中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

最佳創意獎

080410

方格內的數字和

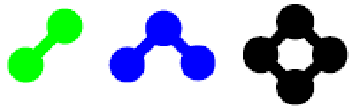
學校名稱：彰化縣秀水鄉明正國民小學

作者：	指導老師：
小六 林宥佃	張文莉
小六 蘇冠宇	林建福
小六 林煜峰	
小六 林亞宣	

關鍵詞：數字和、方格、數學競賽

方格內的數字和

摘要

本研究是以環球城市數學競賽 2000 秋季賽國中組初級卷 4×4 方格的填格問題，尋找解答，試圖從解題過程中，發現填格的規則，進而延伸應用至 N×N 方格。研究分析，方格內的空格可分成四個角落位置（只有 2 個相鄰的方格）、邊緣位置（有 3 個相鄰的方格）以及內側方格位置（有 4 個相鄰的方格）三類，進而運用  這三種圖形來尋求出填格規律。研究結果顯示，在 N×N 的方格中，當 N 為奇數時，無法找到覆蓋方式；而當 N 是偶數時，可以找到覆蓋的方式，並進一步分析研究，當方格是 N×N＝(4T)×(4T)時，數字總和為 $4K^2+2K$，當方格 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2)時，數字總和為 $4K^2+6K+2$；同時觀察所繪製的解圖，無論是(4T)×(4T)或(4T＋2)×(4T＋2)類型，均是為左右對稱的圖形，除了可應用所推得的公式來求解之外，亦可直接迅速繪製這二類的解圖，以解決題意。

壹、研究動機

在數學課堂上，老師喜歡介紹一些數學競賽的題目給我們做練習，以下為一個範例：「在 4×4 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1 (註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊)。試求此 4×4 方格表的 16 個方格中的數之總和？」這一題是出自 2000 年環球城市數學競賽的題目，為了解決這一題，大家思考很久，也有研究出一些延伸，如下列介紹。

貳、研究目的

本研究目的是如何解決 2000 年環球城市數學競賽的題目—「在 4×4 方格表的 16 個方格

中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1 (註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊)。試求此 4×4 方格表的 16 個方格中的數之總和。(三分)」。在解題過程中，分析 4x4 方格內的空格彼此之間的關係，利用這些不同類型的空格，尋找出在方格內彼此的關聯，以解決問題。此外，進一步分析題意為何是屬於 4x4 的方格問題，若是擴展至其他 NxN 的方格，是否仍有解？若是有解，那麼，答案會是多少？

因此，本研究目的藉由數學競試題目，經過一系列的思考、假設、推測與驗証，期望能尋求不同 N 值答案的相關規律性，以歸納出公式，並且尋找如何繪製解圖的方法，以迅速求解。

參、研究主題

一、在 4×4 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1 (註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊)，而此方格中之數的總和為多少？

二、承研究主題一，將方格延伸為 NxN 的方格表（$N\geq2$），每一種方格表是否都有解？

三、承研究主題二，若 NxN（$N\geq2$）的方格表有解，試問方格的數字和為多少？

四、承研究主題三，若 NxN（$N\geq2$）的方格表有解，試問如何繪製相關的解圖？這些解圖之間又有何特徵，是否有其特定的迅速繪製模式？

肆、研究過程

一、 4×4 方格表

首先將 4×4 方格表的空格，依序填入英文字母 A～P，共 16 個字母，所得 4×4 方格表如圖 4-1 所示。接下來便開始進行題目的分析，分析步驟與結果如下所示。

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

圖 4-1

（一）應用代數解法

依題意要求，將4×4方格表中 16 空格中的英文字母，分類成三個部份來討論。

1、對四個角落的數字，A、D、M、P 而言有$\begin{cases} B+E=1 \\ I+N=1 \\ O+L=1 \\ C+H=1 \end{cases}$的等式，如圖 4-2 所示。

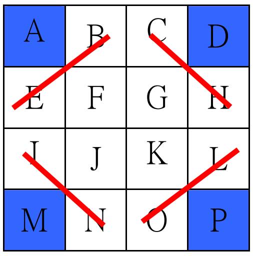


圖 4-2

2、對於 B、C、N、O、H、L、E、I 方格，有$\begin{cases} A+F+C=1 \\ B+G+D=1 \\ A+F+I=1 \\ E+J+M=1 \\ M+J+O=1 \\ N+K+P=1 \\ D+G+L=1 \\ H+K+P=1 \end{cases}$的等式，圖 4-3 是以方

格 E 爲例的。

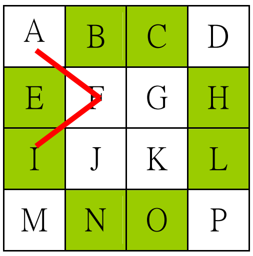


圖 4-3

3、對於 F、G、J、K 而言，可以得到$\begin{cases} B+E+J+G=1 \\ I+F+N+K=1 \\ F+C+K+H=1 \\ J+G+O+L=1 \end{cases}$的等式。圖 4-4 是以方格 F 爲例的。

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

圖 4-4

4、因爲未知數與等式太多，故先思考其他解法！

（二）簡化未知數求解

首先注意到若由未知數來解決感到有一些困惑，但是根據方格所在的位置發現有三種情況：

(A)當方格位置在角落位置時，只有 2 個相鄰方格

(B)當方格位置在邊緣而非角落位置時，會有 3 個相鄰方格

(C)當方格位置非前兩種位置時(圖形的內側)，會有 4 個相鄰方格

利用嘗試解法！假設 A＝1 且 C＝F＝I＝0，則可以得到 N＝H＝1

依序可以解出如下表四的答案。其實若利用對稱概念則可以如下表五之答案。

1、利用上述概念可以找到滿足條件的兩個方格表(圖 4-5、圖 4-6)

1	0	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0
0	1	1	0

圖 4-5

0.5	0.5	0.5	0.5
0.5	0	0	0.5
0.5	0	0	0.5
0.5	0.5	0.5	0.5

圖 4-6

2、更一般性的推廣，可以找出無限多組解，運用 2 個未知數來求解，簡化後所得結

果如圖 4-7 所示，其中 X 與 Y 為任意數。而圖 4-5 的解為 X＝Y＝1，圖 4-6 的解為 X＝Y＝0.5。

Y	1-X	1-Y	X
X	0	0	Y
1-Y	0	0	1-X
1-X	Y	X	1-Y

圖 4-7

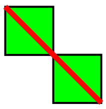
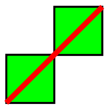
（三）4×4 方格表的解答

