{EI}:\overline{IA}=1:6$，因此推算出

$$G\left(\frac{4a+2e+c}{7}，\frac{4b+2f+d}{7}\right)$$

$$H\left(\frac{4c+2a+e}{7}，\frac{4d+2b+f}{7}\right)$$

$$I\left(\frac{4e+2c+a}{7}，\frac{4f+2d+b}{7}\right)$$

以反旋切比 1：2 對△GHI 作旋切可推算出

$$M\left(\frac{3a+2e+2c}{7}，\frac{3b+2f+2d}{7}\right)$$

$$N\left(\frac{3c+2a+2e}{7}，\frac{3d+2b+2f}{7}\right)$$

$$O\left(\frac{3e+2c+2a}{7}，\frac{3f+2d+2b}{7}\right)$$

然後我們計算出△ABC 和△MNO 的三邊長，分別是

$$\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(c-e)^2+(e-f)^2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(e-a)^2+(f-b)^2}$$

$$\overline{MN}=\sqrt{(\frac{a-c}{7})^2+(\frac{b-d}{7})^2}$$

$$\overline{NO}=\sqrt{(\frac{c-e}{7})^2+(\frac{e-f}{7})^2}$$

$$\overline{OM}=\sqrt{(\frac{e-a}{7})^2+(\frac{f-b}{7})^2}$$

$\overline{AB}$ ： $\overline{MN}=\overline{BC}$ ： $\overline{NO}=\overline{CA}$ ： $\overline{OM}$ ＝7：1，所以△ABC~△MNO。我們將這種旋切的過程稱作「同形旋切」，也就是對一個給定的三角形進行旋切，使得旋切所得的旋切三角形與原三角形相似。

同形旋切推廣到完美旋切比爲 m：n 的分析如下：

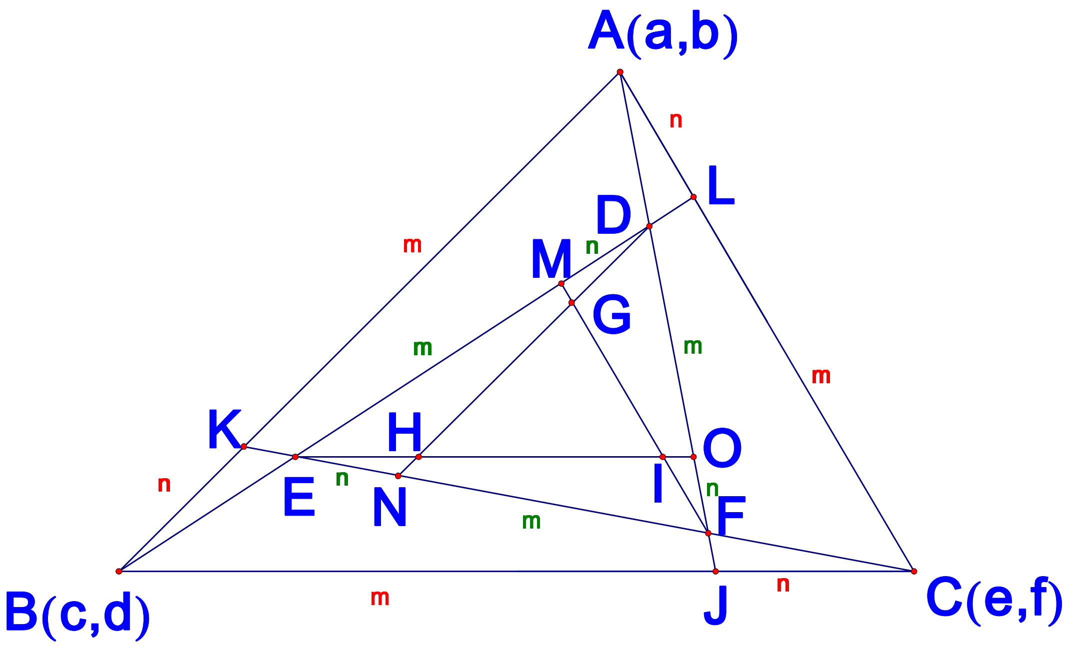


圖 4-10

由完美旋切比 m：n 推出

J（$\dfrac{me+nc}{m+n}$，$\dfrac{mf+nd}{m+n}$）、K（$\dfrac{mc+an}{m+n}$，$\dfrac{md+nb}{m+n}$）、L（$\dfrac{ma+ne}{m+n}$，$\dfrac{mb+nf}{m+n}$）

由於 $\overline{AD}$：$\overline{DJ}$ ＝ $\overline{CF}$：$\overline{FK}$ ＝ $\overline{BE}$：$\overline{EL}$ ＝n（m＋n）：m^2（如圖 4-10），因此我們推得

$$D\left(\frac{cn^2+emn+am^2}{m^2+mn+n^2},\ \frac{dn^2+fmn+bm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$E\left(\frac{en^2+amn+cm^2}{m^2+mn+n^2},\ \frac{fn^2+bmn+dm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$F\left(\frac{an^2+cmn+em^2}{m^2+mn+n^2},\ \frac{bn^2+dmn+fm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

由上述的旋切比再推出

$$G\left(\frac{emn+a(m^2-mn+n^2)+cmn}{m^2+mn+n^2},\ \frac{fmn+b(m^2-mn+n^2)+dmn}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$H\left(\frac{amn+c(m^2-mn+n^2)+emn}{m^2+mn+n^2},\ \frac{bmn+d(m^2-mn+n^2)+fmn}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$I\left(\frac{cmn+e(m^2-mn+n^2)+amn}{m^2+mn+n^2},\ \frac{dmn+f(m^2-mn+n^2)+bmn}{m^2+mn+n^2}\right)$$

△ABC 和△GHI 的三邊長分別是

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \qquad \overline{\mathrm{GH}}=\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}\times\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(c-e)^2+(e-f)^2} \qquad \overline{HI}=\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}\times\sqrt{(c-e)^2+(e-f)^2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(e-a)^2+(f-b)^2} \qquad \overline{IG}=\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}\times\sqrt{(e-a)^2+(f-b)^2}$$

可以推得 $\overline{\mathrm{GH}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{HI}:\overline{BC}=\overline{IG}:\overline{CA}=\dfrac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}$ ，由 SSS 相似性質推得△ABC～△GHI。

是否有其他的同形旋切呢？對任意一個三角形進行若干次的完美正旋切與完美反旋切，只要完美正旋切的總次數與完美反旋切的總次數相同，則該旋切必爲「同形旋切」。

三、完美旋切三角形與原三角形之重心爲同一點

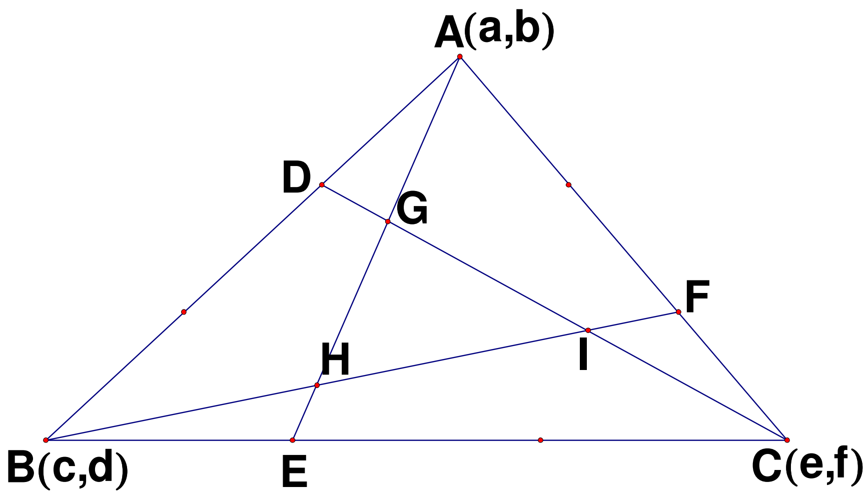


圖 4-11

先以 1：2 的比例研究令 A（a，b）、B（c，d）、C（e，f），依分點公式算出△ABC 的重心爲

$$\left(\frac{1\times a+2\times\frac{c+e}{2}}{1+2},\frac{1\times b+2\times\frac{d+f}{2}}{1+2}\right)=\left(\frac{a+c+e}{3},\frac{b+d+f}{3}\right),$$

