中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030403

交點新聞

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳以律	吳秉鴻
國三 李亦展	黃健銘

關鍵詞：交點軌跡、圖形方程式、向量系統

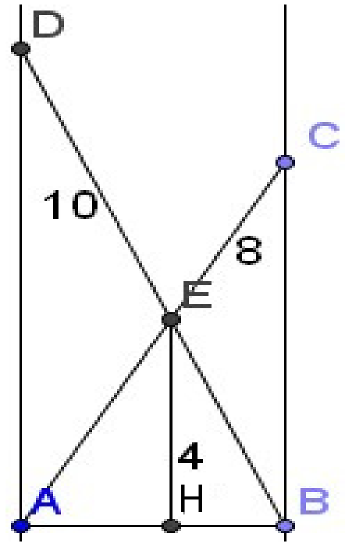
交點新聞

摘要

由一個簡單的定義，可以作出一條曲線。我們便以一個新的定義畫出一條曲線，並嘗試分析其性質。

壹、 研究動機

有一次在翻閱數學遊戲的書籍時，無意間被下列的這道題目深深著迷：



如右圖，兩平行且垂直地面的牆壁$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$間有兩條梯子$\overline{AC}$、$\overline{BD}$斜靠，其中$\overline{AC}$=8，$\overline{DB}$=10。若兩梯子的交點E至地面$\overline{AB}$的垂直距離=4，則$\overline{AB}$=？

雖說著迷，但當時我們還在二下，沒有相似形的概念，所以無論如何絞盡腦汁，對這個題目總是完全沒有頭緒，最後逼得我們得向數學老師求救。沒想到老師也沒辦法一時解出來，我們就這樣討論了起來。經過數天的奮戰，終於解出了這道難題。後來翻到那本書的解答，發現它上面的解答也滿相像的。

解答如下：

設$\overline{AB}=x$，

$\because \overline{AD},\overline{BC},\overline{EH}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overline{AD}//\overline{BC}//\overline{EH}$

又 A,E,C 共線， D,E,B 共線

$$\therefore \frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{DC}}=\frac{1}{\overline{FG}}$$

依畢氏定理可得：

$$\frac{1}{\sqrt{8^2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{10^2-x^2}}=\frac{1}{4}$$

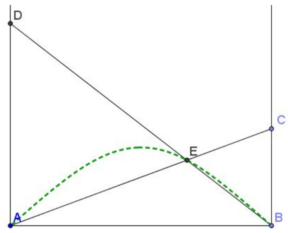
$$\frac{\sqrt{8^2-x^2}}{8^2-x^2}+\frac{\sqrt{10^2-x^2}}{10^2-x^2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{(100-x^2)\sqrt{64-x^2}+(64-x^2)\sqrt{100-x^2}}{(100-x^2)(64-x^2)}=\frac{1}{4}$$

估算一下，再將根號展開，至少有x的四次方以上了，遠遠的超過國中程度。因此我們用最原始的十位逼近法求取答案，得：

$$x≒3.8$$

原本以為簡單的小題目，竟然出現一元四次方程式！這樣的結果引起了我們的好奇心：如果有兩條長度和為定值的線段，分別斜靠在固定寬度的兩平行線之間（如圖）其交點至「地面」之垂直距離將有何所改變？我們的研究動機便如此被引發。



貳、 研究目的

一、 以兩長度和為定值之兩線段交點定義一條曲線，並求取曲線方程式。
二、 探討此曲線的相關性質及應用。
三、 改變定義曲線的產生條件，並探討其相關性質。

參、 研究設備及材料

GeoGebra 動態數學軟體、紙、筆、電腦、人腦

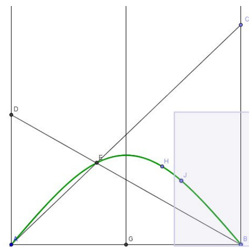
肆、 研究過程及結果

一、兩平行線與第三線垂直

(一) 實驗方法

基本的方法如下：

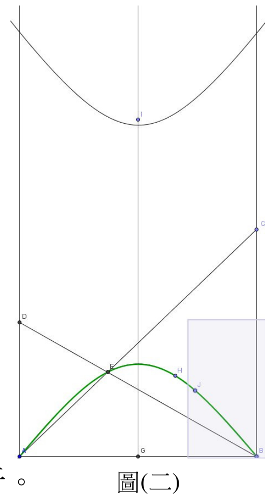
1. 作一條水平直線 $\overleftrightarrow{AB}$ ，並取兩點 A、B。（兩點間的距離稱為壁寬 w）
2. 作過此兩點且垂直 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線，並在其中一條直線上取一點 C
3. 連接 $\overline{AC}$
4. 設一定值 s
5. 以 B 為圓心，(s-$\overline{AC}$)為半徑作圓，交另外一垂直線於 D
6. 連接 $\overline{BD}$，取 $\overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$ 交點 E
7. 以 C 為控制點，做 E 的軌跡


圖(一)

結果如右圖(一)。

(二) 性質探討

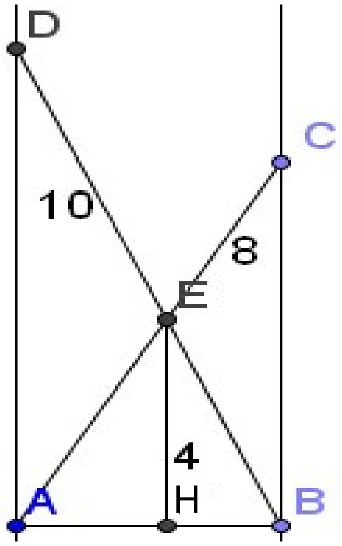
記得曾經看過圓錐曲線相關的書，它有點類似雙曲線或拋物線。為了更進一步了解這條曲線，我們便利用 GeoGebra 分析。


圖(二)

GeoGebra 有一個有趣的功能，就是過五點作圓錐曲線 。我們就用此功能檢驗此曲線是否為圓錐曲線，結果如(圖二)。

可見此曲線相當接近雙曲線。但沒想到我們將圖形放大時，此曲線竟然沒有與雙曲線完全重疊。而且如果此曲線真的是雙曲線的話，不論軌跡上的點如何改變位置，雙曲線都應該保持一樣。而此軌跡上的點移動時，雙曲線會變動，也就是說軌跡並不是雙曲線。為了更進一步了解交點軌跡的性質，我們試著求取曲線的方程式。

探討 1：



由於引起研究動機的題目用到 $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{C}$ 的性質，我們先由此性質來探討：

如右圖，若 $\overline{AD}//\overline{EH}//\overline{BC}$，則 $\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BC}}=\frac{1}{\overline{EH}}$。

證明：如附錄一

得到此結論之後，我們便利用它來求取曲線之方程式。

方程式 1-1

已知：1. 壁寬 w　2. 兩梯子長度和 s

3. $\angle DAB=\angle ABC=90°$

4. 座標原點為 $\overline{AB}$ 之中點

方程式求取：

1. 設 E 至 x 軸的垂直距離為 y，至 y 軸的垂直距離為 x。
2. 依相似形的概念可得：

$$y:\overline{AD}=(\frac{w}{2}-x):\overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}=\frac{wy}{\frac{w}{2}-x}=\frac{2wy}{w-2x}$$

