

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030402

智慧方塊挑戰之旅

學校名稱：雲林縣立建國國民中學

作者： 國一 蔡建洲 國一 李育安 國一 王蕙瑄 國一 張乃欣	指導老師： 張家豪 林宗翰
---	-----------------------------

關鍵詞：方塊拼圖、方格坐標化、方格數字化

摘要

智慧方塊是一個常見益智拼圖遊戲(如【圖一】)，如果經過旋轉或翻轉之後，其解視為相同，我們可以使用一套系統的方法儘可能找出它的解，其方法依序是：

- 一、尋找單邊組合：其可能性共有 449 種可能(《附錄一、單邊組合一覽表》)。
- 二、決定第①邊：將第①邊的圖形分成兩大類：(一)方塊 I 在邊上、(二)方塊 I 在內部。
- 三、完成四接邊：利用 Microsoft Excel 電子試算表，透過「頭尾接邊」與「方格坐標化」的方法，判別四接邊的可能性。
- 四、填入內部圖形：再利用 Excel 電子試算表，透過「方格數字化」的原理，幫我們判別「有可能」將剩餘方塊填入的情況，之後再以人工方式檢查解的可能性。

以下是我們找到解的情況：

- 一、由於我們決定的第①邊具有方向性，可能的重複解只有 22 個，我們需將之扣除。
- 二、相同的四接邊，部份有第二個解，但不曾出現有第三解的情況。
- 三、扣除重複解並算入第二解之後，我們一共找到 390 個解。
- 四、在 390 個解中，方塊 I 在邊上的有 380 個(佔 97.6%)，方塊 I 在內部的只有 10 個(佔 2.4%)。

壹、研究動機

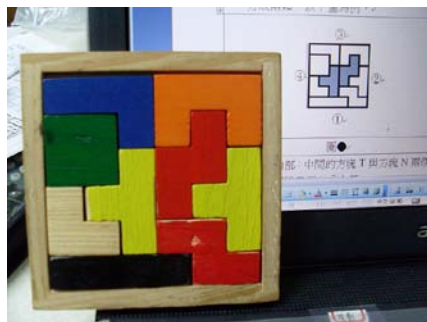
小時候我們曾經買到一個方塊拼圖遊戲，它的遊戲規則很簡單，就是使用九個方塊將它們拼進一個 6x6 的正方形內，更令我們感興趣的是，它當中附了一個表格，要我們儘可能地找出它的解法，看我們能找出幾組解。這個問題我們以前並無法解決，現在利用作科展的機會，我們想研究看看，這個遊戲可能有幾組解。

貳、研究目的

- 一、以一套有系統性的方法尋找智慧方塊的解答
- 二、如果將方塊經過旋轉或翻轉視為相同解，我們如何排除重複解
- 三、儘可能找出智慧方塊的解答數
- 四、將智慧方塊解答的可能性作分類

參、研究設備及器材












- 一、智慧方塊(如【圖一】)，此一遊戲是常見的益智拼圖遊戲，現在我們手中的拼圖是十元商品店買到，也曾在部份的老街看到相同的商品。



【圖一】

肆、研究過程

一、智慧方塊的圖形特徵

1. 方塊的種類：我們研究的智慧方塊是由 9 個連方塊所組成，它們分別是 1 個三連方()、7 個四連方(、、、、、、)、1 個五連方()。其中四連方的  與  各有兩個，故四連方共有 5 種。

2. 方塊的面積：如果我們將每個小正方形面積看成是 1 單位，1 個三連方面積是 3，7 個四連方面積加起來是 $7 \times 4 = 28$ ，1 個五連方面積是 5，面積和是 $3 + 28 + 5 = 36$ ，有可能排進一個 6×6 的正方形方格內。

3. 方塊的名稱：為了溝通與紀錄上的方便，我們根據圖形的特徵，給予不同的名稱。

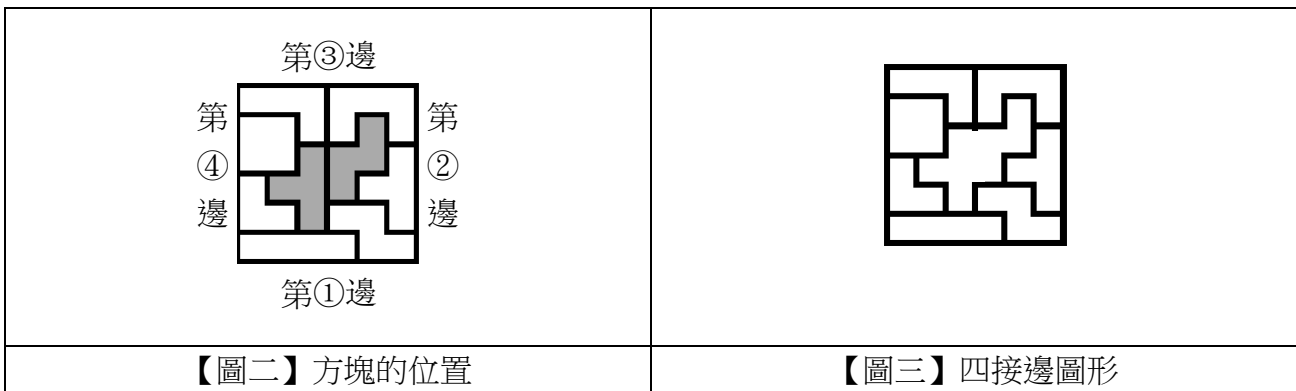
：叫作「I」，因為它很像英文字母的 I。 ：叫作「U」，它很像英文字母的 U。

：叫作「L」，它很像英文字母的 L。 ：叫作「T」，它很像英文字母的 T。

：它叫作「N」，它很像英文字母的 N。 ：叫作「田」，它很像中文字的田。

：叫作「頭」，因為老師說它很像數學符號中的 \hat{x} (唸作 x head)。

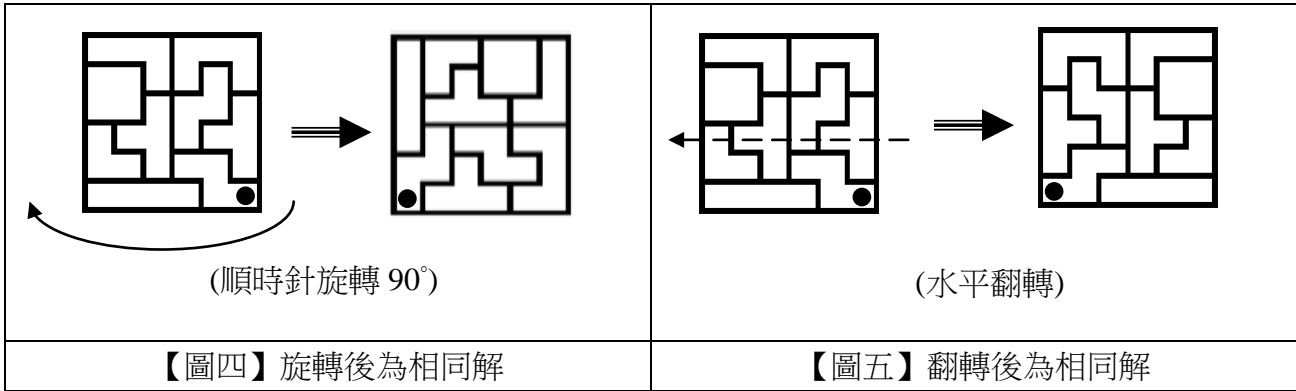
4. 方塊的位置：首先我們先注意到這九塊圖形排列在正方形方格內的可能位置，我們將之粗分成兩類，以【圖二】為例，



- (1) 在內部：中間的方塊 T 與方塊 N 兩個圖形(灰色部份)，與正方形的四個邊完全不接觸，我們稱它們在「內部」。
 - (2) 在邊上：其餘七個方塊(白色部份)，至少都有一小部份與正方形的邊接觸，我們稱它們在「邊上」。同時我們把正方形正下方、右邊、正上方、左邊分別稱為第①、②、③、④邊。
5. 完成四接邊：如果【圖二】內部的方塊 T 和方塊 N 未被排入，只剩下如【圖三】的樣子，它的四個邊都已被排滿，我們把這種圖形稱為「完成四接邊」，這樣的圖形已經很接近完成，我們只要嘗試把剩餘的方塊排入，就可以知道這種情況是否有解。


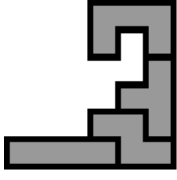
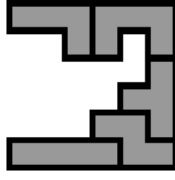
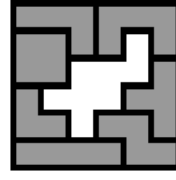
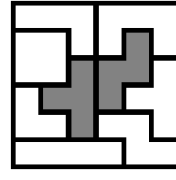
二、 智慧方塊的遊戲規則

1. 經過旋轉或翻轉之後，其圖形排列結構相同，我們將之視為相同解。例如：



三、 尋找解的策略

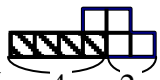
我們基本的想法就是如果一個拼圖可完成，我們可以先完成四接邊的動作，只剩內部少數的方塊未填入，其概念如下圖所示：

第一步	第二步	第三步	第四步	第五步
				
已完成第①邊	接上第②邊	再接上第③邊	再接上第④邊 (完成四接邊)	再填入內部圖形就完成
【圖六】尋找解策略示意圖				

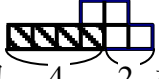
我們的策略如下：(一)尋找單邊組合、(二)決定第①邊、(三)完成四接邊、(四)填入內部圖形

(一) 尋找單邊組合

首先我們開始尋找單邊組合的可能性，在此我們必需知道如果某些方塊排滿正方形的一個邊之後，它在邊上所佔的格數。

以  為例，用方塊 I 與方塊 N 兩個圖形可以填滿正方形的一個邊，它們分別在邊上佔了 4 格與 2 格，所以我們將之由左而右紀錄為 4-2。

也因為我們把翻轉之後的圖形視為相同，所以如果排列形如 ，由左而右紀錄為 2-4，

但需視為與  相同的情形。

我們的方塊在邊上最多只能佔住 4 格，因此要找出組成單一邊的可能性，就是要找出「用 1~4 這幾個數字排列組成和為 6」的所有情況(翻轉視為相同解)，共有以下十四種可能：

最長邊為 4：42、411、141、

最長邊為 3：33、321、312、231、3111、1311、

最長邊為 2：222、2211、2121、2112、1221

為了避免尋找單邊組合時有遺漏，我們在尋找時遵守由左而右，方塊按照 I、U、L、T、N、田、^ 的順序逐一嘗試，並考慮方塊的個數與旋轉，下表是我們將所有可能整理出來的結果，詳細的內容請見《附錄一、單邊組合一覽表》

數字排列	42	411	141			
舉例						
數量	6	2	11			
數字排列	33	321	312	231	3111	1311
舉例						
數量	6	48	64	47	2	14
數字排列	222	2211	2121	2112	1221	總數量
舉例						
數量	47	32	92	33	45	
數量						449

我們一共找到 449 種單邊組合，我們也注意到它們的頭尾方塊是接下來連續接邊的重要指標，因為我們將頭尾形狀編碼(請見《附錄二、圖形編碼與頭尾接邊對照表》)。

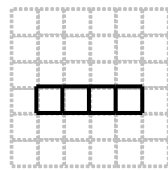
(二) 決定第①邊

由於單邊就有 449 種可能，如果我們逐項將它們當成第①邊來進行四接邊，要嘗試的數量非常多且會出現重複答案的情況。因此我們必需決定從哪種類型的圖形當作第①邊，這樣不僅可減少我們嘗試的次數，也可避免解答重複。

從一開始我們找出來的圖形當中，我們發現方塊 I 大部份的位置都在正方形的邊上(如【圖七】)，只有少部份會在內部(如【圖八】)，因此我們打算將所有圖形的第①邊分成兩大類：

		<p>321(4)</p> <p>尾碼為 IB</p> <p>第①邊尾碼為 IB</p>	<p>321(4)</p> <p>尾碼為 IB</p> <p>頭碼為 IA</p> <p>42(6)</p> <p>找出的第②邊頭碼必為 IA，與 42(6)為第①邊的解重複</p>
【圖七】方塊 I 在邊上	【圖八】圖方塊 I 在內部		【圖九】

