中華民國 第49屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080408

不只4種花色

學校名稱：臺北縣三峽鎮三峽國民小學

作者：	指導老師：
小五 劉盈吟 小五 賴泓霖 小五 劉弘蒲 小五 楊佳霖	龔凡凱

關鍵詞：窮舉法、同餘、n 種花色

不只 4 種花色

摘要

從撲克牌魔術出發，探索出二個原理，第一個關於操作手法；第二個和表演過程相關：完成本魔術至少要派 9 張牌。

另外，我們和之前國展國小組數學科中同樣探討撲克牌的作品(參見附錄一)不同的成果是：**提出二個數學定理，並得到一個一般化的結果：使用 n 種花色的撲克牌，本魔術的「最少派牌數」。**

撲克牌魔術表演過程：

【表一】

	步驟
一	使用一整副牌(鬼牌不使用)共 52 張，讓對方抽走一張牌，不必放回。
二	本魔術目的在於猜出對方抽走的牌面點數，不會知道花色。
三	A 當作 1 點，J、Q、K 當作 11、12、13 點，其餘按牌面數字為點數。
四	表演者將手上剩餘的牌先派九張在桌上，為了美觀，排成九宮格的樣子，牌面朝上。
五	觀察桌上的九張牌中，有哪些牌面的點數和是 13 的倍數，不限張數。假設有 4 張，則再派手上 4 張牌蓋在那些點數和為 13 倍數的牌上面，後派的 4 張牌一樣呈現牌面朝上的狀態。
六	若有牌面為 K——13 點，就蓋一張上去。
七	承六，如此反覆找牌蓋牌，直到手上的牌派光，或手上雖有剩餘，但找不到牌面點數和為 13 倍數，就進行下一步。
八	此時只剩手上的一些牌(如果還有的話)和桌上的九堆牌，接著只要看手邊牌面點數和桌上最後的九個牌面點數，相加後是 13 倍數的牌堆或牌移走，直到手邊和桌面剩下來若干牌面，任意點數和都不是 13 的倍數。
九	此時計算所有牌面點數和，得出還差多少點則可達成最接近的 13 倍數，那個不足的點數就是對方抽走的點數。 例如：手邊剩 2、4 兩張牌；桌面還有牌面為 5、10 的兩堆牌，則 2+4+5+10＝21，離 21 最近且大於 21 的 13 倍數為「26」，26－21＝5，可知對方抽走的牌點數是「5」。

壹、研究動機

老師介紹了一個撲克牌魔術，同學們探索表演手法出和 13 的倍數有關；但有同學不解爲何派 9 張牌在桌上，想找點數和爲 13 倍數的牌面，一定找得到？”，我們便和老師一同來探討這個問題。

貳、研究目的

一、找出撲克牌魔術手法的原理。
二、探討此手法「可行」的原理。
三、探討恰有 n 種花色的情形下，這個表演的「最少派牌數」。

參、研究器材

一、筆、計算紙、電算器、電腦試算軟體 Excel，撲克牌。

肆、名詞及符號解釋

【表二】

編號	名詞／符號	解釋
1	(x，y，…)	字元的個數表示在探討相異的撲克牌點數數量，而「x」表示「x 張」，「y」表示「y 張」等，…；例如(3，2，2)表示有三相異點數，各有 3 張、2 張、2 張。因為此魔術要找出某些數字和為 13 的倍數，我們發現「**派牌的數量」是最關鍵的因素**，所以利用(x，y，…)代表「若干點數數量的組合」。
2	a、b、c、…	代表撲克牌點數。
3	N	最少派牌數。
4	n	花色種類的數量。
5	**最少派牌數**	保證魔術一定能進行下去，所需要的**最少**撲克牌張數；隨花色數量多少而不同。
6	**不足牌型**	該點數數量組合，有找不到含數字和等於 13 倍數的例子，例如(3，2，1)，有「1 **點**」有 3 張、「2 **點**」有 2 張，「3 **點**」有 1 張，全部點數和＝10＜13，故(3，2，1)為一不足牌型。
7	**基本牌型**	該點數數量組合必包含某些數字和為 13 的倍數，且只要任一點數它的數量減少，就成為不足牌型；例如(3，2，2)是一基本牌型。
8	**完成牌型**	必包含某些數字和為 13 倍數的點數數量組合；我們可以得知，如果某牌型包含基本牌型，則必是完成牌型。

伍、研究過程與方法

一、撲克牌魔術手法的討論如下：

(一)一副撲克牌點數和為：(1+2+3+……+13)x4＝364＝28x13

(二)觀察此魔術的表演步驟，表演者每次都將一些點數和為 13 倍數的牌蓋起來，可看作「減去」一些 13；也就是 13＝1x13、26＝2x13、39＝3x13 等……。

(三)承(一)，一副撲克牌的總點數可看作有「28 個 13」。

(四)承(二)，13 的倍數減去某個 13 的倍數，結果還是 13 的倍數，例如 65－39＝5x13－3x13＝(5－3)x13＝2x13，寫成通式即爲：**$a\times13-b\times13=(a-b)\times13$**。

(五)由於總點數是 28 個 13，所以在減去一大堆 13 後，最後牌面點數和，包括來賓手上的牌，還是 13 的倍數。

所以，表演手法的原理爲：利用兩個 13 倍數相減的性質而表演。

二、爲何派九張牌總是找得出一些牌面點數和是 13 的倍數？

(一)從「恰有一種花色，點數 1～13」討論起

1.本小組決定先探討較簡單的情形，我們先觀察花色只有一種的情形，即只有一組 A～K，找出「最少派牌數」，因爲 13 本身就是 13 的倍數，故我們可捨去老 K，只看點數 1～12 的牌就好。

