

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

080412

倒水的魔術？圖解分水問題

學校名稱：屏東縣里港鄉里港國民小學

作者： 小五 曾梓軒 小五 陳奕蓉 小五 陳冠汝 小五 林稚綺	指導老師： 蔡協良
---	------------------

關鍵詞：圖解圖 、 分水 、 座標

倒水的魔術－圖解分水問題

摘要

「分水問題」原自於古代的一個數學問題：有個農夫到油行要買 2 袋 4 升的麻油，但是油行只有 3 升、5 升兩種容量的量杯，沒有其他的測量工具，油行老闆如何利用這兩種容量的容器倒出農夫所要的 2 袋 4 升麻油呢？這個原本是個生活中現實的問題，現在已經演變成一個數學益智遊戲的問題，不只小學的數學課本曾經出現類似的問題，甚至於連電影都曾經拿它當作劇情（終極警探 3）。我們將分水問題中的每一次倒水步驟用座標的方式來記錄，再將它用圖形來標記，進而探討它的規律，讓「分水問題」變的簡單而有趣。

壹、研究動機：

上學期，老師帶著我們參加「創造力小隊闖關比賽」的活動。雖然，最後的結果是鎩羽而歸，沒能拿到很好的名次，但是，在整個活動的過程中，卻也讓我們學到許多關於如何發揮創意，以及學習團隊互助的精神。在整個闖關活動中，令我印象最為深刻的關卡就是「大吐苦水－數學創意遊戲」這一關。這個關卡的內容，簡單的說就是用 5 公升及 3 公升的兩個容器，將 8 公升的水平分成兩個 4 公升。雖然在我們七手八腳的紛亂中，好不容易才闖過了這一關，然而，我不禁思考著這樣一個問題：「難道『分水問題』只能這樣憑靠運氣來解答嗎？能不能用更有效、更便捷的方式來解決呢？」於是，我們請老師來指導我們做這個問題的探討。

壹、研究目的：

「分水問題」原自於古代的一個數學問題：有個農夫到油行要買 2 袋 4 升的麻油，但是油行只有 3 升、5 升兩種容量的量杯，沒有其他的測量工具，油行老闆如何利用這兩種容量的容器倒出農夫所要的 2 袋 4 升麻油呢？爲了實驗方便，我們試著將油改成水，並將單位改成公制單位（升改成公升），來研究以下的問題：

- 一、原問題應該如何的解答？
- 二、設計出能夠解決「分水問題」的圖形，並討論其使用的規律。
- 三、能否運用圖解法，將任意容量之容器的水分成所需要的份量呢？

貳、研究設備及器材：

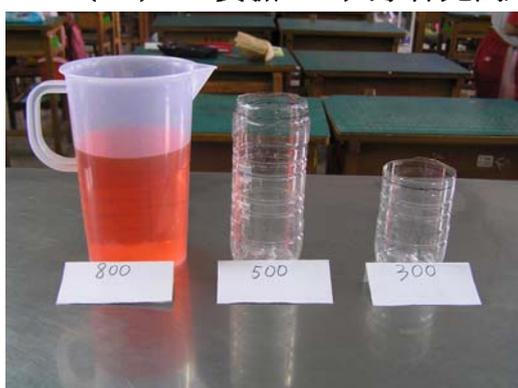
透明寶特瓶若干個、量杯、剪刀、直尺、簽字筆、數位相機、數學習作的點格板。

肆、研究過程：

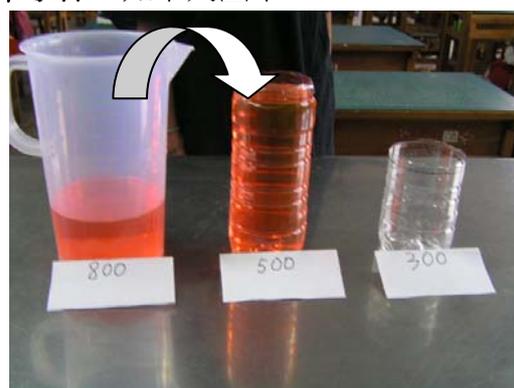
一、原問題應該如何的解答？

由於 8 公升、5 公升及 3 公升的容器取得不易，因此，我們將容器的容量等比例縮小成 800ml（大水杯）、500ml（中水杯）及 300ml（小水杯），並將水用墨水染紅以方便觀察。

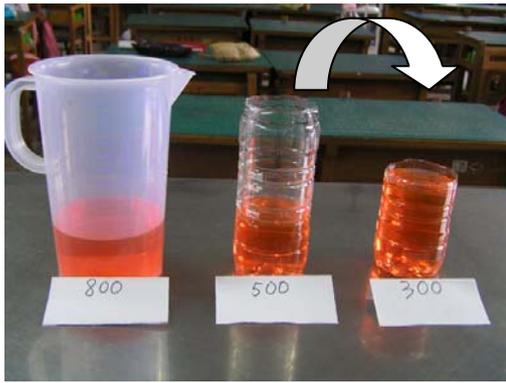
（一） 實驗一：大水杯先倒入中水杯：如下列圖示



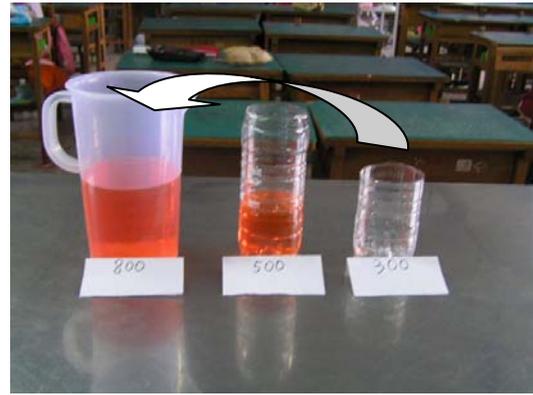
A (8、0、0)