- 1、方塊 I 在邊上的圖形當第①邊：參考《附錄一、單邊組合一覽表》，我們可以整理出圖形 I 在邊上的圖共有 202 筆資料，其中有一大部份的圖形其尾碼或頭碼均為 IB，若它們可完成四接邊，它們最後一定與頭碼為 IA 的圖形相接(如【圖九】所示)，而這些圖形恰為 42(1)~42(6)、411(1)~411(2)等八種圖形。因此如果我們先完成 42(1)~42(6)、411(1)~411(2)等八種圖形為第①邊的情況之後，尾碼為 IB 的圖形解就是重複的答案，因此我們可以再從這 202 筆資料中再刪去尾碼為 IB 的圖形，最後我們只需考慮如《附錄三、I 在邊上或內部的第①邊》中的 61 筆資料即可。
- 2、可能讓 I 在內部的圖形當第①邊：如果 I 在內部，我們僅需考慮它在如【圖十】的位置，參考《附錄一、單邊組合一覽表》經過我們逐一比對，可以符合此一情況的僅有 321(28)、321(39)、321(41)、312(49)、312(62)、231(16)、231(18)、222(40)、222(41)等九種可能，其結果我們也將它放在《附錄三、I 在邊上或內部的第①邊》。



【圖十】

另外，如果第①邊它的圖形頭、尾兩個圖形對稱，但中間圖形排列不同，則可能出現多解，但逐一檢視過《附錄一、單邊組合一覽表》之後，我們的第①邊並無此情況。


(三) 完成四接邊

決定第①邊之後，我們接下來開始尋找可以接上的第②邊，及接下來的第③、④邊，我們在尋找時考慮以下兩個重要的原則：1.第①邊的尾與第②邊的頭必須能接合、2.第①、②邊頭尾接合之後，不能有重疊的部份

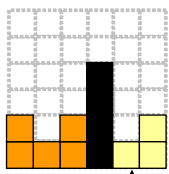
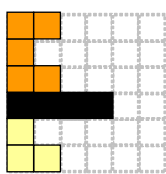
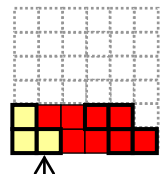

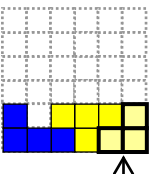
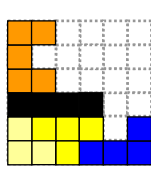
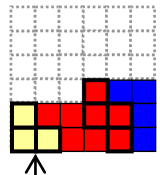
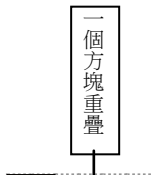
在此我們開始使用 Microsoft Excel，我們設計了一份 Excel 試算表來幫我們完成四接邊的動作，其運作的程序為：

1. 第①、②邊要能頭尾相接：將頭尾形狀編碼後(編碼表請見《附錄二、圖形編碼與頭尾接邊對照表》)，讓 Excel 由頭尾的編碼來決定如何接邊。
2. 同時我們也將每個圖形方格坐標化¹，透過坐標來讓電腦判別圖形是否重疊。

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

¹方格坐標化：模仿坐標的表示法，將 6x6 的正方形每格均寫上坐標值，以  為例，其圖形的坐標為(1,1)、(2,1)、(3,1)、(4,1)、(4,2)、(5,1)、(5,2)、(6,1)。

我們用【圖十一】來說明其運作程序：

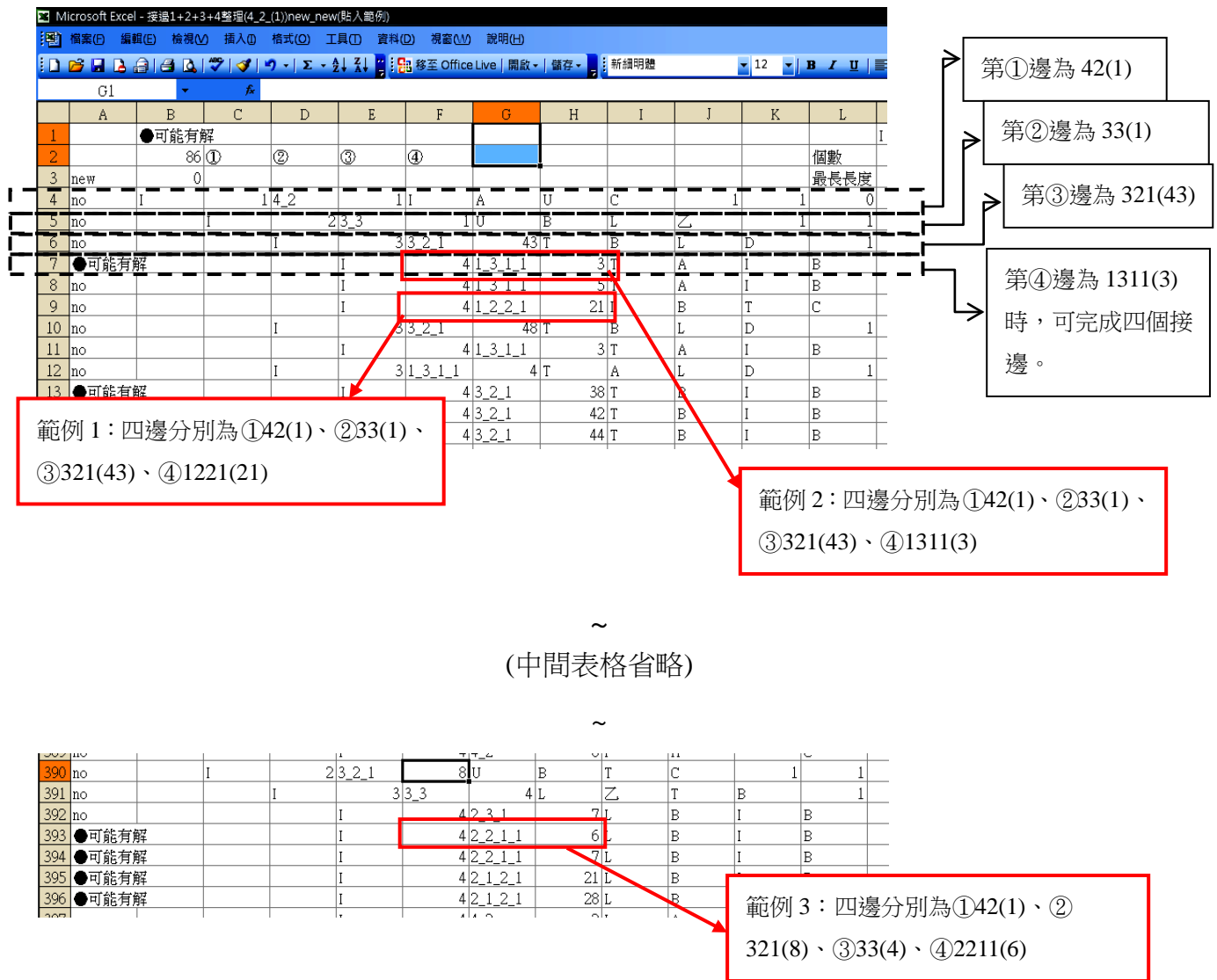
第①邊為 312(3)	旋轉 90°	尋找第②邊	判別	結果	重覆上述步驟，尋找第③、④邊，完成四接邊。
 <p>尾碼為：$\wedge C$</p> <p>該圖的坐標為(1,1)、(1,2)、(2,1)、(3,1)、(3,2)、(4,1)、(4,2)、(4,3)、(4,4)、(5,1)、(6,1)、(6,2)</p>	 <p>順時針旋轉之後，該圖的坐標變為(1,1)、(1,2)、(1,3)、(1,4)、(1,5)、(1,6)、(2,1)、(2,3)、(2,4)、(2,6)、(3,3)、(4,3)</p>	 <p>頭碼為：$\wedge B$</p>	<p>第②邊若頭碼為$\wedge B$，可與第①邊相接</p>	 <p>可接邊</p>	
		 <p>尾碼為：$\wedge C$</p>	<p>第②邊若尾碼為$\wedge C$，經翻轉之後可與第①邊相接</p>	 <p>可接邊</p>	
		 <p>頭碼為：$\wedge B$</p> <p>該圖的坐標變為(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)、(3,1)、(3,2)、(4,1)、(4,2)、(4,3)、(5,1)、(5,2)、(5,3)、(6,1)、(6,2)、(6,3)</p>	<p>第②邊若頭碼為$\wedge B$，但與第①邊相接後會在坐標(4,3)的位置重疊。</p>	 <p>一個方塊重疊</p> <p>無法接邊</p>	

【圖十一】完成四接邊示意圖

重覆以上步驟，我們就可找出可完成四邊²的情況，

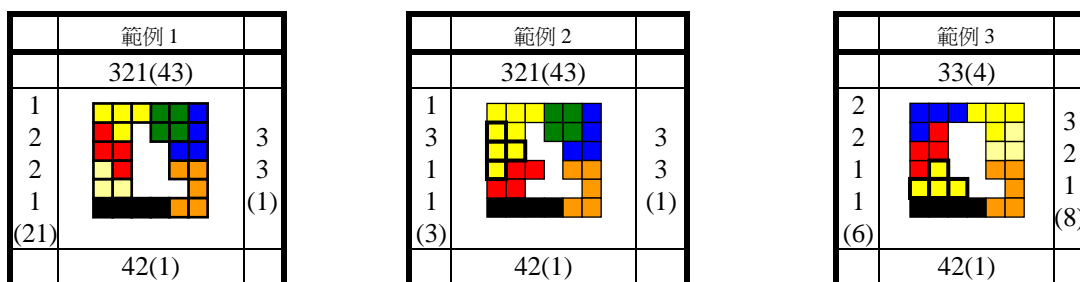
- 接著我們將四接邊結果逐項貼在 Excel 上，作為資料整理，並開始判斷四接邊的可能性，【圖十二】是我們作出的一個範例：

² 第④邊的尾必須和第①邊的頭能相接。



【圖十二】四接邊完成範例

如【圖十二】，我們選取其中三組資料當作範例畫出它的四接邊圖形：



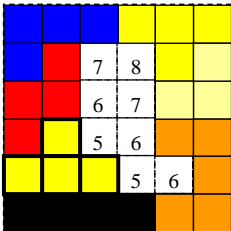


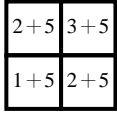

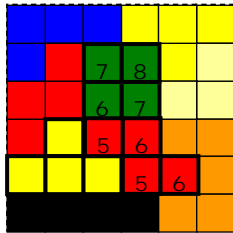
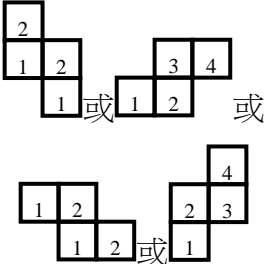
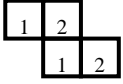
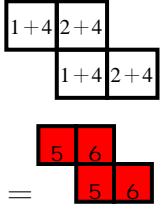
(四) 填入內部圖形

完成步驟(三)的四接邊之後，光 42(1)~42(6)為第①邊的情況約有四千多種，我們無法逐一檢視，故我們再引入第二種方法「方格數字化」³來讓電腦為我們判別哪些圖形有可能填入剩餘圖形。【圖

6 7 8 9 10 11
 5 6 7 8 9 10
 4 5 6 7 8 9
 3 4 5 6 7 8
 2 3 4 5 6 7

³ 數字化：如圖，1 2 3 4 5 6 我們將 6x6 的正方形每格標上 1~11 的數字。同樣地我們也可能將每個要填入的方塊數字化，其結果請見《附錄四、填入方塊數字化一覽表》。

十三】說明我們使用的原理：

四接邊圖形	未填入方塊	未填入方塊數字化	選取圖形	調整選取圖形數字	完成內填圖形
 <p>剩餘空格數字化： 5,5,6,6,6,6,7,7,8</p>	田			  =	調整後的圖形數字恰可填入剩餘空格內： 
	N			 =	