2.**最多拿 7 張牌**就會有牌的點數和是 13，因爲：

1+12＝13，
2+11＝13，
3+10＝13，
4+9＝13，
5+8＝13，
6+7＝13。

六組算式和都是 13，所以拿 7 張牌表示至少有兩個數在同一組，也就是一定有兩張點數相加等於 13。

3.那麼「**至少**」要拿多少張就能包含 13 的倍數呢？大伙兒依魔術表演操作了多次後，有了以下的結果：

(1)只派 1 或 2 或 3 張一定不行，因爲點數可能不夠，例如：1+2+3＝6＜13，

(2)而 4 張的情形呢？經本組試算，得到 1+2+3+4＝10＜13，表示拿 4 張不一定可以“成功表演”，那麼 5 張呢？

(3)本小組再次進行試算，卻發現任選五個相異數字中，裡頭**總**包含點數和爲 13 的倍數，例如點數「1、2、3、4、5」，含有 1+3+4+5＝13；之後再找數字試算，**一直沒有找到反例**，因此我們有了猜想，是否在單一花色、點數 1～12 的條件下，「5」就是「**最少派牌數**」呢？

(二)

承前面的結果，本小組提出以下猜想：

猜想一：從數字 1～12 中，任選五個數字，總有一些數字和是 13 的倍數。

1.同學們左思右想，無法說明猜想一是對的，在不知如何是好之際，同學想起老師曾說過，“數學就是從已經知道的事情去探索未知的事”。我們已知道，前面派四張的情形有反例，為了證明猜想一成立，我們改寫成猜想二：

猜想二：從 1～12 中，任取四個相異數字，如果裡頭不包含數字和為 13 的倍數，只要加入第五個相異數字，就能找到。

2.此時我們轉向猜想二，但依據我們學過的數學知識，仍想不到解決的方法，乾脆採用「窮舉法」；將四個相異數的各種組合列出，找出那些當中沒有數字和為 13 倍數的四個數，然後再拿剩下的數做為第五個數來檢查。

例如：1、2、3、4 當中不包含 13 倍數的數字和，1～12 中除了這 4 個數字還有 5、6、7、8、9、10、11、12，而 1+**12**＝2+**11**＝3+**10**＝4+**9**＝**13**，也就是取 **9、10、11、12** 中任一數當作第五個數，猜想二成立；現剩 **5、6、7、8**，再檢查則有：

$$1+3+4+\mathbf{5}=13$$

$$3+4+\mathbf{6}=13$$

$$2+4+\mathbf{7}=13$$

$$2+3+\mathbf{8}=13$$

因而就 1、2、3、4 來說，猜想二是成立的。

3.從 1～12 中任取相異四個數字的種類，組合數有：

$$12\times11\times10\times9\div24=495$$

我們把這 495 組列於學生日誌中。

4.然後發現在 495 條算式中，共有 120 種組合當中不包含數字和為 13 的倍數，見附錄二。

5.接著逐一檢查這 120 條算式是否符合猜想二，我們做一個表格並設定記號好方便檢驗，見表三：

【表三】

	四個數當中沒有數相加是 13 的倍數	不用配對的四個數	要拿來檢查的四個數	檢查結果 猜想二成立✓ 不成立打×
1	①+~~2~~+③+~~④~~＝10	**12、11、10、9**	⑤、6、~~7~~、8	✓
2	⋮	⋮	⋮	⋮
3	⋮	⋮	⋮	⋮

第一欄爲不含 13 倍數的四相異數字組合，第二欄是和各單一數字相加爲 13 的數，即 1+**12**=2+**11**=3+**10**=4+**9**=13；第三欄爲 1～12 的數字爲除了前 8 數，剩下來待檢查的數。

記號有四種：“○”、“ ”、“／”、“___”，畫有相同記號那些數字，表示它們的和是 13 的倍數，如下：

①+③+④+⑤＝13

3+4+**6**＝13

~~2~~+~~4~~+~~**7**~~＝13

2+3+**8**＝13

5.全部檢驗 120 條算式後，都能成立(見學生日誌)，所以證實了猜想二，因此我們得到：

定理一：從 1～13 的正整數中，任選五個相異數字，裡頭總包含若干數字和為 13 的倍數。

(三)回到四個花色—「派九張就一定能進行魔術表演」的探討

我們想利用定理一來幫助我們探索，討論後得到以下的策略：

1.策略

若能保證任派九張牌，可以分成五組，五組各自的點數和「代表」五個相異的點數，就能確定魔術手法可行性，舉例來說，派 A、A、2、2、2、3、5、5、5 這九張；

【表四】

2	A	2
2	5	A
3	5	5

(1)見表四，我們以顏色來區分：$\boxed{A}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ 爲三相異數；$\boxed{2}$ + $\boxed{2}$ ＝4；$\boxed{3}$ + $\boxed{5}$ ＝8，所以上表可看作含有 1、2、4、5、8 五個相異數。

(2)也得知要找出五相異數的組合種類不一定只有一種，如 $\boxed{A}+\boxed{5}=6$；「6」也和 1、2、4、5、8 相異。

(3)**接下來本研究的相關的證明都是使用這個策略，也就是觀察九個點數，「確定」必可組成五相異數，再利用定理一保證必包含 13 倍數的數字和，本組稱為「五異數策略」。**

2.接著觀察派九張牌時，各種點數組合種類的數量：

(1)點數的種類最多 9 種；最少 3 種，因為一個點數最多四個花色，恰有 2 種點數最多 2×4＝8(張)，比 9 少。

(2)派的九張牌中已有五種以上相異的點數，根據定理一，當中必有牌點數和為 13 的倍數。

因而接下來只需探討 9 張牌中恰有 3、4 種點數的情形。

3.只看「餘數」

魔術表演手法中，重點是要將若干牌面點數相加成 13 的倍數，多少倍並不重要，所以我們只要看不足 13 的數字即可。例如有三張牌：10、J、Q，點數和 10+11+12＝33，而 39－33＝6，再派一張 **6**，四張牌的點數和就是 13 的倍數；如果我們這樣思考：33＝26+7，13－7＝**6**，也會得到同樣的結果，所以我們只要知道**點數和**除以 13 的餘數就好；而正整數除以 13 的餘數有 13 種：0、1、2、……、12。

4.雖然有了策略和餘數的觀點，但我們在這裡思考很久，仍沒有進一步的發展，和老師一同討論之後，便教我們「同餘」的概念，雖然這部份在國小課本中並沒有出現，<u>但其實利用撲克牌，就能好好的理解，真令我們驚奇！沒想到撲克牌也能幫我們理解數學。</u>