同理可推得 D、E、F 的座標爲

D（$\frac{2a+c}{3}$，$\frac{2b+d}{3}$）、E（$\frac{2c+e}{3}$，$\frac{2d+f}{3}$）、F（$\frac{2e+a}{3}$，$\frac{2f+b}{3}$），

又旋切截線比爲 3：3：1，可推出 G、H、I 的座標爲

$$G\left(\frac{4a+2c+e}{7},\frac{4b+2d+f}{7}\right)、$$

$$H\left(\frac{4c+2e+a}{7},\frac{4d+2f+b}{7}\right)、$$

$$I\left(\frac{4e+2a+c}{7},\frac{4f+2b+d}{7}\right)，$$

可知道△GHI 的重心也是（$\frac{a+c+e}{3}$，$\frac{b+d+f}{3}$），因此當完美旋切比爲三 1：2 時，△ABC 的重心和△GHI 的重心是同一點。（如圖 4-11）

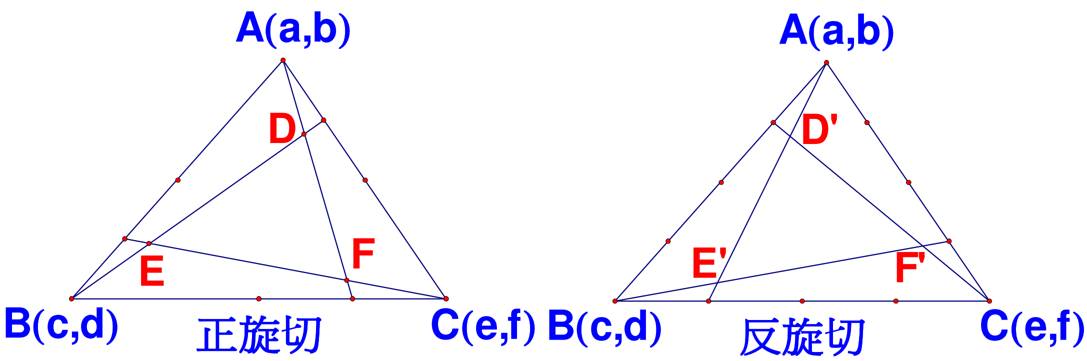


圖 4-12

完美旋切比爲 m：n 時，我們依分點公式計算出

$$D\left(\frac{cn^2+emn+am^2}{m^2+mn+n^2},\frac{dn^2+fmn+bm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$E\left(\frac{en^2+amn+cm^2}{m^2+mn+n^2},\frac{fn^2+bmn+dm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$F\left(\frac{an^2+cmn+em^2}{m^2+mn+n^2},\frac{bn^2+dmn+fm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

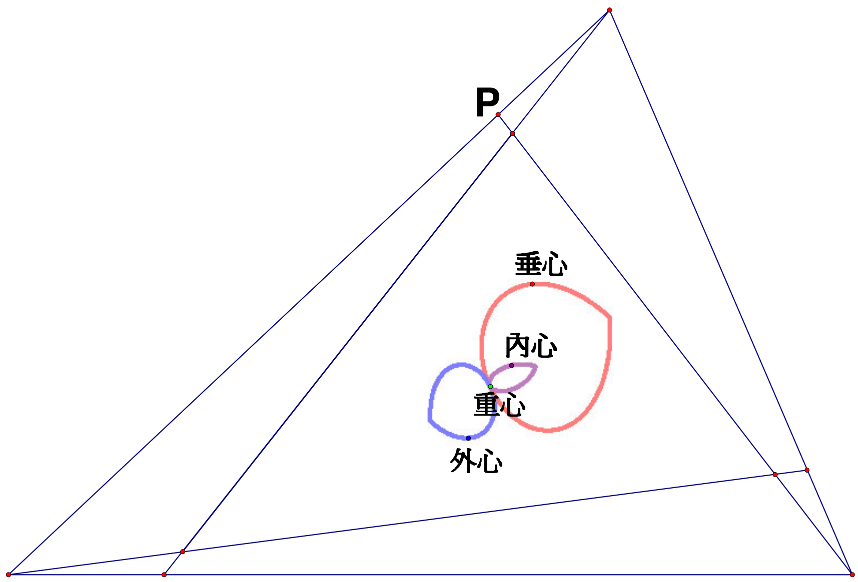
$$D'\left(\frac{an^2+cmn+em^2}{m^2+mn+n^2},\frac{bn^2+dmn+fm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$E'\left(\frac{cn^2+emn+am^2}{m^2+mn+n^2},\frac{dn^2+fmn+bm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

$$F'\left(\frac{en^2+amn+cm^2}{m^2+mn+n^2},\frac{fn^2+bmn+dm^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

得知△DEF 及的△$D^{'}E^{'}F^{'}$重心皆爲（$\frac{a+c+e}{3}$　，$\frac{b+d+f}{3}$），這說明原三角形與完美正、反旋切三角形的重心相同（如圖 4-12）。

重心以外，我們還研究外心、垂心和內心，發現同一三角形中，以 P 點作爲變動點時，也就是當完美旋切比變動時，完美旋切三角形的外心、垂心和內心移動的軌跡會形成類似水滴狀的路徑。（如圖 4-13）



如圖 4-13

垂心與外心所形成的水滴狀路徑彼此相似。理由如下：

由於重心、外心、垂心共線（該線稱作尤拉線），且垂心到重心距離恆爲外心到重心距離的 2 倍。所以，重心相當於縮放的中心，將外心與垂心沿反方向作 1 倍及 2 倍的投影，因此垂心與外心所形成的水滴狀路徑彼此相似，且水滴狀路徑的長度比爲 1：2，水滴狀路徑所形成圖形的面積比爲 1：4。

我們並未研究出完美旋切三角形的外心、垂心和內心這三心之間的關聯以及這些路徑的方程式，這個問題留給後續研究者繼續發展。

伍、研究結果

將任意三角形的三邊逆時針走向，以 m：n 取三個截點，將截點與相對的頂點作截線，三截線所圍成的三角形稱作原三角形的旋切三角形，研究結果如下：

（一）完美旋切比爲 m：n 時，原三角形的面積與旋切三角形的面積有一定的比例，旋切截線也有一定的比例：

1.原三角形面積：完美旋切三角形面積＝（m^2+mn+n^2）:（m－n）^{2} 。

2. 完美正旋切（m＞n）的旋切截線比＝n（m＋n）:（m－n）（m＋n）: n^2 ；

完美反旋切（m＜n）的旋切截線比＝m（n＋m）:（－m＋n）（m＋n）: m^2 。

3.正旋切與反旋切所得的完美旋切三角形面積相等。

（二）將原三角形進行旋切，若所得的旋切三角形跟原來的三角形相似，則該旋切過程稱做同形旋切。對任意一個三角形進行若干次的完美正旋切與完美反旋切，只要正旋切與反旋切的總次數相同，則該旋切必爲「同形旋切」。