綜合上述分析的結果，在 4x4 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，則此 4x4 方格表的 16 個方格中的數之總和為 6。

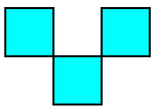
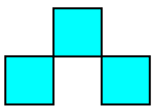
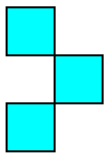
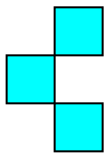
（四）進一步延伸─轉化題意

首先觀察方格的位置有以下三種

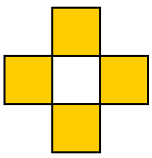
(A)四個角落位置，只有 2 個相鄰的方格，

形如  或 

(B)邊緣位置，有 3 個相鄰的方格，

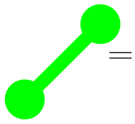
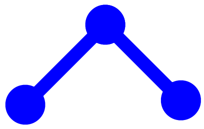
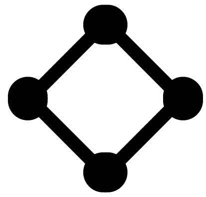
形如  或  或  或 

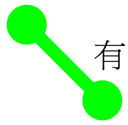
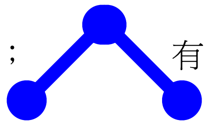
(C)內側方格，有 4 個相鄰的方格，

形如 

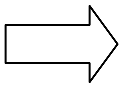
原題目也可以由『在 4x4 方格表的 16 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1 (註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊)。試求此 4x4 方格表的 16 個方格中的數之總和為何？』

修正為『利用上述(A)、(B)、(C)三種圖形設計折線找出一個不重複的覆蓋，而這三種情況出現的個數總和就是我們的要求的解答！』

亦即假設  ＝1，  ＝1，  ＝1。

因此，原題意可轉化成如圖 4-8 所示，  有 2 個；  有 4 個。所以其數字總和為 6。

1	0	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0
0	1	1	0



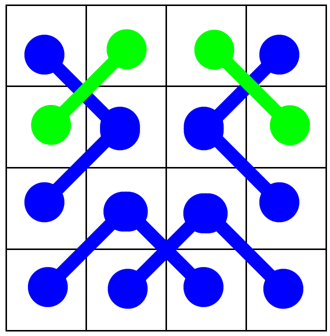


圖 4-8

二、延伸為 N×N 方格表

（一）考慮 2x2 方格表，如圖 4-9 可以知道其數字總和為 2。

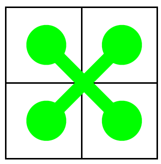


圖 4-9

（二）考慮 3x3 方格表，如右圖 4-10 所示

A	B	C
D	E	F
G	H	I

圖 4-10

N=3 無法找出解答(如下一頁說明)

對 A 而言，B＋D＝1 ……………………(1)

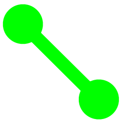
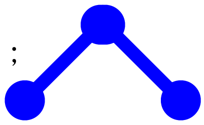
對 E 而言，B＋D＋F＋H＝1 …………(2)

對 I 而言，F＋H＝1………………………(3)

(1)＋(3)可以得到 B＋D＋F＋H＝2 與(2)矛盾

所以此題無解。

（三）考慮 4x4 方格表，如圖 4-11 所示

同(一)之分析，由圖 4-11 可以得知， 有 2 個； 有 4 個，

所以其數字總和爲 6。

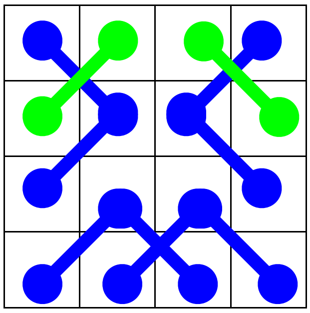


圖 4-11

（四）考慮 5x5 方格表，如圖 4-12 所示

N=5 無法找出解答

對 A 而言，B＋C＝1 ……………………(1)

對 D 而言，B＋C＋E＋F＝1 …………(2)

對 G 而言，E＋F＋H＋I＝1 …………(3)

對 J 而言，H＋I＋K＋L＝1 …………(4)

對 M 而言，K＋L＝1 …………(5)

			L	M
		I	J	K
	F	G	H	
C	D	E		
A	B			

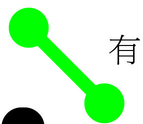
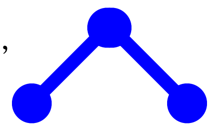
圖 4-12

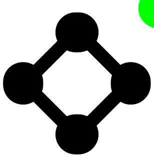
由(1)與(2)知道 E＋F＝0 再依序推得 H＋I＝1 ； K＋L＝0 與 (5)互相矛盾

所以此題無解。

（五）考慮 6x6 方格表，如圖 4-13 所示

當 N＝6 時，可以找到覆蓋的方法如圖 4-13

亦即  有 2 個， 有 8 個，

 有 2 個。

所以其數字總和爲 12。

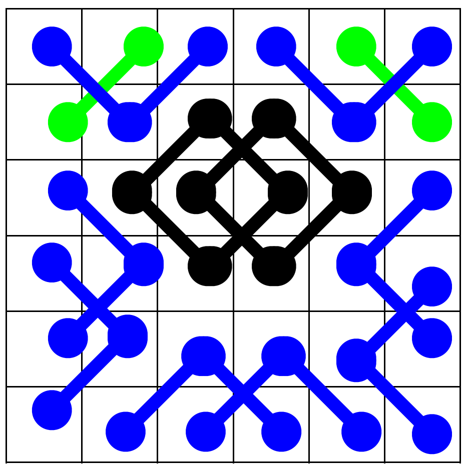


圖 4-13

（六）考慮 7x7 方格表，如圖 4-14 所示

					B6,7	A7,7
				B5,6	A6,6	B7,6
			B4,5	A5,5	B6,5	
		B3,4	A4,4	B5,4		
	B2,3	A3,3	B4,3			
B1,2	A2,2	B3,2				
A1,1	B2,1					

圖 4-14

對方格 A(1,1)而言，B(1,2)＋B(2,1)＝1 …………………(1)