同理可得：

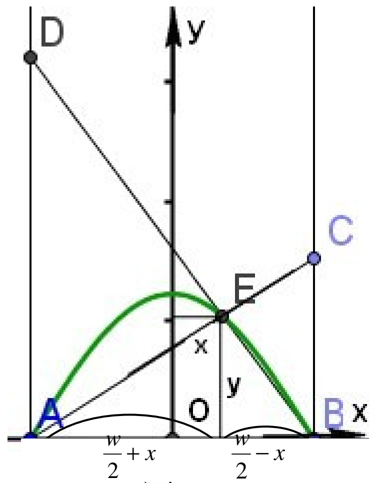
$$\overline{BC}=\frac{wy}{\frac{w}{2}+x}=\frac{2wy}{w+2x}$$

3. 由〈探討 1〉得知：

$$\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BC}}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{w-2x}{2wy}+\frac{w+2x}{2wy}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{2w}{2wy}=\frac{1}{y}\text{，得}\frac{1}{y}=\frac{1}{y}$$



圖(三)

故我們以上的方法錯誤，得另想方法了。

方程式 1-2

如上頁(圖三)，兩牆壁垂直 x 軸，相距 w，且原點 O 為 $\overline{AB}$ 中點。若兩斜梯子長度和為 s，則梯子交點所繪製的曲線方程式為 $\sqrt{(\frac{2wy}{w+2x})^2+w^2}+\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}=s$

證明：

由上一個推導得知，$\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 分別為 $\frac{2wy}{w-2x}$ 、 $\frac{2wy}{w+2x}$ 。則由畢氏定理得兩梯子 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 分別為 $\sqrt{(\frac{2wy}{w+2x})^2+w^2}$ 、 $\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}$ ，且其和為 s。

為了更方便了解此曲線之性質，我們將此方程式展開：

原式：$\sqrt{(\frac{2wy}{w+2x})^2+w^2}+\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}=s$

$$\sqrt{(\frac{2wy}{w+2x})^2+w^2}=s-\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}$$

$$(\frac{2wy}{w+2x})^2+w^2=s^2-2s\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}+(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2$$

$$(\frac{2wy}{w+2x})^2=s^2-2s\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}+(\frac{2wy}{w-2x})^2$$

$$2s\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}=s^2+(\frac{2wy}{w-2x})^2-(\frac{2wy}{w+2x})^2$$

$$\frac{16s^2w^2y^2}{(w-2x)^2}+4s^2w^2=s^4+2s^2[(\frac{2wy}{w-2x})^2-(\frac{2wy}{w+2x})^2]+[(\frac{2wy}{w-2x})^2-(\frac{2wy}{w+2x})^2]^2$$

$$\frac{16s^2w^2y^2}{(w-2x)^2}+4s^2w^2=s^4+\frac{8s^2w^2y^2}{(w-2x)^2}-\frac{8s^2w^2y^2}{(w+2x)^2}+[(\frac{2wy}{w-2x})^2-(\frac{2wy}{w+2x})^2]^2$$

$$\frac{16s^2w^2y^2-8s^2w^2y^2}{(w-2x)^2}+4s^2w^2=s^4-\frac{8s^2w^2y^2}{(w+2x)^2}+[(\frac{2wy}{w-2x})^2-(\frac{2wy}{w+2x})^2]^2$$

$$\frac{8s^2w^2y^2}{(w-2x)^2}+4s^2w^2=s^4-\frac{8s^2w^2y^2}{(w+2x)^2}+[\frac{4w^2y^2(w+2x)^2-4w^2y^2(w-2x)^2}{(w-2x)^2(w+2x)^2}]^2$$

$$\frac{8s^2w^2y^2}{(w-2x)^2}+4s^2w^2=s^4-\frac{8s^2w^2y^2}{(w+2x)^2}+\frac{[4w^2y^2(2w+x)^2-4w^2y^2(2w-x)^2]^2}{(w-2x)^4(w+2x)^4}$$

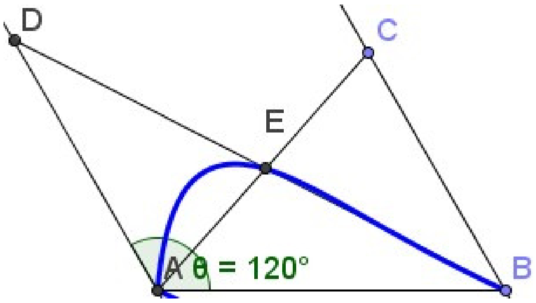
$$8s^2w^2y^2(w-2x)^2(w+2x)^4+4s^2w^2(w-2x)^4(w+2x)^4$$
$$=s^4(w-2x)^4(w+2x)^4-8s^2w^2y^2(w-2x)^4(w+2x)^2$$
$$+[4w^2y^2(w+2x)^2-4w^2y^2(w-2x)^2]^2$$

展開至此便可以停止了，因為再繼續只是無謂的玩弄數字。看來展開也沒有多大的助益，反而看起來更亂了。估算一下，這至少是個 x、y 的八次方的曲線，遠遠超越國中範圍，也幾乎分析不出任何性質。這個結論令我們十分沮喪，但老師仍然建議我們繼續做相關研究，看是否能有其他發現。

二、兩平行線不與第三邊垂直

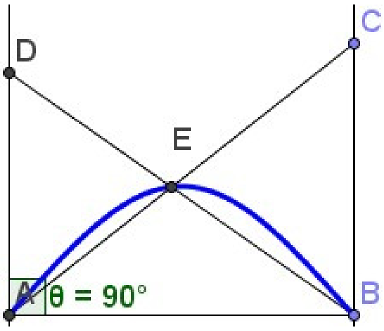
後來我們又想：如果兩線平行，但不和第三邊垂直，又會怎樣呢？於是我們用 GeoGebra 設計了一個檔案，底角在保持平行的情況下可以隨意改變。在操作之前，我們做了一點假想：大概會像之前的那條曲線，只是歪了一邊。結果十分出乎我們的意料。我們發現隨著角度的變化，曲線會發生一些變化：