【圖十三】

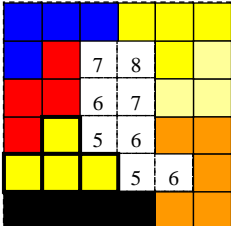
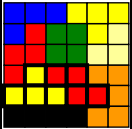
由於 Excel 程式只能判別數字與代碼。在【圖十四】~【圖十五】中我們由三個範例來說明電腦如何運用「數字化」的原理，幫我們尋找內填圖形的可能性：

範例 1	剩餘方塊	剩餘方塊數字化可能性 (請見《附錄四》)	嘗試填入圖形一		嘗試填入圖形二		最終判斷(人工)
			(剩餘方塊數字化)+(由左下方開始, 每位加上的數字) = 應刪除數字	動作判斷 / 剩餘數字	(剩餘方塊數字化)+(由左下方開始, 每位加上的數字) = 應刪除數字	動作判斷	
 <p>剩餘空格數字化： 4,5,5,6,6,6,7,7</p>	T	(1,1,2,3)、(1,2,3,3)	$T(1,1,2,3) + (3,3,3,3) = (4,4,5,6)$	不可填入 / 無	無	無	無解
			$T(1,2,3,3) + (3,3,3,3) = (4,5,6,6)$	進行下一步 / (5,6,7,7)	$N(1,1,2,2) + (4,4,4,4) = (5,5,6,6)$	不可填入	無解
					$N(1,2,3,4) + (4,4,4,4) = (5,6,7,8)$	不可填入	無解
	N	(1,1,2,2)、(1,2,3,4)	$N(1,1,2,2) + (3,3,3,3) = (4,4,5,5)$	不可填入 / 無	無	無	無解
			$N(1,2,3,4) + (3,3,3,3) = (4,5,6,7)$	進行下一步 / (5,6,6,7)	$T(1,1,2,3) + (4,4,4,4) = (5,5,6,7)$	不可填入	無解
				$T(1,2,3,3) + (4,4,4,4) = (5,6,7,7)$	不可填入	無解	

【圖十四】 數字化判斷內填圖形可能性(範例一)

範例 2	剩餘方塊	剩餘方塊數字化可能性(請見《附錄四》)	嘗試填入圖形一		嘗試填入圖形二		最終判斷(人工)
			(剩餘方塊數字化)+(由左下方開始,每位加上的數字)=應刪除數字	動作判斷/剩餘數字	(剩餘方塊數字化)+(由左下方開始,每位加上的數字)=應刪除數字	動作判斷	
 <p>剩餘空格數字化： 4,5,6,6,6,7,7,</p>	N	(1,1,2,2)、(1,2,3,4)	$N(1,1,2,2)+(3,3,3,3)$ $= (4,4,5,5)$	不可填入 / 無	無	無	無解
			$N(1,2,3,4)+(3,3,3,3)$ $= (4,5,6,7)$	進行下一步 / (6,6,7)	$^{\wedge}(1,1,2)+(5,5,5)$ $= (6,6,7)$	●可能有解	無解
					$^{\wedge}(1,2,3)+(5,5,5)$ $= (6,7,8)$	不可填入	無解
					$^{\wedge}(1,2,2)+(5,5,5)$ $= (6,7,7)$	不可填入	無解
	^	(1,1,2)、(1,2,3)、(1,2,2)	$^{\wedge}(1,1,2)+(3,3,3)$ $= (4,4,5)$	不可填入 / 無	無	無	無解
			$^{\wedge}(1,2,3)+(3,3,3)$ $= (4,5,6)$	進行下一步 / (6,6,7,7)	$N(1,1,2,2)+(5,5,5,5)$ $= (6,6,7,7)$	●可能有解	無解
					$N(1,2,3,4)+(5,5,5,5)$ $= (6,7,8,9)$	不可填入	無解
			$^{\wedge}(1,2,2)+(3,3,3)$ $= (4,5,5)$	不可填入 / 無	無	無	無解

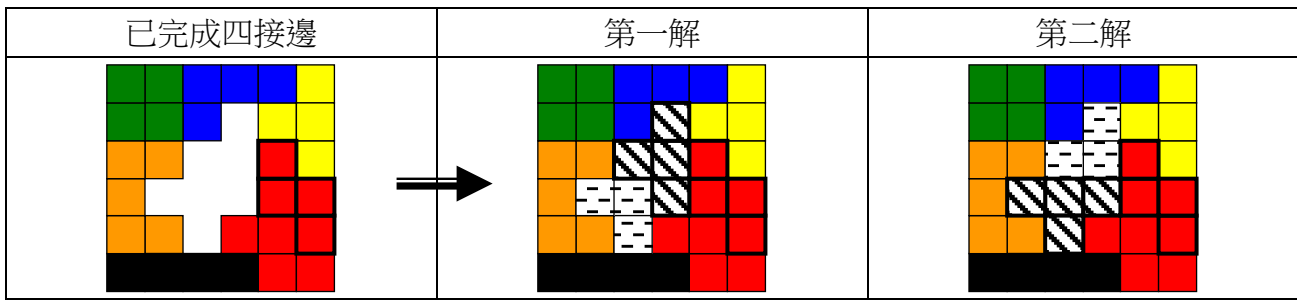
【圖十五】 數字化判斷內填圖形可能性(範例二)

範例 3	剩餘方塊	剩餘方塊數字化可能性(請見《附錄四》)	嘗試填入圖形一		嘗試填入圖形二		最終判斷(人工)
			(剩餘方塊數字化)+(由左下方開始,每位加上的數字)=應刪除數字	動作判斷/剩餘數字	(剩餘方塊數字化)+(由左下方開始,每位加上的數字)=應刪除數字	動作判斷	
 <p>剩餘空格數字化： 5,5,6,6,6,7,7,8</p>	N	(1,1,2,2)、(1,2,3,4)	$N(1,1,2,2)+(4,4,4,4)$ $= (5,5,6,6)$	進行下一步 / (6,7,7,8)	$田(1,2,2,3)+(5,5,5,5)$ $= (6,7,7,8)$	●可能有解	 <p>★有解★</p>
			$N(1,2,3,4)+(4,4,4,4)$ $= (5,6,7,8)$	進行下一步 / (5,6,6,7)	$田(1,2,2,3)+(4,4,4,4)$ $= (5,6,6,7)$	●可能有解	
	田	(1,2,2,3)	$田(1,2,2,3)+(4,4,4,4)$ $= (5,6,6,7)$	進行下一步 / (5,6,7,8)	$N(1,1,2,2)+(4,4,4,4)$ $= (5,5,6,6)$	不可填入	無解
			$N(1,2,3,4)+(4,4,4,4)$ $= (5,6,7,8)$	●可能有解	無解		

【圖十六】 數字化判斷內填圖形可能性(範例三)

因為電腦只能判別數字，無法判別圖形的方向，所以我們找出來的結果僅是「●可能有解」，最後的結果可能是完全無解(如【圖十五】範例 2)，也可能是有一個解(如【圖十六】範例 3)，最後這項工作仍需由我們以人工判別慢慢判別，不過透過電腦已幫我們將原先在 42(1)~42(6)中需檢查的四千多種縮減為八百多種。還有我們也注意到，在有解的情況之下也可能出現第二個解(見【圖

【圖十七】舉例)，此一狀況也需由我們逐項判斷：



【圖十七】有兩解的圖例

伍、 研究結果

一、 初步完成結果

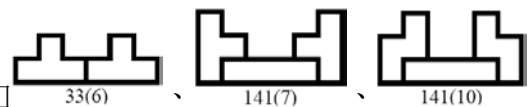
經過半年多的努力，分工檢查電腦資料與書面資料，我們一共找出 412 種解，但此時我們仍需考慮是否有重複解的情況。

二、 扣除重複解

由於我們在尋找解的過程，是按照第①、②、③、④邊順序尋找，且第①邊大部份具有方向性，所以大致上我們找出來的並不會有重複解的情況，【圖十八】說明此一概念：

找到的解			重複解：旋轉			重複解：翻轉		
90	第③邊：33(1)	66		第③邊：231(4)			第③邊：33(1)	
第④邊： 1 2 2 1 (23)		第②邊： 2 3 1 (4)	第④邊： 3 3 (1)		第②邊： 4 2 (3)	第④邊： 2 3 1 (4)		第②邊： 1 2 2 1 (23)
	第①邊：42(3)			第①邊：1221(23)			第①邊：42(3)	
我們找出一個解，它的四邊分別為①：42(3) ②：231(4) ③：33(1) ④：1221(23)			我們不會找出此解，因為我們已將第①邊尾碼為IB的情況排除			由於我們將第①邊的方塊I視為頭，方塊N視為尾，此一情況亦不會出現。		

【圖十八】



但需注意的是，如果第①邊它的圖形左右完全對稱，如 33(6)、141(7)、141(10)，我們找出的四邊組合情況可能會有重複解，故最後我們需以人工的方式逐一檢查。下表我們呈現出檢查的結果，原本第①邊為141(7)的解共有 42 個，但經檢查之後實際上只有 21 個，第①邊為141(10)的解共有 2 個，但經檢查之後實際上只有 1 個。而我們不會將 33(6)當成第①邊，故此情況不考慮。

1-4-1(7) 原有 42 個→可刪成 21 個

1 ⁴	2 2 2 (4 5)	3	2 2 2 (5)	7	2 1 2 1 (1 8)	7 補	2 1 2 1 (1 8)	8	2 1 1 2 (1 2)
3 1 2 (55)		3 3 (3)	3 1 2 (40)	3 3 (3)	3 3 (5)	3 3 (5)	3 3 (3)	3 1 2 (55)	3 3 (3)
	1 4 1 (7)		1 4 1 (7)		1 4 1 (7)		1 4 1 (7)		1 4 1 (7)

⁴ 此為可能有解的圖號。在本行的圖示中，可能有解的圖：1、3、7、7補、8、...等，乃是經我們確認之後可找到的明確答案。完整的資料由於數量龐大，需由手寫的書面資料呈現，無法附在本作品說明書中。

9	3 1 2 (3 6)		1 0	3 1 2 (3 6)		14	2 2 2 (1 5)		1 6	2 2 2 (1 8)		1 8	2 2 2 (2 4)	
3 2 1 (43)		3 3 (3)	3 2 1 (43)		3 3 (3)	3 3 1 2 (62)		3 3 (4)	3 2 1 (32)		3 3 (4)	3 1 2 (55)		3 3 (4)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
2 0	3 2 1 (6)		2 1	3 1 2 (6)		22	2 3 1 (3 0)		2 3	2 3 1 (2 0)		2 4	2 2 1 1 (1 4)	
3 1 2 (63)		3 3 (5)	3 1 2 (63)		3 3 (5)	3 3 1 2 (55)		3 3 (5)	3 1 2 (62)		3 3 (5)	3 1 2 (55)		3 3 (5)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
2 5	2 1 2 1 (1 8)		2 6	2 1 2 1 (1 8)		27	2 2 2 (1 8)		2 8	2 2 2 (4 3)		3 5	3 1 2 (3 6)	
3 3 (3)	同 7	3 3 (5)	3 3 (3)	同 7 補	3 3 (5)	3 3 (4)	同 16	3 2 1 (32)	3 1 2 (55)		3 2 1 (32)	3 3 (3)	同 10	3 2 1 (43)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
3 6	3 1 2 (3 6)		3 7	3 3 (1)		38	3 3 (1)		3 9	2 2 2 (5)		4 2	3 1 2 (4)	
3 3 (3)	同 9	3 2 1 (43)	3 1 2 (63)		3 2 1 (43)	3 3 1 2 (63)		3 2 1 (43)	3 3 (3)	同 3	3 1 2 (40)	3 1 2 (63)		3 1 3 (55)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
4 4	2 3 1 (2 0)		4 5	2 2 2 (4 5)		48	2 2 2 (1 5)		5 0	2 2 2 (2 4)		5 5	2 2 2 (4 3)	
3 3 (5)	同 22	3 1 2 (55)	3 3 (3)	同 1	3 1 2 (55)	3 3 (4)	同 14	3 1 2 (55)	3 1 2 (55)	同 18	3 3 (4)	3 2 1 (32)	同 28	3 1 2 (55)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
5 7	2 2 1 1 (4 4)		6 0	2 1 1 2 (1 2)		67	2 3 1 (2 0)		7 0	3 3 (1)		7 1	3 3 (1)	
3 3 (5)	同 24	3 1 2 (55)	3 3 (3)	同 8	3 2 (55)	3 3 (5)	同 23	3 1 2 (62)	3 2 1 (43)	同 37	3 1 2 (63)	3 2 1 (43)	同 38	3 1 2 (63)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
7 2	3 2 1 (6)		7 3	3 2 1 (6)		74	3 1 2 (4)		7 5	2 2 2 (3)		7 6	2 2 2 (8)	
3 3 (5)	同 21	3 1 2 (63)	3 3 (5)	同 20	3 1 2 (63)	3 1 2 (55)	同 42	3 1 2 (63)	3 3 (4)		3 3 (3)	3 3 (4)		3 3 (5)
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)			1 4 1 (7)	
7 7	2 2 2 (8)		7 8	2 2 2 (3)										
3 3 (3)	同 76	3 3 (4)	3 3 (3)	同 75	3 3 (4)									
	1 4 1 (7)			1 4 1 (7)										

