中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080409

天使與魔鬼

學校名稱：臺北縣樹林市大同國民小學

作者：	指導老師：
小六 顏嘉佑	顏榮皇 李海國

關鍵詞：二進位法、唯一性、區間極值

摘要

2008 年環球數學競賽秋季賽有一道題目如下所示：

在無窮數列{a(n)}，a(0)=0，若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 1，則 a(n)=a(n-1)+1，若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 3，則 a(n)=a(n-1)-1。此數列的首幾項為：0、1、2、1、2、3、2、1、2、3、4、3、2、3、2、1、…。

(a) 證明在此數列中，1 將出現無窮多次

(b) 證明在此數列中，每一個正整數將出現無窮多次。

因 a（2^{k-1}-1）=1。數列{a(n)}定義 2^{k-1}≦n≦2^k-1 為第 k 區間。網路上有第 k 區間 a(n)=k 的存在性證明。

本研究特色在於二進位法找出 a(n)表示法，證明第 k 區間 a(n)=k 唯一性。

為了延伸研究，定義數列{dp(n)}，討論質數 p 為情況下，猜測數列{dp(n)}第 k 區間極值、比較出現次數分佈對稱性、數列{d2(n)}降階關係。

為了定義統一，本研究從前言起，以數列{d2(n)}代替競賽題目提到的數列{a(n)}。

壹、前言

一、研究動機

你看過電影「天使與魔鬼」嗎？

我看過。

電影是一連串訊息構成，前一段案情暗示後一段案情的謎底。就像這題一樣，先處理數列{d2(n)}中 1 將出現無窮多次，再處理每一個自然數也出現無窮多次。

如果，把「+1」當做天使幫你上天堂，把「-1」當做魔鬼讓你下地獄，對這篇討論「+1」和「-1」數學運算的作品，命名為「天使與魔鬼」應該是一種很好的比喻。剛好，電影 2009 年 5 月上映，我獲得靈感，在不更動＊＊縣賽的作品內容而更換原來作品名稱為「天使與魔鬼」。

這是我的第三篇科展作品，也是第一篇參加國展的作品。我打算利用五年級數學課的「因數」、「二進位法」；去年科展作品「同餘」概念；歷屆國小數學科國展作品「唯一性」概念及「分區間分析」技術；六年級數學課的「對稱」、「統計圖表」；再利用六年級電腦課所學的 Excel　2003 軟體做為本研究的工具。

二、研究主題

無窮數列{d2(n)}， Q2(n)是自然數 n 最大奇因數，d2(0)=0，d2(n)=d2(n-1)+G2(n)

若 Q2(n) mod 4=1 則 G2(n)=1，d2(n)=d2(n-1)+1；

若 Q2(n) mod 4=3 則 G2(n)=-1，d2(n)=d2(n-1)-1。

(一) 證明在此數列{d2(n)}中，1 將出現無窮多次

(二) 證明在此數列{d2(n)}中，每一個正整數將出現無窮多次。

三、研究目的

在這個研究將試圖達到下面的目的：

（一）証明數列 d2（2^{k-1}-1）=1。

（二）探討網路所提到的存在性證明。

（三）利用對應法及二進位法快速尋找 d2(n)的數值。

（四）證明數列{d2(n)}第 k 區間 d2(n)=k 的唯一性。

（五）探討數列{d2(n)}第 k 區間極值。

（六）猜測數列{d2(n)}極值第 k 區間落點、可交換性、對應關係及角谷猜想。

（七）延伸研究數列{dp(n)}區間極值，應用二進位法討論數列{d2(n)}降階關係。

四、研究材料與設備

紙、筆、電腦及微軟 Excel 2003 試算表。

五、d2（2^k－1）=1

Excel 2003 只能處裡 2^{16} 的數字，觀察 1≦n≦65535，前 65535 項統計如表一。

表一、數列{d2(n)}前 65535 項出現分佈次數統計表

d2(n)=1，16 次	d2(n)=2，120 次	d2(n)=3，560 次	d2(n)=4，182 次
d2(n)=5，4368 次	d2(n)=6，8008 次	d2(n)=7，11440 次	d2(n)=8，12870 次
d2(n)=9，11440 次	d2(n)=10，8008 次	d2(n)=11，4368 次	d2(n)=12，182 次
d2(n)=13，560 次	d2(n)=14，120 次	d2(n)=15，16 次	d2(n)=16，1 次

讓我感到興趣的是表一，d2(n)=1 出現 16 次，再觀察 d2(n)=1 的 n 值如表二。

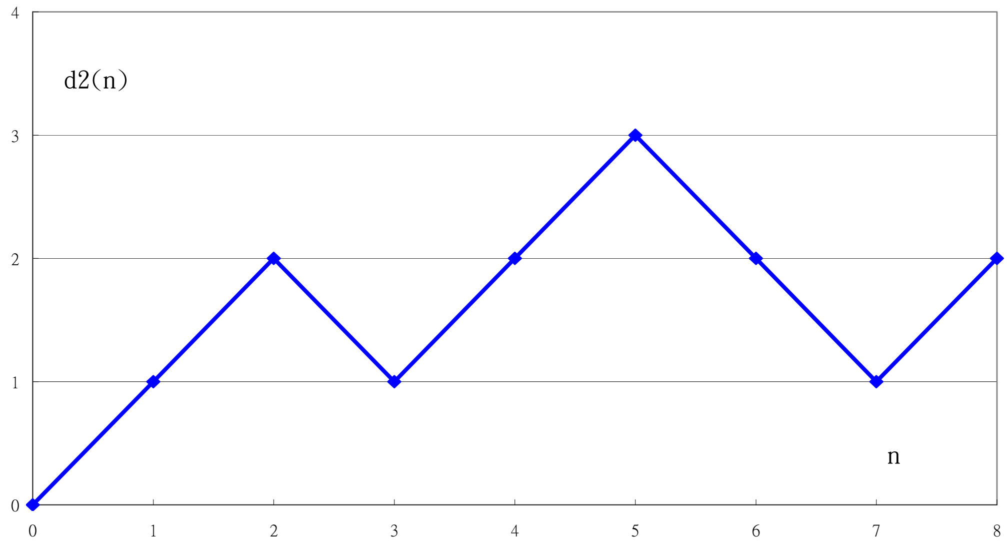
表二、1≦n≦65535，出現 d2(n)=1 的 n 值

$1=2^1-1$	$3=2^2-1$	$7=2^3-1$	$15=2^4-1$	$31=2^5-1$	$63=2^6-1$
$127=2^7-1$	$255=2^8-1$	$511=2^9-1$	$1023=2^{10}-1$	$2047=2^{11}-1$	$4095=2^{12}-1$
$8191=2^{13}-1$	$16383=2^{14}-1$	$32767=2^{15}-1$	$65535=2^{16}-1$		

根據上表，猜測 d2（2^k－1）=1。

定義數列{d2(n)}中，$2^{k-1}\leqq n\leqq 2^k-1$ 為第 k 區間。

直觀觀察 0≦n≦8 的 d2(n)值如圖一。



圖一、0≦n≦8，d2(n)的數值

再直觀觀察數列{d2(n)}第 4 區間中 1 會出現 1 次如下表。

表三、數列{d2(n)}第 4 區間的直觀觀察

n	$\times 2^0$	$\times 2^1$	$\times 2^2$	$\times 2^3$	$\times 2^4$	Q2(n)	Q2(n) mod 4	G2(n)	d2(n)
8				1		1	1	1	2
9	9					9	1	1	3
10		5				5	1	1	4
11	11					11	3	-1	3
12			3			3	1	1	4
13	13					13	1	1	5
14		7				7	3	-1	4
15	15					15	3	-1	3

以數學歸納法證明 d2（2^k—1）=1。

如圖一，k=1、2 及 3， d2(2^k—1)=1。

設 k=c 時 d2（2^k—1）=1 成立。

求證 k=c+1 時 d2（2^k—1）=1。

數列{d2(n)}第 4 區間發現 G2(9)=1 對應 G2(11)=-1，G2(13)=1 對應 G2(15)=-1，G2(10)=1 對應 G2(14)=-1，G2(8)=1 對應 G2(12)=-1，總共有 2^2 對的 1 對 1 對應。所以，d2(2^4-1)=d2(15)=1。