（甲）



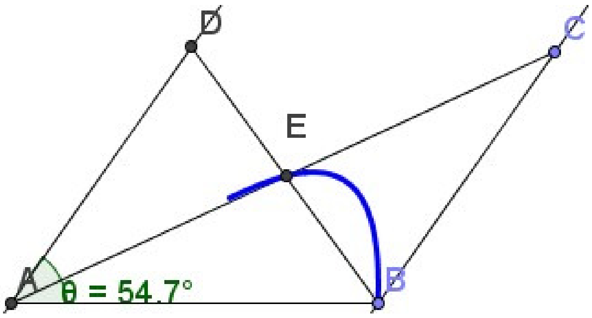
跟想像中的曲線有點差別，但還算是合理。

（乙）



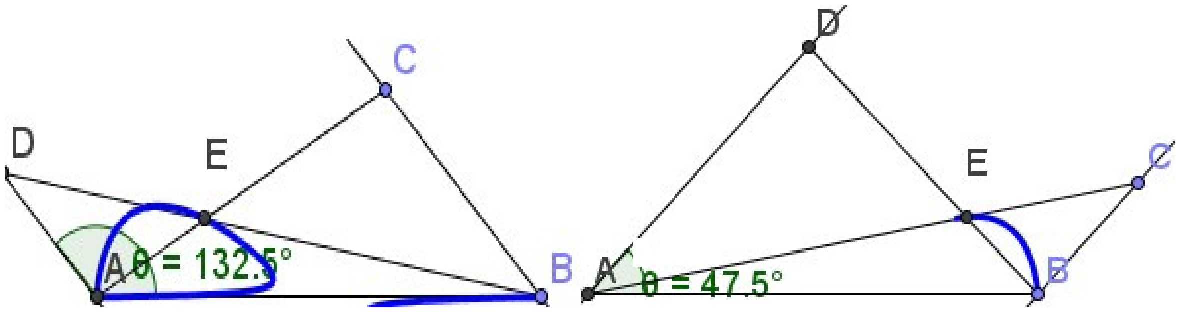
在上一節中便已探討，在此不再贅述。

（丙）



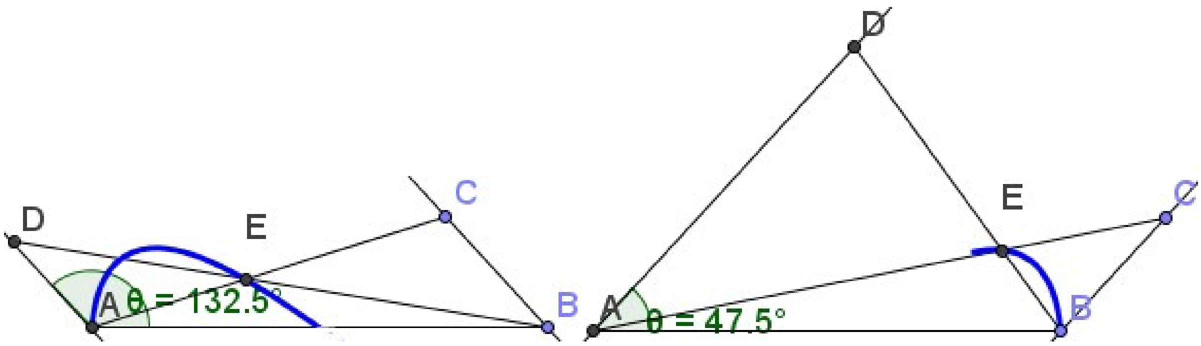
這不太是我們所想像的圖形。

（丁）



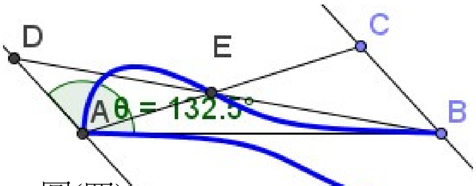
這也不是我們原本所想像的圖形，若$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$，就會像右上圖。

（戊）



這個也不太像，若$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$，如右上圖。

這是個有趣的現象，尤其是後面幾種狀況。後來我們把平行線的兩端無限延伸，發現軌跡在底下還會露出一些圖形(圖四)。因為此圖形似乎為點對稱圖形，我們推測露出來的那一段圖形經延伸之後，應該能產生一條與上半部一模一樣，但方向顛倒的曲線。只是為何無法如此，則有待再探討。現在為了大概了解在什麼情況下會得到何種圖形，我們整理了以下的表格：



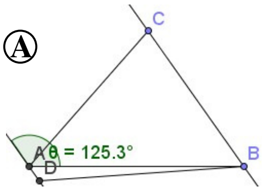
圖(四)

表(一)：當壁寬 w 為定值(15)時，兩斜線長總和 s、平行線與地面夾角 θ 與圖形之關係

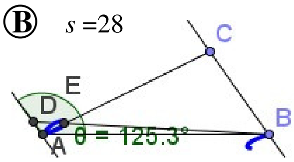
θ \ s	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
20°			戊	丙	丙	丙	丙	丙	丙	丙
40°			戊	丙	丙	丙	丙	丙	丙	丙
60°			戊	丙	丙	丙	丙	丙	丙	丙
80°			戊	丙	丙	丙	丙	丙	丙	丙
90°				乙	乙	乙	乙	乙	乙	乙
100°			戊	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲
120°			戊	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲
140°			戊	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲
160°			戊	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲
180°			戊	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲

另外，當其中一條斜線垂直平行線，另一條斜線長< w 時，便無法產生交點(右圖Ⓐ)。s = 20 時無法達到此條件，但 s 為 20~30 的某一範圍時，會產生（丁）式曲線（右圖Ⓑ)。

Ⓐ



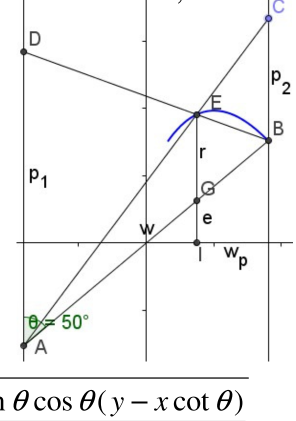
Ⓑ s =28



由此表格可知（甲）（乙）（丙）（丁）（戊）五式皆與角度息息相關。（戊）則像是（甲）到（丁）之間的臨界點。我們更由表(一)得出推論：

只要 $s = 2w$ 且 $\theta \neq 90^\circ$，即可得到（戊）式曲線，若 $w\sin\theta < s < 2w$，會得到（丁）式曲線。

$\overline{AC} + \overline{BD} = s, w = \overline{AB}$



方程式 2：兩平行線不與第三線垂直時的曲線方程式

為了方便表示，我們將系統旋轉成右圖的模式。其中當角度改變時，w 仍然保持不變，但兩平行線保持與 y 軸平行。與圖形相關的長度也標示在右圖。

如右圖。若已知 w、s、θ，且原點 O 為 w 中點，則曲線之方程式如右：

$$\sqrt{\left[\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}\right]^2 + w^2 - \frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}} + \sqrt{\left[\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}\right]^2 + w^2 + \frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}} = s$$

證明：

1. 由已知條件可得知兩平行線的垂直距離 $w_p = w\sin\theta$
2. $e = x\cot\theta$ ，即 $r = y - e = y - x\cot\theta$
3. 由相似形性質得知：

$$r : p_1 = (\frac{w_p}{2} - x) : w_p$$

$$p_1 = \frac{rw_p}{\frac{w_p}{2} - x} = \frac{2rw_p}{w_p - 2x} = \frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}$$

同理可得：

$$p_2 = \frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}$$

4. 由餘弦定理可得：

$$\overline{BD}^2 = [\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}]^2 + w^2 - \frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x},$$

$$\overline{AC}^2 = [\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}]^2 + w^2 + \frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}$$

且 $\overline{AC} + \overline{BD} = s$，即

$$\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}]^2 + w^2 - \frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}}$$
$$+\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}]^2 + w^2 + \frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}} = s$$

有鑑於上一次展開的結果，又加入了三角函數，這次便不再展開了。

三、曲線之性質探討

(一) (戊)式曲線之形成：

探討 2：若要產生(戊)式曲線，則 s、w 的關係必為 $s = 2w$ 且 $\theta \neq 90^\circ$

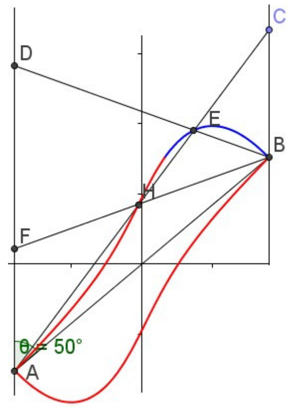
證明：

由圖形可知，若要產生(戊)式曲線，則方程式必通過 $(0,0)$。因此我們將 x=0、y=0 帶入方程式，得 $\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta - 2x}$ 、 $\frac{2w\sin\theta(y - x\cot\theta)}{w\sin\theta + 2x}$ =0，方程式便化簡為 $\sqrt{w^2} + \sqrt{w^2} = s$ ，即 $2w = s$ ，也證明了前面的推測。