1-4-1(10) 原有 2 個→可刪成 1 個


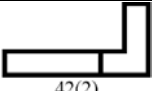
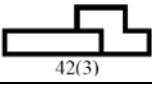
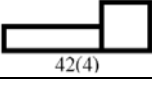
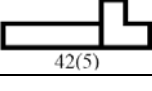
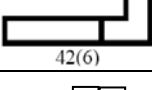
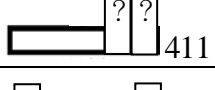
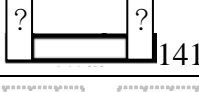
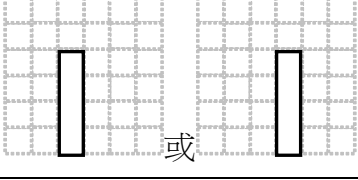
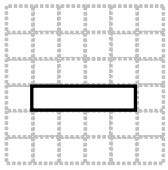
3	312(62)		4	312(62)										
2 2 2 (34)		2 3 1 (16)	2 3 1 (16)	同 3	2 2 2 (34)									
	141(10)			141(10)										

三、最終解

最後，我們一共歸納出 390 個解，其結果請見《附錄五、智慧方塊的所有解》

陸、 討論

一、由《附錄五、智慧方塊的所有解》，我們可以歸納出各種解的分類。

方塊的位置	第①邊情況	解的數量	小計
方塊 I 在邊上	 42(1)	12	355
	 42(2)	26	
	 42(3)	124	
	 42(4)	97	
	 42(5)	7	
	 42(6)	30	
	 411	9	
	 141	50	
方塊 I 立在第①邊上		25	25
方塊 I 在內部		10	10

由上表可知，在 390 個解中，I 的位置大部份是在邊上，而且大部份又是平躺在邊上，只有少部份 I 的位置會立在邊上(25 解)或在正方形內部(10 解)。由此可知，我們解智慧方塊時，可以將方塊 I 先平躺在邊上，此一策略有可能提高我們找出解的機率。

二、在尋找「填入內部圖形」的可能性時，我們使用的策略「方格數字化」，其實是尋找各種可能的整數解。一開始我們想利用此方法找出所有解，但由於我們討論的數字太大，且可能性太多，因此我們中途即修正此方法，而與四接邊的方法合併使用。

柒、 結論

- 一、 我們能以一套系統性的策略儘可能找出了智慧方塊的解，且能夠儘量避免重複解。此策略為：
 - (一) 尋找單邊組合：我們一共找到 449 種可能(如《附錄一》)
 - (二) 決定第①邊：我們將之分類為「方塊 I 在邊上」、「方塊 I 在內部」兩種情況，來決定第①邊，
 - (三) 完成四接邊：我們依序由第①、②、③、④邊的順序連續接邊，完成四接邊。此工作我們需使用 Microsoft Excel 軟體，並利用「頭尾接邊」和「方塊坐標化」兩種方法設計了一份試算表幫我們找出可能情況。
 - (四) 填入內部圖形：完成四接邊後，我們同樣利用 Excel 試算表，利用「方塊數字化」的原理協助我們判斷是否可能內填圖形。
- 二、 由於第①邊的圖形大部份均有方向性，透過上述的策略，我們可以儘可能找出智慧方塊的解，且只需扣除在第①邊為 141(7)與 141(10)的 22 個重覆解。
- 三、 在填入內部圖形時，相同的四接邊可能有第二解，但我們並沒有在相同四接邊的情況下找到第三個解。

在正式進行科展研究之前，我們花了兩天的時間排出了二十幾個解，我們很想要知道共有多少解，因此開始進行研究。本來我們猜測的解答數約六、七十個，最多也應該在一百個以內，但後來我們找到一個令人驚喜又驚訝的答案：

我們一共找到 390 個解。

捌、 參考資料

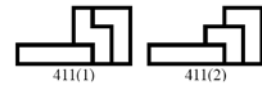
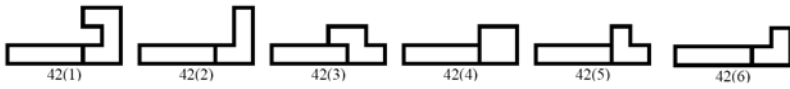
孫文先主編(1999) 多方塊，九章出版社，1999 年 6 月 16 日。