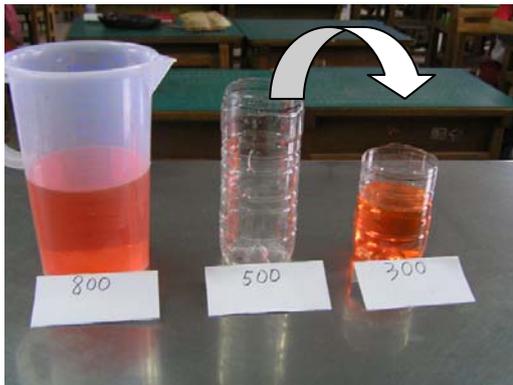
B (3、5、0)



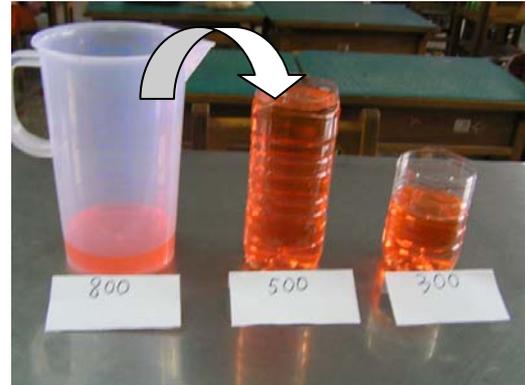
C (3、2、3)



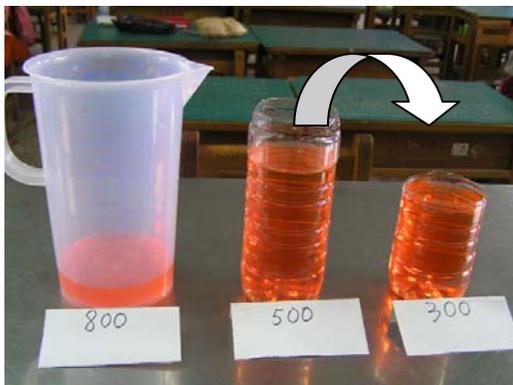
D (6、2、0)



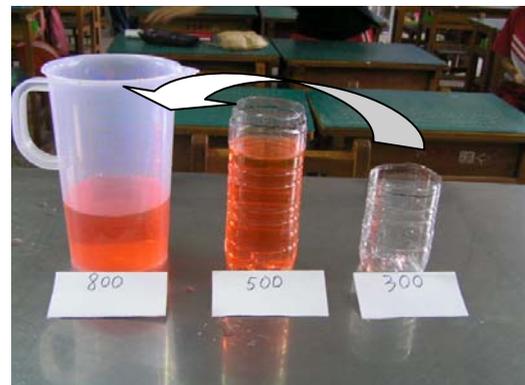
E (6、0、2)



F (1、5、2)



G (1、4、3)

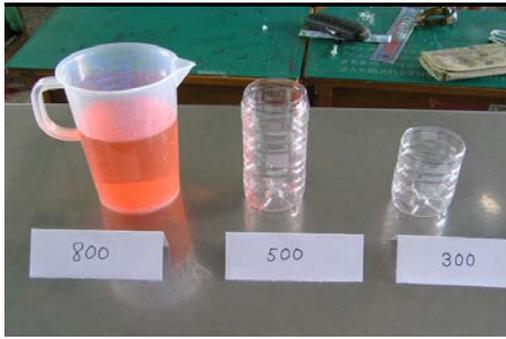


H (4、4、0)

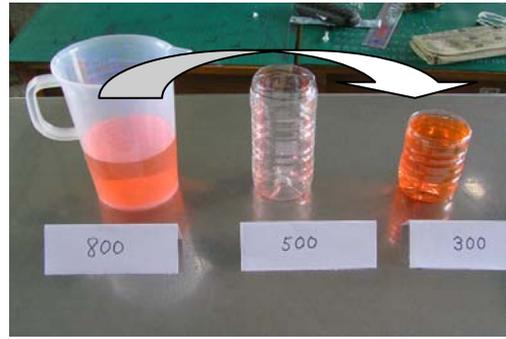
共需 A、B、C、D、E、F、G、H 等 8 個步驟即可完成分水問題，並將倒水過程整理成下表：

步驟	A	B	C	D	E	F	G	H
大水杯 (8)	8	3	3	6	6	1	1	4
中水杯 (5)	0	5	2	2	0	5	4	4
小水杯 (3)	0	0	3	0	2	2	3	0

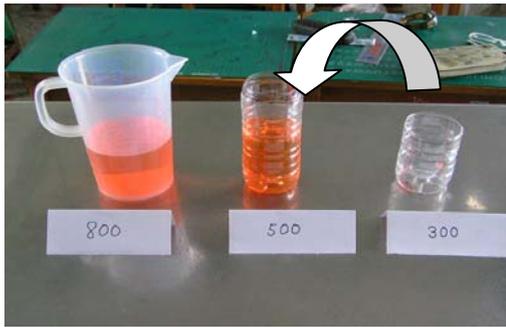
(二) 實驗二：大水杯先倒入小水杯：如下列圖示



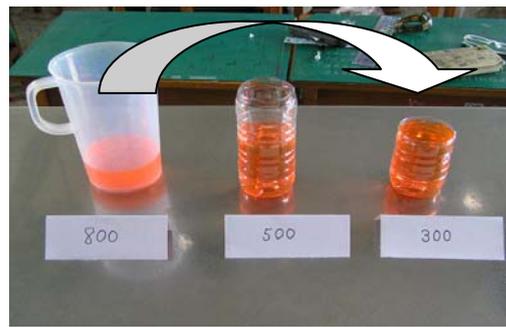
A (8 · 0 · 0)



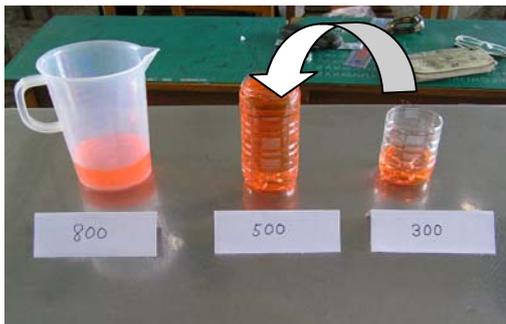
B (5 · 0 · 3)