再觀察下表，第 c+1 區間發現 G2(n)=1 和 G(n)=-1 會先後 1 對 1 對應。總計 G2(n)=1 和 G(n)=-1 的對數是 2^{c-1} 對，因此，k=c+1 時，d2（2^k—1）=1 成立。

以數學歸納法得證 d2（2^k—1）=1……………………………………………（公式一）

表四、第 c+1 區間中 1 會出現 1 次

n	$\times 2^0$	$\times 2^1$	…	$\times 2^{c-1}$	$\times 2^c$	Q2(n)	Q2(n) mod 4	G2(n)	d2(n)
2^c					1	1	1	1	2
2^c+1	2^c+1					2^c+1	1	1	3
2^c+2		$2^{c-1}+1$				$2^{c-1}+1$	1	1	4
2^c+3	2^c+3					2^c+3	3	−1	3
…						…	…	…	…
2^c+2^{c-1}				3		3	3	−1	2
…						…	…	…	…
$2^{c+1}-3$	$2^{c+1}-3$					$2^{c+1}-3$	1	1	3
$2^{c+1}-2$		2^c-1				2^c-1	3	−1	2
$2^{c+1}-1$	$2^{c+1}-1$					$2^{c+1}-1$	3	−1	1

設 k 為自然數，d2（2^k—1）=1，因此，數列{d2(n)}中，1 將出現無窮多次。

六、定義

表五、定義

數列	符號	定義	實例
d2(n)	d2(n)	d2(n)=d2(n-1)+G2(n)，d2(0)=0	d2(16)=d2(15)+1
	Q2(n)	取 Q2(n)為 n 的最大奇因數。	Q2(16)=1
	Y2(n)	Y2(n)=Q2(n) mod 4	Y2(16)=1
	G2(n)	若 Q2(n)≡1(mod 4)則 G2(n)=1，	G2(16)=1
		若 Q2(n)≡3(mod 4)則 G2(n)=－1，	G2(24)=－1
	第 k 區間	2^{k-1}≦n≦2^{k}-1 為數列{d2(n)}第 k 區間。	
	J(k)	取 J(k)=n-2^{k-1}+1 使第 k 區間 d2(n)=k	J(4)=10-8+1=3
	H2(n)	數列{G2(n)}前 n 項的和	H2(8)=2
	H21(n)	數列{G2(n)}前 n 項的奇數項的和	H21(8)=0
	H22(n)	數列{G2(n)}前 n 項的偶數項的和	H22(8)=2
	L2(2^{k}-2^{v})	第 k 區間最後 2^{v} 項數{G2(n)}和	L2(2^{4}-2^{1})=-2
	S(k)	第 k 區間，S(k)=2^{k-1}-J(K)	S(4)=2^{4-1}-3=5
	MAX2(k)	取 n=2^{k-1}-1+J(k)，第 k 區間唯一存在極大值 d2(n)=k，定義第 k 區間極大值反函數 MAX2(k)=2^{k}-1+J(k)。	MAX2(5)=21
	MIN2(k)	取 n=2^{k}-1，第 k 區間唯一存在極小值 d2(2^{k}-1)=1，定義第 k 區間極小值反函數 MIN2(k)=2^{k}-1。	MIN2(5)=31
	ABCD 法	數列{d2(n)}第 3 區間開始，每個區間的數字個數是 4 的倍數；所以，設計 4 個數字為一組，依照各組 G2(n)出現情形，定義為 A、B、C 及 D 類。	A 類 1、1、1、-1 B 類 1、1、-1、-1 C 類-1、1、1、-1 D 類-1、1、-1、-1
dp(n)	dp(n)	無窮數列{dp(n)}，n、k、q 為自然數，p 為質數，n=p^{k-1}×q， q 和 p 互質。 若 q 除以 p^{2} 後餘數小於 $\frac{p^2+1}{2}$ 則 dp(n)=dp(n-1)+1； 若 q 除以 p^{2} 後餘數大於或等於 $\frac{p^2+1}{2}$ 則 dp(n)=dp(n-1)-1。	dp(0)=0
	第 k 區間	p^{k-1}≦n≦p^{k}-1 為數列{dp(n)}第 k 區間。	

貳、文獻探討

一、$H2(2^k)=2$ 的直觀觀察與猜測

先直觀觀察 $1\leqq n\leqq 8$，再猜測一般式如下表。

表六、$1\leqq n\leqq 8$ 的 H2(n)

n	$\times 2^0$	$\times 2^1$	$\times 2^2$	$\times 2^3$	$\times 2^4$	G2(n)	H2(n)
1	1					1	1
2		1				1	2
3	3					-1	1
4			1			1	2
5	5					1	3
6		3				-1	2
7	7					-1	1
8				1		1	2
針對黃色網底 G2(n)=1，會有綠色 G2(n)=-1 對應抵銷。從 2^0 一直到 2^2，都是會出現一正一負的抵銷。只有在 $4=2^2\times 1$ 和 $8=2^3\times 1$，多出淡紫色 2 個 G2(n)=1。							

表七、$H2(2^k)=2$ 的猜測

	對應	被保留 G2（n）	$H2(2^k)$值
k=0		G2(1)=1	$H2(2^0)=1$
k=1		G2(1)=1=G2(2)	$H2(2^1)=2$
k=2	G2(1)=1 對應 G2(3)=-1	G2(2)=1=G2(4)	$H2(2^2)=2$
k=3	G2(1)=1 對應 G2(3)=-1 G2(5)=1 對應 G2(7)=-1	G2(4)=1=G2(8)	$H2(2^3)=2$
...			
猜測	G2(1)=1 對應 G2(3)=-1 G2(5)=1 對應 G2(7)=-1 G2(9)=1 對應 G2(11)=-1 ... $G2(2^k-3)=1$ 對應 $G2(2^k-1)=-1$ G2(4)=1 對應 G2(6)=-1 ... $G2(2^{k-2})=1$ 對應 $G2(2^k-2^{k-2})=-1$	$G2(2^{k-1})=1=G2(2^k)$	$H2(2^k)=2$

二、網友的存在性証明

再看網友針對 $H2(2^k)=2$ 現象的討論。

$G2(1)=1$ 對應 $G2(3)=-1$，$G2(5)=1$ 對應 $G2(7)=-1$，…，$G2(2^{k-2})=1$ 對應 $G2(2^k-2^{k-2})=-1$，

$G2(2)=G2(2\times1)=G2(1)$，$G2(4)=G2(2\times2)=G2(2)$，$G2(6)=G2(2\times3)=G2(3)$，…，$G2(2^k)=G2(2\times2^{k-1})=G2(2^{k-1})$，

設 n 是偶數時，數列{G2（n）}奇數項是輪流以 1 和−1 出現，$H21(n)=0$。

因為，$H2(n)=H21(n)+H22(n)$。$H2(n)=H22(n)$。

推理：$H2(2^k)=H22(2^k)=H2(2^{k-1})$。

直觀觀察 $H2(2)=2$，k 為自然數，$2=H2(2^1)=H2(2^2)=H2(2^3)=\cdots=H2(2^k)$；$H2(2^k)=2$。網友對於數列{d2(n)}中第 k 區間存在 $d2(n)=k$，取 $J(k)=n-2^{k-1}+1$ 使 $d2(n)=k$，分成奇數和偶數討論如下表。

表八、數列{d2(n)}中第 k 區間存在 d2(n)=k

	奇數 k	偶數 k
d2(n)=k	取 n $=2^{k-1}-1+(2+2^2+2^4+\cdots+2^{k-3})$ $=2^{k-1}-1+J(k)$ $J(k)=2+2^2+2^4+\cdots+2^{k-3}$	取 n $=2^{k-1}-1+(1+2+2^3+\cdots+2^{k-3})$ $=2^{k-1}-1+J(k)$ $J(k)=1+2+2^3+\cdots+2^{k-3}$
網友證明	d2(n) $=d2(2^{k-1}-1)+H2(J(k))$ $=1+2+(k-3)$ =k。……………（公式二）	d2(n) $=d2(2^{k-1}-1)+H2(J(k))$ $=1+1+(k-2)$ =k。…………（公式三）