（三）1.完美旋切三角形與原三角形之重心爲同一點。

2.同一三角形中，當完美旋切比變動時，完美旋切三角形的外心及垂心變動軌跡呈水滴狀的相似封閉圖形，該兩圖形的周長比爲 1：2，面積比爲 1：4。

陸、討論

一、完美旋切平行四邊形

是否四邊形也有這些特性？用 GSP 軟體操作之後發現並非如此，但如果是特定的四邊形呢？我們發現平行四邊形跟三邊形有相似的結果：

（一）平行四邊形以 m：n 做完美旋切之後所得新四邊形仍是平行四邊形

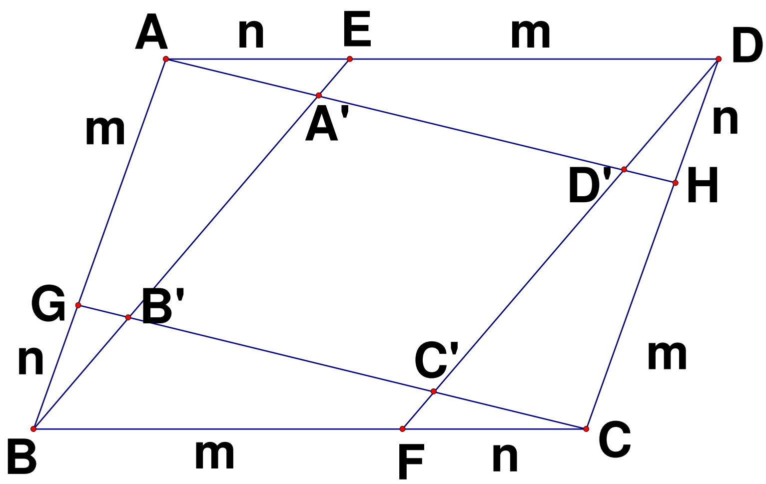


圖 6-1

由上圖可發現 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\times\overline{\mathrm{AD}}$、$\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\times\overline{BC}$，又 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{BC}$，推得 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{BF}}$，$\overline{\mathrm{DE}}//\overline{\mathrm{BF}}$（因爲 $\overline{\mathrm{AD}}//\overline{BC}$），所以 BFDE 是平行四邊形（如圖 6-1），因此 $\overline{BE}//\overline{\mathrm{DF}}$。同理 $\overline{\mathrm{AH}}//\overline{\mathrm{GC}}$， 所以 $A'B'C'D'$ 是平行四邊形。

（二）旋切截線比及面積比

1.旋切截線

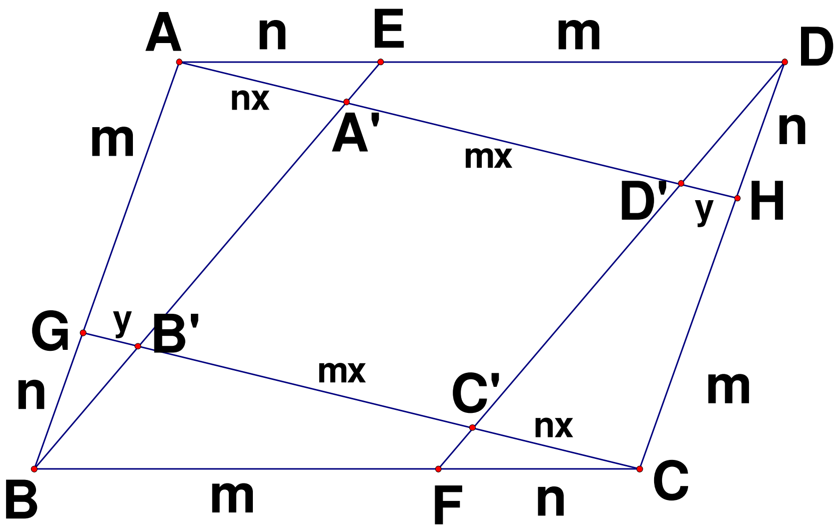


圖 6-2

令完美旋切比爲 m：n，由$\overline{A'E}//\overline{D'D}$可推得$\overline{AA'}$：$\overline{A'D'}$＝n：m。令$\overline{AA'}$＝nx、$\overline{A'D'}$＝mx、$\overline{D'H}$＝y。因爲$A'B'C'D'$是平行四邊形，可知道$\overline{B'C'}=\overline{A'D'}$＝mx，又$\triangle AA'E \cong \triangle CC'F$（AAS）（如圖 6-2），所以可推得$\overline{CC'}=\overline{AA'}$＝nx。

△DC’C 中，由於$\overline{D'H}//\overline{CC'}$，因此 y：nx＝n：(n+m)，化簡得 y（n+m）＝n^2x，也就是 y＝x（$\frac{n^2}{m+n}$），所以$\overline{AA'}$：$\overline{A'D'}$：$\overline{D'H}$＝n（n+m）：m（n+m）：n^2，推得完美正旋切截線比＝n（n+m）：m（n+m）：n^2。經推算平行四邊形的完美反旋切截線比爲 m（n+m）：n（n+m）：m^2。

2.原平行四邊形和完美旋切平行四邊形之面積比

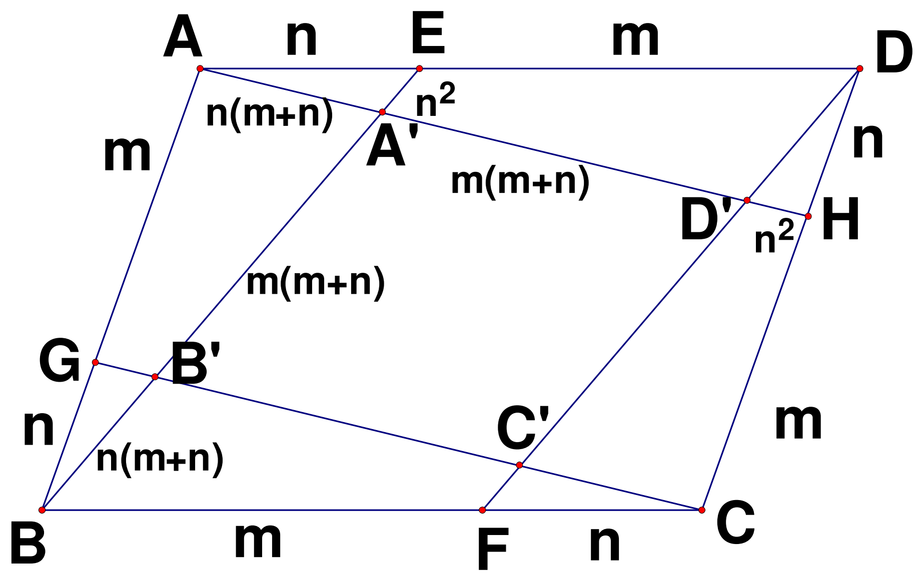


圖 6-3

令 ABCD 面積＝r，由$\overline{AE}$：$\overline{ED}$＝n：m 可推得 BFDE＝r（$\frac{m}{m+n}$），又$\overline{BB'}$：$\overline{B'A}$：$\overline{A'E}$＝n（n+m）：m（n+m）：n^2，得到

$A'B'C'D'=\frac{m(m+n)}{n(m+n)+m(m+n)+n^2}$×BFDE＝$\frac{m^2}{2mn+2n^2+m^2}$×ABCD（如圖 6-3）