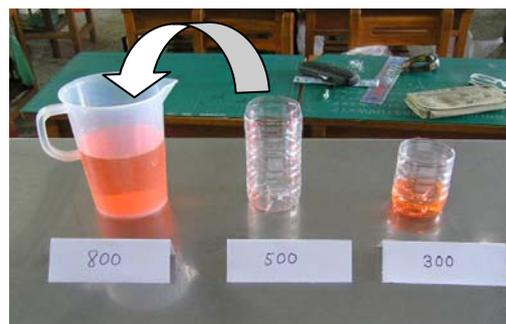
C (5 · 3 · 0)



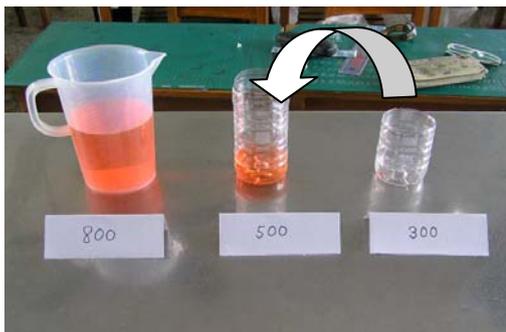
D (2 · 3 · 3)



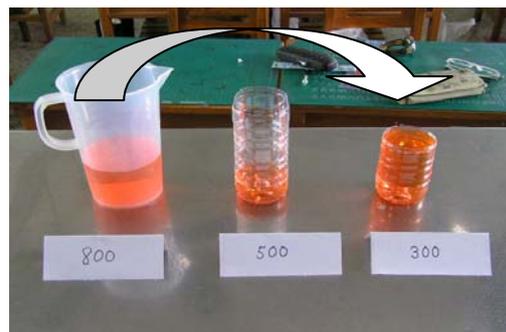
E (2 · 5 · 1)



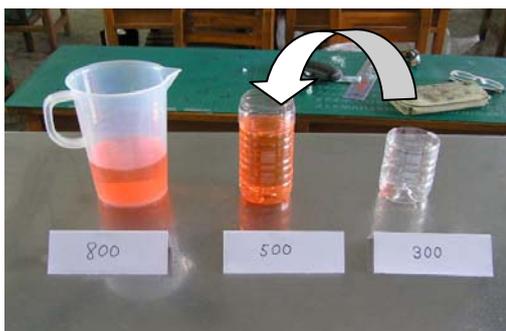
F (7 · 0 · 1)



G (7 · 1 · 0)



H (4 · 1 · 3)



I (4 · 4 · 0)

共需 A、B、C、D、E、F、G、H、I 等 9 個步驟即可完成分水問題，並將倒水過程整理成下表：

步驟	A	B	C	D	E	F	G	H	I
大水杯 (8)	8	5	5	2	2	7	7	4	4
中水杯 (5)	0	0	3	3	5	0	1	1	4
小水杯 (3)	0	3	0	3	1	1	0	3	0

由上面兩個實驗得知，在不重複步驟的前提下，「分水問題」會有兩種不同的倒水步驟。

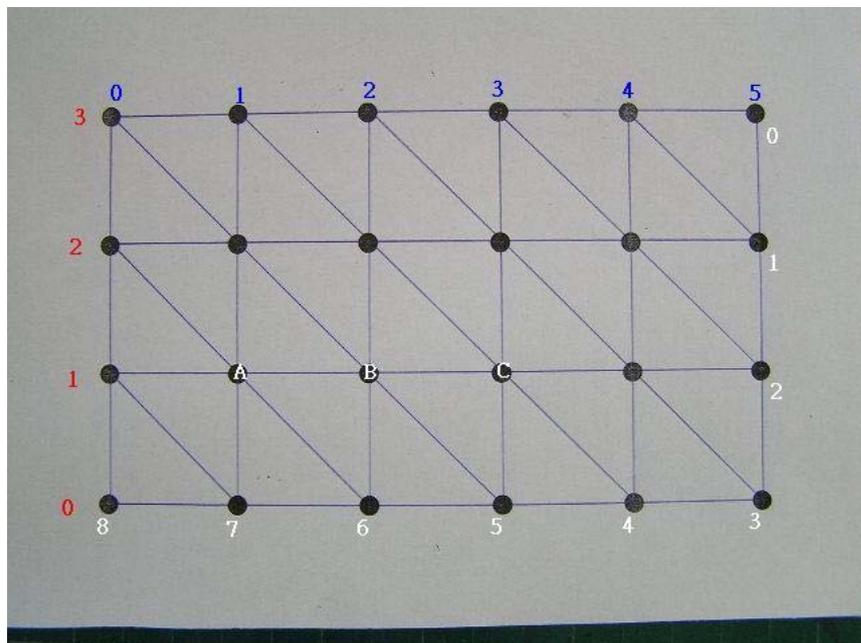
二、設計出能夠解決「分水問題」的圖形，並討論其使用的規律。

(一) 設計圖解圖：

「分水問題」的內容中，必須有 3 個不同大小的容器。我們用上述題目來研究，在此題中，5 公升和 3 公升便是當中容器的容量，8 公升的水本身也需要一個更大的容器來裝乘。因此，我們可以將「分水問題」歸類出以下幾點特性：