公式一，每一個區間存在 d2(n)=1；公式二及公式三，第 k 區間存在 d2(n)=k，同時，$G2(n)=\pm1$，因此，數列{d2(n)}中每一正整數出現無窮多次。

叁、任何正整數會出現在數列{d2(n)}

將表六延伸，以 G2(n)對應方式如表九所示。把不大於 n 的自然數的 G2(n)各欄累計和為 d2(n)。

如右表，紅色框框，d2(20)的 2^{k-1} 欄位，2^0 欄是 0，2^1 欄、2^2 欄、2^3 欄和 2^4 欄都是 1。0+1+1+1=4 和 d2(20)=4 吻和。

因為每一對的對應都是 G2(n)=1 先出現，再 G2(n)=-1 隨後出現，對於所有 2^{k-1} 欄內 G2（n）和不是 0 就是 1，各欄 G2（n）和為非負整數。

d2(n)=G2(n)+d2(n-1)，G2(n)=±1。任何正整數出現在數列{d2(n)}。

表九、G2(n)對應關方式

G2(n)	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	…
1	1	2	4	8	16	
-1	3	6	12	24	48	
1	5	10	20	40	80	
-1	7	14	28	56	112	
1	9	18	36	72	144	
-1	11	22	44	88	176	
1	13	26	52	104	208	
-1	15	30	60	120	240	
1	17	34	68	136	272	
-1	19	38	76	152	304	
d2(20)	0	1	1	1	1	
欄和	0、1	0、1	0、1	0、1	0、1	

肆、二進位法

一、二進位轉換法的直觀觀察及猜測

讓我們對 1≦n≦10 的自然數做二進位法直觀觀察及猜測，如下表。

表十、二進位轉換法的直觀觀察

n	d2(n)	n	d2(n)
1 = $(1)_2$	d2(n)=1	2 = $(10)_2$	d2(n)=2
3 = $(11)_2$		4 = $(100)_2$	
7 = $(111)_2$		6 = $(110)_2$	
5 = $(101)_2$	d2(n)=3	8 = $(1000)_2$	
9 = $(1001)_2$		10= $(1010)_2$	d2(n)=4

表十一、二進位轉換法的猜測

猜測	例子	內容
猜測一	1、3、7 都是 2^k-1，以二進位法都是 $(111\cdots111)_2$。	猜測連續出現 111…111 時，d2(n)值都不會增加。
猜測二	4 和 8，分別為 $(100)_2$和 $(1000)_2$都是同樣 d2(n)=2。	連續出現 000…000 時，d2(n)值都不會增加。
猜測三	1= $(1)_2$和 2= $(10)_2$的比較；3= $(11)_2$和 4= $(110)_2$的比較；d2(n)都增加 1。	增加 1 個 10 型，d2(n)值會增加 1。
猜測四	4= $(100)_2$和 5= $(101)_2$的比較；8= $(1000)_2$和 9= $(1001)_2$的比較；d2(n)都增加 1。	增加 1 個 01 型，d2(n)值會增加 1。
猜測五	2= $(10)_2$和 3= $(11)_2$的比較；6= $(110)_2$和 7= $(111)_2$的比較；d2(n)減少 1。	減少 1 個 10 型，d2(n)值會減少 1。
猜測六	5= $(101)_2$和 6= $(110)_2$，d2(n)減少 1。	減少 1 個 01 型，d2(n)值會減少 1。
猜測七	由上表的直觀觀察， d2(n)值都發現少 1 個 1，	每個二進位法之前，再加 1 個 0，最後計算 01 型數目和 10 型數目總和。
舉例	n=10= $(1010)_2$，也就是十進位的 10 變成二進位的 $(1010)_2$。在 1010 前加 1 個 0，使得 $(1010)_2$變成 01010，再計算 01010 中，由右向左出現 01 有 2 次及 10 各有 2 次， 01 型式和 10 型式共有 4 次。d2(10)=4。	

二、以數學歸納法證明二進位法快速轉換方法

$n=1=(1)_2$，變成 01 型只有 1 個，$d2(1)=d2(0)+1=0+1=1$；$n=1$ 時，顯然成立。

當 $n\leqq t$，$t=(b_s\cdots b_u\cdots b_3b_2b_1b_0)_2$，假設二進位法快速轉換方法成立。$s\geqq u\geqq 0$，$b_s=1$。

當 $n=t+1$ 時，分成四種情形討論，如下表。

表十二、當 n=t+1 時，二進位法快速轉換方法證明

	情況一	情況二
t	$t=(b_s\cdots b_ub_{u-1}\cdots b_3b_2b_1b_0)_2$， $b_0=0$， $b_1=0$， $t=(1{*}{*}{*}00)_2$，	$t=(b_s\cdots b_ub_{u-1}\cdots b_3b_2b_1b_0)_2$ $b_0=0$， $b_1=1$， $t=(1{*}{*}{*}10)_2$，
n=t+1，定義	$t+1=(1{*}{*}{*}01)_2$， $t+1=(1{*}{*}{*}01)_2\times 2^0$， $Q2(t+1)=(1{*}{*}{*}01)_2\equiv 1 \pmod 4$， $G2(t+1)=1$， $d2(t+1)=d2(t)+G2(t+1)=d2(t)+1$	$t+1=(1{*}{*}{*}11)_2$， $t+1=(1{*}{*}{*}11)_2\times 2^0$， $Q2(t+1)=(1{*}{*}{*}11)_2\equiv 3 \pmod 4$， $G2(t+1)=-1$， $d2(t+1)=d2(t)+G2(t+1)=d2(t)-1$
n=t+1，二進位	t—>t+1：01***00 ————>01***01 增加 1 個 01 型，$G2(t+1)=1$， $d2(t+1)= d2(t)+1$	t—>t+1：01***10 ————>01***11 減少 1 個 10 型，$G2(t+1)=-1$， $d2(t+1)= d2(t)-1$
	情況三	情況四
t	$t=(b_s\cdots b_ub_{u-1}\cdots b_3b_2b_1b_0)_2$，$b_0=1$， 由右至左 2^0 位到 2^{u-1} 位都是 1， 2^u 位和 2^{u+1} 位都是 0， $t=(1{*}{*}{*}00111\cdots111)_2$，	$t=(b_s\cdots b_ub_{u-1}\cdots b_3b_2b_1b_0)_2$，$b_0=1$， 由右至左 2^0 位到 2^{u-1} 位都是 1， 2^u 位是 0 而 2^{u+1} 位是 1， $t=(1{*}{*}{*}10111\cdots111)_2$，
n=t+1，定義	$t+1=(1{*}{*}{*}01000\cdots000)_2$， $t+1=(1{*}{*}{*}01)_2\times 2^u$， $Q2(t+1)=(1{*}{*}{*}01)_2\equiv 1 \pmod 4$， $G2(t+1)=1$， $d2(t+1)=d2(t)+G2(t+1)=d2(t)+1$	$t+1=(1{*}{*}{*}11000\cdots000)_2$， $t+1=(1{*}{*}{*}11)_2\times 2^u$， $Q2(t+1)=(1{*}{*}{*}11)_2\equiv 3 \pmod 4$， $G2(t+1)=-1$， $d2(t+1)=d2(t)+G2(t+1)=d2(t)-1$
n=t+1，二進位	t——>t+1：01***00111…111 —————>01***01000…000 增加 1 個 10 型，$G2(t+1)=1$， $d2(t+1)= d2(t)+1$	t——>t+1：01***10111…111 —————>01***11000…000 減少 1 個 01 型，$G2(t+1)=-1$， $d2(t+1)= d2(t)-1$