推得原平行四邊形：完美正旋切平行四邊形＝（$2mn+2n^2+m^2$）：m^2

同理可推得平行四邊形：完美反旋切平行四邊形＝（$2mn+2n^2+m^2$）：m^2

3.旋切平行四邊形與原平行四邊形重心之探討

把重心的座標設爲（0，0），由於平行四邊形對角線相互平分，所以我們令D（a，b）、C（c，d），則可推得 A（－c，－d）、B（－a，－b）

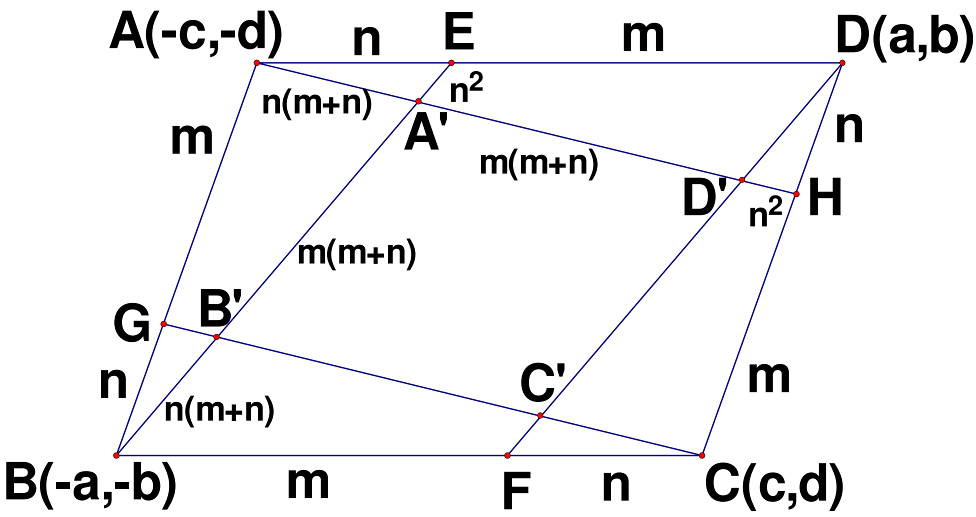


圖 6-4

由旋切比 m：n 推出

$$E\left(\frac{an-cm}{m+n}, \frac{bn-dm}{m+n}\right)$$

$$F\left(\frac{-an+cm}{m+n}, \frac{-bn+dm}{m+n}\right)$$

$$G\left(\frac{-cn-am}{m+n}, \frac{-dn-bm}{m+n}\right)$$

$$H\left(\frac{cn+am}{m+n}, \frac{dn+bm}{m+n}\right)$$

由於截線旋切比爲 n（n+m）：m（n+m）：n^2，所以由截線比（m＋n）^{2}：n^2 及分點公式可推出

$$A'\left(\frac{mn(a-c)-cm^2}{(m+n)^2+n^2}, \frac{mn(b-d)-dm^2}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

$$B'\left(\frac{mn(-a-c)-am^2}{(m+n)^2+n^2}, \frac{mn(-b-d)-bm^2}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

$$C'\left(\frac{mn(-a+c)+cm^2}{(m+n)^2+n^2}, \frac{mn(-b+d)+dm^2}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

$$D'\left(\frac{mn(a+c)+am^2}{(m+n)^2+n^2}, \frac{mn(b+d)+bm^2}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

推得旋切平行四邊形的重心座標爲（0，0），這說明旋切平行四邊形與原平行四邊形重心恰爲同一點（如圖 6-4）。

4.同形旋切

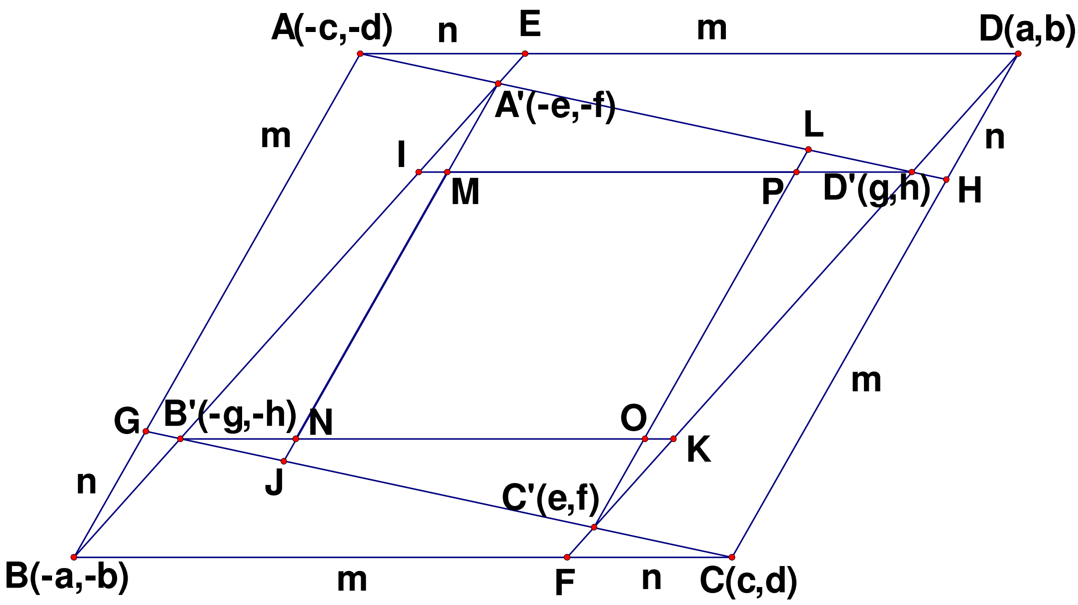


圖 6-5

平行四邊形以 m：n 的完美旋切比先正旋切再反旋切之後，由截線比（m＋n）^{2}：n^2 及分點公式繼續推出 M、N、O、P，得到

$$M\left(\frac{-m^2c}{(m+n)^2+n^2},\frac{-m^2d}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

$$N\left(\frac{-m^2a}{(m+n)^2+n^2},\frac{-m^2b}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

$$O\left(\frac{m^2c}{(m+n)^2+n^2},\frac{m^2d}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

$$P\left(\frac{m^2a}{(m+n)^2+n^2},\frac{m^2b}{(m+n)^2+n^2}\right)$$

推得 $\overline{MN}:\overline{AB}=\overline{NO}:\overline{BC}=\overline{OP}:\overline{CD}=\overline{PM}:\overline{AD}=\dfrac{m^2}{(m+n)^2+n^2}$，我們可以透過斜率證得 ABCD 與 MNOP 的對應角相等，因此兩者爲相似形。(如圖 6-5)