在 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 時，若(戊)形成的條件為 $2w = s$ ，那麼就能看出(丁)的條件為 $w\cos\theta < 2w < s$ 了。

(二) (甲)、(丙)式曲線之探討：

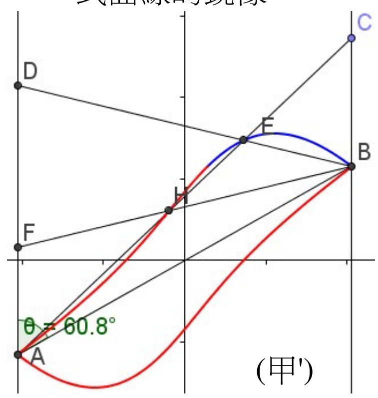
依前面的觀察結果，若 θ 分別等於 a、$\pi - a$ (0<a<$\frac{\pi}{2}$)，且其他條件不變，則這兩種曲線是不同「種」的。但方程式（以及常識）卻告訴我們：曲線應該只是互相左右相反而已，兩者明顯有矛盾。後來我們才發現問題的癥結。原來當 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 時，兩斜線可能的交點有兩個(如圖©)，類似三角形全等中 SSA 的狀況。若將兩交點的軌跡同時畫出來，(甲)、(丙)便互為鏡像了，且解決了前面圖形上下不對稱的問題，兩者並無矛盾。



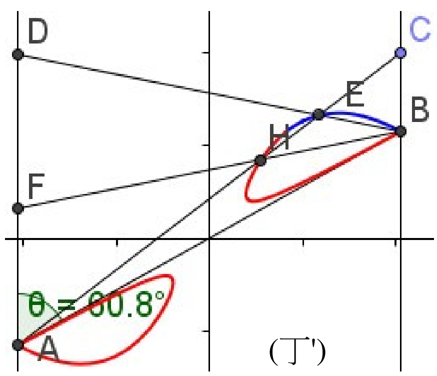
圖©——此情況中，$\overline{CE} = \overline{CG}$，故有兩個交點。

另外，當 $\overline{BD}$、$\overline{BF}$ 重疊時，它們會與兩平行線垂直，故 $\overline{AC}$ 會達到最長長度，$\angle BAC$ 也會最大。又 $\overline{AC}$ 和圖形必有交點，所以此時，$\overline{AC}$ 和圖形只交於兩點：一是 A，二是 $E(H)$ 點，即 $\overline{AC}$ 切圖形於 $E(H)$。

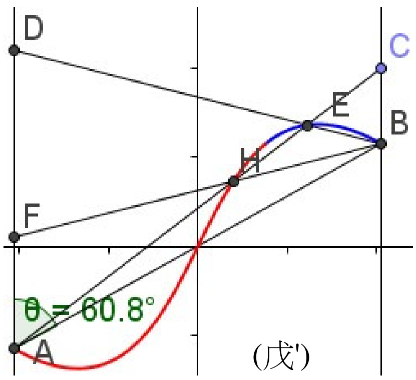
如此說來，(丙)其實包括三種曲線，即(甲)、(丁)、 (戊)式曲線的鏡像：



(甲')



(丁')



(戊')

其形成條件也和前面的敘述類似：當底角 $\theta < \frac{\pi}{2}$，若 $s > 2w$，就會產生(甲')式曲線；若 $w\cos\theta < s < 2w$，就會產生(丁')式曲線；若 $s = 2w$ 且 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$，就會產生(戊')式曲線。

伍、 討論及推廣研究

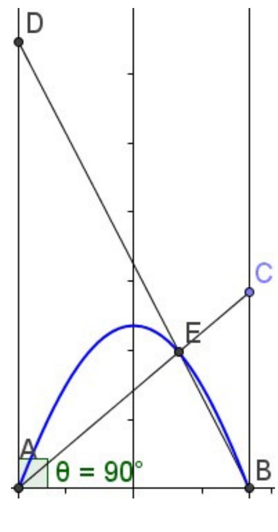
一、不同定義之嘗試

後來，我們改變了條件，作出更多方程式，但是其計算繁瑣，也有些重覆之處，我們只禁得起「觀賞」它們。

方程式 3

如右圖，$\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{AD}$ 為定值 s，$\overline{AB} = w$，原點 O 為 $\overline{AB}$ 中點，則以 C 為控制點，E 為應變點繪出之曲線方程式為：

$$\sqrt{\left(\frac{2wy}{w+2x}\right)^2 + w^2} + \sqrt{\left(\frac{2wy}{w-2x}\right)^2 + w^2} + \frac{4w^2y}{w^2-4x^2} = s$$



證明：

由〈方程式 1〉可得 $\overline{AC}+\overline{BD}=\sqrt{(\frac{2wy}{w+2x})^2+w^2}+\sqrt{(\frac{2wy}{w-2x})^2+w^2}$ ，

$\overline{AD}+\overline{BC}=\frac{2wy}{w-2x}+\frac{2wy}{w+2x}=\frac{4w^2y}{w^2-4x^2}$ ，兩者相加等於 s。

若 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 則依〈方程式 2〉可得其方程式為

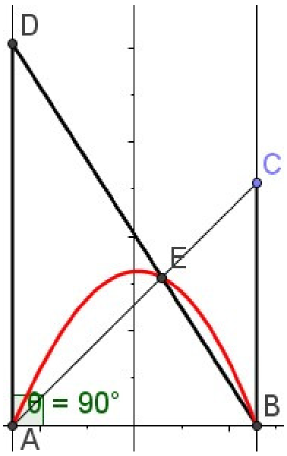
$$\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}]^2+w^2-\frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}}$$
$$+\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}]^2+w^2+\frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}}+\frac{4w^2\sin^2\theta(y-x\cot\theta)}{w^2\sin^2\theta-4x^2}=s$$

較方程式 1、2，此曲線更接近雙曲線，雖然明顯不是。

方程式 4

如右圖， $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{BC}$ (即粗黑折線之總長度) **為定值 s，** $\overline{AB}=w$**，且原點 *O* 為其中點，則以 *E* 繪出之方程式為**

$$\frac{4w^2\sin^2\theta(y-x\cot\theta)}{w^2\sin^2\theta-4x^2}+\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}]^2+w^2-\frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}}=s$$

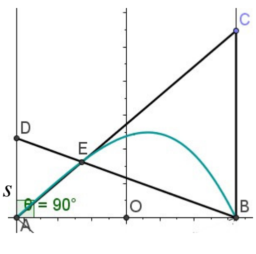


證明：類似〈方程式 3〉，在此不再贅述。

方程式 5

如右圖， $\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{BC}$ (即粗黑折線之總長度) **為定值 s，** $\overline{BC}=w$ **，且原點 *O* 為其中點，則以 *E* 繪出之方程式為**

$$\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}]^2+w^2-\frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}}$$
$$+\sqrt{[\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}]^2+w^2+\frac{4w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}}+\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}=s$$