1. 需要大、中、小 3 個容器。
2. 倒水的過程中，水的總量不會改變。
3. 任何容器中的水，僅能倒向另外 2 個容器中。

依照上述特性，我們利用數學習作附件的點格板設計出下列圖形。

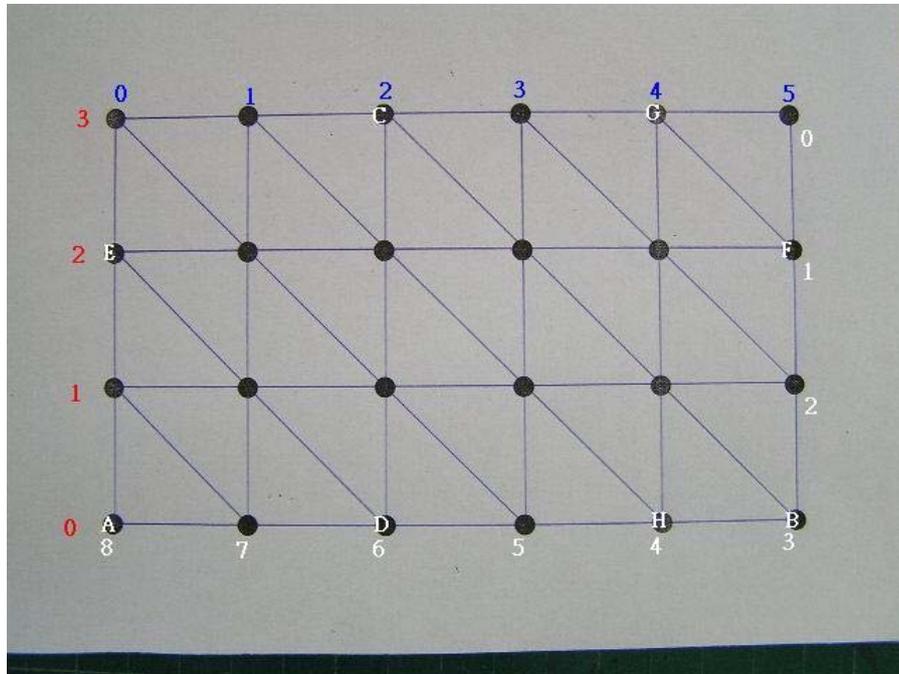


1. 將 3 種不同容量的容器當成座標軸，其中紅色標點代表 3 公升容器的水量，藍色標點代表 5 公升容器的水量，白色標點代表最大的容器的水量。
2. 每一個格子點的座標由 3 個方向的座標決定。分別是斜坐標（白）、橫坐標（藍），縱坐標（紅），座標讀法則一律規定為（斜－橫－縱）的方式表示，如 A（6、1、1），B（5、2、1），C（4、3、1）。

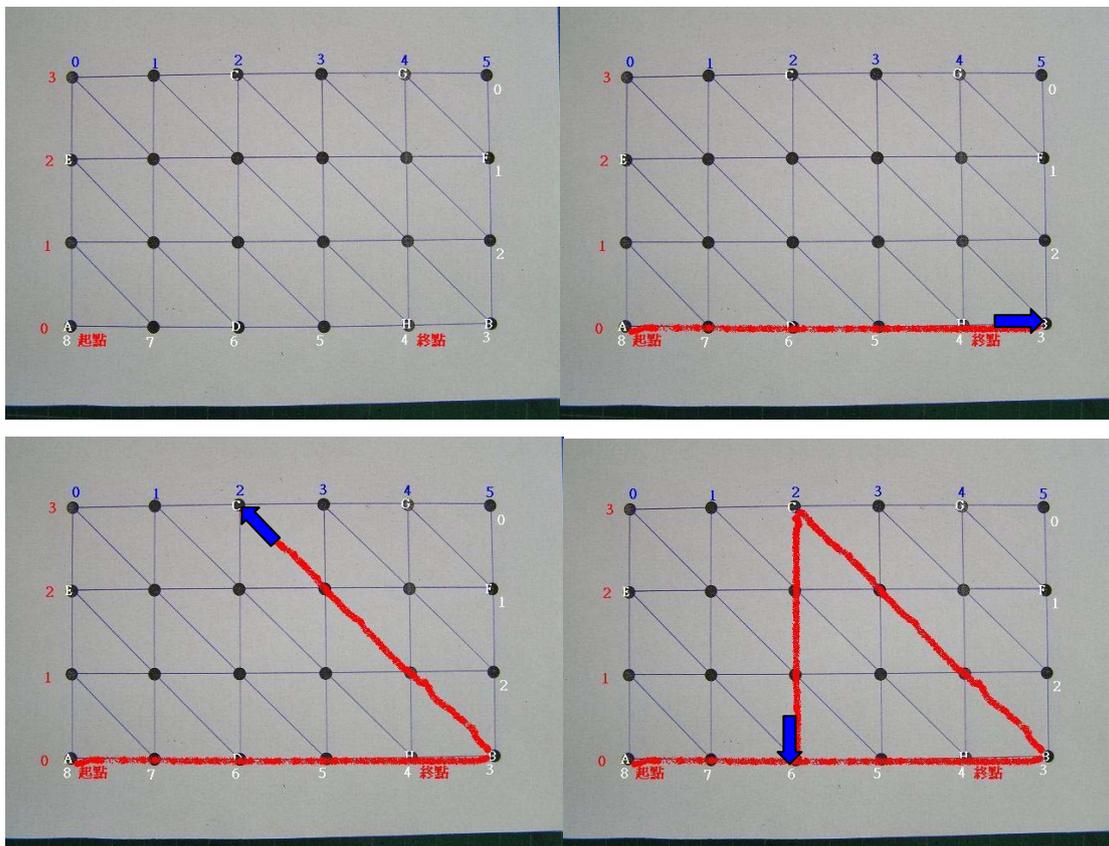
3. 每一個格子點的座標總和（斜座標 + 橫坐標 + 縱坐標）是相同的，都等於分水過程的總水量。