二、旋切比不固定時的同形旋切

旋切比不固定時，先假設旋切三角形三個角的度數和原三角形相等進行推演，而△ABC~△A’B’C’會有六種(如圖 6-6)：

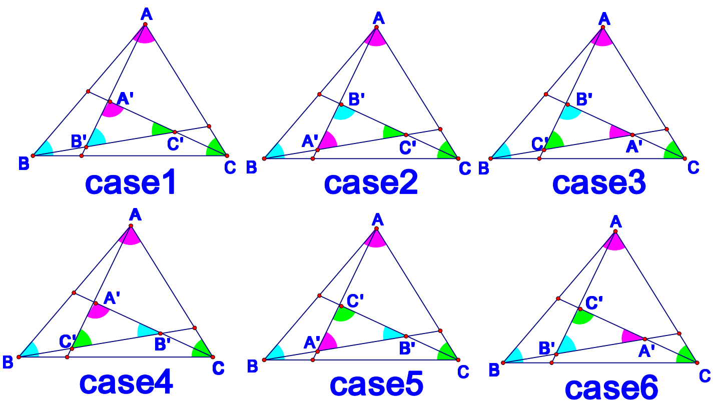


圖 6-6

旋切三角形三頂點中與原三角形頂點最靠近者稱作旋切正位。同形旋切可分成四類：

（一）標準同形旋切

原三角形的每個頂點皆對應到旋切三角形的旋切正位（如 case1），其旋切法與分析如下：

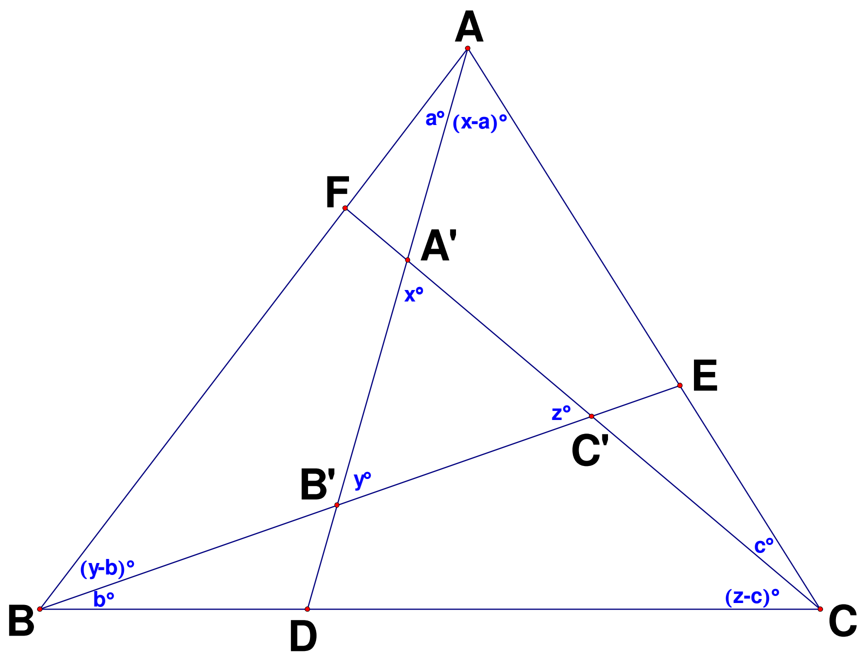


圖 6-7

先令∠BAC＝x°，∠ABC＝y°，∠BCA＝z°，∠BAD＝a°，∠EBC＝b°，∠FCA＝c°，∠BFC＝k°(如圖 6-7)。由△AFC 的外角性質和△FBC 的內角和推得

$$\begin{cases} x^\circ + c^\circ = k^\circ \\ k^\circ + (y-b)^\circ + z^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

從旋切三角形△A' B' C' 的內角和得知 x°＋y°＋z°＝180°，所以 c－b＝0，也就是 c＝b，同理，推得 b＝a，因此得到 a＝b＝c。

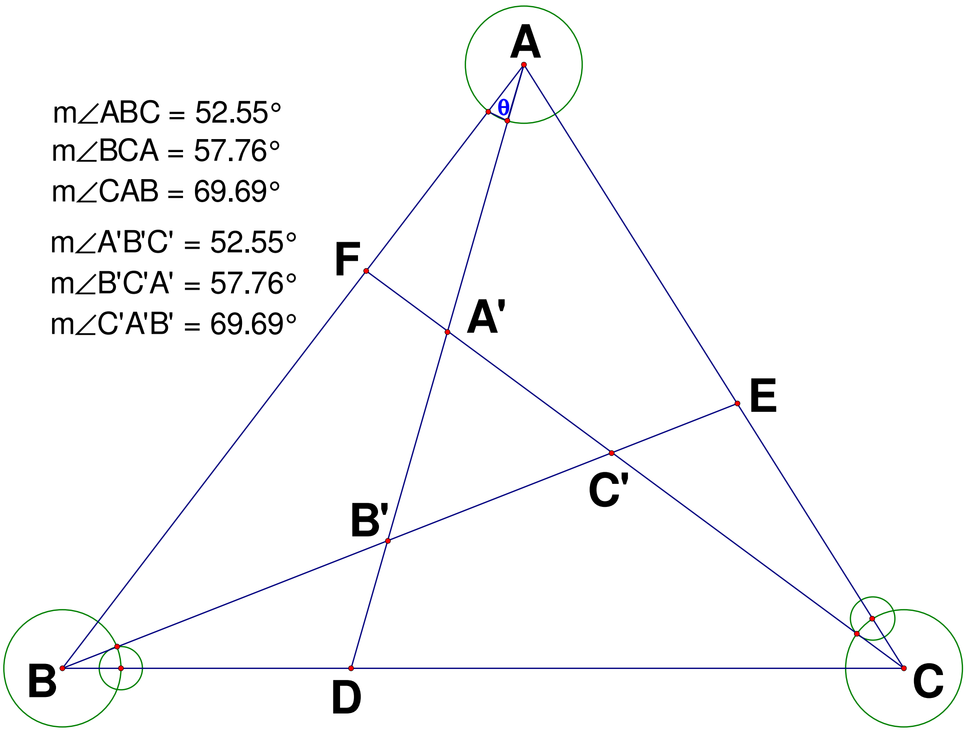


圖 6-8

作法(如圖 6-8)：

1.作出旋切線 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ ，使得∠BAD＝∠EBC＝∠FCA＝θ ，其中θ須小於△ABC 的最小角。

2.旋切線 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 彼此交於 A' 、B' 、C' ，則△A' B' C' ~△ABC。

（二）翻轉同形旋切

原三角形與旋切三角形只有一個頂點對應到旋切正位（如 Case2、4、6）。旋切法與分析如下：

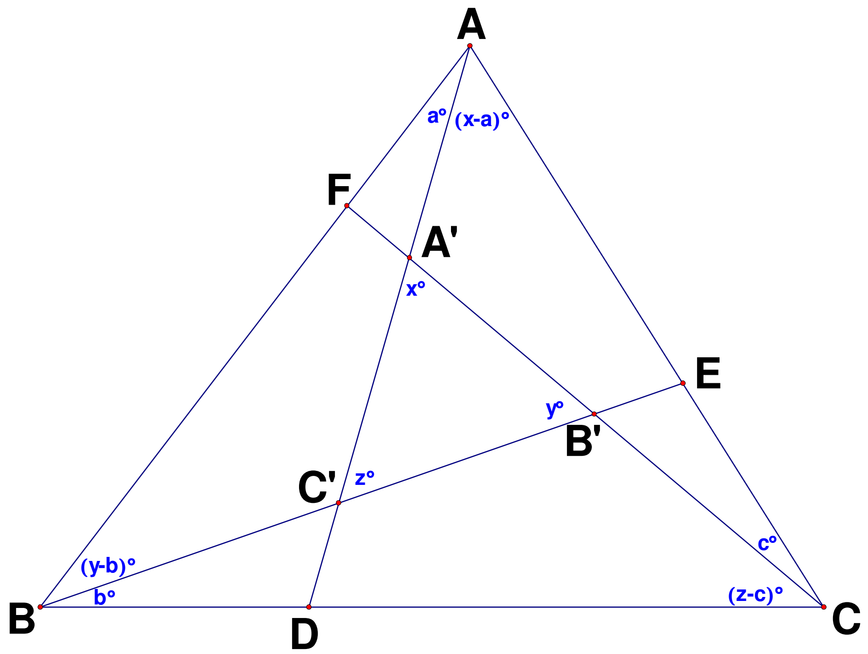


圖 6-9

先令∠BAC＝x°，∠ABC＝y°，∠BCA＝z°，∠BAD＝a°，∠EBC＝b°，∠FCA＝c°。利用△AA’C 的外角性質推得 x°＝（x－a）°＋c°，得 a＝c，△ABC’的外角性質推得 z°＝（y－b）°＋a°，得 b＝（y＋a－z）°，由於 b＞0，所以限制爲 a＞z－y(如圖 6-9)。