5.以下是和「同餘」有關的數學知識，相關證明請見附錄三。

$\boxed{\text{定義一}}$：$a\equiv b \pmod{13}$

說明：a 和 b 分別除以 13 的**餘數相同**，例如：$4\equiv 17 \pmod{13}$、$21\equiv 47 \pmod{13}$。

本研究均探討「除以『13』」的餘數，之後為了節省篇幅，「$a\equiv b$」就是指 $a\equiv b \pmod{13}$

$\boxed{\text{定義二}}$：$a\not\equiv b \pmod{13}$

說明：指 a 和 b 分別除以 13 的**餘數不相同**，也以「$a\not\equiv b$」代替 $a\not\equiv b \pmod{13}$

$\boxed{\text{性質一}}$：$a\equiv 0 \pmod{13}$，表示 a 是 13 的倍數。

下面是我們要研究時會用到的原理和命題，範圍：$1\leq a、b、x、y\leq 12$。

$\boxed{\text{原理一}}$：若 $a\equiv b \pmod{13}$，則 $a+c\equiv b+c \pmod{13}$。

$\boxed{\text{原理二}}$：若 a≡b(mod13)，則 a－c≡b－c(mod13)。

我們需要一些數學命題和定理輔助，如下：

$\boxed{\text{命題一}}$：若 x、y≢0(mod13)，則 x≢x+y(mod13)

$\boxed{\text{命題二}}$：如果 x≢0(mod13)，則 2x≢0(mod13)，3x≢0(mod13)。

$\boxed{\text{命題三}}$：x≢2x(mod13)，x≢3x(mod13)，2x≢3x(mod13)。

$\boxed{\text{命題四}}$：**若 a、b、c 為相異正整數，且 1≦a、b、c≦12，又 a+b≢0，b+c≢0，c+a≢0，那麼 a≡b+c，b≡c+a，c≡a+b 三條等式最多恰有一條成立。**

說明：只要說明任兩條不會成立即可。

利用反證法，假設 a≡b+c，b≡c+a 同時成立，則 a≡(c+a)+c≡a+2c，根據命題三，得知 2c≢0，再依命題一，則有 a≢a+2c，和假設矛盾，所以命題四成立。

定理二：若 a、b、c 為相異正整數，且 1≦a、b、c≦12，又 a+b，b+c，c+a≢0，則 a、b、c、a+b、b+a、c+a、a+b+c 七個數中最多只有兩數被 13 除同餘，也就是這七數至少可代表六個「除以 13 不同餘的數」。

說明：

(1)用窮舉檢查的方法，首先依據命題一則有：

$$\begin{cases} a\not\equiv a+b、a\not\equiv a+c \\ b\not\equiv a+b、b\not\equiv b+c \\ c\not\equiv a+c、c\not\equiv b+c \end{cases}$$

(2)依命題四，得知 a≡b+c、b≡c+a、c≡a+b 恰有一條成立。

(3)再來利用命題一皆可知 a+b+c 和其它六數都不同餘，

a≢a+(b+c)

b≢b+(a+c)

c≢c+(a+b)

a+b≢a+b+(c)

b+c≢b+c+(a)

c+a≢c+a+(b)

綜合(1)、(2)、(3)得知推論一成立。

6.有了上述的數學工具後，我們界定之後提到的點數 a、b、c、d 範圍；

a、b、c、d 表示**不同餘的數**，無特定大小關係，範圍：1≦a、b、c、d≦12，也就是撲克牌的點數；而且：

$$\left\{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ a+b \quad \not\equiv 0 \\ b+c \\ c+a \\ a+b+c \end{array}\right.$$

7.有了「同餘」的概念，定理一可改寫如下：

定理一：任選五個除以 13，兩兩不同餘的數字，裡頭總包含若干數字和為 13 的倍數。

三、大躍進—探討 n 種花色

然後我們應探討“九張牌中，點數恰有『3』、『4』種”的情形；但在縣賽時，我們本來只解決花色 1~4 種，而在準備國展時，對「花色」的一般化數量得到最少派牌數的結果，所以前述是縣賽的部份，也是本文研究方法的準備內容，又爲了符合研究字數限制，以下直接呈現 n 種花色的研究過程。

我們發現 11 種「基本牌型」，我們先對它們證明，再利用這些「基本牌型」，來證出 n 種花色的最少派牌數。

(一)11 種基本牌型

共有 11 種，分別爲：

(5，4)、(7，3)、(9，2)、(11，1)、(13，0)、(3，2，2)、(4，3，1)、(6，2，1)、(8，1，1)、(2，2，1，1)、(4，1，1，1)，以下列出證明，先說明方法，

$\boxed{\text{證明的步驟}}$：1.應用「**五異數策略**」，取 5 相異數 a、b、c、d、e。

2.先說明前 3 數 a、b、c 爲不同數，依次證明 d 分別和 a、b、c 不同餘；e 分別和 a、b、c、d 不同餘(稱 d 爲第四數；e 爲第五數)。

3.即使 a、b、c、d、e 可能有數重複，但牌型仍包含數字和爲 13 的倍數。

1. (5，4)