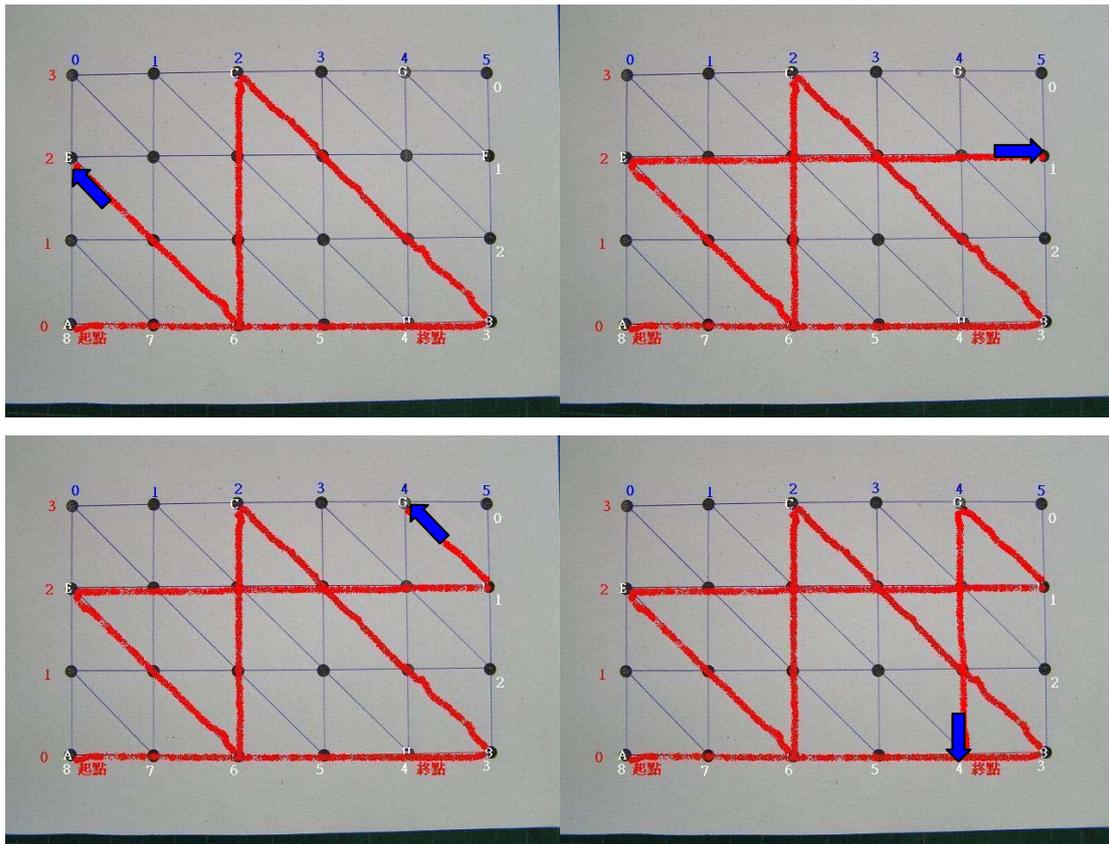
(二) 運用實際操作來找出圖解法的規律：

1. 實驗三：以實驗一的結果，將實際操作的順序以 A、B、C、D、E、F、G、H 這 8 點標示在圖解圖上，如下圖。



並且依據實驗操作，將倒水的順序用紅線及藍色箭頭畫出，如下列圖示：

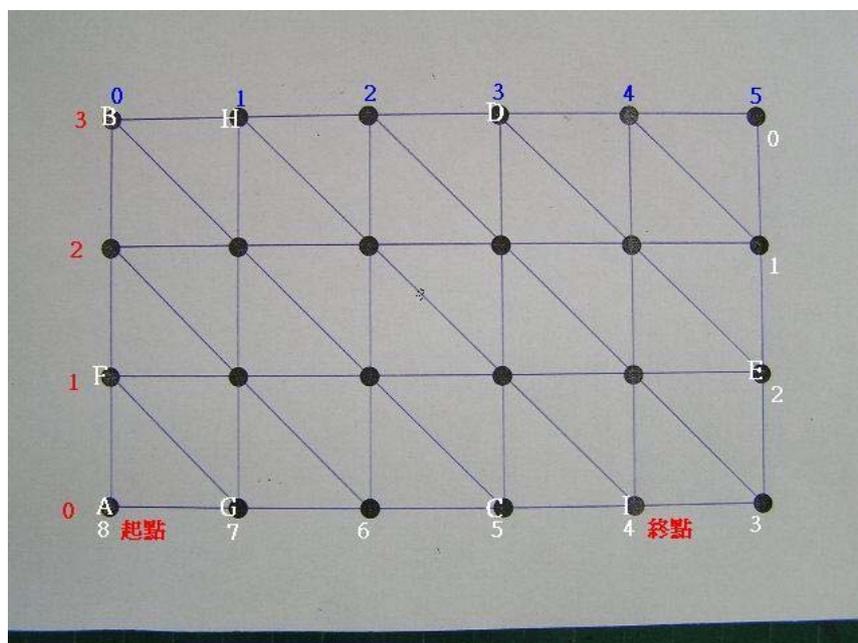




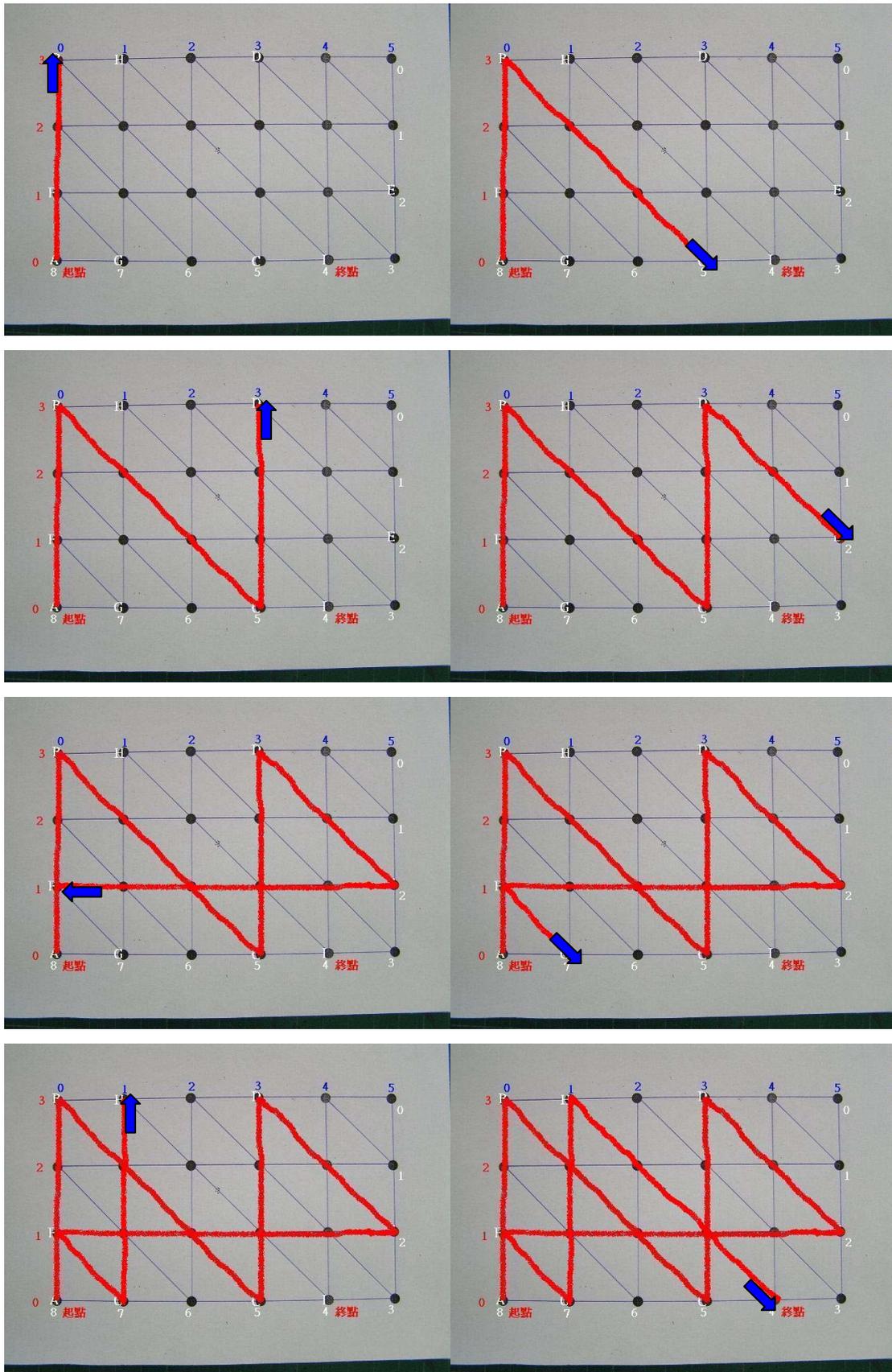
由上述實驗，我們發現分水的過程中，8 個步驟的格子點都落在圖形的座標軸上，可見得由於容器的限制，水的移動必須在容器容量的最大上限裡移動，因此無法停留在圖形中間位置的格子點上。並且，從紅線的移動中觀察到以下的規律：

- 橫線向右—表示水從大水杯倒向中水杯。
- 斜線向上—表示水從中水杯倒向小水杯。
- 直線向下—表示水從小水杯倒向大水杯。

2. **實驗四：**以實驗二的結果，將實際操作的順序以 A、B、C、D、E、F、G、H、I 這 9 點標示在圖解圖上，如下圖。



並且依據實驗操作，將倒水的順序用紅線及藍色箭頭畫出，如下列圖示：