當 $n=t+1$，被證明成立。用數學歸納法證明二進位法快速轉換方法成立。

伍、唯一性

由表五及表七而知數列{d2(n)}的 G2(n)是先出現 G2(n)=1 再出現 G2(n0=-1，因此，除了 d2(0)=0 之外，數列{d2(n)}中全部 d2(n)均為自然數，公式一可以知道第 k 區間存在 d2(2^k-1)=1，第 k 區間極小值是 1。文獻已經證明第 k 區間存在 d2(n)=k。

但，第 k 區間極大值是否為 k？是否 d2(n)=k 唯一？下面將做探討唯一性。

當十進位 n=2^k-1 變成二進位是$(111\cdots111)_2$連續出現個 1，轉換後成為 0111…111，只有 1 個 01 型，第 k 區間極小值的唯一性被證明。

為保證第 k 區間 d2(n)=k 為最大且是唯一，被設計成 01010101…出現，不會連續出現 11 和不會連續出現 00，以得到 01 型或 10 型數目最大。

表十三、第 k 區間極大值 d2(n)=k 的唯一性

思考來源	奇數 k 區間	偶數 k 區間
二進位法	$(101{*}{*}{*}{*}01)_2$被設計 成 010101…01 的出現。 01 型有 $\frac{k+1}{2}$ 而 10 型有 $\frac{k-1}{2}$， $\frac{k+1}{2}+\frac{k-1}{2}=$k	$(101{*}{*}{*}{*}10)_2$被設計 成 0101010…010 的出現。 01 型有 $\frac{k}{2}$ 而 10 型有 $\frac{k}{2}$， $\frac{k}{2}+\frac{k}{2}$=k。

由上面分析而知，數列{d2(n)}中第 k 區間最大值且是唯一存在 d2(n)=k，同時，第 k 區間唯一存在最小值是 d2(2^k-1)=1， G2(n)=±1，第 k 區間內必然從 1 到 k 的正整數字至少出現 1 次。k 是自然數，可以證明數列{d2(n)} 中每一正整數會出現無窮多次。

陸、區間極值

一、區間極值

先直觀觀察數列{d2(n)}的區間極小值及區間極大值如下表。

表十四、數列{d2(n)}的區間極小直及區間極大值

區間	起點	終點	區間極小值	區間極大直	出現區間極大值時的 n
1	1	1	d2(1)=1	d2(1)=1	1
2	2	3	d2(3)=1	d2(2)=2	2
3	4	7	d2(7)=1	d2(5)=3	5
4	8	15	d2(15)=1	d2(10)=4	10
5	16	31	d2(31)=1	d2(21)=5	21
6	32	63	d2(63)=1	d2(42)=6	42
7	64	127	d2(128)=1	d2(85)=7	85
8	128	255	d2(255)=1	d2(170)=8	170
9	256	511	d2(511)=1	d2(341)=9	341
10	512	1023	d2(1023)=1	d2(682)=10	682
11	1024	2047	d2(2047)=1	d2(1365)=11	1365
12	2048	4095	d2(4095)=1	d2(2730)=12	2730
13	4096	8191	d2(8191)=1	d2(5461)=13	5461
14	8192	16383	d2(16383)=1	d2(10922)=14	10922
15	16384	32767	d2(32767)=1	d2(21845)=15	21845
16	32768	65535	d2(65535)=1	d2(43690)=16	43690

直觀觀察發現區間極大值 d2(n)=k 的 n 值，有一些有趣的現象。

奇數 k 區間：5=1×4+1，21=5×4+1，85=21×4+1，341=85×4+1，1365=341×4+1，
1365=341×4+1，5461=1365×4+1，21845=5461×4+1。

相鄰區間：2=1×2，10=5×2，42=21×2，170=85×2，682=341×2，
2730=1365×2，10922=5461×2，43690=21845×2。

數列中{d2(n)}第 k 區間極小值 d2(n)=1 和區間極大值 d2(n)=k 在第 k 區間都是唯一存在，因此，定義極小值反函數 MIN2(k)函數及極大值反函數 MAX2(k)函數如下。

表十五、區間極值反函數

符號	區間極小值反函數 MIN2(k)	區間極大值反函數 MAX2(k)
定義	第 k 區間唯一存在 $d2(2^k-1)=1$， 定義 $MIN2(k)= 2^k-1$	第 k 區間 $d2(2^{k-1}-1+J(k))=k$ 唯一存在，定義 $MAX2(k)= 2^{k-1}-1+J(k)$
遞迴關係	$MIN2(k)+2^k=MIN2(k+1)$	奇數 k 時： $MAX2(k)+2^{k+1}=MAX2(k+2)$ $MAX2(k+2)=4\times MAX2(k)+1$ $MAX2(k+1)=2\times MAX(k)$
		偶數 k 時： $MAX2(k)+2^{k+1}=MAX2(k+2)$ $MAX2(k+2)=4\times MAX2(k)+2$
證明	$MIN2(k)=(111\cdots111)_2$ MIN2(k)以二進位法是連續 k 個 1 MIN2(k)比 MIN2(k+1)少 1 個 2^k， 所以，$MIN2(k)+2^k=MIN2(k+1)$。	$MAX2(k)=(101010\cdots)_2$ 分成奇數 k 情況和偶數 k 情況： 奇數 k 時 $MAX2(k) =(101010\cdots101)_2$， $MAX2(k+2)=(101010\cdots10101)_2$， MAX2(k)比 MAX2(k+2)少 1 個 2^{k+1}， $MAX2(k)+2^{k+1}=MAX2(k+2)$。 $MAX2(k+2)$ $=(101010\cdots10101)_2$ $=(101010\cdots10100)_2+1_2$ $=(101010\cdots101)_2\times(100)_2+1_2$ $=4\times MAX2(k)+1$ $MAX2(k+1)$ $=(101010\cdots1010)_2$ $=(101010\cdots101)_2\times 2$ $=2\times MAX(k)$
		偶數 k 時 $MAX2(k) = (101010\cdots10)_2$， $MAX2(k+2)= (101010\cdots1010)_2$， MAX2(k)比 MAX2(k+2)少 1 個 2^{k+1}， $MAX2(k)+2^{k+1}=MAX2(k+2)$。

二、J(k)與MAX2(k)的關係

數列{d2(n)}第k區間取n=MAX2(k)使得d2(n)=k，定義MAX2(k)=2^{k-1}-1+J(k)，J(k)與MAX2(k)的關係如下：

表十六、J(k)與MAX2(k)的關係

	奇數k	偶數k
J(k)定義	MAX2(k)=2^{k-1}-1+J(k)， J(k)=MAX2(k)-2^{k-1}+1	MAX2(k)=2^{k-1}-1+J(k)， J(k)=MAX2(k)-2^{k-1}+1
MAX2(k)	MAX2(1)=1，3×1+1=2^2 MAX2(3)=5，3×5+1=2^4 MAX2(5)=21，3×21+1=2^6 MAX2(7)=85，3×85+1=2^8 MAX2(9)=341，3×341+1=2^{10} MAX2(11)=1365，3×1365+1=2^{12} MAX2(13)=5461，3×5461+1=2^{14} MAX2(15)=21845，3×21845+1=2^{16} 猜測：3×MAX2(k)+1=2^{k+1}	MAX2(k) =$(101010\cdots1010)_2$ =$(101010\cdots101)_2\times2$ =2×MAX(k-1) $3\times\frac{MAX\,2(k)}{2}+1$ =3×MAX2(k-1)+1 =2^k
遞迴關係	J(1)=1 J(3)=2=1+1=MAX2(1)+1 J(5)=6=5+1=MAX2(3)+1 J(7)=22=21+1=MAX2(5)+1 J(9)=86=85+1=MAX2(7)+1 J(11)=342=341+1=MAX2(9)+1 J(13)=1366=1365+1=MAX2(11)+1 J(15)=5462=5461+1=MAX2(13)+1 猜測：k≧3，J(k)=MAX2(k-2)+1 證明： 表十五，MAX2(k)+2^{k+1}=MAX2(k+2) MAX2(k-2) =MAX2(k)-2^{k-1} J(k) =MAX2(k)-2^{k-1}+1 =MAX2(k-2)+1	J(2)=1 J(4)=3=2+1=MAX2(2)+1 J(6)=11=10+1=MAX2(4)+1 J(8)=43=42+1=MAX2(6)+1 J(10)=171=170+1=MAX2(8)+1 J(12)=683=682+1=MAX2(10)+1 J(14)=2731=2730+1=MAX2(12)+1 J(16)=10923=10922+1=MAX2(14)+1 猜測：k≧4，J(k)=MAX2(k-2)+1 證明： 表十五，MAX2(k)+2^{k+1}=MAX2(k+2) MAX2(k-2)=MAX2(k)-2^{k-1} J(k) =MAX2(k)-2^{k-1}+1 =MAX2(k-2)+1