對方格 A(2,2)而言，B(1,2)＋B(2,1)＋B(3,2)＋B(2,3)＝1…(2)

可以得到依序得到

B（3,2）＋B（2,3）＝0　；　B（4,3）＋B（3,4）＝1

B（5,4）＋B（4,5）＝0　；　B（6,5）＋B（5,6）＝1

B（7,6）＋B（6,7）＝0 與 A（7,7）而言，B（6,7）＋B（7,6）＝1　相互矛盾！

所以 N=7 無法找出解答

（七）綜合討論：

由上述分析可以發現，當 N 爲奇數時，似乎都無法找到覆蓋方式；當 N 是偶數時，可以找到覆蓋，以下做更進一步的分析說明。

1、在 N×N 的方格表（N≥2），當 N 爲奇數時，可推論無法找到覆蓋方式。

証明如下：

假設 N＝2M＋1，圖形可以化成如圖 4-15

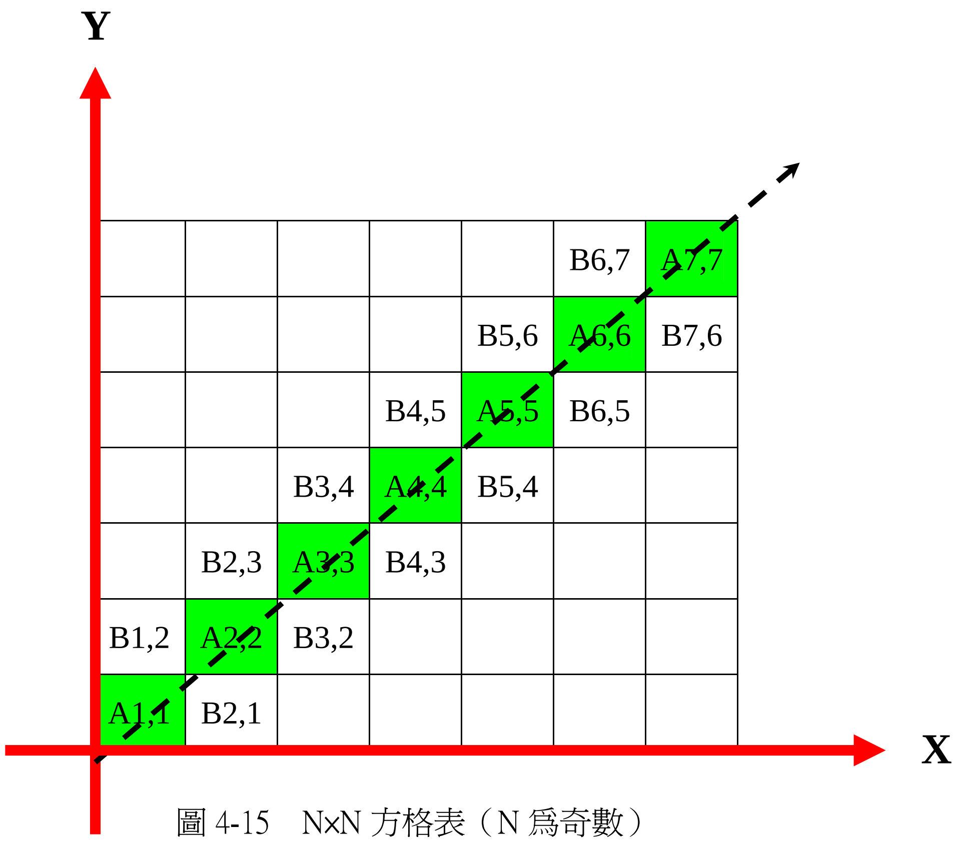


圖 4-15　NxN 方格表（N 爲奇數）

首先定義方格位置 A(I，J)表示 X 座標爲 I，Y 座標爲 J 的方格內的數字

所以對 A（1,1）而言，B(1,2)＋B (2,1)＝1

對方格 A(2,2)而言，B (1,2)＋B (2,1)＋B (3,2)＋B (2,3)＝1

依序得到　B（3,2）＋B（2,3）＝0　；　B（4,3）＋B（3,4）＝1

以此類堆可得　B（2M+1,2M）＋B（2M,2M+1）＝0

與 A（2M+1,2M+1）而言，B（2M+1,2M）＋B（2M,2M+1）＝1

與上述 B（2M+1,2M）＋B（2M,2M+1）＝0　相互矛盾

所以當 N 爲奇數時，似乎都無法找到覆蓋方式，無法解答。

2、在 NxN 的方格表（N≥2），當 N 爲偶數時，可推論找到覆蓋方式。

證明如下：

假設 N＝2M，圖形可以化成如圖 4-16