南一出版社 國中數學第二冊(單元 二元一次方程式、直角坐標系)，2010 年。

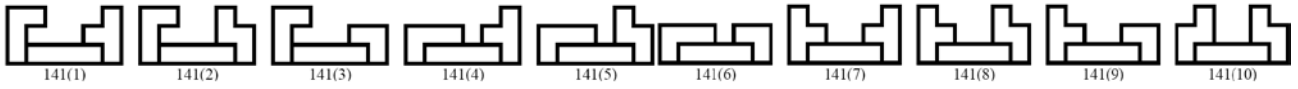
《附錄一、單邊組合一覽表》

4-2

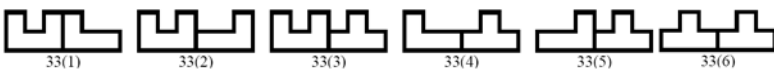
4-1-1



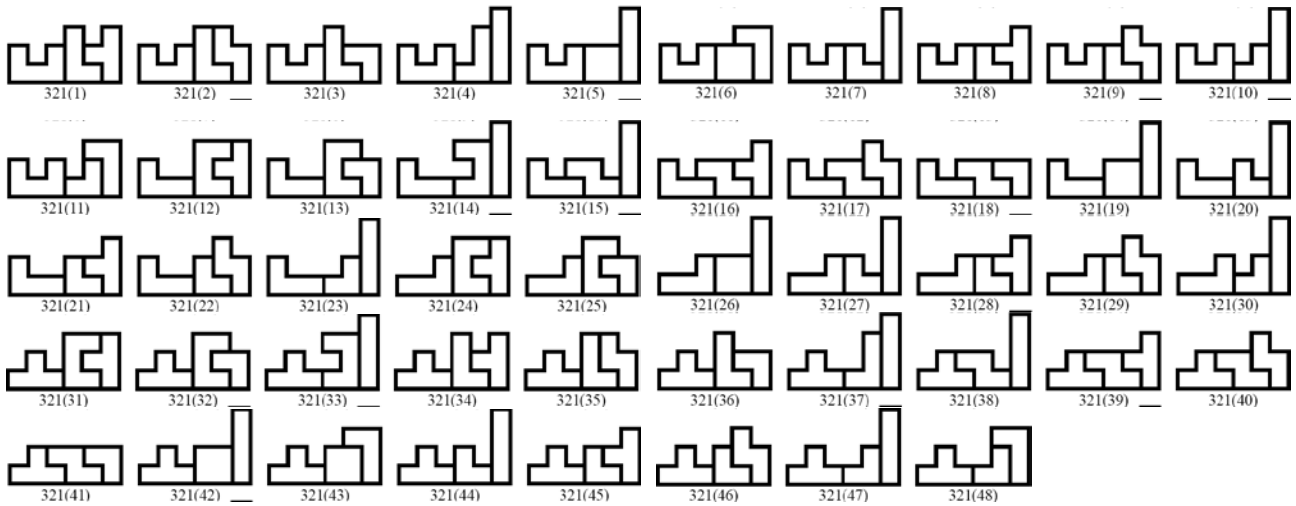
1-4-1



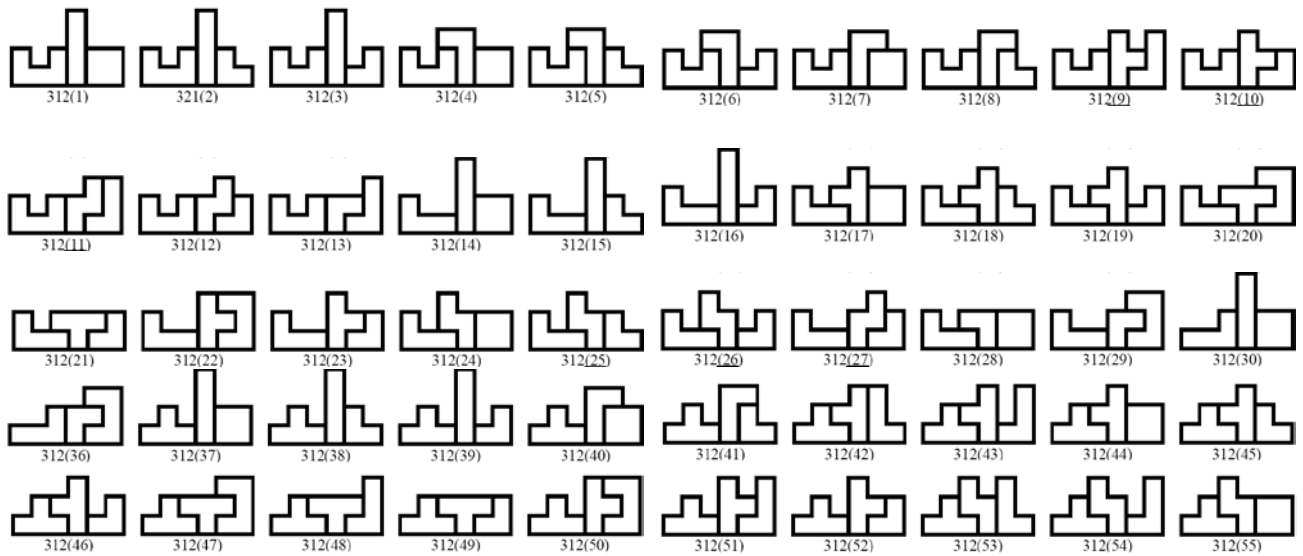
3-3

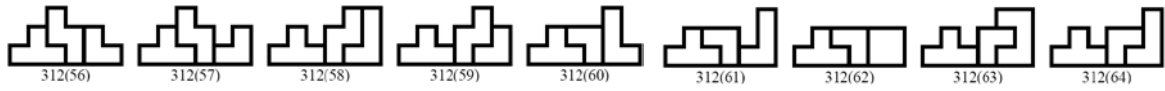


3-2-1

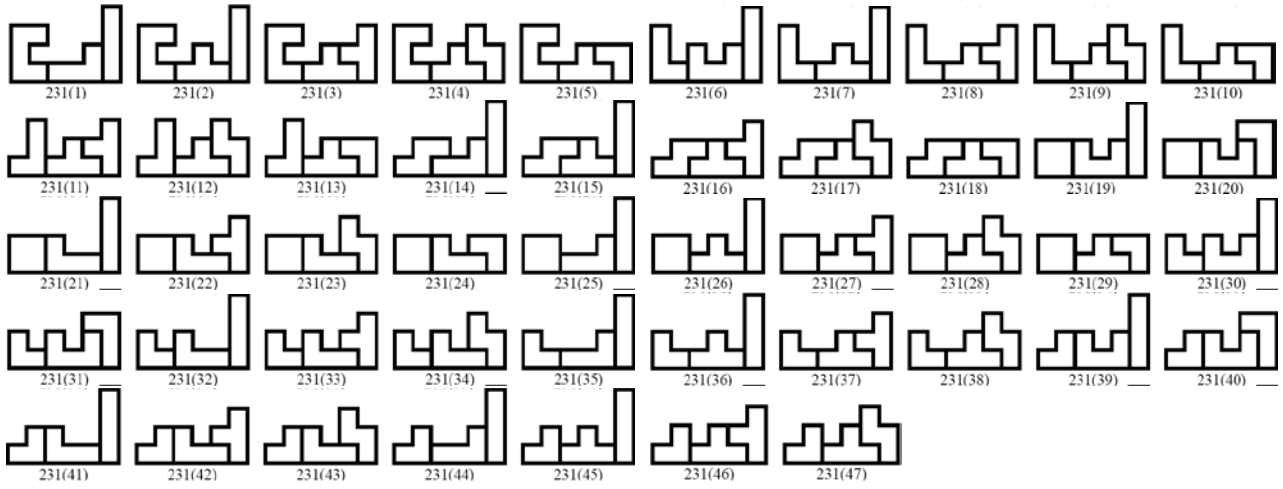


3-1-2

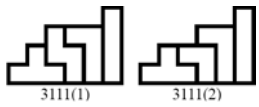




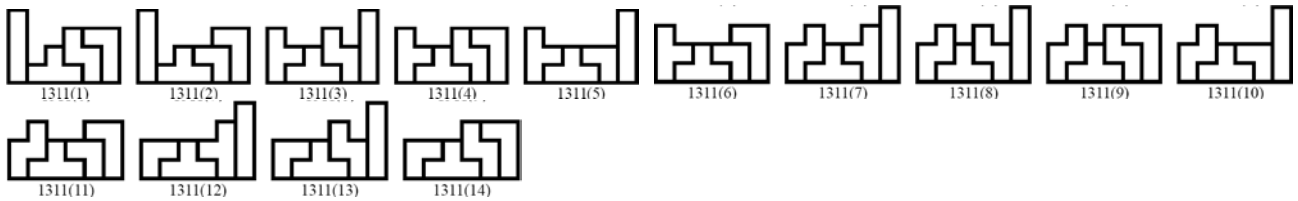
2-3-1



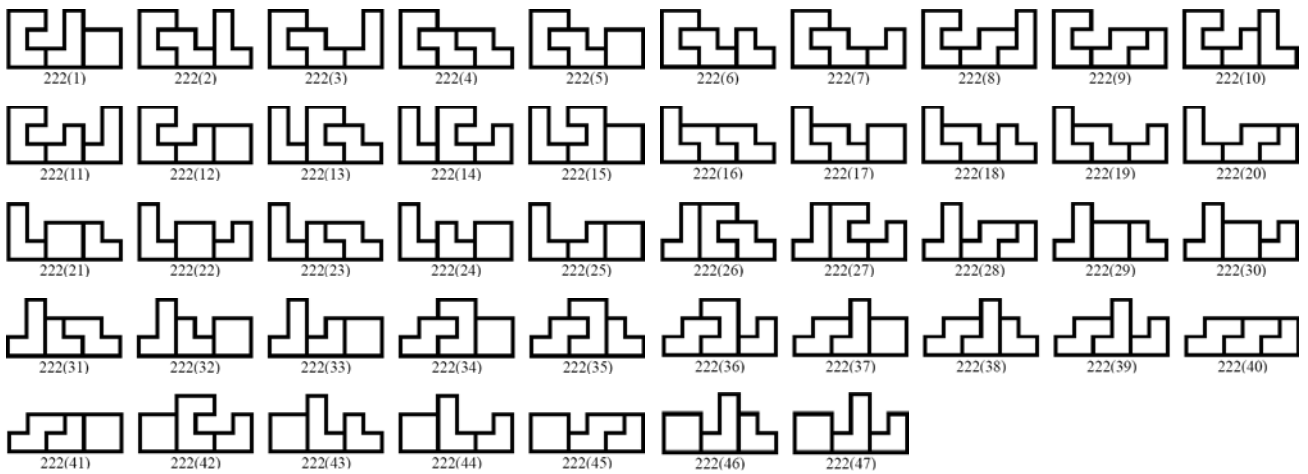
3-1-1-1



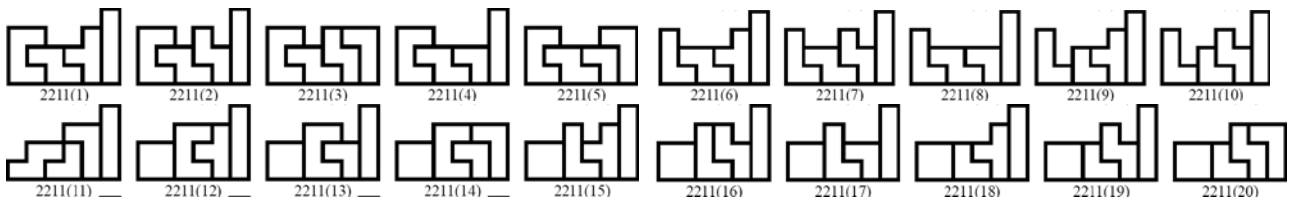
1-3-1-1

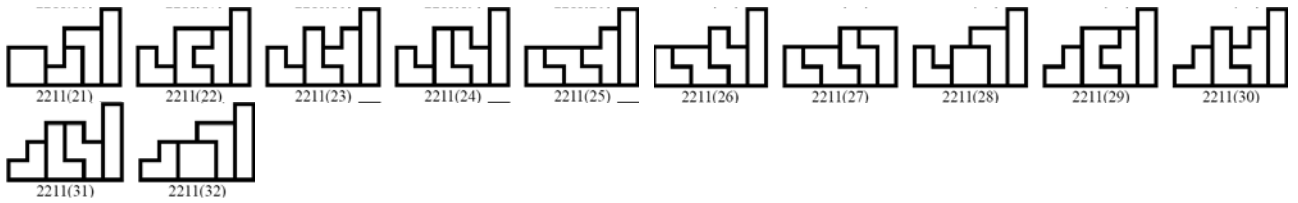


2-2-2

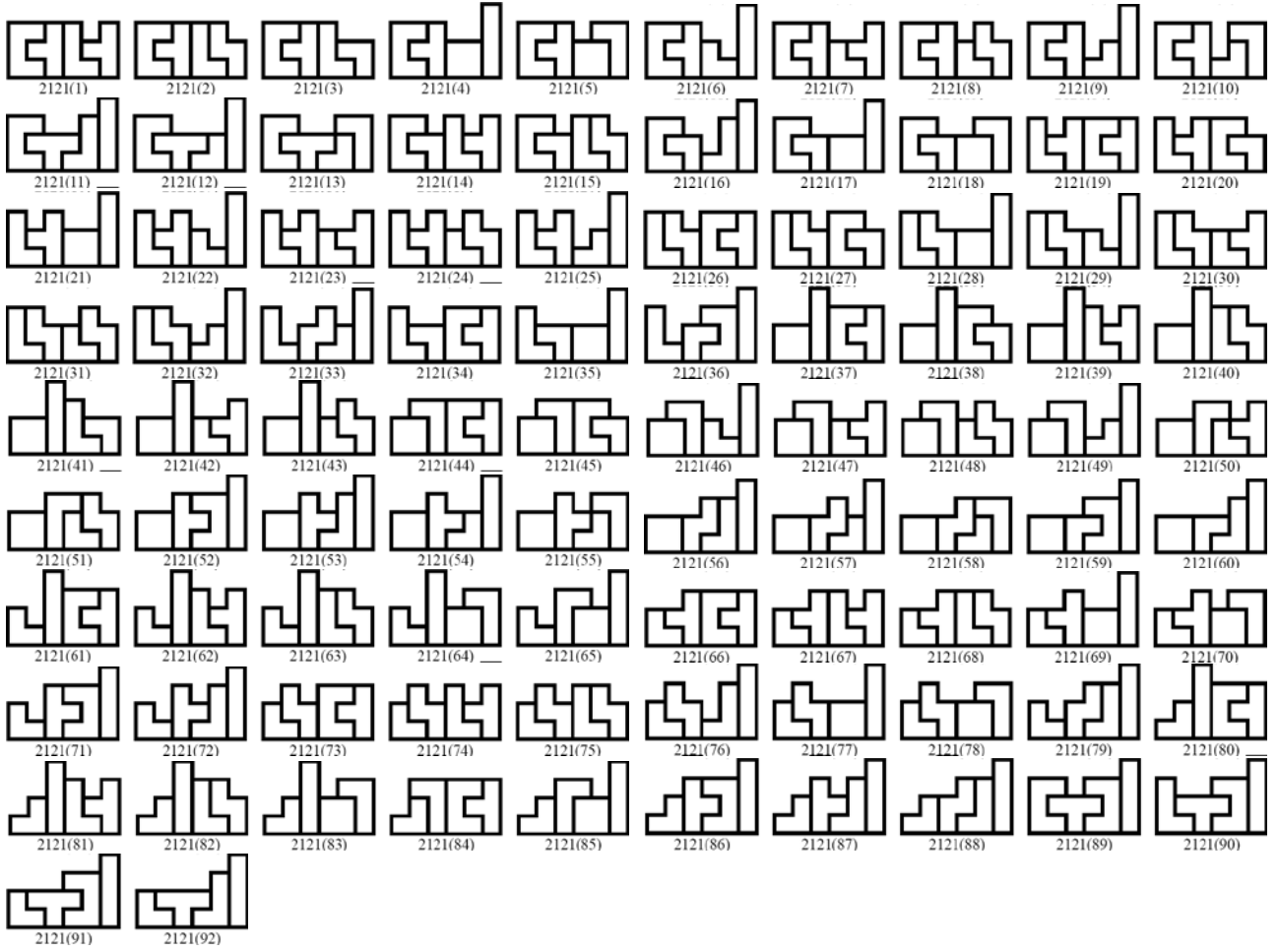


2-2-1-1

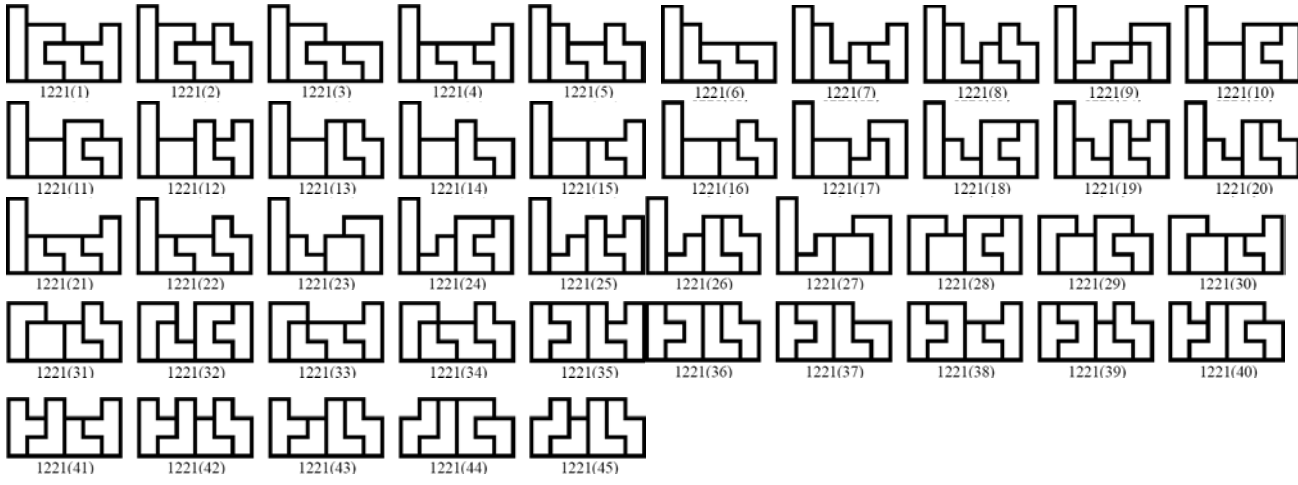





























2-1-2-1

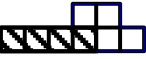


1-2-2-1



《附錄二、圖形編碼與頭尾接邊對照表》

圖形	在邊上的圖形編碼				頭尾接邊對照表 ⁵			
I	IA 	IB 			IA(尾)→IB(頭)		IB(尾)→IA(頭)	
U	UC 	UB 	UA 		UC(尾)→UB(頭、尾)		UB(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{UA(頭)} \\ \rightarrow \text{UC(尾)} \end{cases}$	
L	LD 	LC 	LB 	LA 	LD(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{LC(頭)} \\ \rightarrow \text{L乙(尾)} \end{cases}$		LC(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{LB(頭)} \\ \rightarrow \text{L丙(尾)} \end{cases}$	LB(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{LA(頭)} \\ \rightarrow \text{L丁(尾)} \end{cases}$
	L丁 	L丙 	L乙 	L甲 	L丁(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{L丙(頭)} \\ \rightarrow \text{LB(尾)} \end{cases}$		L丙(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{L乙(頭)} \\ \rightarrow \text{LC(尾)} \end{cases}$	L乙(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{L甲(頭)} \\ \rightarrow \text{LD(尾)} \end{cases}$
T	TC 	TB 	TA 		TC(尾)→TB(頭、尾)		TB(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{TA(頭)} \\ \rightarrow \text{TC(尾)} \end{cases}$	
N	NB 	NA 			NB(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{NA(頭)} \\ \rightarrow \text{N乙(尾)} \end{cases}$			
	N乙 	N甲 			N乙(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{N甲(頭)} \\ \rightarrow \text{NB(尾)} \end{cases}$			
田	田A 				田A(尾)→田A(頭、尾)			
^	^D 	^C 	^B 	^A 	^D(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{^C(頭)} \\ \rightarrow \text{^B(尾)} \end{cases}$		^C(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{^B(頭)} \\ \rightarrow \text{^C(尾)} \end{cases}$	
					^B(尾) $\begin{cases} \rightarrow \text{^A(頭)} \\ \rightarrow \text{^D(尾)} \end{cases}$			