柒、研究討論

這個部份研究討論和下個部份延伸研究有六個主題被命名為「＊＊＊猜測」。

「＊＊＊」是我;「猜測」是直觀有數學現象，證明則有待我的努力。

一、落點分析

從 ABCD 法中體會研究的歡樂與辛苦。

為了確實研究 MAX2(k)的落點，我是耗盡所有的精力研究。好幾次，很想放棄這個研究。但是，在老師的鼓勵下，寒假已經發現數列{d2(n)}第 3 區間開始，每個區間的數字個數都是 4 的倍數，所以，我自己命名 ABCD 法，定義及直觀觀察如下。

表十七、ABCD 法的定義

定義	A	B	C	D
G2（n）	（1、1、1、-1）	（1、1、-1、-1）	（-1、1、1、-1）	（-1、1、-1、-1）
增減	＋2	0	0	－2

表十八、ABCD 法的直觀觀察

區間	1	2	3	4	5
G2(n)	1	1	1	1	1
		-1	1	1	1
			-1	1	1
			-1	-1	-1
				-1	1
				1	1
				-1	-1
				-1	-1
					-1
					1
					1
					-1
					-1
					1
					-1
					-1

由 Excel 2003 可以找到 16 區間以內 MAX2(k)所在區間組別的 G2(n)如下。

表十九、MAX2(k)的落點預測

	區間	MAX2(k)	MAX2(k)所在區間組別的 G2(n)	ABCD
奇數 k	1	1		
	3	5	第 1 組(1、1、-1、-1)	B 類
	5	21	第 2 組(1、1、-1、-1)	B 類
	7	85	第 6 組(1、1、-1、-1)	B 類
	9	341	第 22 組(1、1、-1、-1)	B 類
	11	1365	第 86 組(1、1、-1、-1)	B 類
	13	5461	第 342 組(1、1、-1、-1)	B 類
	15	21845	第 1366 組(1、1、-1、-1)	B 類
	預測奇數 K≧5		第(MAX2(k-4)+1)組 (1、1、-1、-1)	B 類
	區間	MAX2(k)	MAX2(k)所在區間組別的 G2(n)	ABCD
偶數 k	2	2		
	4	10	第 1 組(1、1、1、-1)	A 類
	6	42	第 3 組(1、1、1、-1)	A 類
	8	170	第 11 組(1、1、1、-1)	A 類
	10	682	第 43 組(1、1、1、-1)	A 類
	12	2730	第 171 組(1、1、1、-1)	A 類
	14	10922	第 683 組(1、1、1、-1)	A 類
	16	43690	第 2731 組(1、1、1、-1)	A 類
	預測偶數 K≧6		第(MAX2(k-4)+1)組(1、1、1、-1)	A 類

奇數 K 區間 MAX2(k)的落點會在該區間第(MAX2(k-4)+1)組 B 類;偶數 k 區間 MAX2(k)的落點會在該區間第(MAX2(k-4)+1)組 A 類。為何如此?我是花了一個寒假,研究其原因。研究數學的辛苦真是「筆墨難以形容」。就因為,我只能發現其數學現象,無法做的嚴格證明;因此,被命名為「＊＊＊第一猜測」。

二、J(k)加法次序可交換性

分別直觀觀察奇數 k 區間和偶數 k 區間如下，再討論 J(k)加法次序可交換性。

表二十、第 1、3、5、7 區段 G2(n)及 d2(n)直觀觀察

第 1 區間			第 3 區間			第 5 區間			第 7 區間		
n	G2(n)	d2(n)	n	G2(n)	d2(n)	n	G2(n)	d2(n)	n	G2(n)	d2(n)
1	1	1	4	1	2	16	1	2	64	1	2
			5	1	3	17	1	3	65	1	3
			…			18	1	4	66	1	4
						19	-1	3	67	-1	3
						20	1	4	68	1	4
						21	1	5	69	1	5
						…			70	-1	4
									71	-1	3
									72	1	4
									73	1	5
									74	1	6
									75	-1	5
									76	-1	4
									77	1	5
									78	-1	4
									79	-1	3
									80	1	4
									81	1	5
									82	1	6
									83	-1	5
									84	1	6
									85	1	7
									…		
J(1)=1			J(3)=2			J(5)=6			J(7)=22		
粉紅色網底 G2(n)=1 只有 1 次，G2(n)和為 1，只有第 1 區間； 黃色網底 G2(n)=1 只有 2 次，G2(n)和為 2，有第 3、5、7 區間； 綠色網底 G2(n)=1 有 3 次，G2(n)=-1 有 1 次，G2(n)和為 2，有第 5、7 區間； 藍色網底 G2(n)=1 有 9 次，G2(n)=—1 有 7 次，G2(n)和為 2，有第 7 區間。											

先以第五區間 J(5)=6 為例，再考慮第 7 區間如下：

d2(21)=d2(15)+H2(2)+H2(4)=1+2+2=d2(15)+H2(4)+H2(2)，先加 H2(2)後再加 H2(4)或是先加 H2(4)後再加 H2(2)，d2(21)=5，d2(17)=3=d2(19)。

表二十一、J(7)=22 加法次序可交換性

第 7 區間								
n	G2(n)	d2(n)	第 1 類	第 2 類	第 3 類	第 4 類	第 5 類	第 6 類
64	1	2						
65	1	3	d2(n)=3	d2(n)=3				
66	1	4						
67	-1	3			d2(n)=3	d2(n)=3		
68	1	4						
69	1	5	d2(n)=5		d2(n)=5			
70	-1	4						
71	-1	3						
72	1	4						
73	1	5						
74	1	6						
75	-1	5						
76	-1	4						
77	1	5						
78	-1	4						
79	-1	3					d2(n)=3	d2(n)=3
80	1	4						
81	1	5		d2(n)=5			d2(n)=5	
82	1	6						
83	-1	5				d2(n)=5		d2(n)=5
84	1	6						
85	1	7	d2(n)=7	d2(n)=7	d2(n)=7	d2(n)=7	d2(n)=7	d2(n)=7
…								
J(7)=22			2+4+16	2+16+4	4+2+16	4+16+2	16+2+4	16+4+2
第 7 區間唯一存在 d2(85)=7，85=63+2+4+16，針對 2、4、16 的加法次序有 3！的排法。每一類排法 d2(n)值依序為 d2(n)=3、d2(n)=5 及 d2(n)=7 的增加。這種 d2(n)值增加次序和 2、4、16 佔用數字的順序沒有關係，稱為加法次序可交換性。								

表二十二、第 2、4、6 區段 G2(n)及 d2(n)直觀觀察

2 區間			4 區間			6 區間		
n	G2(n)	d2(n)	n	G2(n)	d2(n)	n	G2(n)	d2(n)
2	1	2	8	1	2	32	1	2
3	-1	1	9	1	3	33	1	3
			10	1	4	34	1	4
			11	-1	3	35	-1	3
			12	-1	2	36	1	4
			13	1	3	37	1	5
			14	-1	2	38	-1	4
			15	-1	1	39	-1	3
						40	1	4
						41	1	5
						42	1	6
						43	-1	5
						44	-1	4
						…		
J(2)=1			J(4)=3			J(6)=11		

上表中，黃色網底 G2(n)=1 只有 1 次，G2(n)和為 1，出現在第 2、4、6 區間；淡綠色網底 G2(n)=1 有 2 次，G2(n)和為 2，只出現在第 4、6 區間；藍色網底 G2(n)=1 有 5 次，G2(n)=－1 有 3 次，G2(n)和為 2，只出現在第 6 區間。