【表五】

5	4
a	b
a	b
a	b
a	b
a	

我們取 a、b、a+b、2a、2b，

【表六】

<table>
<tr><th colspan="2">各數的關係</th><th>證明</th></tr>
<tr><td colspan="2">a、b、a+b 爲三不同餘數</td><td>a≠b(已知條件)
a≠a+b(命題一)
b≠a+b(命題一)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2a</td><td>2a≠a</td><td>命題三。</td></tr>
<tr><td>2a≠b</td><td>如果 2a≠b 則繼續討論 2a 與 a+b 的關係。</td></tr>
<tr><td>2a≡b</td><td>如果 2a≡b，則牌型可改寫如下：
甲
<table><tr><th>5</th><th>4</th></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr></table>上表點數和爲 a×5+2a×4＝13a，即爲 13 的倍數。</td></tr>
<tr><td>2a≠a+b</td><td>如果 2a≡a+b，則 a≡b，矛盾！</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2b</td><td>2b≠a</td><td>如果 2b≠a 則繼續討論 2b 與 b 的關係。</td></tr>
<tr><td>2b≡a</td><td>如果 2b≡a，則牌型可改寫如下：
甲
<table><tr><th>5</th><th>4</th></tr><tr><td>2b</td><td>b</td></tr><tr><td>2b</td><td>b</td></tr><tr><td>2b</td><td>b</td></tr><tr><td>2b</td><td>b</td></tr><tr><td>2b</td><td></td></tr></table>上表包含 13 倍數：2b×5+b×3＝13b，即爲 13 的倍數。</td></tr>
<tr><td>2b≠b</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>2b≠a+b</td><td>如果 2b≡a+b，則 b≡a，矛盾！……(＊)</td></tr>
<tr><td>2a≠2b</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.a、b、c、b+c，2a 爲五不同餘數，當中必包含 13 倍數的數字和。
2.即使 2a≡b 或 2b≡a，仍包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

2. (7，3)

【表七】

7	3
a	b
a	b
a	b
a	
a	
a	
a	

我們取 a、b、a+b、2a+b、2a

【表八】

<table>
<tr><th colspan="2">各數的關係</th><th>證明</th></tr>
<tr><td colspan="2">a、b、a+b 爲三不同餘數</td><td>證明一已證</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2a+b</td><td>2a+b≢a</td><td>如果 2a+b≡a，則 a+b≡0，矛盾！…………….(*)</td></tr>
<tr><td>2a+b≢b</td><td>如果 2a+b≡b，則 2a≡0，和 a≢0 矛盾！……(**)</td></tr>
<tr><td>2a+b≢a+b</td><td>如果 2a+b≡a+b，則 a≡0，矛盾！…………(***)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2a</td><td>2a≢a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>2a≢b</td><td>如果 2a≢b 則繼續討論 2a 與 2a+b 的關係。</td></tr>
<tr><td>2a≡b</td><td>如果 2a≡b，則牌型可改寫如下：
甲
<table><tr><th>7</th><th>3</th></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr></table>上表點數和爲：a×7+2a×3＝13a，即爲 13 的倍數。</td></tr>
<tr><td>2a≢a+b</td><td>如果 2a≡a+b，則 a≡b，矛盾！</td></tr>
<tr><td>2a≢2a+b</td><td>命題一</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.若 a、b、c、a+2b，2a 爲五不同餘數，當中必包含 13 倍數的數字和。
2.如果，2a≡b，仍包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

3.(9，2)

【表九】

9	2
a	b
a	b
a	
a	
a	
a	
a	
a	
a	

我們取 a、b、a+b、2a、3a

【表十】

<table>
<tr><th colspan="2">各數的關係</th><th>證明</th></tr>
<tr><td colspan="2">a、b、a+b 為三不同餘數</td><td>證明一</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2a</td><td>2a≢a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>2a≢b</td><td>如果 2a≢b，則繼續討論 2a 和 a+b 的關係。</td></tr>
<tr><td>2a≡b</td><td>如果 2a≡b，則牌型可改寫如下：
甲
<table><tr><th>9</th><th>2</th></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr></table>
上表點數和為：a×9+2a×2＝13a，即為 13 的倍數。</td></tr>
<tr><td>2a≢a+b</td><td>如果 2a≡a+b，則 a≡b，矛盾！……(＊)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="5">3a</td><td>3a≢a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>3a≢b</td><td>如果 3a≡b，則牌型可改寫如下：
甲
<table><tr><th>9</th><th>2</th></tr><tr><td>a</td><td>3a</td></tr><tr><td>a</td><td>3a</td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td></tr></table>
上表包含 13 倍數：a×7+3a×2＝13a。</td></tr>
<tr><td>3a≢b</td><td>3a≢a+b，繼續觀察 3a 和 2a。</td></tr>
<tr><td>3a≡a+b</td><td>得到 2a≡b，(∗)已討論過，不贅述。</td></tr>
<tr><td>3a≢2a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.若 a、b、a+b、2a、3a 為五不同餘數，依定理一則得證。
2.若 2a≡b，或 3a≡b，或 3a≡a+b，仍成立。</td></tr>
</table>

4.(11，1)

【表十一】

11	1
a	b
a	
a	
a	
a	
a	
a	
a	
a	
a	
a	

我們取 a、b、2a、3a、4a

證明：

(1) a、2a、3a、4a 皆兩兩不同餘(命題三)。

(2)若 b 也分別和上面四數不同餘，則為五異數。

(3)若 b≡2a，則 a×11+b＝11a+2a＝13a
(4)若 b≡3a，則 a×10+b＝10a+3a＝13a
(5)若 b≡4a，則 a×9+b＝11a+4a＝13a
不論 b 是否和四數中任一數同餘，仍有點數和等於 13 的倍數

5.(13，0)

證明：

表示只有一種點數 a，而 13×a 還是 13 的倍數。

6.(3，2，2)

【表十二】

3	2	2
a	b	c
a	b	c
a		

證明：三種點數數量組要注意的是：從我們討論的經驗得知，要注意 a、b、c 當中，可能有某數和另「**兩數和**」同餘，會影響證明，因此下列我們分成四種情形來說明：(1)a≡b+c、(2)b≡c+a、(3)c≡a+b、(4)皆無同餘的關係。