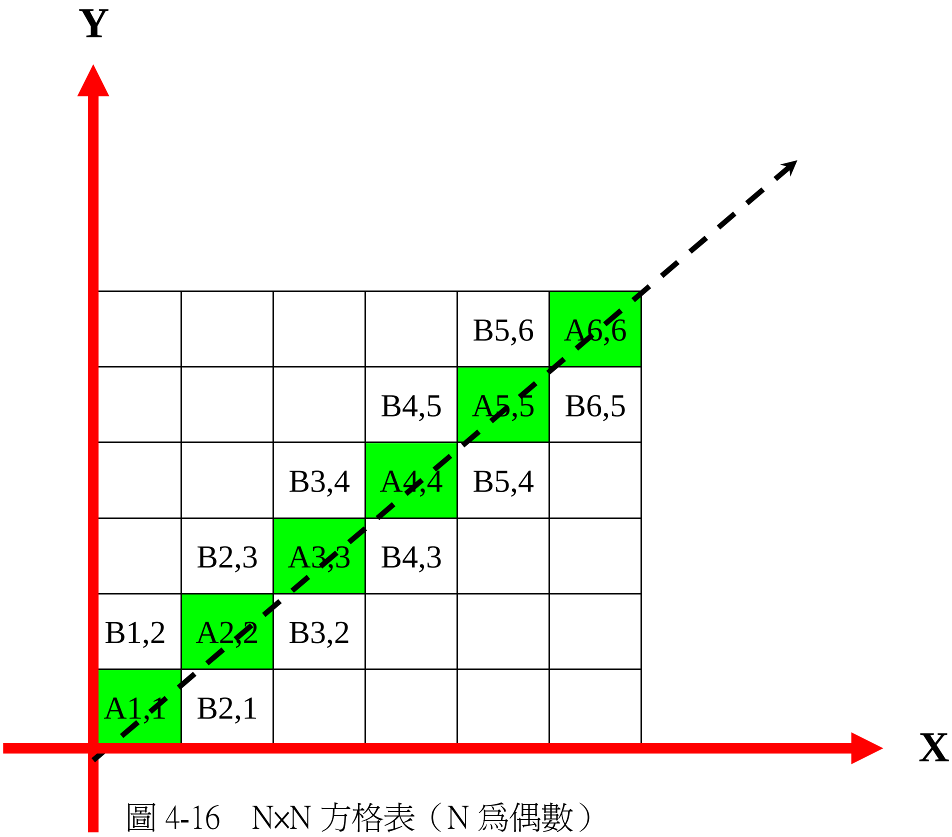


圖 4-16　NxN 方格表（N 為偶數）

首先定義方格位置 A(I，J)表示 X 座標為 I，Y 座標為 J 的方格內的數字

所以對 A（1,1）而言，B(1,2)＋B(2,1)＝1

對方格 A(2,2)而言，B(1,2)＋B(2,1)＋B(3,2)＋B(2,3)＝1

依序得到　B（3,2）＋B（2,3）＝0　；B（4,3）＋B（3,4）＝1

以此類堆可得　B（2M+1,2M）＋B（2M,2M+1）＝0

與 A（2M,2M）而言，A（2M-1,2M）＋A（2M,2M-1）＝0　相符合

所以當 N 為偶數時，可以找到覆蓋方式與其解。

三、若 NxN（N≥2）的方格表有解，試問方格的數字和為多少？

當 N 為偶數時，NxN（N≥2）的方格表有解，此時可將方格表分為兩類，分別是

N＝4T（T≥1）及 N＝4T+2（T≥1）

（一）N×N 方格表（N≥2）中，當 N＝4T（T≥1），其可能圖形如圖 4-17　4x4 方格表（T＝1）、圖 4-18　8x8 方格表（T＝2）、圖 4-19　12x12 方格表（T＝3）所示

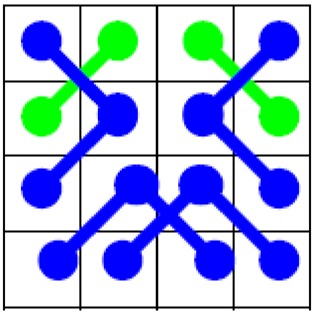


圖 4-17　4x4 方格表（T＝1）

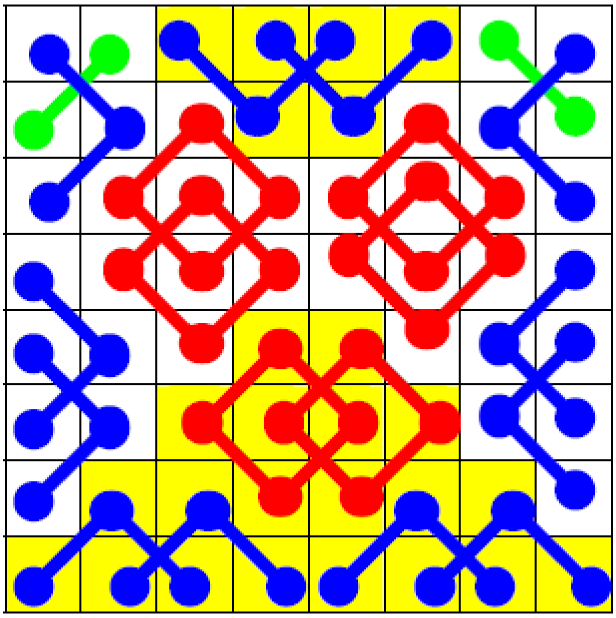


圖 4-18　8x8 方格表（T＝2）

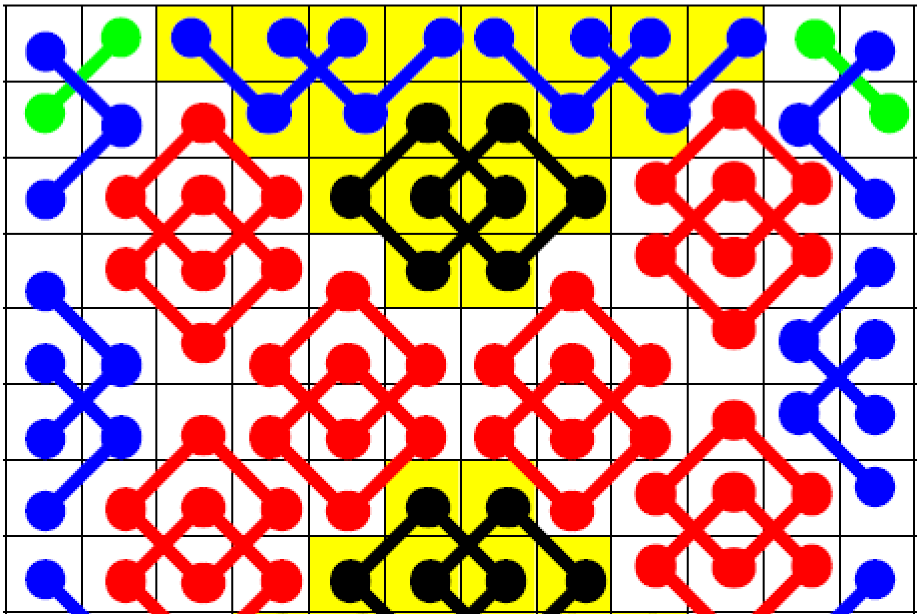
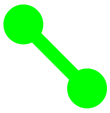
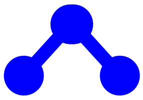
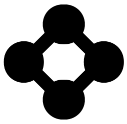