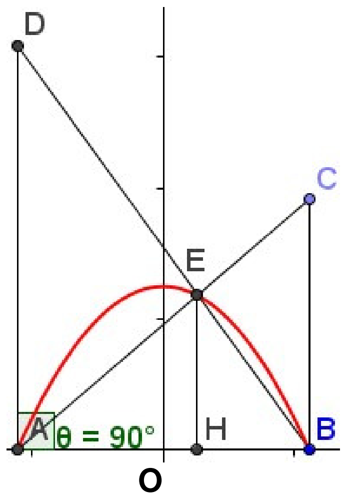


證明：類似〈方程式 3〉，在此不再贅述。

奇怪的是，不論角度如何改變，這些曲線都不如〈方程式 2〉般有許多特殊情況，我們也無法分析它們有什麼特殊性質，或許高次方程式都這麼難以控制的吧！**不過幸運的是，經過眾多麻煩而乏味的計算，當我們讓兩平行線段長之和相等時，便出現了一個漂亮的結論：**

方程式 6

如右圖，$\overline{AD}+\overline{BC}$ 為定值 $=s$，$\overline{AB}=w$，且原點 O 為 $\overline{AB}$ 中點。則以 C 為控制點，E 為應變點繪出之曲線為一拋物線。方程式為：



$$y=\frac{-s}{w^2}x^2+\frac{s}{4}$$

證明：

1. 作 $\overline{EH}\perp x$軸，H 在 x 軸上。

2. $(\frac{w}{2}-x):w=y:\overline{AD}$

$$wy=\overline{AD}(\frac{w}{2}-x)$$

$$\overline{AD}=\frac{wy}{\frac{w}{2}-x}=\frac{2wy}{w-2x}$$

3. 同理可得

$$\overline{BC}=\frac{2wy}{w+2x}\text{，}\frac{2wy}{w+2x}+\frac{2wy}{w-2x}=s$$

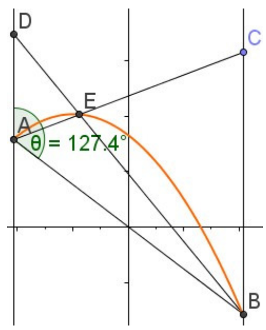
$$\frac{2wy(w-2x)}{(w+2x)(w-2x)}+\frac{2wy(w+2x)}{(w+2x)(w-2x)}=s$$

$$\frac{2wy\cdot 2w}{w^2-4x^2}=s \qquad 4w^2y=sw^2-4sx^2$$

$$y=\frac{-s}{w^2}x^2+\frac{s}{4}$$

對照之前繁雜的運算及高次方的方程式，此拋物線顯得十分小巧玲瓏！

圖(五)

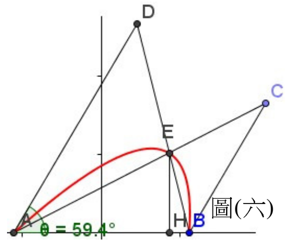


由方程式可以清楚的看到，曲線的頂點為 $(0,\frac{s}{4})$。若底角 $\theta\neq 90°$，會如圖(五)。此方程式由〈方程式 2〉的推導方式可得 $\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}+\frac{2w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}=s$。化簡得：

$$4w^2\sin^2\theta(y-x\cot\theta)=sw^2\sin^2\theta-4sx^2$$

$$y-x\cot\theta=\frac{s}{4}-\frac{s}{w^2\sin^2\theta}x^2$$

$$y=-\frac{s}{w^2\sin^2\theta}x^2+x\cot\theta+\frac{s}{4}$$



圖(六)

如果旋轉圖形，就能得到一個斜拋物線的部分圖形(圖六)。或許此類圖形能有更進一步的研究空間。

最後，**如（圖六），若兩平行線段等長，則交點 E 距離 x 軸最遠**。證明於附錄二。

二、兩壁對稱的圖形探討

研究至此，我們突然想到，前面的方程式，兩壁都是平行的。現在如果兩壁不平行，但左右兩底角相等，其結果又會怎樣？

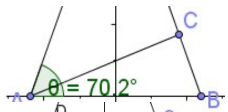
(一) **方程式 1**(即 $\overline{AC}+\overline{BD}$ 為定值)的變化：

依前面的經驗，兩壁對稱時，方程式又比兩壁平行計算繁雜，且以我們目前的數學能力亦找不出實用目的，所以我們將重點放在其圖形上。

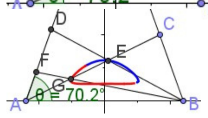
當我們做出此圖形時，其結果比之前做的更令人驚豔，圖形更多變。由（肆之三）得**一條斜線的長度可以決定兩條另一個斜線**，所以這裡的曲線為了方便辨識，也有紅、藍之分。經過一些觀察，我們歸納、分類出其規律（兩斜線和=s，底長=w，兩壁交於 I）：

1. 底角 $\theta < 90^{\circ}$：

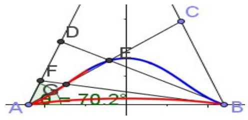
(1) 當 s≦ [$\overline{AC}$的最短長度（即 $\overline{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ 時 $\overline{AC}$ 的長度）$+\overline{BD}$的最短長度]時，圖形不存在。



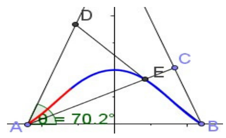
(2) 當($\overline{BD}$的最短長度$+\overline{AC}$的最短長度)$< s <$($\overline{AC}$的最短長度 + w)時，圖形呈環狀。



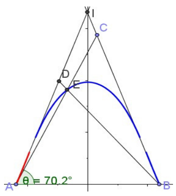
(3) 當($\overline{AC}$的最短長度 + w)≦ $s < 2w$ 時，圖形呈嘴唇狀。



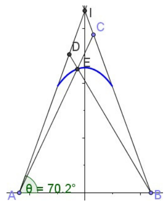
(4) 當 2w≦ $s <$($\overline{AC}$的最短長度$+\overline{BI}$)時，圖形類似以前常看到的那般。



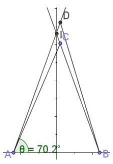
(5) 當($\overline{AC}$的最短長度 $+\overline{BI}$)≦ $s <$($w+\overline{BI}$)時，圖形會分為三段。



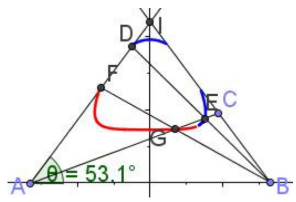
(6) 當($\mathrm{w}+\overline{BI}$)≦ s <2$\overline{BI}$ 時，圖形如右。



(7) 當 s≧2$\overline{BI}$ 時，圖形不存在。

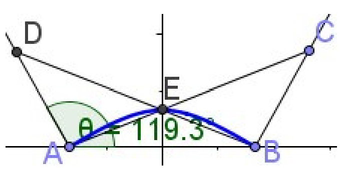


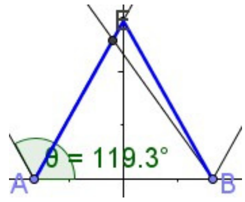
(8) 當 $\theta < 60°$ 且符合 2.或 3.，同時符合 6.，圖形為 2.或 3.，但被切割。(圖為符合 2.、6.的情形)



2. 底角 $\theta > 90^{\circ}$：

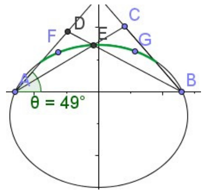
此時的曲線只在 s>2w 下形成，且圖形只有一種，但若 s 愈大，圖形會趨近於一條折線，其最高點趨近於 $\dfrac{w}{2}\tan(\pi-\theta)$ 。