(1)a≡b+c

取 a、b、c、a+b、a+c，根據本文研究條件，a、b、c 已是三不同餘數，之後僅針對第四、第五數證明。

【表十三】

條件	證明過程	
a≡b+c	a+b、a+c	根據定理二，因爲條件 a≡b+c 已成立，所以 a、b、c 、a+b、a+c 是五不同餘數。

(2)b≡a+c。

取 a、b、c、b+c、2a：

【表十四】

<table>
<tr><td rowspan="2">條件</td><td colspan="3">證明過程</td></tr>
<tr><td colspan="2">第四、五數的探討</td><td>證明</td></tr>
<tr><td rowspan="10">b≡a+c</td><td rowspan="3">b+c</td><td>b+c≢a</td><td rowspan="3">因為條件 b≡a+c 已成立，由定理二得知成立。</td></tr>
<tr><td>B+c≢b</td></tr>
<tr><td>b+c≢c</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2a</td><td>2a≢a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>2a≢b</td><td>若 2a≡b，則 2a≡b≡a+c，表示 a≡c，矛盾！</td></tr>
<tr><td>2a≢c</td><td>如果 2a≢c，則繼續討論 2a 與 a+b 的關係。</td></tr>
<tr><td>2a≡c</td><td>如果 2a≡c，則 b≡a+2a=3a，則牌型可表示如下：
【x-1】
<table><tr><th>3</th><th>2</th><th>2</th></tr><tr><td>a</td><td>3a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td>3a</td><td>2a</td></tr><tr><td>a</td><td></td><td></td></tr></table>
表(x-1)總數字和為：a×3+3a×2+2a×2=13a，恰為 13 的倍數，故仍成立。</td></tr>
<tr><td>2a≢b+c</td><td>2a≢b+c</td></tr>
<tr><td>2a≡b+c</td><td>2a≡b+c=(a+c)+c=a+2c，表示 a≡2c，因而 b≡a+c=2c+c=3c，得到 b≡3c，則牌型可表示如下：
【x-2】
<table><tr><th>3</th><th>2</th><th>2</th></tr><tr><td>2c</td><td>3c</td><td>c</td></tr><tr><td>2c</td><td>3c</td><td>c</td></tr><tr><td>2c</td><td></td><td></td></tr></table>
表(x-2)中包含 13 倍數的數字和，即：2c×3+3c×2+c×1=13c(見黃底的格子)，就是 13 的倍數，故仍成立。</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.若 a、b、c、b+c，2a 為五不同餘數，則得證。
2.若 2a≡c 或 2a≡b+c 成立，則仍能包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

(3)c≡a+b。

取 a、b、c、b+c、2a。

【表十五】

<table>
<tr><td rowspan="2">條件</td><td colspan="3">證明過程</td></tr>
<tr><td colspan="2">第四、五數的探討</td><td>證明</td></tr>
<tr><td rowspan="10">c≡a+b</td><td rowspan="3">b+c</td><td>b+c≢a</td><td rowspan="3">因爲條件 b≡a+c 已成立，由定理二得知成立。</td></tr>
<tr><td>b+c≢b</td></tr>
<tr><td>b+c≢c</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2a</td><td>2a≢a</td><td>已證。</td></tr>
<tr><td>2a≢b</td><td>2a≢b，則繼續討論 2a 與 c 的關係</td></tr>
<tr><td>2a≡b</td><td>如果 2a≡b，則 c≡a+2a=3a，則牌型可表示如下：
【x-1】<table><tr><th>3</th><th>2</th><th>2</th></tr><tr><td>a</td><td>2a</td><td>3a</td></tr><tr><td>a</td><td>2a</td><td>3a</td></tr><tr><td>a</td><td></td><td></td></tr></table>表(x-1)總數字和爲：a×3+2a×2+3a×2=13a，恰爲 13 的倍數，故仍成立。</td></tr>
<tr><td>2a≢c</td><td>如果 2a≡c，則 2a≡a+b，表示 a≡b，矛盾！</td></tr>
<tr><td>2a≢b+c</td><td>2a≢b+c</td></tr>
<tr><td>2a≡b+c</td><td>2a≡b+c=b+(a+b)=a+2b，表示 a≡2b，因而 c≡a+b=2b+b=3b，得到 c≡3b，則牌型可表示如下：
【x-2】<table><tr><th>3</th><th>2</th><th>2</th></tr><tr><td>2b</td><td>b</td><td>3b</td></tr><tr><td>2b</td><td>b</td><td>3b</td></tr><tr><td>2b</td><td></td><td></td></tr></table>表(x-2)中包含 13 倍數的數字和，即：2b×3+b×2+3b×2=13b(見黃底的格子)，就是 13 的倍數，故仍成立。</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.若 a、b、c、b+c，2a 爲五不同餘數，則當中必包含 13 倍數的數字和。
2.若 2a≡b 或 2a≡b+c 成立，則仍能包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

(4)a≢b+c、b≢c+a、c≢a+b

取 a、b、c、a+b、c+a，此根據定理二而來。

結合(1)—(4)的討論，確定 (3，2，2)的牌型必包含 13 倍數的數字和。

7.(4，3，1)

【表十六】

4	3	1
a	b	c
a	b	
a	b	
a		

同樣地，我們分成四種情形來說明：

(1)$a\equiv b+c$

我們取 a、b、c、a+b、2a。

【表十七】

<table>
<tr><td rowspan="2">條件</td><td colspan="3">證明過程</td></tr>
<tr><td colspan="2">第四、五數的探討</td><td>證明</td></tr>
<tr><td rowspan="8">$a\equiv b+c$</td><td rowspan="3">a+b</td><td>$a+b\not\equiv a$</td><td rowspan="3">因爲條件 $a\equiv b+c$ 已成立，由定理二得知成立。</td></tr>
<tr><td>$a+b\not\equiv b$</td></tr>
<tr><td>$a+b\not\equiv c$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2a</td><td>$2a\not\equiv a$</td><td>命題三。</td></tr>
<tr><td>$2a\not\equiv b$</td><td>如果 $2a\equiv b$，則 $a\equiv b+c=2a+c$，得到 $0\equiv a+c$，矛盾！</td></tr>
<tr><td>$2a\not\equiv c$</td><td>如果 $2a\equiv c$，則 $a\equiv b+c=b+2a$，得到 $0\equiv a+b$，矛盾！</td></tr>
<tr><td>$2a\not\equiv b+c$</td><td>如果 $2a\equiv b+c$，則 $a\equiv b+c\equiv 2a$，得到 $a\equiv 2a$，矛盾！</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.a、b、c、b+c，2a 爲五不同餘數，當中必包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