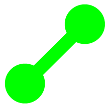
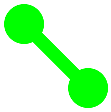
圖 4-19　12x12 方格表（T＝3）

1、N×N＝(4T)×(4T) 圖形可以分析如下表

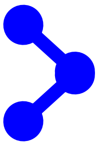
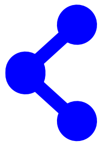
T 值	方格數				驗證 方格點	數字總和
1	4*4	2	4×1	0	2*2+4*3=16	2+4=6
2	8*8	2	4×3	6	2*2+12*3+6*4=64	2+12+6=20
3	12*12	2	4×5	20	2*2+20*3+20*4=144	2+20+20=42
4	16*16	2	4×7	42	2*2+28*3+42*4=256	2+28+42=72
…………………………………………………………						
K	$16K^2$	2	4×(2K－1)	$4K^2$-6K+2	2*2+3*4*(2K-1) +4*($4K^2$-6K+2)=$16K^2$	2+4×(2K－1) ＋$4K^2$-6K+2 =$4K^2$+2K

2、如何迅速繪製 N×N＝(4T)×(4T)的解圖？

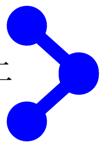
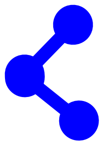
我們以 8×8 方格表（T=2）爲例，將繪製的步驟分解如下：

步驟 1、先在左上角及右上角分別繪製  及  圖形，如圖 4-20。

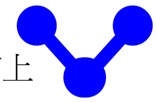
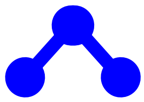
步驟 2、題型是屬於(4T)×(4T)的類型，

所以最左上角的方格歸類於  圖形，最右上角的方格歸類於  圖形，

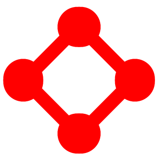
所得圖示如圖 4-21。

步驟 3、承接步驟 2，再將方格的左邊緣及右邊緣分別補上  及  圖形。

所得圖示如圖 4-22。

步驟 4、接著再將方格的上邊緣及下邊緣分別補上  及  圖形。

所得圖示如圖 4-23。

步驟 5、最後再將內側方格填入  ，完成填格步驟，如圖 4-24 所示。

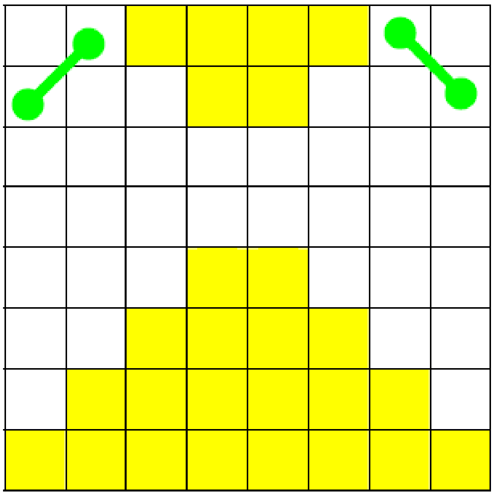


圖 4-20　步驟一

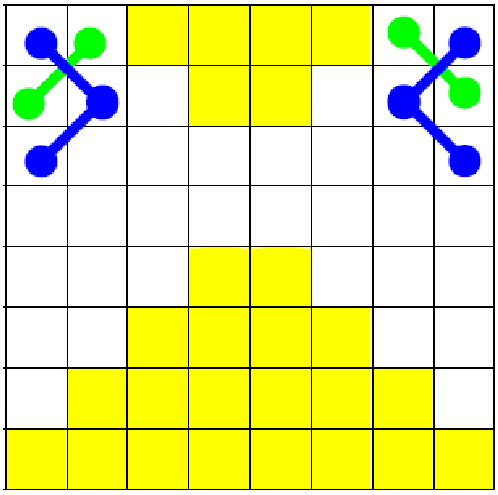


圖 4-21　步驟二

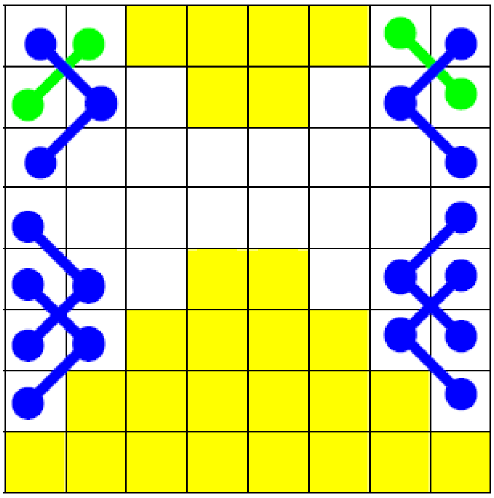


圖 4-22　步驟三

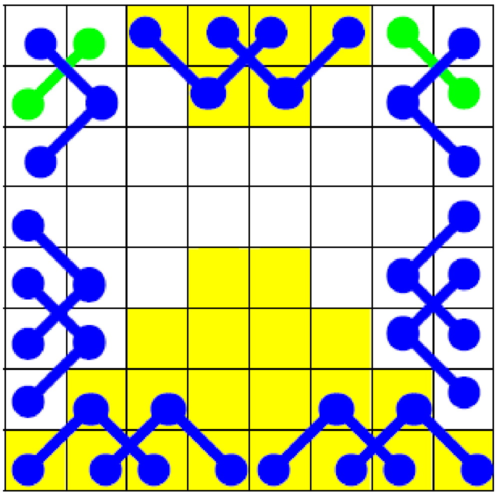


圖 4-23　步驟四

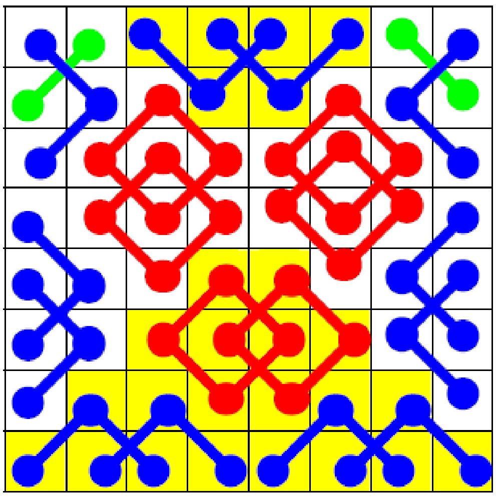


圖 4-24　步驟五（完成）

3、觀察所繪製的 8×8 方格表圖，發現是爲一左右對稱的圖形，而對稱軸如圖 4-25 所示；且左右邊緣各有 3 個 V 字圖形，而上下邊緣則各有 2 個及 4 個 V 字圖形，其餘內側空格則填入 6 個口字圖形。