⁵ 我們定義一個可填滿單邊的圖形，其由左而右，左邊為頭，右邊為尾，例如：圖形 ，其頭碼為 IA，尾碼為 N 乙。

《附錄三、方塊 I 在邊上或內部的第①邊》

42(1)	42(2)	42(3)	42(4)	42(5)	42(6)	411(1)
411(2)	141(1)	141(2)	141(3)	141(4)	141(5)	141(6)
141(7)	141(8)	141(9)	141(10)	141(11)	312(1)	321(2)
312(3)	312(14)	312(15)	312(16)	312(30)	312(31)	312(32)
312(37)	312(38)	312(39)	2121(37)	2121(38)	2121(39)	2121(40)
2121(41)	2121(42)	2121(43)	2121(61)	2121(62)	2121(63)	2121(64)
2121(80) —	2121(81) —	2121(82) —	2121(83) —	2112(1)	2112(2)	2112(3)
2112(11)	2112(16)	2112(17)	2112(18)	2112(21)	2112(22)	2112(23)
2112(26)	2112(27)	2112(28)	2112(29)	2112(30)		

方塊 I 在內部

321(28)	321(39) —	321(41)	312(49)	312(62)	231(16)	231(18)
222(40)	222(41)					

《附錄四、填入方塊數字化一覽表》

圖形	方塊數字化結果				數字化可能性
I					(1,2,3,4)
U					(1,2,3,3,4) 、 (1,2,2,3,4)
L					(1,2,2,3) 、 (1,2,3,4)
					(1,2,2,3) 、 (1,2,3,4)
T					(1,1,2,3) 、 (1,2,3,3)
N					(1,1,2,2) 、 (1,2,3,4)
田					(1,2,2,3)
^					(1,1,2) 、 (1,2,3) 、 (1,2,2)

《附錄五、智慧方塊的所有解》

I 在邊上

42(1) 共 12 個

36	33(4)		37	33(4)		39	33(4)		41	33(17)		56	312(54)	
2 2 1 1 (16)		3 2 1 (18)	2 2 1 1 (7)		3 2 1 (8)	2 1 2 1 (28)		3 2 1 (8)	3 2 1 (8)		3 2 1 (8)	3 2 1 (19)		3 2 1 (8)
	42(1)			42(1)			42(1)			42(1)			42(1)	
56	312(54)		59	312(55)		60	312(55)		61	312(55)		62	312(58)	
3 2 1 (19)		3 2 1 (8)	2 2 1 1 (15)		3 2 1 (8)	2 2 1 1 (16)		3 2 1 (8)	2 1 2 1 (53)		3 2 1 (8)	3 2 1 (19)		3 2 1 (8)
	42(1)			42(1)			42(1)			42(1)			42(1)	
67	222(16)		86	222(19)										
3 2 1 (19)		3 2 1 (9)	3 2 1 (19)		3 1 2 (12)									
	42(1)			42(1)										

42(2) 共 26 個

1	222(4)		2	222(4)		3	222(7)		19	33(3)		20	33(6)	
1 3 1 1 (7)		3 3 (2)	1 3 1 1 (7)		3 3 (2)	2 2 1 1 (25)		3 3 (2)	2 1 2 1 (17)		3 2 1 (16)	1 2 2 1 (1)		3 2 1 (16)
	42(2)			42(2)			42(2)			42(2)			42(2)	
40	312(55)		41	312(55)		42	312(55)		43	312(55)		44	312(55)	
2 3 1 (19)		3 2 1 (16)	2 3 1 (19)		3 2 1 (16)	2 3 1 (26)		3 2 1 (16)	2 2 1 1 (12)		3 2 1 (16)	2 2 1 1 (13)		3 2 1 (4)
	42(2)			42(2)			42(2)			42(2)			42(2)	
45	312(55)		48	312(62)		52	312(63)		58	33(3)		66	312(44)	
2 1 2 1 (52)		3 2 1 (16)	2 3 1 (19)		3 2 1 (16)	3 2 1 (5)		3 2 1 (16)	2 2 1 1 (1)		3 2 1 (21)	2 3 1 (19)		3 2 1 (21)
	42(2)			42(2)			42(2)			42(2)			42(2)	
73	312(55)		85	222(7)		87	312(57)		99	222(34)		100	222(34)	
1 2 2 (1)		3 1 2 (17)	3 2 1 (5)		3 1 2 (21)	1 2 2 1 (1)		3 1 2 (23)	1 3 1 (7)		3 1 2 (28)	1 3 1 (8)		3 1 2 (28)
	42(2)			42(2)			42(2)			42(2)			42(2)	
102	231(3)		105	231(3)		106	231(4)		108	222(5)		109	222(5)	
3 2 1 (38)		3 3 (2)	2 3 1 (47)		3 3 (2)	2 3 1 (15)		3 3 (2)	2 3 1 (26)		3 3 (2)	2 3 1 (26)		3 3 (2)
	42(2)			42(2)			42(2)			42(2)			42(2)	

110	222(7)											
2 3 1 (32)		3 3 (2)										
	42(2)											

4-2(3) 共 124 個

4	222(5)		5	222(5)		22	2112(4)		23	2112(8)		24	312(20)	
2 3 1 (26)		3 2 1 (2)	2 2 1 1 (18)		3 2 1 (2)	2 3 1 (26)		3 2 1 (9)	3 2 1 (19)		3 2 1 (9)	2 2 1 1 (6)		3 2 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
20	222(5)		25	312(20)		26	312(22)		27	312(22)		28	312(47)	
2 3 1 (25)		3 2 1 (9)	2 1 2 1 (21)		3 2 1 (9)	2 3 1 (7)		3 2 1 (9)	2 1 2 1 (28)		3 2 1 (9)	1 2 2 1 (4)		3 2 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
29	312(47)		40	2121(19)		41	312(51)		42	312(9)		43	312(51)	
1 2 2 1 (12)		3 2 1 (9)	3 2 1 (42)		3 2 1 (17)	2 1 2 1 (4)		3 2 1 (17)	2 1 2 1 (17)		3 2 1 (17)	1 2 2 1 (10)		3 2 1 (17)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
44	2112(6)		45	2112(14)			1221(35)		60	321(1)		61	321(1)	
3 2 1 (5)		3 2 1 (17)	3 2 1 (5)		3 2 1 (17)	3 2 1 (42)		3 2 1 (40)	2 1 2 1 (4)		3 2 1 (40)	2 1 2 1 (17)		3 2 1 (40)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
62	321(8)		63	321(34)		68	231(22)		69	231(22)		74	231(22)	
2 1 2 1 (11)		3 2 1 (40)	1 2 2 1 (10)		3 2 1 (40)	3 2 1 (40)		3 2 1 (40)	3 2 1 (40)		3 2 1 (40)	2 1 2 1 (59)		3 2 1 (40)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
79	2121(1)		81	2121(14)		83	321(12)		84	321(12)		87	2121(26)	
3 2 1 (5)		3 2 1 (40)	3 2 1 (5)		3 2 1 (40)	2 3 1 (7)		3 2 1 (46)	2 1 2 1 (28)		3 2 1 (46)	3 2 1 (19)		3 2 1 (46)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
88	2121(44)		82	2121(50)		90	33(1)		91	33(2)		95	321(6)	
2 3 1 (26)		3 2 1 (46)	2 3 1 (19)		3 2 1 (40)	1 2 2 1 (23)		2 3 1 (4)	2 1 2 1 (28)		2 3 1 (4)	2 3 1 (30)		2 3 1 (4)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
96	321(8)		97	321(8)		100	312(7)		101	312(7)		102	312(10)	
3 2 1 (37)		2 3 1 (4)	3 2 1 (42)		2 3 1 (4)	2 3 1 (26)		2 3 1 (4)	2 3 1 (26)		2 3 1 (4)	2 3 1 (32)		2 3 1 (4)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	

103	312(10)		104	312(11)		107	33(2)		108	33(2)		109	33(2)	
2 2 1 1 1 (28)		2 3 1 1 (4)	3 2 1 1 (19)		2 3 1 1 (4)	2 2 1 1 1 (1)		2 3 1 1 (9)	2 2 1 1 1 (1)		2 3 1 1 (9)	2 2 1 1 1 (4)		2 3 1 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
110	33(2)		111	33(2)		114	33(4)		115	33(4)		116	33(4)	
2 1 2 1 1 (4)		2 3 1 1 (9)	2 1 2 1 1 (6)		2 3 1 1 (9)	1 2 2 2 1 1 (10)		2 3 1 1 (9)	1 2 2 2 1 1 (10)		2 3 1 1 (9)	1 2 2 2 1 1 (24)		2 3 1 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
117	321(12)		118	321(12)		119	321(13)		124	312(17)		125	312(17)	
3 2 1 1 (42)		2 3 1 1 (9)	3 2 1 1 (44)		2 3 1 1 (9)	2 2 3 3 1 1 (45)		2 3 1 1 (9)	2 2 3 3 1 1 (19)		2 3 1 1 (9)	2 1 2 2 1 1 (59)		2 3 1 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
128	312(22)		129	312(22)		135	312(28)		136	312(28)		137	312(28)	
3 2 1 1 (5)		2 3 1 1 (9)	3 2 1 1 (7)		2 3 1 1 (9)	2 2 3 3 1 1 (19)		2 3 1 1 (9)	2 2 3 3 1 1 (26)		2 3 1 1 (9)	2 2 2 1 1 1 (12)		2 3 1 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
138	312(28)		140	321(2)		141	321(2)		142	321(9)		143	321(35)	
2 1 2 1 1 (52)		2 3 1 1 (9)	2 1 2 2 1 1 (4)		2 3 1 1 (17)	2 1 2 2 1 1 (17)		2 3 1 1 (17)	2 1 2 2 1 1 (11)		2 3 1 1 (17)	1 2 2 2 1 1 (10)		2 3 1 1 (17)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
148	231(23)		149	231(23)		154	231(23)		159	2121(2)		161	2121(15)	
2 3 1 1 (19)		2 3 1 1 (17)	2 2 3 3 1 1 (19)		2 3 1 1 (17)	2 1 2 2 1 1 (59)		2 3 1 1 (17)	2 3 2 1 1 1 (5)		2 3 1 1 (17)	2 3 2 1 1 1 (5)		2 3 1 1 (17)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
162	2121(51)		163	1221(36)		181	312(7)		182	312(7)		183	312(7)	
2 1 3 3 (19)		2 3 1 1 (19)	3 2 1 1 (42)		2 3 1 1 (17)	2 2 3 3 1 1 (2)		2 3 1 1 (28)	2 2 2 1 1 1 (1)		2 3 1 1 (28)	2 2 1 1 1 1 (28)		2 3 1 1 (28)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
184	312(7)		185	312(24)		186	312(40)		188	231(22)		192	222(5)	
2 1 2 1 1 (6)		2 3 1 1 (28)	2 1 2 1 1 (89)		2 3 1 1 (28)	1 2 2 2 1 1 (24)		2 3 1 1 (28)	2 3 2 1 1 1 (33)		2 3 1 1 (28)	2 3 2 1 1 1 (4)		2 3 1 1 (28)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
193	222(5)		194	222(5)		196	222(17)		197	222(17)		202	222(46)	
3 2 1 1 (4)		2 3 1 1 (28)	3 2 1 1 (7)		2 3 1 1 (28)	3 2 1 1 (14)		2 3 1 1 (28)	2 3 2 1 1 1 (20)		2 3 1 1 (28)	1 2 2 1 1 1 (3)		2 3 1 1 (28)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	