(2) $b\equiv c+a$

我們取 a、b、c、a+b、2a，接著只要說明 a+b、2a 爲第四、第五個數即可(過次頁)。

【表十八】

<table>
<tr><td rowspan="2">條件</td><td colspan="3">證明過程</td></tr>
<tr><td colspan="2">第四、五數的探討</td><td>證明</td></tr>
<tr><td rowspan="10">b≡c+a</td><td rowspan="3">a+b</td><td>a+b≢a</td><td rowspan="3">因爲條件 b≡c+a 已成立，由定理二得知成立。</td></tr>
<tr><td>a+b≢b</td></tr>
<tr><td>a+b≢c</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2a</td><td>2a≢a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>2a≢b</td><td>如果 2a≡b，則 2a≡b≡c+a，表示 a≡c，矛盾！</td></tr>
<tr><td>2a≢c</td><td>如果 2a≢c，則繼續討論 2a 與 a+b 的關係</td></tr>
<tr><td>2a≡c</td><td>如果 2a≡c，則 b≡a+2a＝3a，則牌型可表示如下：
【x-1】<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>3a</td><td>c</td></tr><tr><td>a</td><td>3a</td><td>c</td></tr><tr><td>a</td><td>3a</td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td><td></td></tr></table>表(x-2)中包含 13 倍數的數字和，即：a×4+3a×31＝13a(見黃底的格子)，就是 13 的倍數，故仍成立。</td></tr>
<tr><td>2a≢b+c</td><td>2a≢b+c</td></tr>
<tr><td>2a≡b+c</td><td>2a≡b+c＝(c+a)+c＝a+2c，表示 a≡2c，因而 b≡c+a＝c+2c＝3c，得到 b≡3c，則牌型可表示如下：
【x-2】<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2c</td><td>3c</td><td>c</td></tr><tr><td>2c</td><td>3c</td><td>c</td></tr><tr><td>2c</td><td>3c</td><td></td></tr><tr><td>2c</td><td></td><td></td></tr></table>表(x-2)中包含 13 倍數的數字和，即：2c×2+3c×3＝13c(見黃底的格子)，就是 13 的倍數，故仍成立。</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.若 a、b、c、b+c，2a 爲五不同餘數，則當中必包含 13 倍數的數字和。
2.若 2a≡c 或 2a≡b+c 成立，則仍能包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

(3) c≡a+b

我們取 a、b、c、a+b、2a。

由於 a+b≡c，見表十七的甲、乙，可知(4、3、1)可表示成(3、2、2)的型式，便得證。

【表十九】

(8)

4	3	1
a	b	c
a	b	
a	b	
a		

(乙)

3	2	2
a	b	c
a	b	c
a		

(4) a≠b+c，b≠c+a，c≠a+b

取 a、b、c、a+b、b+c，從定理二可得證。

結合(1)—(4)的討論，確定 (4，3，1)的牌型必包含 13 倍數的數字和。

8.(6，2，1)

【表二十】

6	2	1
a	b	c
a	b	
a		
a		
a		
a		

我們取 a、b、c、2a、3a，探討 2a 和 3a 的情形即可(過次頁)。

【表二十一】

<table>
<tr><th colspan="3">證明過程</th></tr>
<tr><td colspan="2">各數的關係</td><td>證明</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2a</td><td>2a≠a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>2a≠b</td><td>繼續討論 2a 和 c 的關係。</td></tr>
<tr><td>2a≡b</td><td>如果 2a≡b，則牌型可轉換成(4，3，1)型，仍成立。
<table>
<tr><th>6</th><th>2</th><th>1</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>4</th><th>3</th><th>1</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2a≠c</td><td>2a≠c</td></tr>
<tr><td>2a≡c</td><td>如果 2a≡b，則牌型可轉換成(4，2，2)，包含(3，2，2)型，仍成立。
<table>
<tr><th>6</th><th>2</th><th>1</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>4</th><th>2</th><th>2</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

【表二十二】

<table>
<tr><td rowspan="7">3a</td><td>3a≢a</td><td>命題三</td></tr>
<tr><td>3a≢b</td><td>如果 3a≢b 則繼續討論 3a 與 c 的關係。</td></tr>
<tr><td>3a≡b</td><td>如果 3a≡b，則牌型可改寫後包含(11，1)：且仍可配合(11，1)的取牌方式。
<table>
<tr><th>6</th><th>2</th><th>1</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>11</th><th>1</th></tr>
<tr><td>a</td><td>c</td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>3a≢c</td><td>如果 3a≢c 則繼續討論 3a 與 2a 的關係。</td></tr>
<tr><td>3a≡c</td><td>則牌型可轉換成(3，2，2)</td></tr>
<tr><td>3a≢2a</td><td>命題 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：
1.若 a、b、c、a+2b，2a 爲五不同餘數，當中必包含 13 倍數的數字和
2.如果，2a≡b，仍包含 13 倍數的數字和。</td></tr>
</table>

9.(8，1，1)

【表二十三】

8	1	1
a	b	c
a		
a		
a		
a		
a		
a		
a		

我們取 a、b、c、2a、3a

(1)若 2a≡b，或 2a≡c，則牌型可轉換爲(6，2，1)的型式，如下：

【表二十四】

(甲)

8	1	1
a	b	c
a		
a		
a		
a		
a		
a		
a		

(乙)

6	2	1
a	b	c
a	2a	
a		
a		
a		
a		

(丙)

6	2	1
a	b	c
a	b	2a
a		
a		
a		
a		

(2)若 3a≡b，或 3a≡c，則牌型中包含(11，1)的型式，如表二十五，而且可依照證明(11，1)時分割牌組，故成立。

【表二十五】

(甲)

11		1
a	3a	c
a		
a		
a		
a		
a		
a		
a		

(乙)

11		1
a	3a	b
a		
a		
a		
a		
a		
a		
a		

(3)結論：即使 $\begin{cases} 2a\equiv b，或 2a\equiv c； \\ 3a\equiv b，或 3a\equiv c， \end{cases}$

皆含能產生 13 倍數的數字和。如果 a、b、c、2a、3a 爲五不同餘數，則包含 13 倍數的數字和。

10.(2，2，1，1)