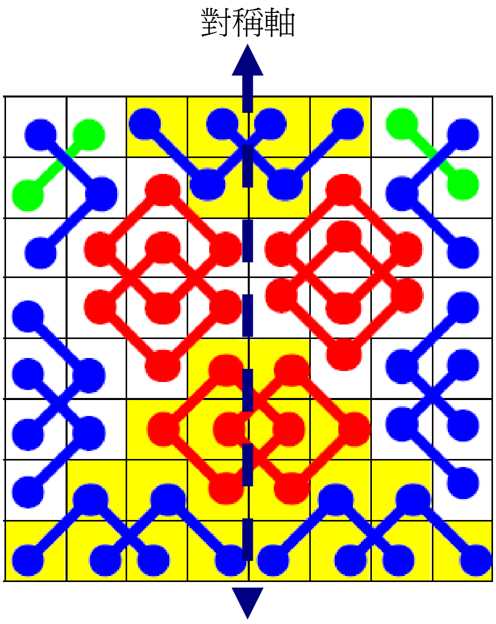


圖 4-25

（二）N×N 方格表（N≥2）中，當 N＝4T+2（T≥1），其可能圖形如圖 4-26　2x2 方格表（T＝0）、圖 4-27　2x2 方格表（T＝0）、圖 4-28　10×10 方格表（T＝2）所示

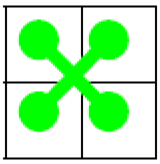


圖 4-26　2x2 方格表（T＝0）

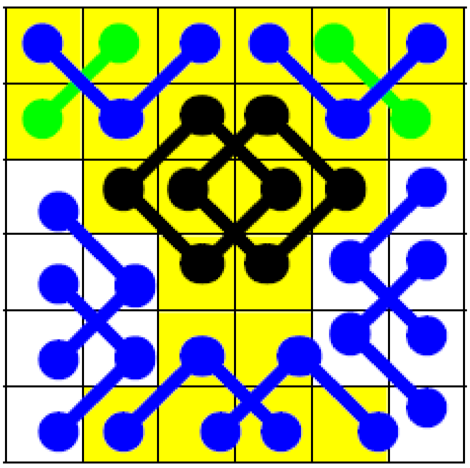


圖 4-27　6x6 方格表（T＝1）

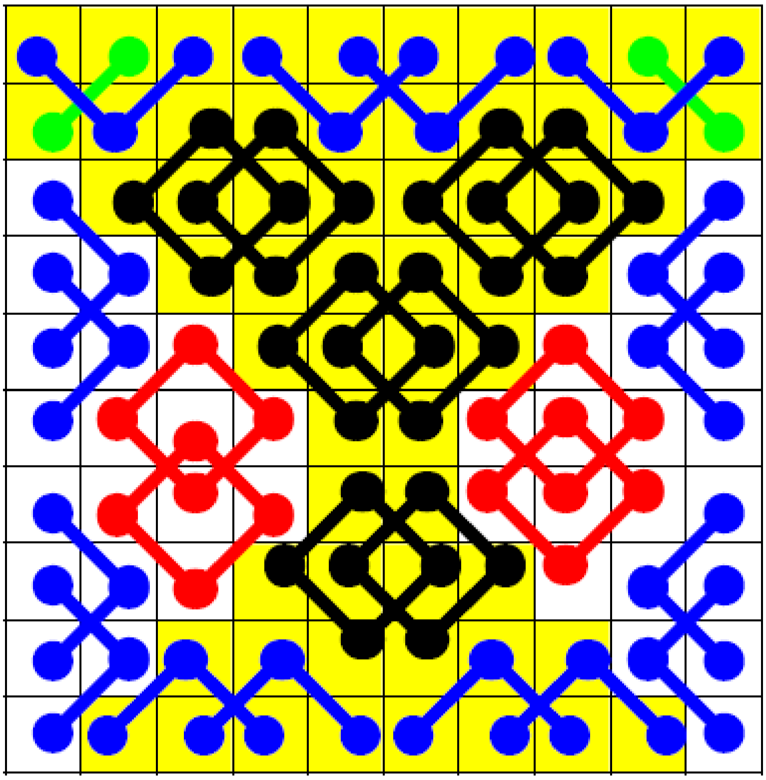
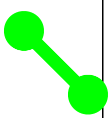
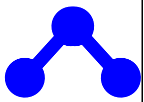
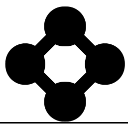


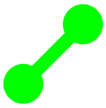
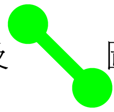
圖 4-28　10×10 方格表（T＝2）

1、當 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2)圖形可以分析如下表

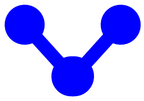
T 值	方格數				驗證 方格點	數字總和
0	2*2	2	4×0	0	2*2=4	2
1	6*6	2	4×2	2	2*2+8*3+2*4=36	2+8+2=12
2	10*10	2	4×4	12	2*2+16*3+12*4=100	2+16+12=30
3	14*14	2	4×6	30	2*2+24*3+30*4=196	2+24+30=56
……………………………………………………………………						
K	$16K^2+16K$ $+4$	2	8K	$4K^2-2K$	$2*2+3*8K++4*(4K^2-2K)$ $=16K^2+16K+4$	$2+8K+4K^2-2K$ $=4K^2+6K+2$

2、如何迅速繪製 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2)的解圖？

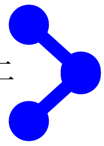
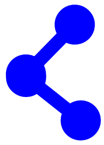
我們以 10×10 方格表（T=2）爲例，將繪製的步驟分解如下：