其實，L2（k）和 J(k)一樣，具備有減法次序可交換性。

如數列{d2(n)}第 4 區間，d2(15)

=d2(10)+L2(16-1)+L2(16-2)

=4-1-2

=4-2-1

=d2(10)+L2(16-2)+L2(16-1)。

這種 J(k)加法次序可交換性和 L2(2^k-2^v)減法次序可交換性，我只能發現其數學現象而無法證明，故稱為「＊＊＊第二猜想」。

三、J(k)與 S(k)的 1 對 1 對應

先直觀觀察 k=4 及 k=5 的對應關係，再討論 J(k)與 L(k)對應關係。

表二十三、k=４區間 J(k)與 S(k)對應

<table>
<tr><td>n 值</td><td colspan="4">G2(n)</td><td>H2(２^{0})對應 L2($2^{k}-2^{0}$)</td><td>H2(2^{1})對應 L2（$2^{k}-2^{2}$）</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>H2(２^{0})＝１</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">H2(2^{1})=2</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">L2（$2^{4}-2^{2}$）=-2</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td>L2($2^{4}-2^{0}$)＝-1</td><td></td></tr>
<tr><td>說
明</td><td colspan="6">H2（2^{0}）+L2（$2^{k}-2^{0}$）=１－１=0，
H2（2^{1}）+L2（$2^{k}-2^{2}$）＝2-２=0。
H2（2^{0}）＝１，佔１個數。
L2（$2^{k}-2^{0}$）=-１，佔１個數。
H2（2^{1}）=2，佔２個數。
L2（$2^{k}-2^{2}$）＝-２，佔４個數。
１＋１＋２＋４＝８，再比較 n=８至１５，計８個數字，所佔數字吻合。
第 4 區間最大值：d2(10)=d2(7)+H2(2^{0})+H2(2^{1})=1+1+2=4。
猜想
H2（２^{5}）=2 和 L2（$2^{k}-2^{6}$）＝-２對應，
H2（２^{7}）=2 和 L2（$2^{k}-2^{8}$）＝-２對應，
…
H2（２$^{K-3}$）=2 和 L2（$2^{k}-2^{K-2}$）＝-２對應，所佔的位置在偶數 K
$1+1+2+2^{2}+2^{3}+2^{4}+2^{5}+2^{6}+2^{7}\cdots+2^{k-2}=2^{k-1}$，n 由２$^{k-1}$至２^{k}-1 的和是２$^{k-1}$
吻合。</td></tr>
</table>

表二十四、k=5 區間 J(k)與 S(k)對應

<table>
<tr><td>n 值</td><td colspan="5">G2(n)</td><td>H2(2)對應 L2（2^k-2）</td><td>H2(2^2)對應 L2（2^k-2^3）</td></tr>
<tr><td>16</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td rowspan="2">H2（2^1）＝2</td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">H2（2^2）=2</td></tr>
<tr><td>19</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>22</td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="8">L2（2^5-2^3）＝-2</td></tr>
<tr><td>23</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>24</td><td></td><td></td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>25</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>26</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>27</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>28</td><td></td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>29</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>30</td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">L2（2^5-2）=-2</td><td></td></tr>
<tr><td>31</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>說明</td><td colspan="7">H2（2^1）+L2（2^5-2）=2-2=0，
H2（2^1）+L2（2^5-2^3）＝2-2=0。
H2（2）＝2，佔2個數。
L2（2^5-2）=-2，佔2個數。
H2（2^2）=2，佔4個數。
L2（2^5-2^3）＝-2，佔8個數。
2＋2＋4＋8＝16，比較 n=16 至31計16個數字。佔的數字吻合。
第 5 區間最大值：d2(21)=d2(15)+H2(2^1)+H2(2^2)=1+2+2=5。
延續上面的對應，猜想：
H2（2^4）=2 和 L2（2^k-2^5）＝-2對應，
H2（2^6）=2 和 L2（2^k-2^7）＝-2對應，
…
H2（2^{K-3}）=2 和 L2（2^k-2^{K-2}）＝-2對應。
所佔的位置在奇數 K，$2+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7\cdots+2^{k-2}=2^{k-1}$，剛好和 n 由$2^{k-1}$至$2^k-1$ 2^{k-1}的數字吻合。</td></tr>
</table>

由上面發現 J(k)與 S(k)出現 1 對 1 對應，S(k)的表示模式又和 k 的奇偶性有關。

為何如此？證明有待我的努力，所以，被列為「＊＊＊第三猜測」。

四、角谷猜想

「角谷猜想」是網友在網路討論中所提到的數學現象。

奇數 k 區間 MAX2(k)經一次奇運算後，奇數 MAX2(k)會變成 2^{k+1}；偶數 k 區間 MAX2(k)先經過一次偶運算，再一次奇運算後，偶數 MAX2(k)會變成 2^{k}。此種 MAX2(k)的變化情形，讓我有興趣探討「角谷猜想」。

下表就是利用十進位的 n，1≦n≦21 做角谷猜想的運算。

角谷猜想運算的最後以 4、2、1 的循環出現以淡紫色部分，若運算中，相鄰的數字出現同樣的數字時，則以淡藍色表示之。淡紫色的關係包含於淡藍色的關係。

表二十五、角谷猜想之直觀觀察

二進位	n	角谷猜想之運算												
1	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4
10	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1
11	3	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1
100	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2
101	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2
110	6	3	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2
111	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8
1000	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4
1001	9	28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10
1010	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4
1011	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2
1100	12	6	3	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4
1101	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4
1110	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16
1111	15	46	23	70	35	106	53	160	80	40	20	10	5	16
10000	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1
10001	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	4
10010	18	9	28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20
10011	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20
10100	20	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1
10101	21	64	32	16	8	4	2	1	4	2	1	4	2	1

下表是角谷猜想的一些規則因為沒有嚴謹的証明，所以被命名「＊＊＊第四猜測」。

表二十六、＊＊＊第四猜測

<table>
<tr><td>規則</td><td>內容</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 1</td><td>當 $n=2^0$ 時，經過 1 次奇運算後，進入 4、2、1 循環。</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 2</td><td>當 $n=2^1$ 時，經過 1 次偶運算後，進入 4、2、1 循環。</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 3</td><td>當 $n=2^2$ 時，直接進入 4、2、1 循環。</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 4</td><td>當 k≧3，$n=2^k$ 時，經過 k-2 次偶運算後，進入 4、2、1 循環。</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 5</td><td>對奇數 k 區間，奇數 MAX2(k)經過一次奇運算後變成 2^{k+1}。</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 6</td><td>對偶數 k 區間，偶數 MAX2(k)先經過一次偶運算和一次奇運算後變成 2^k。</td></tr>
<tr><td>角谷猜想規則 7</td><td>當 $n=(***100)_2$，n 依序 2 次偶運算 1 次奇運算後的值和 n+1 依序 1 次奇運算 2 次偶運算後的值相同，具有此特性的數週期是 8。</td></tr>
<tr><td colspan="2">角谷猜想規則 7 證明：

先證明數值相同：
設 $n=(***100)_2$=4F，$n+1=(***101)_2$=4F+1。
n　=4F———————＞2F————————＞F————————＞3F+1
n+1=4F+1——————＞12F+4——————＞6F+2———————＞3F+1，得証。

再證明猜測 7，具有此種特性的週期是 8：
當 $n=(***100)_2$＝4F，顯然，F 是奇數， F+1 是偶數，F+2 是奇數。
設 n=4(F+1)=4F+4————＞2F+2——————＞F+1，偶數————＞必須進行偶運算。
所以，n=4(F+1)沒有猜測 7 的條件。
設 n=4(F+2)=4F+8————＞2F+4——————＞F+2——————＞3F+7
則 n+1=4F+9———————＞12F+28————＞6F+14——————＞3F+7，得証。</td></tr>
</table>