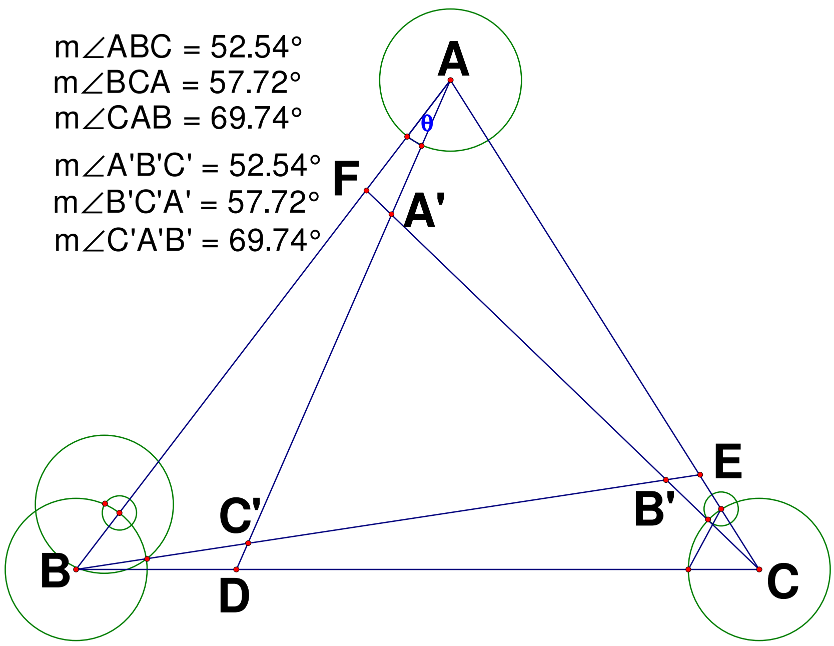


圖 6-10

作法(如圖 6-10)：

1. 作出旋切線$\overline{AD}$、$\overline{CF}$，使得∠BAD＝θ、∠FCA＝θ，θ須大於∠C－∠B。

2.作出旋切線$\overline{BE}$，使得∠EBC＝∠B＋θ－∠C，旋切線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$彼此交於 A’、B’、C’，則△A’B’C’~△ABC。

（三）小旋轉同形旋切

原三角形與旋切三角形每個頂點皆沒對應到旋切正位，但每組對應頂點在同一旋切線上，切法與分析如下：

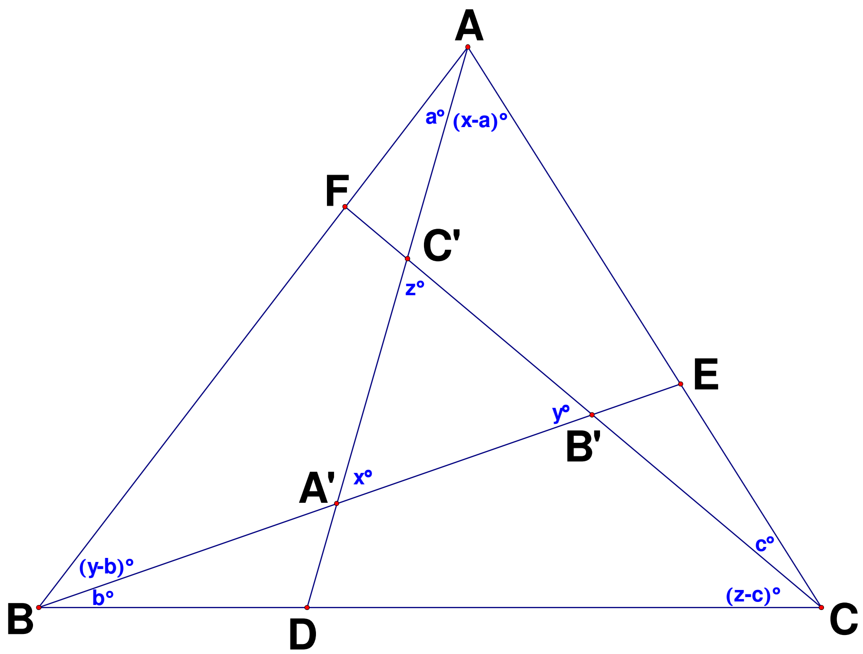


圖 6-11

先令∠BAC＝x°，∠ABC＝y°，∠BCA＝z°，∠BAD＝a°，∠EBC＝b°，∠FCA＝c°(如圖 6-11)。利用△AA’B、△CC’A 的外角性質推得

x°＝（y－b）°＋a°， z°＝（x－a）°＋c°，得 b＝（y＋a－x）°，c＝（z＋a－x）°

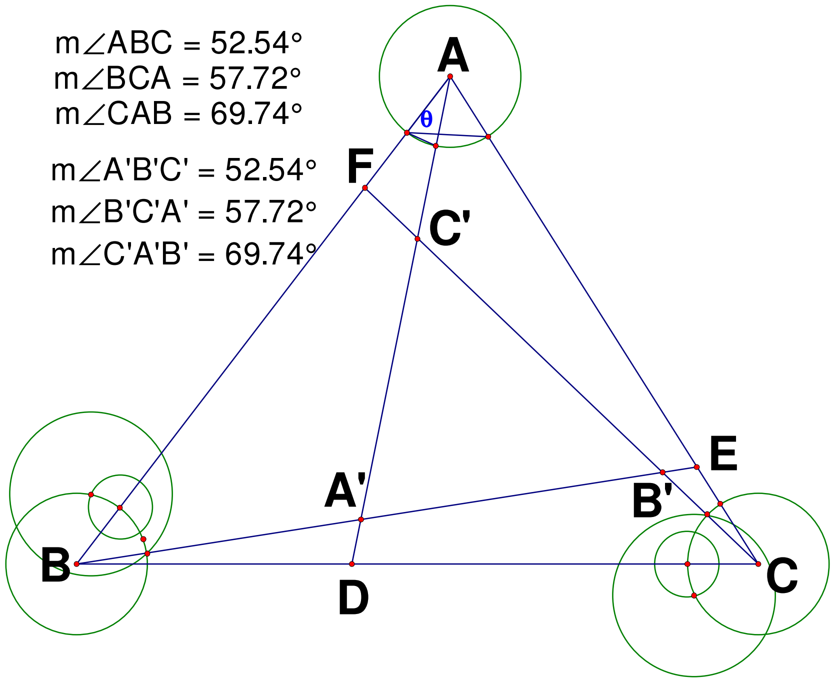


圖 6-12

作法(如圖 6-12)：

1.作出旋切線 $\overline{AD}$ ，令∠BAD＝ θ 。

2.作出旋切線 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ ，使得∠EBC＝∠B＋ θ －∠A、∠FCA＝∠C＋ θ －∠A，

旋切線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 彼此交於 A’ 、B’ 、C’ ，則△A’B’C’ ~△ABC。

當三角形有一個鈍角或直角時小旋轉同形旋切不可能達成，理由如下：若∠A≧90˚，由外角定理得知△ABH 的外角∠BHC 爲鈍角，所以△HEC 中， α 必爲銳角。此時 α 必小於∠A。(如圖 6-13)