203	1212(44)		204	1221(45)		205	2112(4)		214	312(12)		215	222(7)	
3 2 1 (44)		2 3 1 (28)	2 3 1 (45)		2 3 1 (28)	3 2 1 (7)		2 3 1 (28)	2 1 2 1 (11)		2 3 1 (38)	3 2 1 (4)		2 3 1 (38)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
220	222(22)		227	222(45)		233	2112(33)		234	321(13)		235	321(13)	
3 2 1 (14)		2 3 1 (38)	2 3 1 (19)		2 3 1 (38)	2 3 1 (19)		2 3 1 (38)	2 3 1 (7)		2 3 1 (47)	2 1 2 1 (28)		2 3 1 (47)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
238	1212(27)		239	2121(45)		245	33(2)		246	33(2)		247	312(7)	
3 2 1 (19)		2 3 1 (47)	2 3 1 (47)		2 3 1 (47)	2 3 1 (7)		2 1 2 1 (8)	2 1 2 1 (28)		2 1 2 1 (8)	2 3 1 (26)		2 1 2 1 (8)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
248	312(11)		258	33(4)		259	33(4)		260	312(40)		261	312(58)	
3 2 1 (19)		2 1 2 1 (8)	2 3 1 (7)		1 2 2 1 (39)	2 1 2 1 (28)		1 2 2 1 (39)	2 3 1 (26)		1 2 2 1 (39)	3 2 1 (19)		1 2 2 1 (39)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
263	33(6)		266	312(55)		267	312(65)		268	312(55)		269	312(55)	
1 2 2 1 (1)		1 2 2 1 (43)	2 3 1 (19)		1 2 2 1 (43)	2 3 1 (19)		1 2 2 1 (43)	2 2 1 (12)		1 2 2 1 (43)	2 1 2 1 (52)		1 2 2 1 (43)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
270	33(5)		271	321(24)		272	312(33)		273	312(36)		274	33(1)	
1 2 2 1 (10)		1 3 1 1 (9)	3 2 1 (42)		1 3 1 1 (9)	3 2 1 (5)		1 3 1 1 (9)	3 2 1 (5)		1 3 1 1 (9)	2 1 2 1 (4)		1 3 1 1 (9)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
275	33(1)		276	33(5)		277	321(24)		278	312(22)		279	33(1)	
2 1 2 1 (17)		1 3 1 1 (9)	1 2 1 (10)		1 3 1 1 (11)	3 2 1 (42)		1 3 1 1 (11)	3 2 1 (5)		1 3 1 1 (11)	2 2 1 (1)		1 3 1 1 (11)
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)			42(3)	
280	33(1)		284	33(2)		285	33(2)		286	33(2)				
2 1 2 1 (4)		1 3 1 1 (11)	2 3 1 (7)		3 3 1 (4)	2 3 1 (7)		3 3 1 (4)	2 3 1 (2)		2 3 1 (9)			
	42(3)			42(3)			42(3)			42(3)				

42(4) 共 97 個

1	231(3)		6	231(3)		7	231(4)		8	222(4)		9	222(7)	
3 2 1 (38)		3 1 2 (7)	3 2 1 (47)		3 1 2 (7)	2 3 1 (15)		3 1 2 (7)	1 3 1 1 (7)		3 1 2 (7)	2 2 1 1 (25)		3 1 2 (7)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	

12	231(10)		16	222(16)		19	222(3)		20	222(8)		40	312(9)	
2 3 1 (39)		3 1 2 (17)	1 3 1 1 (10)		3 2 1 (17)	3 2 1 (7)		3 2 1 (17)	3 2 1 (3)		3 2 1 (17)	2 2 1 1 (1)		3 1 2 (28)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
55	321(16)		56	321(21)		58	321(8)		60	321(8)		69	321(1)	
2 2 1 1 (8)		3 1 2 (40)	2 3 1 (6)		3 1 2 (44)	2 3 1 (2)		3 1 2 (55)	2 1 2 (11)		3 1 2 (55)	2 2 1 1 (1)		3 1 2 (62)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
71	321(39)		74	231(16)		77	33(3)		78	33(3)		88	321(41)	
1 2 2 1 (1)		3 1 2 (62)	1 2 2 1 (2)		3 1 2 (62)	2 2 1 1 (1)		2 3 1 (22)	2 2 1 1 (2)		2 3 1 (22)	2 3 1 (39)		2 3 1 (22)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
95	231(18)		96	222(4)		113	222(35)		114	222(38)		116	222(4)	
2 3 1 (39)		2 3 1 (23)	3 2 1 (7)		2 3 1 (23)	1 2 2 1 (6)		2 3 1 (28)	1 2 2 1 (3)		2 3 1 (28)	3 2 1 (4)		2 3 1 (15)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
117	222(4)		118	222(16)		119	222(16)		121	222(35)		125	33(1)	
3 2 1 (7)		2 3 1 (28)	3 2 1 (14)		2 3 1 (28)	3 2 1 (20)		2 3 1 (28)	1 2 2 1 (5)		2 3 1 (29)	1 3 1 1 (1)		2 2 2 (5)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
126	33(1)		127	33(1)		128	33(2)		129	33(2)		130	33(2)	
1 3 1 1 (1)		2 2 2 1 (5)	1 3 1 1 (2)		2 2 2 1 (5)	2 2 1 1 (6)		2 2 2 1 (5)	2 2 1 1 (6)		2 2 2 1 (5)	2 2 1 1 (9)		2 2 2 (5)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
132	33(2)		132補	33(2)		134	33(3)		135	33(3)		138	321(1)	
2 1 2 1 (32)		2 2 2 1 (5)	2 1 2 1 (90)		2 2 2 1 (5)	1 2 2 1 (4)		2 2 2 1 (5)	1 2 2 1 (4)		2 2 2 1 (5)	3 2 1 (38)		2 2 2 (5)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
139	321(1)		140	321(1)		141	321(2)		142	321(2)		143	321(8)	
3 2 1 (38)		2 2 2 1 (5)	3 2 1 (47)		2 2 2 1 (5)	2 3 1 (15)		2 2 2 1 (5)	2 3 1 (15)		2 2 2 1 (5)	3 2 1 (38)		2 2 2 (5)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
144	321(8)		145	321(9)		146	321(9)		147	312(6)		148	312(9)	
3 1 1 1 (1)		2 2 2 1 (5)	2 3 1 (14)		2 2 2 1 (5)	2 3 1 (15)		2 2 2 1 (5)	2 2 1 1 (25)		2 2 2 1 (5)	3 2 1 (15)		2 2 2 (5)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	

149	312(9)		150	312(9)		152	312(10)		153	312(10)		154	312(11)	
3 2 1 (15)		2 2 2 (5)	3 2 1 (23)		2 2 2 (5)	2 2 1 (35)		2 2 2 (5)	2 1 2 1 (79)		2 2 2 (5)	3 2 1 (23)		2 2 2 (5)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
155	312(12)		156	312(12)		157	33(1)		161	321(1)		162	321(2)	
2 3 1 (35)		2 2 2 (5)	2 3 1 (36)		2 2 2 (5)	1 3 1 1 (1)		2 2 2 (12)	3 2 1 (38)		2 2 2 (12)	2 3 1 (15)		2 2 2 (12)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
163	312(9)		168	33(2)		172	33(4)		177	321(16)		178	321(16)	
3 2 1 (15)		2 2 2 (12)	2 2 1 (1)		2 2 2 (17)	1 2 2 1 (1)		2 2 2 (17)	3 2 1 (33)		2 2 2 (17)	3 2 1 (44)		2 2 2 (17)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
180	321(18)		181	321(18)		182	321(18)		183	321(18)		184	312(18)	
2 3 1 (39)		2 2 2 (17)	2 3 1 (45)		2 2 2 (17)	2 2 1 1 (29)		2 2 2 (17)	2 2 1 (86)		2 2 2 (17)	1 2 2 1 (3)		2 2 2 (17)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
185	312(20)		187	33(2)		192	321(17)		193	321(17)		194	321(29)	
3 2 1 (7)		2 2 2 (17)	2 2 1 (1)		2 2 2 (24)	2 3 1 (7)		2 2 2 (34)	2 1 2 1 (22)		2 2 2 (34)	1 3 1 1 (1)		2 2 2 (34)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
195	321(40)		196	321(40)		197	231(9)		198	231(17)		199	231(17)	
1 3 1 1 (5)		2 2 2 (34)	1 2 2 1 (35)		2 2 2 (34)	3 2 1 (15)		2 2 2 (34)	1 2 2 1 (26)		2 2 2 (34)	2 2 2 (34)		2 2 2 (34)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
200	2121(24)		201	1221(42)		202	1311(9)		203	1221(45)		205	321(40)	
3 2 1 (15)		2 2 2 (34)	3 2 1 (38)		2 2 2 (34)	3 2 1 (27)		2 2 2 (34)	2 3 1 (15)		2 2 2 (34)	1 3 1 1 (5)		2 2 2 (37)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
206	231(4)		207	231(17)		218	2121(74)		219	2121(75)		222	312(35)	
3 2 1 (7)		2 2 2 (37)	1 3 1 (10)		2 2 2 (37)	3 2 1 (38)		2 2 2 (42)	3 2 1 (38)		2 2 2 (42)	1 3 1 1 (1)		2 2 2 (42)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	
228	2112(20)		239	231(33)		244	312(6)		245	312(26)		251	33(3)	
3 2 1 (15)		2 2 2 (42)	3 2 1 (33)		2 2 2 (45)	2 2 1 1 (1)		2 2 2 (45)	2 1 2 1 (89)		2 2 2 (45)	2 2 1 1 (1)		2 1 2 1 (47)
	42(4)			42(4)			42(4)			42(4)			42(4)	

42(5) 共 7 個

260	312(57)			33(2)		30	231(22)		36	33(2)		42	312(17)	
1 2 2 1 1 (1)		2 1 1 2 (31)	2 3 1 (7)		2 2 2 (5)	2 2 3 1 (19)		3 2 1 (41)	2 2 1 1 (1)		2 3 1 (10)	2 3 1 (19)		2 3 1 (10)
	42(4)			42(4)			42(5)			42(5)			42(5)	
49	231(23)		55	312(55)		58	312(7)		59	312(55)				
2 3 1 (19)		2 3 1 (18)	1 2 1 1 (1)		2 3 1 (24)	2 2 1 1 (1)		2 3 1 (29)	1 2 1 1 (1)		2 3 1 (29)			
	42(5)			42(5)			42(5)			42(5)				