上述這個牌型讓我們想了好久，卻一直沒有進展，由於時間不足，老師利用 excel 試算軟體指導我們驗證，以表二十六爲例　：

【表二十六】

2	2	1	1
a	b	c	d
a	b		

如果 a、b、c、d 不含數字和爲 13 倍數，則表二十六若有數字和爲 13 倍數，則一定要有 2a 或 2b，因爲只有 1 個 a 和 1 個 b，就和只有 a、b、c、d 一樣。而我們檢查出含 2a 或 2b 的加法式子共 17 條， 再利用附錄二的 120 組數字，計算每組的 17 種算式，最後都能成立，由於資料略多，屆時請參照附件。

11.(4，1，1，1)

【表二十七】

4	1	1	1
a	b	c	d
a			
a			
a			

我們取 a、b、c、d、2a 這五數：

【表二十八】

<table>
<tr><td rowspan="2">條件</td><td colspan="2">證明過程</td></tr>
<tr><td>第五數的探討</td><td>證明</td></tr>
<tr><td>2a≠b
2a≠c
2a≠d</td><td>2a</td><td>表示 a、b、c、d、2a 爲五個不同餘數。</td></tr>
<tr><td>2a≡b
或
2a≡c
或
2a≡d</td><td colspan="2">則原牌型可形成(2，2，1，1)的牌型便得證，以 2a≡b 爲例，見甲、乙：
甲
<table><tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr><tr><td>a</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>a</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>乙
<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="3">結論：無論 2a 是否和 b 或 c、或 d 同餘，此牌型都能成立。</td></tr>
</table>

(二)我們再檢查上述十一種牌型符合「基本牌型」的條件就好：

。

【表二十九】

基本牌型的保證			
點數數量種類	基本牌型	不足牌型	證明左欄是不足牌型 點數x數量+點數x數量+…＜13
1	(13，0)	(12，0)	1x12＝12
2	(11，1)	(10，1)	1x10+2x1＝12
		(11，0)	1x11＜13
	(9，2)	(8，2)	1x8+2x2＝12
		(9，1)	1x9+2x1＝11
	(7，3)	(6，3)	1x6+3x2＝12
		(7，2)	1x7+2x2＝11
	(5，4)	(4，4)	1x4+2x4＝12
		(5，3)	1x5+2x3＝11
3	(3，2，2)	(2，2，2)	1x2+2x2+3x2＝12
		(3，1，2)	1x3+2x1+3x2＝11
	(4，3，1)	(3，3，1)	1x3+2x3+3x1＝12
		(3，2，1)	1x3+2x2+3x1＝10
		(3，3，0)	1x3+2x3+3x0＝9
	(6，2，1)	(5，2，1)	1x5+2x2+3x1＝12
		(6，1，1)	1x6+2x1+3x1＝11
		(6，2，0)	1x6+2x2+3x0＝10
	(8，1，1)	(7，1，1)	1x7+2x1+3x1＝12
		(8，0，1)	1x8+2x0+3x1＝11
4	(2，2，1，1)	(1，2，1，1)	1x1+2x2+3x1+4x1＝12
		(2，2，0，1)	1x2+2x2+3x0+4x1＝10
	(4，1，1，1)	(3，1，1，1)	1x3+2x1+3x1+4x1＝12
		(4，0，1，1)	1x4+2x0+3x1+4x1＝11

(三)撲克牌 1～n 種花色的探討。

1.以下將每種花色數量，依各點數數量 1～4 個分類，再逐一探討每類裡可能組成的內容是什麼，然後看該內容包含何種基本牌型，進而確定該數量組合必含某些數字和為 13 的倍數。

【表三十】

1～13 種花色的最低派牌數探討				
花色數量	最低 派牌數(N)	點數的數量組合		包含的基本牌型
		點數數量	組成內容	
1	5	5	(1，1，1，1，1)	(1，1，1，1，1)
2	7	4	(2，2，2，1)	(2，2，1，1)
3	8	3	(3，3，2)	(3，2，2)

4	9	3	(4，4，1)	(4，3，1)
			(4，3，2)	
			(3，3，3)	(3，2，2)
		4	(4，3，1，1)	(2，2，1，1)
			(4，2，2，1)	
			(3，3，2，1)	
			(3，2，2，2)	
5	9	2	(5，4)	(5，4)
		3	(5，3，1)	(4，3，1)
			(5，2，2)	(3，2，2)
			和 4 花色重複	
		4	(5，2，1，1)	(2，2，1，1)
			和 4 花色重複	
6	10	2	(6，4)	(5，4)
			(5，5)	
		3	(6，3，1)	(6，2，1)
			(6，2，2)	
			(5，4，1)	(4，3，1)
			(5，3，2)	
			(4，4，2)	
			(4，3，3)	
		4	(6，2，1，1)	(2，2，1，1)
			(5，3，1，1)	
			(5，2，2，1)	
			(4，4，1，1)	
			(4，3，2，1)	
			(4，2，2，2)	
			(3，3，3，1)	
			(3，3，2，2)	
7	10	2	(7，3)	(7，3)
			和 6 花色重複	
		3	(7，2，1)	(6，2，1)
			和 6 花色重複	
		4	(7，1，1，1)	(4，1，1，1)
			和 6 花色重複	
8	11	2	(8，3)	(7，3)
			(7，4)	(5，4)
			(6，5)	
		3	(8，2，1)	(6，2，1)

			(7，3，1)	
			(7，2，2)	
			(6，4，1)	
			(6，3，2)	
			(5，5，1)	(4，3，1)
			(5，4，2)	
			(5，3，3)	
			(4，4，3)	
		4	(8，1，1，1)	(4，1，1，1)
			(7，2，1，1)	
			(6，3，1，1)	
			(6，2，2，1)	
			(5，4，1，1)	
			(5，3，2，1)	
			(5，2，2，2)	
			(4，4，2，1)	
			(4，3，3，1)	
			(4，3，2，2)	
			(3，3，3，2)	(2，2，1，1)
9	11	2	(9，2)	(9，2)
			和 8 花色重複	
		3	(9，1，1)	(4，1，1)
			和 8 花色重複	
		4	和 8 花色重複	
10	12	2	(10，2)	(9，2)
			(9，3)	
			(8，4)	(7，3)
			(7，5)	
			(6，6)	(5，4)
		3	(10，1，1)	(8，1，1)
			(9，2，1)	(6，2，1)
			(8，3，1)	
			(8，2，2)	
			(7，4，1)	
			(7，3，2)	
			(6，5，1)	
			(6，4，2)	
			(6，3，3)	
			(5，5，2)	(4，3，1)