(二) 兩壁和相等

後來效果不錯，我們便使用**方程式 6**，以相同的方法實驗。我們先用 Geogebra 的圓錐曲線按鈕來檢查其圖型結構，並證明其結果。



探討 3：若$\theta < 90^\circ$，圖形為一橢圓。

證明：

1. 如右圖，$a+b=s$, 原點 O 為 w 中點，$0<\theta<90^\circ$ 且 s、w、θ 為定值，則 F 描繪出的方程式為

$$\frac{s}{2w\csc\theta\cot\theta - s\cot^2\theta}x^2 + y^2 + \frac{(w^2\csc\theta + sw\cot\theta)}{2w\csc\theta\cot\theta - s\cot^2\theta}y = \frac{sw^2}{8w\csc\theta\cot\theta - 4s\cot^2\theta}$$

（求取過程類似以前的方法，在此不再贅述。）

由此可知，方程式為圓錐曲線。

2. $\because 0<\theta<90^\circ \quad \therefore \csc\theta > 1, \cot\theta > 0$

3. 設 $\dfrac{2w\csc\theta\cot\theta - s\cot^2\theta}{s} \le 0$，則 $\dfrac{2w\csc\theta\cot\theta}{s} \le \cot^2\theta, \dfrac{2w\csc\theta}{s} \le \cot\theta$

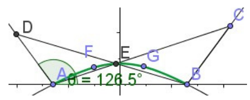
$\dfrac{2w}{s} \le \dfrac{\cot\theta}{\csc\theta} = \cos\theta$，$w \le \dfrac{s}{2}\cos\theta \le \dfrac{w}{2}$ 此結果矛盾，故 $\dfrac{2w\csc\theta\cot\theta - s\cot^2\theta}{s} > 0$

4. $\because \dfrac{2w\csc\theta\cot\theta - s\cot^2\theta}{s} > 0 \quad \therefore$ 方程式的各項係數皆>0，方程式可整理成

$\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{(y-k)^2}{B^2} = r^2$，符合橢圓的條件。

特別值得一提的是，**當 $\theta = 60^\circ$，$s = w$ 時**，方程式變為 $x^2 + (y + \dfrac{w\sqrt{3}}{6})^2 = \dfrac{w^2}{3}$，**得到的圖形為圓形。**

探討 4：若 $90^\circ < \theta < 180^\circ$，圖形為一雙曲線。



證明：

$\because 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad \therefore \csc\theta > 1, \cot\theta < 0$，故 x^2 項、y 項、常數項之係數<0，方程式可整理成 $\dfrac{(y-k)^2}{A^2} - \dfrac{x^2}{B^2} = r^2 \quad (\dfrac{s}{2}\cos\theta < \dfrac{w}{2} < w)$，符合雙曲線的條件。

三、任意底角的圖形探討

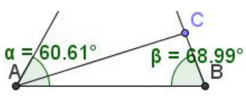
當兩底角為任意角時，方程式 1、方程式 6 變化的結果如下：

(一) **方程式 1**(即 $\overline{AC} + \overline{BD}$ 為定值)的變化：

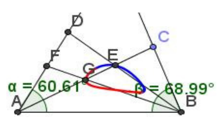
此時與[二之(一)]不同的是，當其中一底角比另一個大時，交點圖形及 $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$ 交點 I 偏向於較大的底角。為了方便操作，我們統一使右邊的角度較大。圖片中的符號沿用[二之(一)]中的：

1. $(\alpha+\beta) < 180^\circ$：(因右邊的角度較大，圖形皆偏向右邊)

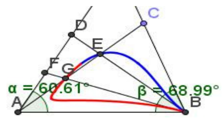
(1) 當 s≦[($\overline{AC} + \overline{BD}$)的最短長度]，圖形不存在。



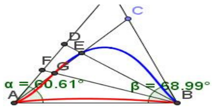
(2) 當[($\overline{AC} + \overline{BD}$)的最短長度]＜$s$＜[$\overline{AB}$ +($\overline{BD}$ 的最短長度)]，圖形呈環狀。



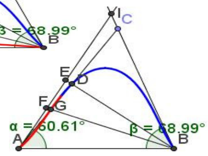
(3) 當[$\overline{AB}$+($\overline{BD}$的最短長度)]≦s<[$\overline{AB}$+($\overline{AC}$的最短長度)]，圖形類似[肆之二]中的（丁）式曲線。



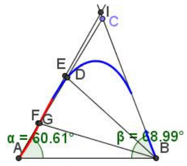
(4) 當[$\overline{AB}$+($\overline{AC}$的最短長度)]≦s<$2w$，圖形呈嘴唇狀。



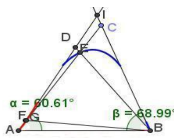
(5) 當 $2w$≦s<[($\overline{AC}$的最短長度)+$\overline{BI}$]，圖形呈鐘形。



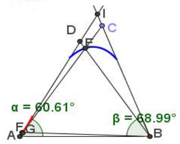
(6) 當 [($\overline{AC}$的最短長度)+$\overline{BI}$] ≦s<[($\overline{BD}$的最短長度)+$\overline{AI}$]，圖形分兩段。



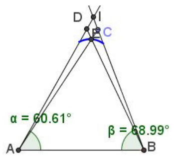
(7) 當 [($\overline{BD}$的最短長度)+$\overline{AI}$] ≦s<[$\overline{BI}+\overline{AB}$]，圖形分三段。



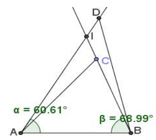
(8) 當（$\overline{BI}+\overline{AB}$)≦$s$<($\overline{AI}+\overline{AB}$)，圖形如圖分兩段。



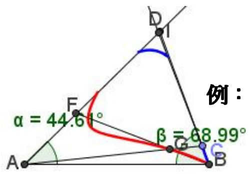
(9) 當（$\overline{AI}+\overline{AB}$)≦$s$<($\overline{BI}+\overline{AI}$)，圖形如右。



(10) 當（$\overline{BI}+\overline{AI}$)≦$s$，圖形不存在。



(11) 當符合條件(2)~(4)其中之一，同時符合(7)、(8)或(9)，圖形會有(2)~(4)的性質，但是被切割。(只發生在$\overline{AI}<w$時）



例：同時符合(3)、(7)時的情形

2. $(\alpha+\beta)>180°$：

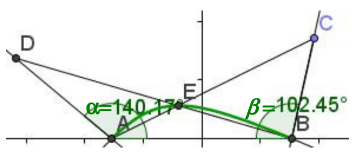
一樣只在 $s>2w$ 下產生圖形，且 s 愈大，圖形最高點趨近於某極限。

(二) **方程式 6**(即$\overline{AD}+\overline{BC}$為定值)的變化：

方程式 7

如右圖，$\overline{AB}=w, \overline{AD}+\overline{BC}=s$ **，則方程式為**

$$\frac{2wy\csc\alpha}{w+x+2y\cot\alpha}+\frac{2wy\csc\beta}{w-x+2y\cot\beta}=s\ 。$$



證明：與前面的求法類似，在此不再贅述。

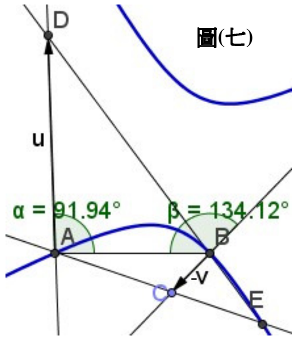
若將此方程式去除分母，方程式即符合圓錐曲線 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的條件。我們便找出其判別式 B^2-4AC：

$$4(w\csc\beta-w\csc\alpha+s\cot\alpha-s\cot\beta)^2-16s(w\cot\beta\csc\alpha+w\csc\beta\cot\alpha-s\cot\beta\cot\alpha)$$