步驟 1、先在左上角及右上角分別繪製  及  圖形，如圖 4-29。

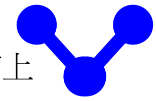
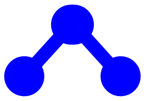
步驟 2、題型是屬於(4T＋2)×(4T＋2)的類型，

所以最左上角及最右上角的方格歸類於  圖形，

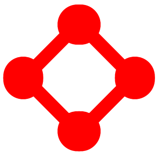
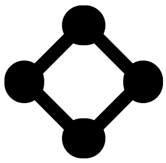
所得圖示如圖 4-30。

步驟 3、承接步驟 2，再將方格的左邊緣及右邊緣分別補上  及  圖形。

所得圖示如圖 4-31。

步驟 4、接著再將方格的上邊緣及下邊緣分別補上  及  圖形。

所得圖示如圖 4-32。

步驟 5、最後再將內側方格填入  或 ，完成填格步驟，如圖 4-33

所示。

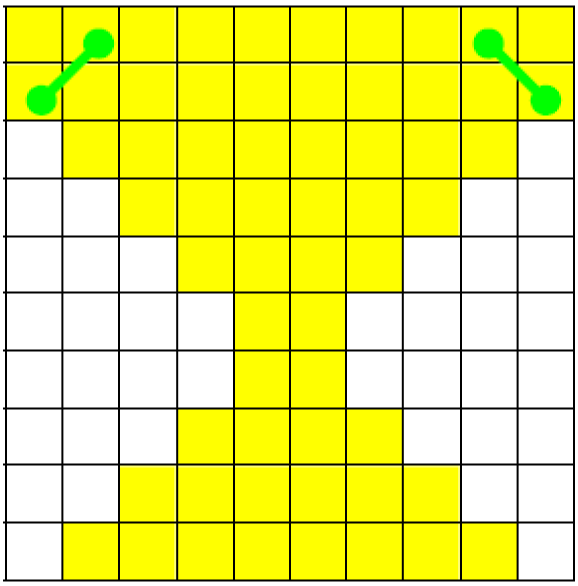


圖 4-29　步驟一

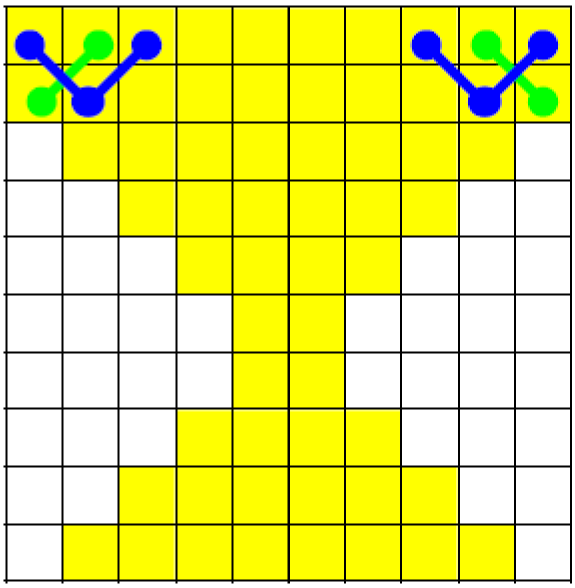


圖 4-30　步驟二

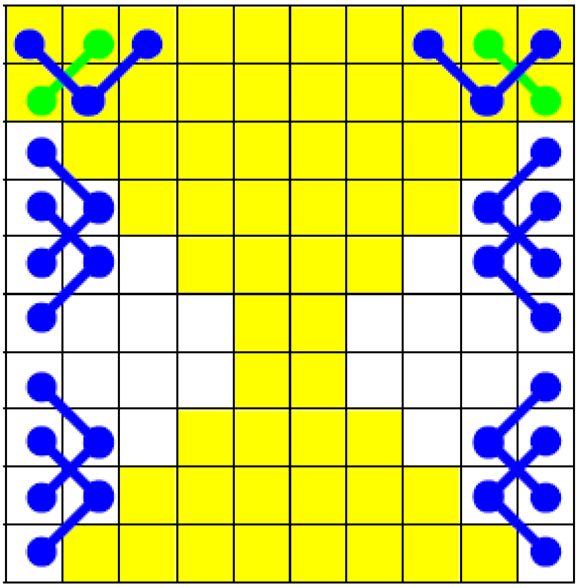


圖 4-31　步驟三

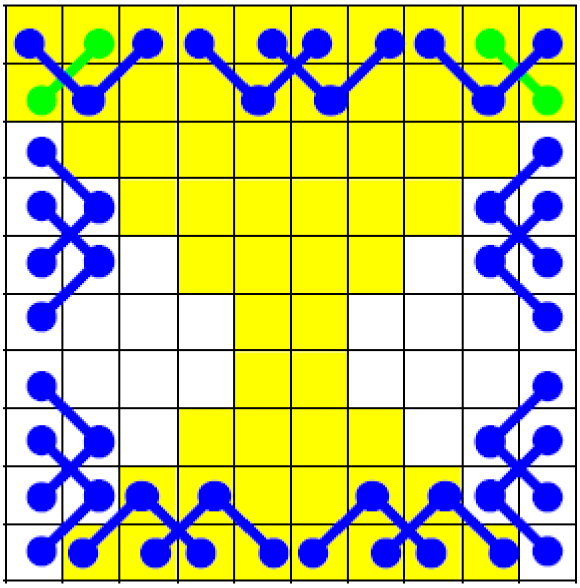


圖 4-32　步驟四

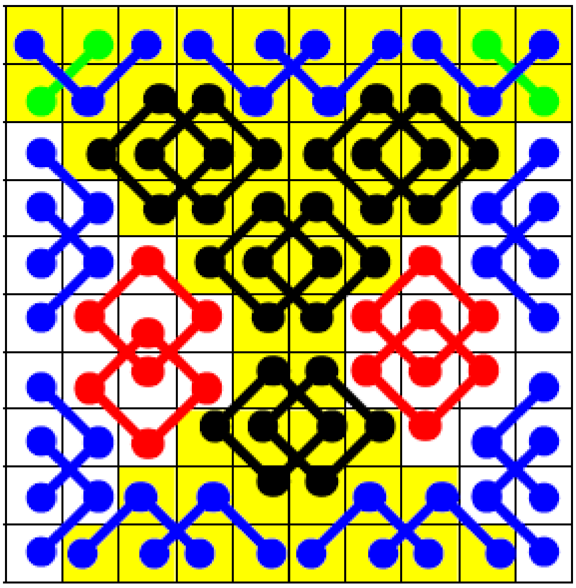


圖 4-33　步驟五（完成）

3、觀察所繪製的 10×10 方格表圖，發現是爲一左右對稱的圖形，而對稱軸如圖 4-34 所示；且上下左右邊緣各有 4 個 V 字圖形，其餘內側空格則填入 12 個口字圖形。