			(5，4，3)	
			(4，4，4)	
		4	(9，1，1，1)	(4，1，1，1)
			(8，2，1，1)	
			(7，3，1，1)	
			(7，2，2，1)	
			(6，4，1，1)	
			(6，3，2，1)	
			(6，2，2，2)	
			(5，5，1，1)	
			(5，4，2，1)	
			(5，3，3，1)	
			(5，3，2，2)	
			(4，4，3，1)	
			(4，4，2，2)	
			(4，3，3，2)	
			(3，3，3，3)	(2，2，1，1)
11	12	2	(11，1)	(11，1)
			和 10 花色重複	
		3	和 10 花色重複	
		4	和 10 花色重複	
12	13	2	(12，1)	(11，1)
			(11，2)	(9，2)
			(10，3)	(7，3)
			(9，4)	
			(8，5)	
			(7，6)	
		3	(11，1，1)	(8，1，1)
			(10，2，1)	
			(9，3，1)	
			(9，2，2)	
			(8，4，1)	
			(8，3，2)	
			(7，5，1)	(6，2，1)
			(7，4，2)	
			(7，3，3)	
			(6，6，1)	
			(6，5，2)	
			(6，4，3)	

			(5，5，3)	(4，3，1)
			(5，4，4)	
		4	(10，1，1，1)	(4，1，1，1)
			(9，2，1，1)	(2，2，1，1)
			(8，3，1，1)	
			(8，2，2，1)	
			(7，4，1，1)	
			(7，3，2，1)	
			(6，5，1，1)	
			(6，4，2，1)	
			(6，3，3，1)	
			(6，3，2，2)	
			(5，5，2，1)	
			(5，4，3，1)	
			(5，4，2，2)	
			(5，3，3，2)	
			(4，4，4，1)	
			(4，4，3，2)	
			(4，3，3，3)	
13	13	1	(13，0)	(13，0)
		2	和 12 花色重複	
		3		
		4		

【表三十一】

花色種類≧14 種的探討				
花色數量	最低派牌數	說明		
		點數的數量組合		包含的基本牌型
		點數數量	組成內容	
n≧14	13	1	(13，0) …	和花色恰有 13 種的相同
		2	(12，1) …	
		3	(11，1，1) …	
		4	(10，1，1) …	

由上表可知，當花色種類大於 13 種時，討論內容都重複了，因此當花色 n≧13，最少派牌數為「13」張。

最後，檢驗前面求出的「最少派牌數」，就大功告成。

【表三十二】

檢驗最少派牌數			
花色的數目 n	魔術表演最少派牌數 N	N-1	N-1 張不成立的理由 點數×數量+點數×數量
1	5	4	1+2+3+4＝**12**
2	7	6	1+1+2+2+3+3＝**12**
3	8	7	1x3+2x3+3x1＝**12**
4	9	8	1x4+2x4＝**12**
5	9	8	同上
6	10	9	1x6+2x3＝**12**
7	10	9	同上
8	11	10	1x8+2x2＝**12**
9	11	10	同上
10	12	11	1x10+2x1＝**12**
11	12	11	同上
12	13	12	1x12＝**12**
13	13	12	同上
n≧14	13	12	同上

四、一到 n 種花色的統整

【表三十三】

花色的數目(n)	魔術表演最低派牌數
1	5
2	7
3	8
4	9
5	9
6	10
7	10
8	11
9	11
10	12
11	12
12	13
13	13
n≧14	13

陸、研究結論

一、魔術表演手法的原理即為湊 13 的倍數。

二、定理一：在正整數 1～13 中，任選五數，當中必含一些數，它們的和是 13 的倍數。

三、定理二：三相異數 1≦a、b、c≦12，a、b、c、a+b、b+c、c+a、a+b+c 這七數分別除以 13 的餘數，最多只有兩個會相同。

四、當撲克牌為 1～13 點時，求出了在任意 n 種花色的情形下，最低派牌數的值。

柒、展望未來

問題一：對於任意的正整數 N，在 1～(N－1)中，最少要取多少個相異數，才能保證當中包含 N 的倍數的數字和？

問題二：假設有一種撲克牌，點數 1～n 點，花色有 m 種，在表演本研究探討的魔術時(註)，最少要派多少張牌才能確保魔術的進行？

註：魔術表演的過程便要找 n 的倍數。

柒、參考資料

一、康軒文教事業教科書編撰委員會(民 97)。數量關係。國民小學數學課本第十冊。台北縣：康軒文教事業股份有限公司

二、方般般、許嘉銘、林曉楓、李騭韡(第 32 屆)。破解撲克牌魔術。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 32 屆國小組數學科。

三、吳孟軒、趙建志、胡雅嵐、李佳蓉(第 38 屆)。撲克圈圈尋極限～撲克牌繞圈遊戲的極大值一般性探索。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 38 屆國小組數學科。

四、王安佳、陳姵錡、陳源、陳威宏(第 41 屆)。終極密碼戰。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 41 屆國小組數學科。

五、許哲維、金士翔、王怡文、黃柏嶽(第 41 屆)。聽音撲克牌探秘~~撲克牌循環圈特色的研究。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 41 屆國小組數學科。

六、林芷卉、黃詩婷(第 42 屆)。真的就是這一張嗎。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 42 屆國小組數學科。

七、張君豪(第 43 屆)。換個方式更有趣—新搶三十遊戲探討。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 43 屆國小組數學科。

八、曾金智、劉羿廷、姜沛伸、劉佳璋(第 45 屆)。樸克樸克你在哪。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。

【評語】080408

1、 由一個撲克牌魔術出發，由簡入深地析出所蘊含的數學概念，並將做各種情況有條理的分析及合理的數學推論與證明，著實不易，但其中涉及的同餘概念及相關符號證明式，也許可以搭配數列來說明，或許能讓國小學童更可以融會貫通。

2、 在口語表達及臨場表現或自信心上，可以再加強。