但由於變數實在太多，故無法明確判斷出屬於何種圓錐曲線。我們只好摒棄原本的代數方式，並對原本的系統做一些改變：

1. 將原來的 $\overline{BC}$ 改為向量 $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$。且當 C 在 $\overline{AB}$ 下方時，令 $\overrightarrow{BC}=(-\vec{v})$。
2. 延長 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$，將交點 E 定義為兩直線的交點。這樣不改變原有的條件，但探討範圍更廣闊。
3. 以 B 為起點，沿 $\vec{v}$ 方向作向量 $\vec{s}$，且 $|\vec{s}|$ 即原本的 s。
4. 以 A 為起點沿 $\vec{v}$ 方向作向量 $\overrightarrow{AD'}=\vec{s}-\overrightarrow{BC}$，並將其以 A 為中心逆時針旋轉 $(\alpha+\beta-\pi)$ 得 $\overrightarrow{AD}$。D 在 $\overline{AB}$ 上方時，令 $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$；D 在 $\overline{AB}$ 下方時，令 $\overrightarrow{AD}=-\vec{u}$。

修改後的系統如(圖七)，可以保留原系統的性質，又能畫出原系統外的交點軌跡。有了這個系統，曲線的性質便更容易分析：



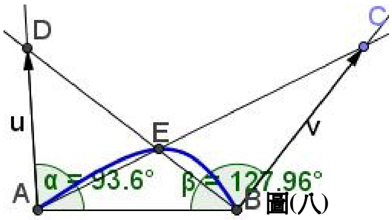
圖(七)

探討 5：

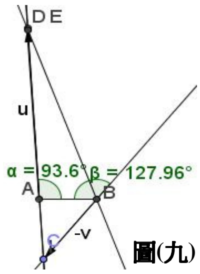
如圖(七)，$\overline{AB}$、$\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BC}$ 為定值 [其中 $\overrightarrow{AD'}$ 即 $\overrightarrow{AD}$ 以 A 為中心順時針旋轉 $(\alpha+\beta-\pi)$]，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 交點為 I。當 $\alpha+\beta>180°$，E 的軌跡為雙曲線；當 $\alpha+\beta<180°$，E 的軌跡為橢圓；當 $\alpha+\beta=180°$，E 的軌跡為拋物線。

證明：

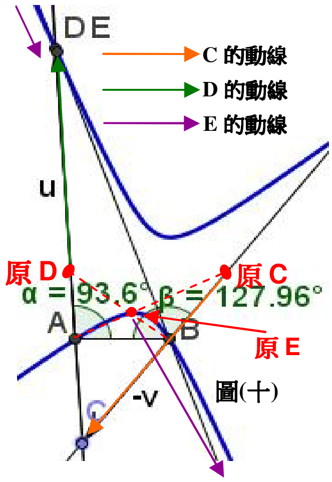
1. $\alpha+\beta>180°$ 時，下圖(八)中，照原本的畫法有一「最高點」E。



圖(八)

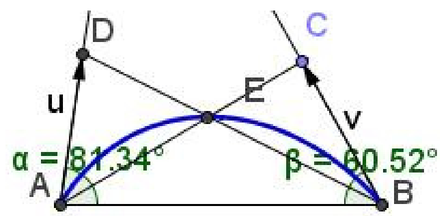


圖(九)

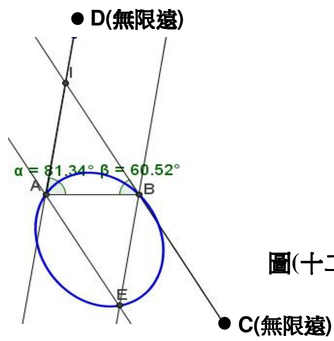


圖(十)

2. 如圖(九)，當 $\alpha+\beta>180°$，C 可在 $\overleftrightarrow{AD},\overleftrightarrow{BC}$ 交點上，並在 $\overline{AB}$ 下方。此時 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$ 的交點 E 必位於 $\overleftrightarrow{AD}$ 上（$\because \overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AD}$ 重合，E 在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上）。又圖(八)中 $u=s-v$，圖(九)中 $u=s-(-v)=s+v$，所以[圖(八)中的 u]<[圖(九)中的 u]，圖(九)中的交點 E 在圖(八)中的 E 上方。各點的動線如圖(十)。
3. 又已在**方程式 7** 中證明 E 的軌跡為圓錐曲線，而本系統亦不改變原本系統中的性質。唯一能在原本的「最高點」上方再產生曲線的圓錐曲線只有雙曲線。
4. $\alpha+\beta<180°$ 時，下圖(十一)中，照原本的畫法有一「最高點」。



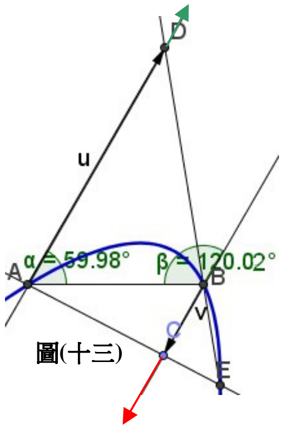
圖(十一)



圖(十二)

5. 如圖(十二)，當 C、D 延伸至無限遠，則系統愈趨近於 $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{BC}$，$AIBE$ 趨近於平行四邊形，其中 $\overline{AB}$ 為一對角線，I、E 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 兩側。欲使 E 更低，C、D 必須離 $\overline{AB}$ 更遠，超越了上述的極限，所以此時 E 為最低點。圓錐曲線中唯一同時有最高點與最低點的是橢圓。

6. $\alpha+\beta=180°$時，如圖(十三)，$\overrightarrow{BC}=(-\vec{v})$。若 $\overline{AC} // \overline{BD}$，則 $ACBD$ 為平行四邊形。但因$\bar{u}+(-\vec{v})=\bar{s}>0$，故 $u>v$，不符合平行四邊形「對邊等長」的性質，即$\overline{AC}$不平行$\overline{BD}$，兩線必有交點。若 C、D 持續往紅、綠色箭頭方向移動，E 會一直往下，故圖形無最低點。又圖形原有一個「最高點」，故此圖形為有最高點、無最低點的圓錐曲線，即拋物線。



圖(十三)

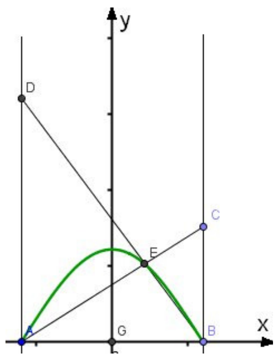
運用向量後，我們可以探討更廣泛的範圍，也讓研究結果有突破性的發展，而能夠在這群高次方程式中找到符合目前課程的內容，更是令我們獲益不淺啊！

陸、 研究結論

一、 關於$\overline{BD}+\overline{AC}$為定值所得相關結論：

(一) 如附錄一，若$\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$，則$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\overline{EF}}$。