由上述實驗可從紅線的移動中觀察到以下的規律：

- 橫線向左—表示水從中水杯倒向大水杯。
- 斜線向下—表示水從小水杯倒向中水杯。

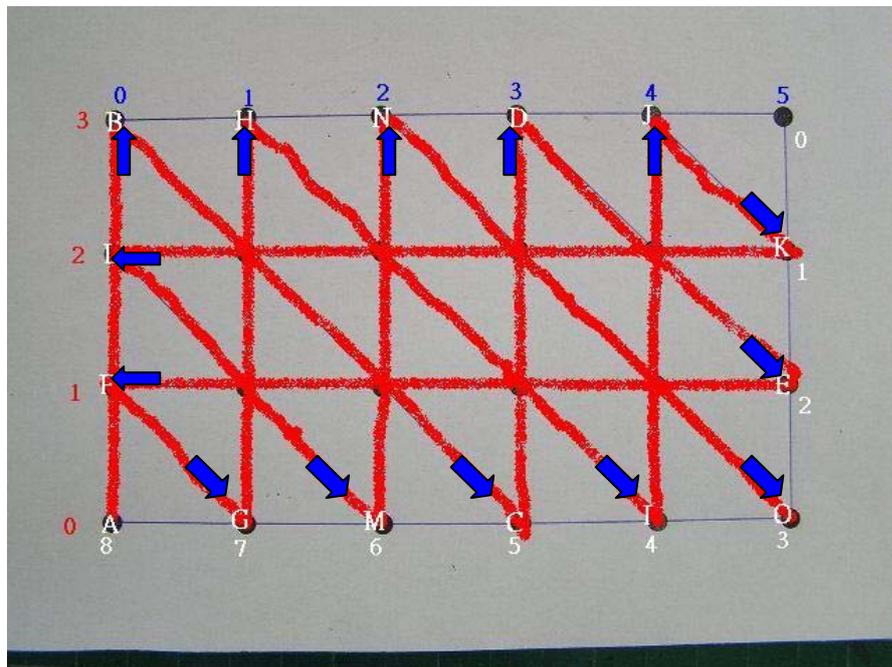
- c. 直線向上—表示水從大水杯倒向小水杯。
3. 綜合實驗三和實驗四的結果，我們可以確知圖解圖中，線條移動的方向與實際倒水方式之間的關係如下表：

線條方向		倒水方式
橫線	向右 	表示水從大水杯倒向中水杯
	向左 	表示水從中水杯倒向大水杯
斜線	向上 	表示水從中水杯倒向小水杯
	向下 	表示水從小水杯倒向中水杯
直線	向下 	表示水從小水杯倒向大水杯
	向上 	表示水從大水杯倒向小水杯

三、能否運用圖解法，將任意容量之容器的水分成所需要的份量呢？

先前實驗證實圖解法確實可以解答 3 公升和 5 公升的容器能夠將 8 公升的水平分成 2 個 4 公升，但是要將其分成其它的容量是否也能做到？如果容器不是 3 公升、5 公升，而是其它任意的容量，總水量也不等於兩容器的和時，是否也能任意的將水分出呢？圖解法是否能給予解答呢？爲此，我們設計了以下幾個實驗：