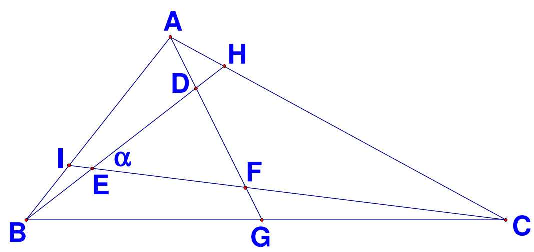


圖 6-13

（四）大旋轉同形旋切

原三角形與旋切三角形每個頂點皆沒對應到旋切正位，且每組對應頂點皆不在

同一旋切線上，切法與分析如下：

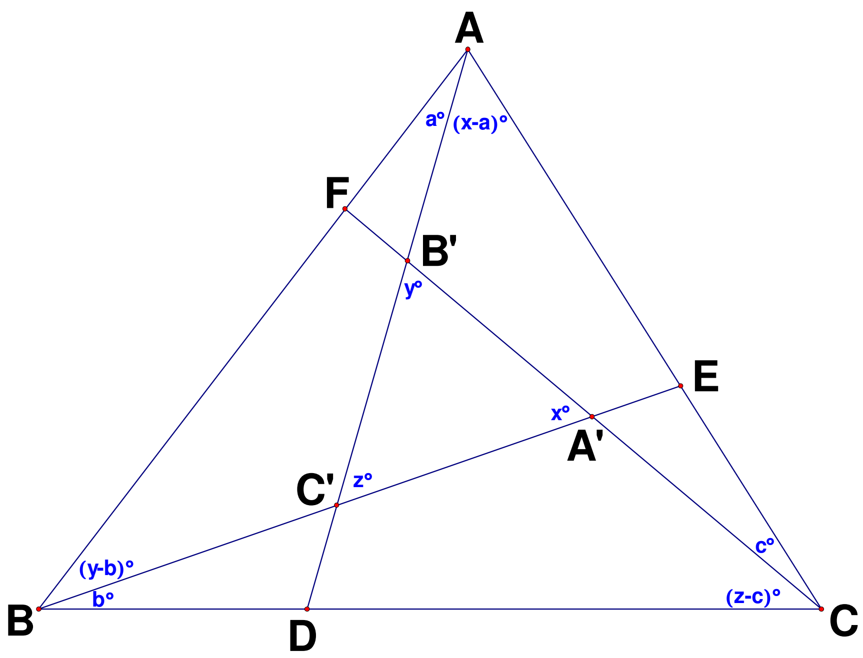


圖 6-14

先令∠BAC＝x°，∠ABC＝y°，∠BCA＝z°，∠BAD＝a°，∠EBC＝b°，∠FCA＝c°(如圖 6-14)。利用△AB’C、△ABC’的外角性質推得

$y^\circ=(x-a)^\circ+c^\circ$， $z^\circ=(y-b)^\circ+a^\circ$，得 $b=(y+a-z)^\circ$，$c=(y+a-x)^\circ$

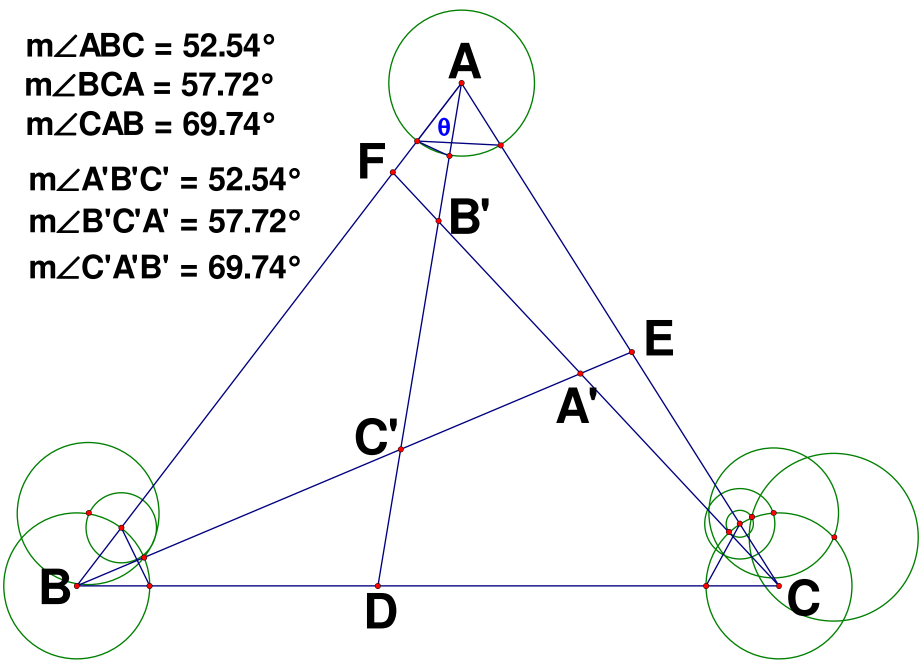


圖 6-15

作法(如圖 6-15)：

1.作出旋切線$\overline{AD}$，令∠BAD＝θ。

2.作出旋切線$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，使得∠EBC＝∠B＋θ－∠C、∠FCA＝∠B＋θ－∠A，

旋切線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$彼此交於 A'、B'、C'，則△A'B'C'~△ABC。

三、旋切比不固定時的旋切

任意三角形△ABC，令$\overline{AB}$＝c、$\overline{BC}$＝a、$\overline{CA}$＝b；任意作出三條旋切線$\overline{AG}$、$\overline{BH}$、$\overline{CI}$得一旋切三角形△DEF，令旋切比分別爲$\overline{AI}$：$\overline{IB}$＝m：n，$\overline{BG}$：$\overline{GC}$＝r：s，$\overline{CH}$：$\overline{HA}$＝t：u。

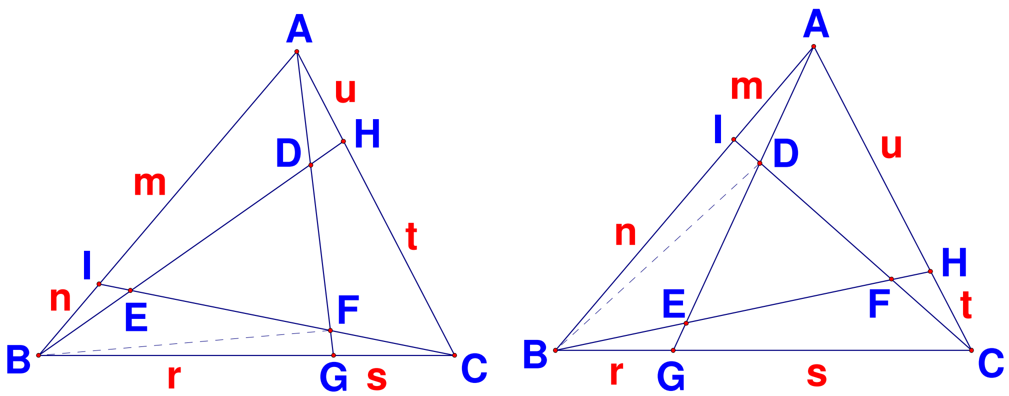


圖 6-16

（一）旋切線長度公式之推導

旋切線長度公式不受正旋切與反旋切的影響。以$\overline{AG}$爲例(如圖 6-16)，令旋切線$\overline{AG}$＝x，由於$\overline{BG}$：$\overline{GC}$＝r：s，所以$\overline{BG}=\dfrac{ar}{r+s}$，$\overline{GC}=\dfrac{as}{r+s}$。由餘弦定理可推得下列式子：