對稱軸

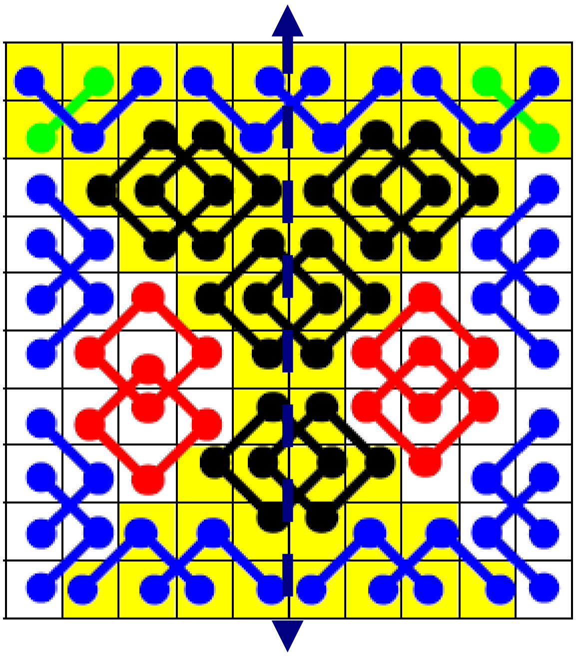


圖 4-34

伍、研究結論

一、在4×4方格表的16個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和爲1 (註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊)，而此方格中之數的總和爲6。

二、將方格延伸爲N×N的方格表（N≥2），當N爲奇數時，此題無解；當N爲偶數時，此題有解。

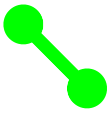
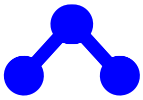
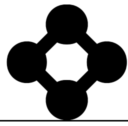
三、在N×N（N≥2）的方格表，當N爲偶數時，可分爲兩種結論探討

（一）當 N×N＝(4T)×(4T)，T≥1，其方格表內的數字總爲爲 $4K^2+2K$。

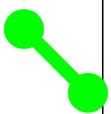
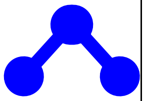
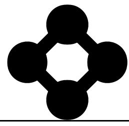
（二）當 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2) ，T≥0，其方格表內的數字總爲爲 $4K^2+6K+2$。

以下就分別以 N×N＝(4T)×(4T)，T≥1 及 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2)，T≥0 的型式加以舉例說明

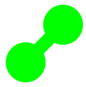
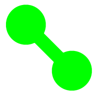
1、當 N×N＝(4T)×(4T)，T≥1 時，可能的解答如下

T 值	方格數				驗證 方格點	數字總和
1	4*4	2	4×1	0	2*2+4*3=16	2+4=6
2	8*8	2	4×3	6	2*2+12*3+6*4=64	2+12+6=20
3	12*12	2	4×5	20	2*2+20*3+20*4=144	2+20+20=42
4	16*16	2	4×7	42	2*2+28*3+42*4=256	2+28+42=72
…………………………………………………………………						
K	$16K^2$	2	4×(2K－1)	$4K^2$-6K+2	2*2+3*4*(2K-1) +4*($4K^2$-6K+2)=$16K^2$	2+4×(2K－1) ＋$4K^2$-6K+2 =$4K^2$+2K

2、當 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2)，T≥0 時，可能的解答如下

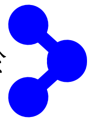
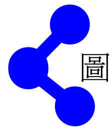
T 值	方格數				驗證 方格點	數字總和
0	2*2	2	4×0	0	2*2=4	2
1	6*6	2	4×2	2	2*2+8*3+2*4=36	2+8+2=12
2	10*10	2	4×4	12	2*2+16*3+12*4=100	2+16+12=30
3	14*14	2	4×6	30	2*2+24*3+30*4=196	2+24+30=56
…………………………………………………………………						
K	$16K^2$+16K +4	2	8K	$4K^2$-2K	2*2+3*8K++4*($4K^2$-2K) =$16K^2$+16K+4	2+8K+$4K^2$-2K =$4K^2$+6K+2

四、所要繪製的 N×N＝(4T)×(4T)或是 N×N＝(4T＋2)×(4T＋2)圖形步驟，分解如下

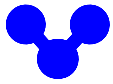
步驟 1、無論是哪一類型，均先在左上角及右上角分別繪製  及  圖形。

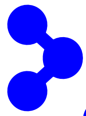
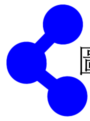
步驟 2、判定是屬於哪一類型的方格表

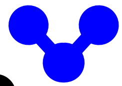
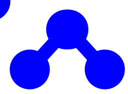
（1）題型若是屬於(4T)×(4T)的類型，

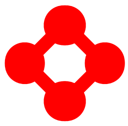
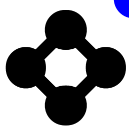
方格最左上角的方格歸類於  圖形，最右上角的方格歸類於  圖形。

（2）題型若是屬於(4T＋2)×(4T＋2)的類型，

方格最最左上角及最右上角的方格歸類於  圖形。

步驟 3、承接步驟 2，再將方格的左邊緣及右邊緣分別補上  及  圖形。

步驟 4、接著再將方格的上邊緣及下邊緣分別補上  及  圖形。

步驟 5、最後再將內側方格填入  或  ，完成填格步驟。

陸、參考資料

葉永南、譚克平（2000）。**環球城市數學競賽 2000 秋季賽試題解析**。臺北。九章出版社。

【評語】080410

1、 利用幾何圖形來解決代數方程組，是很好的嘗試。

2、 探討的完整性，也相當不錯。

3、 有一定的邏輯推演，結果也有一定的可看性。