42(6) 共 30 個

16	33(2)		18	33(3)		19	312(7)		24	33(4)		25	33(4)	
2 2 1 1 (6)		2 2 2 1 (6)	1 2 2 1 (4)		2 2 2 (6)	2 3 1 (26)		2 2 2 1 (6)	2 2 3 1 (7)		2 1 2 1 (73)	2 1 2 1 (28)		2 1 2 1 (73)
	42(6)			42(6)			42(6)			42(6)			42(6)	
26	312(26)		27	312(58)		30	222(5)		36	222(5)		38	2112(4)	
2 3 1 (26)		2 1 2 1 (73)	3 2 1 (19)		2 1 2 1 (73)	2 2 1 (25)		3 1 2 (10)	2 3 1 (25)		3 1 2 (12)	2 3 1 (26)		3 1 2 (12)
	42(6)			42(6)			42(6)			42(6)			42(6)	
39	2112(8)		40	312(20)		41	312(20)		42	312(22)		43	312(22)	
3 2 1 (19)		3 1 2 (12)	2 2 1 1 (6)		3 1 2 (12)	2 1 2 1 (21)		3 1 2 (12)	2 3 1 (7)		3 1 2 (12)	2 1 2 1 (28)		3 1 2 (12)
	42(6)			42(6)			42(6)			42(6)			42(6)	
44	312(47)		45	213(47)		55	321(12)		56	321(12)		58	2121(26)	
1 2 2 1 (4)		2 1 3 (12)	1 2 2 1 (12)		2 1 3 (12)	2 3 1 (7)		3 1 2 (59)	2 1 2 1 (28)		3 1 2 (59)	3 2 1 (19)		3 1 2 (59)
	42(6)			42(6)			42(6)			42(6)			42(6)	
59	2121(44)		63	312(7)		65	231(28)		66	312(55)		73	33(2)	
2 3 1 (26)		3 1 2 (59)	2 3 1 (26)		2 2 2 (9)	2 3 1 (21)		2 2 2 (40)	1 3 1 1 (3)		2 2 2 (42)	2 2 1 (7)		2 1 1 2 (9)
	42(6)			42(6)			42(6)			42(6)			42(6)	
74	33(2)		75	312(11)		76	312(7)		77	33(2)		78	33(2)	
2 1 2 1 (28)		2 1 1 2 (9)	3 2 1 (19)		2 1 1 2 (9)	2 3 1 (26)		2 1 1 2 (9)	2 3 1 (7)		2 2 2 (7)	2 2 3 1 (7)		2 2 2 (9)
	42(6)			42(6)			42(6)			42(6)			42(6)	

411(1) 共 7 個

20	33(6)		23	312(55)		24	312(55)		25	312(55)		26	312(55)	
1			3	2		3	2		3			3	2	
2			2	3		2	3		2			2	2	
2			1	1		1	1		1			1	1	
1			(28)	(19)		(28)	(26)		(28)			(28)	(52)	
(1)									(12)					(28)
	411(1)			411(1)			411(1)			411(1)			411(1)	

411(2) 共 2 個

41	222(5)		42	222(5)		1	222(4)		2	222(5)	
2			2			1			2		
3			3			3			3		
1			3			1			2		
(26)			(1)			(7)			(26)		
	411(1)		(18)						(1)		
				411(1)			411(2)			411(2)	

141(1) 共 4 個

10	222(5)		11	222(12)		12	222(34)		13	222(42)	
3			3			3			3		
3			1			1			1		
3			2			2			2		
(1)			(55)			(55)	(29)		(55)	(35)	
	141(1)		(1)								
				141(1)			141(1)			141(1)	

141(2) 共 2 個

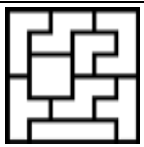
141(4) 共 2 個

141(5) 共 1 個

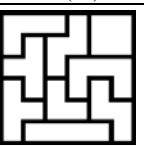
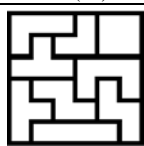
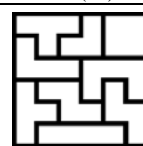
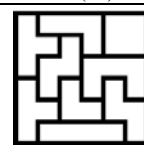
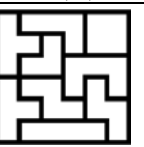
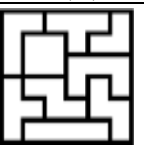
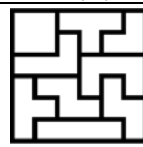
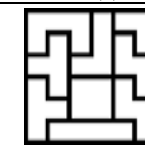
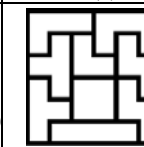
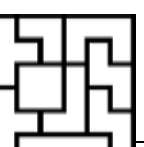
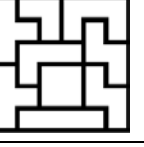
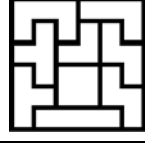
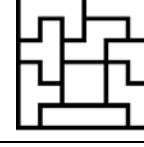
3	312(55)		6	222(5)		2	222(7)		3	222(9)		6	312(10)	
3			2			2			2			2		
2			2			2			2			2		
1			3			3			3			3		
(28)			(14)			(3)			(3)			(3)		
	141(2)		(1)			(30)			(30)			(30)		(4)
				141(2)			141(4)			141(4)			141(5)	

141(7) 共 21 個

1	222(45)		3	222(5)		7	2121(18)		7補	2121(18)		8	2112(12)	
3			3			3			3			3		
1			3			3			3			3		
2			1			3			3			1		
(55)			(3)			(5)			(5)			(55)		(3)
	141(7)		(40)											
				141(7)			141(7)			141(7)			141(7)	
9	312(36)		10	312(36)		14	222(15)		16	222(18)		18	222(24)	
3			3			3			3			3		
2			3			3			2			3		
1			2			1			1			1		
(43)			(3)			(62)			(32)			(55)		(4)
	141(7)			141(7)			141(7)			141(7)			141(7)	
20	321(6)		21	312(6)		22	231(30)		23	231(20)		24	2211(14)	
3			3			3			3			3		
1			3			3			3			3		
2			1			1			1			1		
(63)			(5)			(55)			(62)			(55)		(5)
	141(7)			141(7)			141(7)			141(7)			141(7)	
28	222(43)		37	33(1)		38	33(1)		42	312(4)		75	222(3)	
3			3			3			3			3		
1			2			2			2			1		
2			1			1			1			2		
(55)			(32)			(63)			(43)			(55)		(3)
	141(7)		(63)				141(7)			141(7)			141(7)	

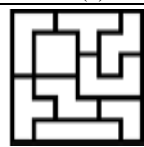
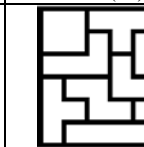
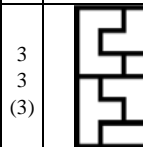
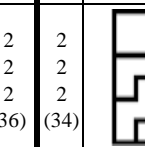
76	222(8)													
3 3 (4)		3 3 (3)												
	141(7)													

141(8) 共 15 個

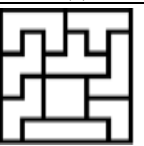
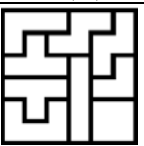
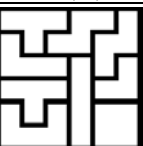
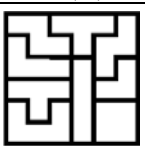
7	312(24)		9	312(28)		11	312(62)		12	231(62)		13	231(22)	
3 1 2 (48)		2 2 2 (34)	3 1 2 (51)		2 2 2 (34)	3 2 1 (34)		2 2 2 (34)	3 2 1 (39)		2 2 2 (34)	3 3 (6)		2 2 2 (34)
	141(8)			141(8)			141(8)			141(8)			141(8)	
14	231(22)		18	231(10)		20	231(29)		24	312(6)		28	33(2)	
3 3 (6)		2 2 2 (34)	3 3 (4)		2 2 2 (35)	3 1 2 (40)		2 2 2 (35)	3 1 2 (49)		2 2 2 (40)	3 1 2 (48)		2 2 2 (4)
	141(8)			141(8)			141(8)			141(8)			141(8)	
34	321(8)		35	321(8)		36	312(6)		43	33(2)		51	33(2)	
3 3 (6)		2 2 2 (4)	3 3 (6)		2 2 2 (4)	3 1 2 (49)		2 2 2 (4)	3 1 2 (47)		2 2 2 (16)	3 1 2 (47)		2 2 2 (23)
	141(8)			141(8)			141(8)			141(8)			141(8)	

141(9) 共 3 個

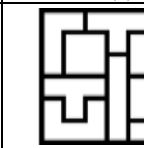
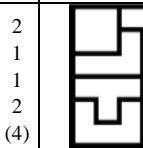
141(10) 共 1 個

5	231(9)		7	231(28)		8	222(5)		3	312(62)				
3 3 (4)		2 2 2 (35)	3 1 2 (40)		2 2 2 (35)	3 3 (3)		2 2 2 (36)	2 2 2 (34)		2 3 1 (16)			
	141(9)			141(9)			141(9)			141(10)				

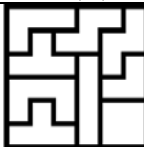
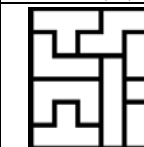
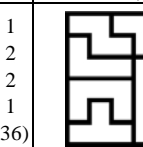
141(11) 共 1 個 312(1) 共 4 個

3	33(3)		13	321(17)		14	321(40)		16	231(17)		17	1311(9)	
2 2 2 (4)		2 3 1 (42)	2 1 1 2 (6)		2 2 2 (41)	2 1 2 2 1 (1)		2 2 2 (41)	2 1 2 2 1 (2)		2 2 2 (41)	3 1 2 (33)		2 2 2 (41)
	141(11)			312(1)			312(1)			312(1)			312(1)	

312(3) 共 3 個

1	222(17)		3	231(9)		5	231(28)							
2 2 2 (5)		3 1 2 (21)	3 1 2 (22)		2 2 2 (40)	2 1 1 2 (4)		2 2 2 (40)						
	312(3)			312(3)			312(3)							

312(37) 共 4 個

28	321(17)		29	321(40)		30	231(17)		31	1311(19)				
2 1 2 1 (19)		2 2 2 (41)	1 2 2 1 (35)		2 2 2 (41)	1 2 2 1 (36)		2 2 2 (41)	3 2 1 (24)		2 2 2 (41)			
	312(37)			312(37)			312(37)			312(37)				

312(39) 共 2 個

5	231(9)		8	231(28)									
3 2 1 (12)		2 2 2 (40)	2 1 2 1 (44)		2 2 2 (40)								
	312(39)			312(39)									

2121(37) 共 4 個

3	1311(9)		5	321(40)		6	231(17)		7	321(17)			
2 2 2 (41)		3 3 3 (5)	2 2 2 2 (41)		3 2 1 (34)	2 2 2 (41)		3 2 1 (35)	2 2 2 2 (41)		3 1 2 (51)		
	2121(37)			2121(37)			2121(37)			2121(37)			

2121(61) 共 2 個

1	231(9)		5	231(28)	
2 2 2 (40)		3 3 3 (4)	2 2 2 2 (40)		3 1 2 (40)
	2121(61)			2121(61)	

2112(1) 共 4 個

2	321(17)		3	321(40)	
3 1 2 2 (9)		2 2 2 2 (41)	3 2 2 1 (1)		2 2 2 2 (41)
	2112(1)			2112(1)	

2112(3) 共 2 個

1	231(9)		2	231(9)	
3 3 (2)		2 2 2 (40)	2 3 1 2 2 (7)		2 2 2 (40)
	2112(3)			2112(3)	

4	231(17)		5	1311(9)	
3 2 1 (2)		2 2 2 2 (41)	3 3 3 (1)		2 2 2 (41)
	2112(1)			2112(1)	

I 在邊上

321(39) 共 4 個

321(42) 共 1 個

1	222(5)		2	222(12)		3	222(34)		4	222(42)		1	222(34)	
2 3 1 (22)		3 3 (3)	2 3 1 (22)		3 3 (3)	2 3 1 (22)		3 2 1 (46)	2 3 1 (22)		3 1 2 (59)	2 3 1 (22)		2 3 1 (47)
	321(39)			321(39)			321(39)			321(39)			321(42)	

231(16) 共 4 個

231(18) 共 1 個

1	222(5)		2	222(22)		3	222(34)		4	222(42)		1	222(34)	
2 3 1 (23)		3 3 (3)	2 3 1 (23)		3 3 (3)	2 3 1 (23)		3 2 1 (46)	2 3 1 (23)		3 1 2 (59)	2 3 1 (23)		2 3 1 (47)
	231(16)			231(16)			231(16)			231(16)			231(18)	

【評語】 030402

本研究系統性地尋找智慧方塊的解答，排除重複解，求解答數，並將解答的可能性分類列用 Excel 執行求解，並繪圖。過程有趣並練習推理能力。如何增加數學解析，將更具數學研究價值。