人類已經花了不少時間及精力，處理「角谷猜想」。

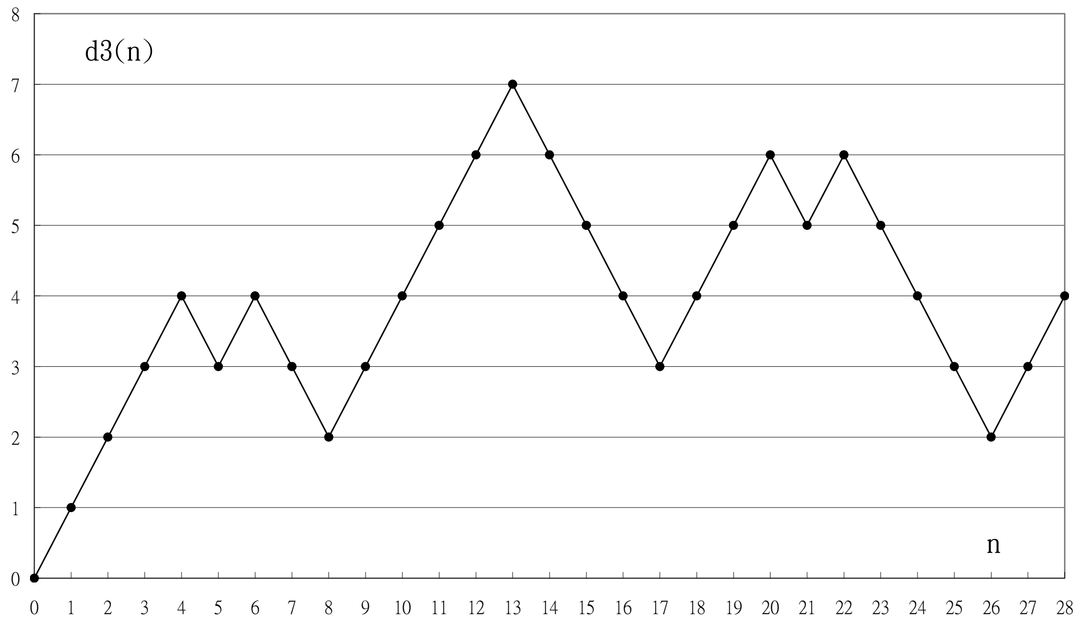
當然，和前輩一樣，我也有一個夢想就是破解「角谷猜想」。如果，哪一天，像本研究的二進位法，利用二進位法的前面補上 1 個 0，再利用「01」及「10」個數猜測 d2(n)的模式。借用二進位法去創造一個「證明角谷猜想」的規則，那麼，千古難題的角谷猜想是不是會被解決？

捌、延伸研究

一、數列{dp(n)}

針對數列{dp(n)}，本部份猜測其區間極值、討論數列{dp(n)}分佈對稱性。

先直觀觀察數列{d3(n)}如下，再猜測。



圖二、數列{d3(n)}在 n=0~28 的直觀觀察

表二十七、{d3(n)}直觀觀察

區間	n 範圍	區間內最大的 d3(n)值
1	1~2	d3(2)=2
2	3~8	d3(4)=d3(6)=4
3	9~26	d3(13)=7
4	27~80	d3(40)=10
5	81~242	d3(121)=13
6	243~728	d3(364)=16
7	729~2186	d3(1093)=19
8	2187~6560	d3(3280)=22
猜測		
k	3^{k-1}~$3^{k}-1$	d3($\frac{3^k-1}{2}$)=3k−2，k＞1

定義數列{d3(n)}第 k 區間為 $3^{k-1} \leqq n \leqq 3^k-1$，直觀觀察數列{d3(n)}，除第 1 區間 d3(2)=2，第 2 區間 d3(4)=d3(6)=4 之外，猜測第 k 區間最大的 d3(n)值 3k−2，第 k 區間最小的 d3(n)值 $d3(3^k-1)=2$。

再直觀觀察質數 p=5、7、11 的情形做表格的直觀與猜測如下表。

表二十八、數列{d5 (n)}的直觀與猜測

區間	範圍	第 k 區間內{d5 (n)}最小值	第 k 區間內{d5 (n)}最大值
1	1~4	d5(1)=1	d5(4)=4
2	5~24	d5(24)=4	d5(12)=12
3	25~124	d5(124)=4	d5(62)=22
4	125~624	d5(624)=4	d5(312)=32
5	625~3124	d5(3124)=4	d5(1562)=42
6	3125~15624	d5(15624)=4	d5(7812)=52
猜測 k	5^{k-1}~5^k-1	$d(5^k-1)=4$	$d5(\frac{5^k-1}{2})=10k-8$，k＞1

表二十九、數列{d7 (n)}的直觀與猜測

區間	範圍	第 k 區間內{d7 (n)}最小值	第 k 區間內{d7 (n)}最大值
1	1~6	d7(1)=1	d7(6)=6
2	7~48	d7(48)=6	d7(24)=24
3	49~342	d7(342)=6	d7(171)=45
4	343~2400	d7(2400)=6	d7(1200)=66
5	2401~16806	d7(16806)=6	d7(8403)=87
猜測 k	7^{k-1}~7^k-1	$d(7^k-1)=6$	$d7(\frac{7^k-1}{2})=21k-18$，k＞1

表三十、數列{d11 (n)}的直觀與猜測

區間	範圍	第 k 區間內{d11 (n)}最小值	第 k 區間內{d11 (n)}最大值
1	1~10	d11(1)=1	d11(10)=10
2	11~120	d11(120)=10	d11(60)=60
3	121~1330	d11(1330)=10	d11(665)=115
4	1331~14640	d11(14640)=10	d11(7320)=170
猜測 k	11^{k-1}~11^k-1	$d11(11^k-1)=10$	$d11(\frac{11^k-1}{2})=55k-50$，k＞1

根據上面的直觀與猜測，嘗試以下表對於數列{dp(n)}第 k 區間的猜測。

表三十一、數列{dp (n)}的直觀與猜測

數列	區間最小值	區間最大值，k＞1
{d2(n)}	$d2(2^k-1)=1$	請參酌公式二及公式三。
{d3(n)}	$d3(3^k-1)=2$	$d3(\frac{3^k-1}{2})=3k-2$
{d5(n)}	$d5(5^k-1)=4$	$d5(\frac{5^k-1}{2})=10k-8$
{d7(n)}	$d7(7^k-1)=6$	$d7(\frac{7^k-1}{2})=21k-18$
{d11(n)}	$d11(11^k-1)=10$	$d11(\frac{11^k-1}{2})=55k-50$
猜測 {dp(n)}	$dp(p^k-1)=p-1$， k＞1	當質數 p≧3，$dp(\frac{p^k-1}{2})$ $=\frac{p(p-1)}{2}\times k-\frac{(p-1)^2}{2}$