- (一) **實驗五**：用圖解法找出用 3 公升和 5 公升的容器將 8 公升的水量出 1~7 公升的方式。圖解圖如下圖：



圖中的英文字母 A~O 表示倒水的步驟的格子點，並將所表示的水量整理成下表。

步驟	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
8 升	8	5	5	2	2	7	7	4	4	1	1	6	6	3	3
5 升	0	0	3	3	5	0	1	1	4	4	5	0	2	2	5
3 升	0	3	0	3	1	1	0	3	0	3	2	2	0	3	0

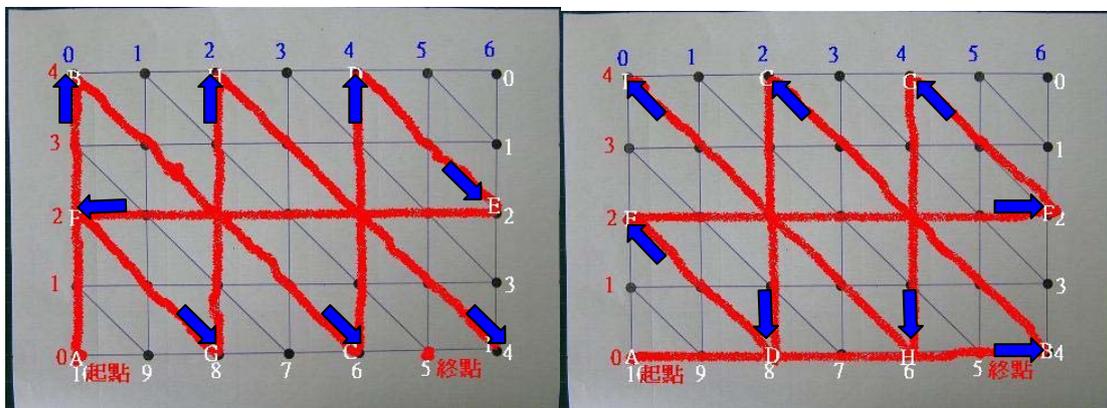
由表中可知：

1. 要得到 1 升的水可由 E、F、G、H、J、K 等步驟。
2. 要得到 2 升的水可由 D、E、K、L、M、N 等步驟。
3. 要得到 3 升的水可由 B、C、D、H、J、M、O 等步驟。
4. 要得到 4 升的水可由 H、I、J 等步驟。
5. 要得到 5 升的水可由 B、C、E、K、O 等步驟。
6. 要得到 6 升的水可由 L、M 等步驟。
7. 要得到 7 升的水可由 F、G 等步驟。

因此，可以確知當水量可以被均分時，那麼小於總水量的任意整數水量都可以被倒出。

(二) 實驗六：用圖解法找出用 4 公升和 6 公升的容器，將 10 公升的水平分成 2 個 5 公升。

圖解法如下列二圖。



甲圖（大水杯先倒入小水杯）

乙圖（大水杯先倒入中水杯）

以表格分析兩圖的水量變化如下：

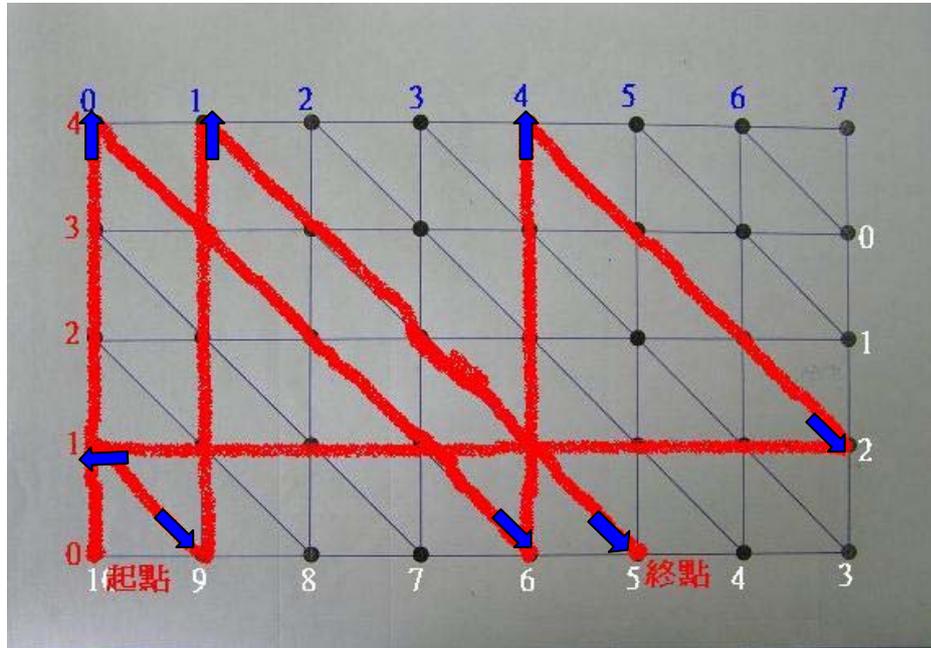
步驟		A	B	C	D	E	F	G	H	I
甲	大（10 公升）	10	6	6	2	2	8	8	4	4
	中（6 公升）	0	0	4	4	6	0	2	2	6
	小（4 公升）	0	4	0	4	2	2	0	4	0
乙	大（10 公升）	10	4	4	8	8	2	2	6	6
	中（6 公升）	0	6	2	2	0	6	4	4	0
	小（4 公升）	0	0	4	0	2	2	4	0	4

由表格中很明顯看出，甲圖的 B 步驟等於乙圖的 I 步驟，甲圖的 C 步驟等於乙圖的 H 步驟，以下依次相等。也就是說，不論走

哪一條路線，最後都是在重複彼此的路線。因此，兩圖均無法完成分水任務。

(三) 實驗七：用圖解法找出用 4 公升和 7 公升的容器，將 10 公升的水平分成 2 個 5 公升。(總水量小於兩容器容量的和)