(二) 如圖(十四)，O 為$\overline{AB}$中點，A、B 在 x 軸上，且$\overline{AD} // \overline{BC}$，$\overline{BC}\perp x$軸。若$\overline{AB}=w$、$\overline{BD}+\overline{AC}=s$，則 E 繪製出的曲線之方程式為$\sqrt{(\dfrac{2wy}{w+2x})^2+w^2}+\sqrt{(\dfrac{2wy}{w-2x})^2+w^2}=s$。



圖(十四)

(三) 同上，但$\angle DAB\neq 90°$，且$\angle DAB=\theta$，則方程式為

$$\sqrt{[\frac{w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}]^2+w^2-\frac{2w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta-2x}}$$
$$+\sqrt{[\frac{w\sin\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}]^2+w^2+\frac{2w^2\sin\theta\cos\theta(y-x\cot\theta)}{w\sin\theta+2x}}=s$$

(四) 在垂直座標上，若 $s=2w$ 且 $\theta\neq 90°$，則交點繪製的曲線通過原點。

(五) 在垂直座標上，若 $w\cos\theta<s<2w$，則交點繪製的曲線約為環狀。

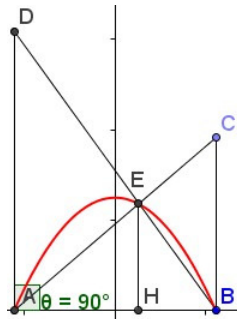
(六) 當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$時，斜線與曲線會形成兩個交點。

(七) 當其中一條斜線為兩平行線之垂線時，另一條曲線是曲線的切線。

(八) 當兩底角相等，可產生多種類型的曲線。若兩底角為任意角，狀況相似。

二、 運用此種方法，但改變其條件，能繪出多種圖形，但計算十分繁瑣。

三、 關於 $\overline{CB}+\overline{AD}$ 為定值所得相關結論：



圖(十五)

(一) 如圖(十五)，若 $\overline{CB}+\overline{AD}$ 為定值 $=s$，$\overline{AB}=w$，且原點 O 為 $\overline{AB}$ 中點。以 E 點繪出之曲線方程式為 $y=\frac{-s}{w^2}x^2+\frac{s}{4}$。

(二) 同上，但 $\angle DAB\neq 90°$，且 $\angle DAB=\theta$，則方程式為

$$y=-\frac{s}{w^2\sin^2\theta}x^2+x\cot\theta+\frac{s}{4}$$ 。

(三) 承(二)，但改變其底角（左右對稱），可繪製出多種圓錐曲線。底角＞90°，圖形為雙曲線；底角＜90°，圖形為橢圓；底角=90°，圖形為拋物線。

(四) 承(三)，但兩底角為任意角，交點圖形仍為圓錐曲線。以 α、β 表示兩底角，若 $\alpha+\beta>180^\circ$，圖形為雙曲線；$\alpha+\beta<180^\circ$，圖形為橢圓；$\alpha+\beta=180^\circ$，圖形為拋物線。

(五) 以向量表示 $\overline{AD},\overline{BC}$ ，並將 $\overline{AC},\overline{BD}$ 無限延長，可畫出完整的圓錐曲線。

(六) 如附錄二，當 $\overline{AD}=\overline{BC}$ ，E 距離 x 軸最遠。

柒、 未來展望

透過簡單的步驟，我們竟然作出了八次曲線！但受限於時間和知識的不足，我們無法有效分析它們，只能欣賞它們所帶來的圖形之美。但仔細看，若能依方程式之定義求出方程式，或許此研究在方程式的平移、旋轉上有其應用之處。

想起兩千多年前，當阿波羅尼斯發現圓錐曲線時，也塵封過一千年才受到重視。這些方程式現在對我們而言或許沒有意義，但或許有一天，有人能夠做更進一步的推廣，並找出其應用的地方。

雖然無法在八次曲線上有進一步的突破，但最後能用向量系統來證明圓錐曲線的類型，心中亦有不小的成就，期待後續能再將此系統加以擴大研究。

捌、 參考資料

一、 老謀深算——牛頓出版社
二、 高中數學第四冊——南一書局
三、 國中數學第五冊——南一書局

玖、 附錄

一、 若$\overline{AD} // \overline{EH} // \overline{BC}$，則$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\overline{EH}}$

證明： 1. $\because \overline{AD} // \overline{BC}$

$\therefore \angle ADB = \angle CBE, \angle DAC = \angle ACB$

（內錯角相等）

$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta CBE$(AA相似)

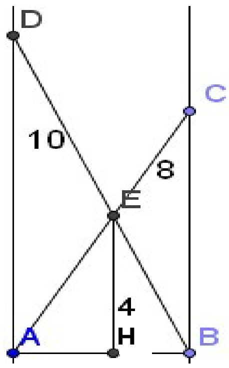
$\therefore \overline{AD} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{BE} = \overline{AE} : \overline{CE}$

2. $\because \overline{EH} // \overline{BC}$

$\therefore \angle AHE = \angle ABC$(同位角相等)

$\Rightarrow \Delta AHE \sim \Delta ABC$(AA相似)

$\therefore \overline{AE} : \overline{CE} = \overline{EH} : (\overline{BC} - \overline{EH})$



3. 由以上得

$\overline{AD} : \overline{BC} = \overline{EH} : (\overline{BC} - \overline{EH})$

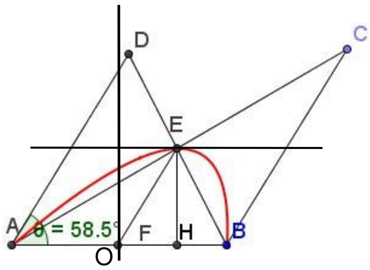
$\Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{EH} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} - \overline{AD} \cdot \overline{EH}$

$\Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{EH} + \overline{AD} \cdot \overline{EH} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

同除$\overline{AD} \cdot \overline{EH} \cdot \overline{BC}$

$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\overline{EH}}$

二、 如右，$\overline{AD}+\overline{BC}$為定值 s，$\overline{AB}$為定值 w 且與 x 軸重疊，原點 O 為其中點，紅色曲線為 E 繪出之曲線。當$\overline{AD}=\overline{BC}$，$E$ 距離 x 軸最遠。



證明： 1. 作$\overline{EF} // \overline{AD}$，並作$\overline{EH} \perp x$軸。

2. $\overline{AD} = \overline{EF} \cdot \dfrac{w}{\frac{w}{2}+\overline{FH}-x} = \overline{EF} \cdot \dfrac{2w}{w+2\overline{FH}-2x}$,

$\overline{BC} = \overline{EF} \cdot \dfrac{2w}{w-2\overline{FH}+2x} \Rightarrow \overline{EF} \cdot \dfrac{2w}{w-2\overline{FH}+2x} = \overline{EF} \cdot \dfrac{2w}{w+2\overline{FH}-2x}$

$w-2\overline{FH}+2x = w+2\overline{FH}-2x$

$4\overline{FH} = 4x, \overline{FH} = x$，即F、O重疊，$\overline{EF} = \overline{EO}$

3. 過 E 作一直線平行 x 軸，並設其交曲線於 E、E'，則其中一點違反$\overline{EF} = \overline{EO}$原則，故此直線只與曲線交於一點，得其為曲線之切線。又此直線平行 x 軸，所以它切於 E，又距離 x 軸最遠，即 E 距離 x 軸最遠。

【評語】030403

本作品的研究動機部分具吸引力，在研究過程中，討論長度、角度、平行的變化，所產生的圖形。透過數學軟體與代數式來彼此呼應，值得嘉許。