$$\cos\angle AGB+\cos\angle AGC=\frac{x^2+\left(\dfrac{ar}{r+s}\right)^2-c^2}{2x\cdot\dfrac{ar}{r+s}}+\frac{x^2+\left(\dfrac{as}{r+s}\right)^2-b^2}{2x\cdot\dfrac{as}{r+s}}=0$$

$$\mathrm{s}x^2+\frac{r^2a^2s}{(r+s)^2}-\mathrm{s}c^2+\mathrm{r}x^2+\frac{a^2s^2r}{(r+s)^2}-\mathrm{r}b^2=0$$

$$(\mathrm{r}+\mathrm{s})\,x^2+\frac{rsa^2(r+s)}{(r+s)^2}-\mathrm{s}c^2-\mathrm{r}b^2=0$$

$$(\mathrm{r}+\mathrm{s})\,x^2=\mathrm{r}b^2+\mathrm{s}c^2-\frac{rsa^2(r+s)}{(r+s)^2}$$

$\mathrm{x}=\dfrac{\sqrt{(r+s)(rb^2+sc^2)-rsa^2}}{r+s}$，同理可推得到以下結果：

$$\overline{AG}=\frac{\sqrt{(r+s)(rb^2+sc^2)-rsa^2}}{r+s}\ ,$$

$$\overline{BH}=\frac{\sqrt{(t+u)(tc^2+ua^2)-tub^2}}{t+u}\ ,$$

$$\overline{CI}=\frac{\sqrt{(m+n)(ma^2+nb^2)-mnc^2}}{m+n}\ 。$$

（二）旋切截線比

正旋切時(如圖 6-16)，利用孟氏定理得知$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DG}}}\times\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r+s}}\times\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{u}}=1$，

$\dfrac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{FG}}}\times\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{r+s}}\times\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}=1$，也可表示成$\overline{AD}:\overline{DG}=u(r+s):rt$；$\overline{AF}:\overline{FG}=m(r+s):sn$。

由和比性質推得$\overline{AD}:\overline{AG}=u(r+s):[u(r+s)+rt]$；$\overline{AG}:\overline{FG}=[m(r+s)+sn]:sn$。

三個線段取連比化簡得

$$\overline{AD}:\overline{DF}:\overline{FG}=u(r+s)(mr+ms+sn):(r+s)(rtm-snu):sn(ur+us+rt)\ 。$$

同理 $\overline{BE}:\overline{ED}:\overline{DH}=n(t+u)(tr+ru+su):(t+u)(rtm-snu):su(nt+nu+tm)$，

$$\overline{CF}:\overline{FE}:\overline{EI}=s(m+n)(tm+tn+nu):(m+n)(rtm-snu):nu(sm+sn+mr)\ 。$$

同理得知反旋切時

$$\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EG}=m(r+s)(ur+us+rt):(r+s)(snu-rtm):rt(mr+ms+sn)$$

$$\overline{BE}:\overline{EF}:\overline{FH}=r(t+u)(nt+nu+tm):(t+u)(snu-rtm):tm(rt+ru+us)$$

$$\overline{CF}:\overline{FD}:\overline{DI}=t(m+n)(sm+sn+mr):(m+n)(snu-rtm):mr(tm+tn+nu)$$

此外，rtm＜snu 是正旋切；rtm＝snu 時旋切三角形不存在；rtm＞snu 是反旋切。

（三）旋切三角形及原三角形的面積比

正旋切時，$\triangle DEF = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \times \triangle ABG = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \times \dfrac{\overline{DF}}{\overline{AG}} \times \triangle BIC = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \times \dfrac{\overline{DF}}{\overline{AG}} \times \dfrac{r}{r+s} \times$ $\triangle ABC = \dfrac{(rtm - snu)^2}{(nt + nu + tm)(mr + ms + sn)(ur + su + rt)}$；

反旋切時，$\triangle DEF = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BF}} \times \triangle BDF = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BF}} \times \dfrac{\overline{DF}}{\overline{IC}} \times \triangle BIC = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BF}} \times \dfrac{\overline{DF}}{\overline{IC}} \times \dfrac{n}{m+n} \times$ $\triangle ABC = \dfrac{(snu - rtm)^2}{(su + rt + ru)(tm + tn + nu)(sm + sn + mr)}$。(如圖 6-16)

四、相關研究的比較

在全國科展中（國立台灣科學教育館網站），我們發現有兩篇與旋切三角形相關的研究，分別是 47 屆「正多邊形母子面積比」及 49 屆「巢狀切割對內部子圖的探討」。兩屆分別將結果延伸至「正多邊形」及「多邊形」，然而這兩件作品皆只針對「面積」進行探討，和本研究方向不同。本研究的內容除了「面積」的探討之外，還探討「旋切截線」、「同形旋切」、「旋切三角形的心」。

柒、結論

把任意三角形的三邊依逆時針取三個截點，從這三個截點到各自相對的頂點取線段，所得的新三角形稱為「旋切三角形」，研究結論如下：

一、面積及旋切截線

（一）三邊的旋切比固定時稱作完美旋切，不論是正旋切或反旋切，原三角形的面積：完美旋切三角形的面積有一定的比值；旋切截線也有一定的比例，也可以推算其長度。

（二）三邊的旋切比不固定時的旋切，不論是正旋切或反旋切，原三角形的面積：旋切三角形的面積有一定的比值；旋切截線也有一定的比例，也可以推算其長度。

二、同形旋切

（一）完美旋切時，對任意一個三角形作進行等次數的正旋切與反旋切，只要正旋切的總次數與反旋切的總次數相同，則該旋切必為「同形旋切」。

（二）旋切比不固定時，我們成功找出四種同形旋切的方法，分別爲「標準同形旋切」、「翻轉同形旋切」、「小旋轉同形旋切」、「大旋轉同形旋切」。

三、旋切三角形的心

（一）完美旋切三角形與原三角形之重心爲同一點。

（二）當完美旋切比變動時，完美旋切三角形的外心及垂心變動軌跡呈水滴狀的相似封閉圖形，該兩圖形的周長比爲 1：2，面積比爲 1：4。

四、旋切三角形的延伸

（一）「完美旋切平行四邊形」跟三角形的特性一樣。我們的研究結果如下：

1.平行四邊形以 m：n 做完美旋切之後所得新四邊形仍是平行四邊形

2.原平行四邊形與完美旋切平行四邊形的面積有一定的比值，比例旋切截線也有一定的比例。

3.完美旋切時，對任意一個平形四邊形作進行等次數的正旋切與反旋切，只要正旋切的總次數與反旋切的總次數相同，則該旋切必爲「同形旋切」。

4.完美旋切平行四邊形與原四邊形之重心爲同一點

（二）給後續研究者的建議：

1.朝多邊形研究下去，可能還有其他發現。

2.當旋切比不固定時，「同形旋切的限制」、「同形旋切的旋切比、旋切截線、面積性值」仍值得深入研究。

捌、參考資料

一、林雅淇等（民 96）。正多邊形母子面積比。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中數學組作品。桃園縣立桃園國中。

二、施承佑（民 98）。巢狀切割對內部子圖的探討」。中華民國第四十九屆中小學科學展覽會國中數學組作品。高雄市立英明國中。

【評語】030404

本作品的可閱讀性高，值得嘉許。唯作品的深度與廣度可再加強，建議可往立體或多維空間來進行後續研究。