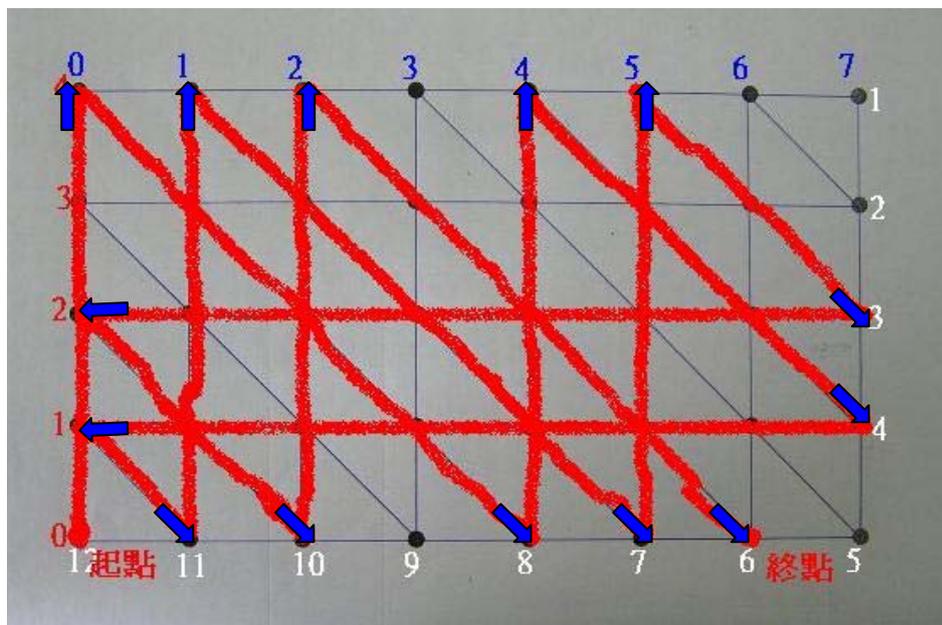
圖解法如下圖：



由於總水量小於兩容器容量的和，因此，斜座標的數字必須修正成原點位置為 10，其餘斜座標軸的數字依次遞減。

(四) 實驗八：用圖解法找出用 4 公升和 7 公升的容器，將 12 公升的水平分成 2 個 6 公升。(總水量大於兩容器的和)

圖解法如下圖



由於總水量大於兩容器容量的和，因此，斜座標的數字必須修正成原點位置為 12，其餘斜座標軸的數字依次遞減。

伍、討論與結論：

- 一、用 3 公升和 5 公升的容器，要將 8 公升的水平分成 2 個 4 公升的「分水問題」會有兩種不同的倒水方式。第一種倒水方式是第一步驟由大水杯倒向中水杯，第二種倒水方法是第一步驟由大水杯倒向小水杯。由實驗一和實驗二中可以得到詳細的倒水步驟，再藉由這些步驟轉換成座標圖，即可求得我們所要的圖解圖。
- 二、藉由實驗三和實驗四的結果，我們可以歸納出圖解圖的規律：
 - (一) 座標：
 1. 縱座標代表小水杯的水量。
 2. 橫座標代表中水杯的水量。
 3. 斜座標代表大水杯的水量。
 - (二) 格子點：
 1. 每一個格子點的座標總和（斜座標 + 橫座標 + 縱座標）都是相同的，代表該次的總水量。
 2. 分水的步驟必定出現在座標軸的格子點上。
 - (三) 路線：
 1. 橫線向右－表示水從大水杯倒向中水杯；橫線向左－表示水從中水杯倒向大水杯。
 2. 斜線向上－表示水從中水杯倒向小水杯；斜線向下－表示水從小水杯倒向中水杯。
 3. 直線向下－表示水從小水杯倒向大水杯；直線向上－表示水從大水杯倒向小水杯。
- 三、由實驗五（用圖解法找出用 3 公升和 5 公升的容器將 8 公升的水量出 1~7 公升）中可以發現，水量如果可以被均分，那麼小於總水量的任意整數水量都可以被倒出。所以我們可以從這個結論了解到古人的智慧，為什麼油行的老闆只有 3 公升和 5 公升兩種容量的容器呢？因為只要有這兩種容量的容器，不論客人要買幾公升的油，他都可以順利的量出來，真是聰明。不過，如果他學會圖解圖，相信他更加不會量錯。
- 四、由實驗六（用圖解法找出用 4 公升和 6 公升的容器，將 10 公升的水平分成 2 個 5 公升）中發現，當兩容器的水量不是互質（有公因數）時，便無法將水給均分，因為倒水的步驟會出現一直重複的情況。我們可以了解當兩個容器的容量互為質數時，經過多次的加法和減法的運算後，必定會得到「1」，如果再重複若干次，就可以得到任意的正整數。倘若兩容器的容量有公因數時，無論如何計算都無法得到「1」，因此就無法順利的將水給均分了。
- 五、由實驗七（用圖解法找出用 4 公升和 7 公升的容器，將 10 公升的水平分成 2 個 5 公升）及實驗八（用圖解法找出用 4 公升和 7 公升的容器，將 12 公升的水平分成 2 個 6 公升）中發現，無論總水量是大於兩容器

的水量和或是小於兩容器的水量和，都可以用圖解法來推算是否能將總水量來均分，只是必須符合格子點的座標總和等於總水量的這個性質。因此，需要將斜座標的值做修正，才能使用圖解圖。

六、綜上所述，運用圖解法可以更方便、快速地處理「分水問題」，藉由簡便的圖形，即可判斷是否能將水均分，或是如何將水給均分，而不需要用到更深奧的數學代數來計算。

陸、參考資料：

- 一、勝野元薰（2002）。電影數學魔術入門：數的計算。台北市：國際村文庫。
- 二、王登傳（2001）。數學遊戲大觀。高雄市：前程出版社。

【評語】 080412

- 1、利用座標系統來處理分水問題，是個很有創意的想法，並進而引進圖解法，是個不錯的構想。
- 2、探討的深入度也相當不錯。
- 3、在問題的豐富度上，可再進一步加強。