對於數列{dp(n)}，第 k 區間（k＞1）發現下列數學現象：

（a）當 k=1，第 k 區間最小值：dp(1)=1。

（b）當 k＞1，第 k 區間最小值：$dp(p^k-1)=p-1$。

（c）數列{d2(n)}中小於 p-1 的自然數只會出現 1 次。

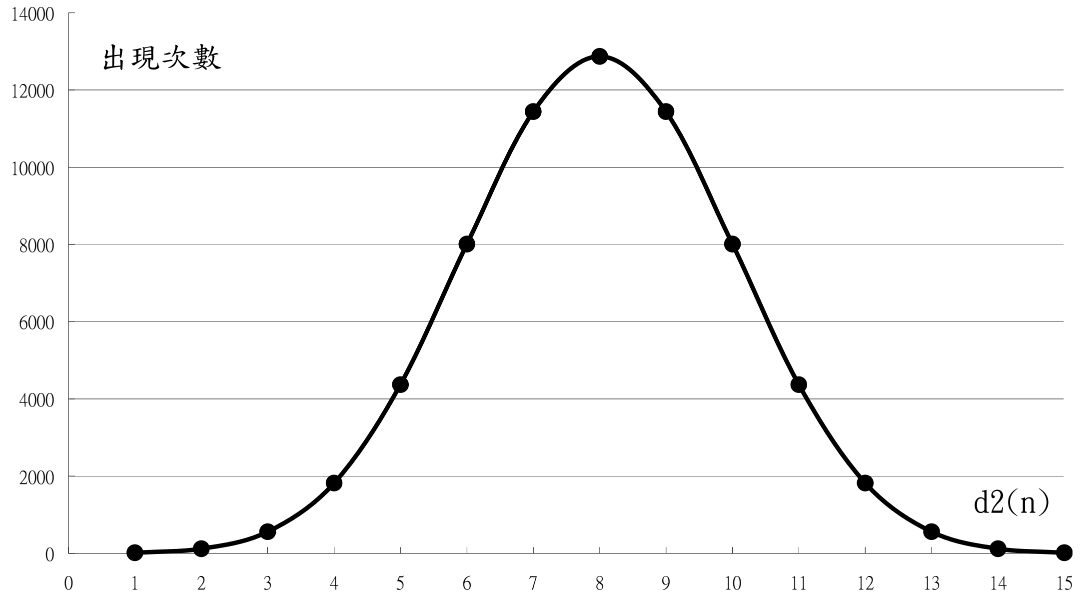
（d）數列{dp(n)}中 p-1 及大於 p-1 的自然數會出現無窮多次的。

（e）當質數 p＞2，第 k 區間最大值：$dp(\frac{p^k-1}{2})=\frac{p(P-1)}{2}\times k-\frac{(p-1)^2}{2}$

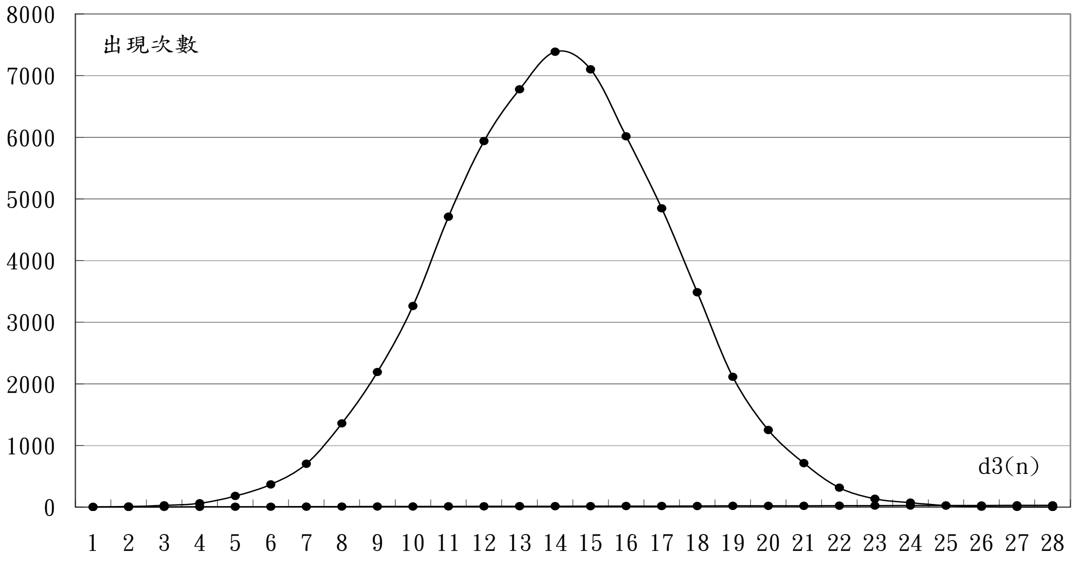
數列{dp(n)}第 k 區間的猜測並沒有被嚴謹證明，被稱為「＊＊＊第五猜測」。

二、出現次數的分佈對稱性

將表一中數列{d2(n)}前 65535 項出現分佈次數統計，以圖三表示；因為，$3^{10}-1=59048$，把數列{d3(n)}前 59048 項出現分佈次數如圖四所示。



圖三、數列{d2(n)}前 65535 項出現分佈次數



圖四、數列{d3(n)}前 59048 項出現分佈次數

數列{d2(n)}前 65535 項，除了 d2(n)=8 出現 12870 次 d2(n)=16 出現 1 次之外，d2(n)=x 出現次數和 d2(n)=16-x 出現次數相同，數列{d2(n)}有分佈對稱的現象。

數列{d3(n)}中分佈高峰是 d3(n)=14 出現 7387 次，次數分佈則沒有明顯對稱現象。為何會如此？嚴格證明有待努力，被稱為「＊＊＊第六猜測」。

玖、應用

二進位轉換法的應用可以使用在 d2(n)與 d2($[\frac{n}{2}]$)的降階關係，如下表。

表三十二、d2(n)與 d2($[\frac{n}{2}]$)的降階關係

<table>
<tr><td></td><td>n≡1 (mod 4)</td><td>n≡2 (mod 4)</td><td>n≡3 (mod 4)</td><td>n≡0 (mod 4)</td></tr>
<tr><td>舉例</td><td>d2(1)
=1
=d2(0)+1
=d2($[\frac{1}{2}]$)+1
d2($[\frac{1}{2}]$)
=d2(1)-1</td><td>d2(2)
=2
=d2(1)+1
=d2($[\frac{2}{2}]$)+1，
d2($[\frac{2}{2}]$)
=d2(1)-1</td><td>d2(3)
=1
=d2(1)
=d2($[\frac{3}{2}]$)，
d2($[\frac{3}{2}]$)
=d2(3)</td><td>d2(4)
=2
=d2(2)
=d2($[\frac{4}{2}]$)，
d2($[\frac{4}{2}]$)
=d2(4)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">二進位</td><td>01***01——>
01***0
減少 1 個 01 型。
d2($[\frac{n}{2}]$)=d2(n)-1</td><td>01***10——>
01***1
減少 1 個 10 型。
d2($[\frac{n}{2}]$)=d2(n)-1</td><td>01***11——>
01***1
沒增減數目。
d2($[\frac{n}{2}]$)=d2(n)</td><td>01***00——>
01***0
沒增減數目。
d2($[\frac{n}{2}]$)=d2(n)</td></tr>
<tr><td colspan="2">d2($[\frac{n}{2}]$)=d2(n)-1 定義為減 1 降階。</td><td colspan="2">d2($[\frac{n}{2}]$)=d2(n)定義為不減降階。</td></tr>
<tr><td>舉例</td><td colspan="4">二進位法：10＝$(1010)_2$———>01010，01 型 2 次，10 型 2 次，d2(10)=4。
降階關係：10≡2 (mod 4)，d2(5)=d2(10)-1，5≡1 (mod 4)，d2(2)=d2(5)-1，
2≡2 (mod 4)，d2(1)=d2(2)-1，1≡1 (mod 4)，d2(0)=d2(1)-1。
d2(0)=d2(1)-1=d2(2)-2=d2(5)-3=d2(10)-4，整理，d2(10)=4。</td></tr>
<tr><td>討論</td><td colspan="4">以計算速度，二進位法顯然比降階關係法快。
d2(n)與 d2($[\frac{n}{2}]$)降階關係可討論 dp(n)與 dp($[\frac{n}{p}]$)，以研究數列{dp(n)}。</td></tr>
</table>

拾、結論

設 k 為自然數，對於數列{d2(n)}，由公式一而知，d2（2^k－1）=1，k 是自然數，d，可以證明數列{d2(n)}中 1 會出現無窮多次。

由二進位法可以證明公式二及公式三，第 k 區間唯一存在 d2(n)=k，又因為 k 是自然數， d2(n)=G2(n)+d2(n-1)，G2(n)=±1，可以證明在數列{d2(n)}中每一個正整數都會出現無窮多次。

參考文獻

2009 年 1 月 2 日 www.chiuchang.org.tw/download/tt/2008/Junioralevel.pdf

2009 年 5 月 9 日
www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=3128&forum=7&4

公式檢索

＊＊＊猜想索引

【評語】080409

1、 題目相當艱深，處理的技巧性很高。

2、 討論相當完整，是一件非常不錯的科研作品。

3、 善用電腦來協助處理，是非常好的模式。