中華民國 第49屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

080407

「珠」絲馬跡-串珠與數學原理之探討

學校名稱：嘉義市東區蘭潭國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃馨儀	翁秀玉
小六 黃湘樺	李佩馨

關鍵詞：串珠、多面體、尤拉公式

壹、摘要

身邊常見美麗的串珠作品，**但卻未見有關串珠的數學研究**。我們進行二年時間來探討串珠。結論如下：

研究一：相同大小的珠珠，以「點→線→面」的方式操作，若以某顆珠為中心點，周圍角度和是 360°的有：**四邊形＋四邊形、六邊形＋三角形**，這二種串法可以形成平面。

研究二：五邊形組合的「二十面十二面體」(稱為五邊形球體)只要增加**四邊形**或**六邊形**就可以擴充。而且使用六邊形較節省珠數，這也是串珠中最常見的作法。

研究三：增加六邊形擴大球體時，五邊形維持 12 面，六邊形以 5 的倍數增加。而且串珠作品只要進行名詞轉換，也符合尤拉公式：

珠珠數(稜邊數) ＋2 ＝ **三角形連接處**(頂點數) ＋ **面數**。

研究四：沙發或盒子轉角處的串法，以畢氏定理檢驗證實為直角。

貳、研究動機

有一次在義工媽媽的指導下，用珠珠串成由五邊形構成的球體，於是我們開始思考：為什麼五邊形會拱起來，可以串成一個球體？其他的多邊形也會拱起來嗎？我們研究哪幾種正多邊形的組合會變成平面。後來，又陸續串了一些動物的造型，義工媽媽教我們使用六邊形來擴充球體，我們竟然從珠數和面數的關係中找到尤拉定理。更因為義工媽媽教導我們沙發造型的串珠，引發研究立體三面直角中的問題。但是因為沒有相關的參考資料，我們總是在摸索中學習，一直遇到瓶頸，不過我們也一一克服。這期間，也讓我們驚訝這個小小的串珠中竟然隱含了這麼多秘密。

＊教材相關性：南一版數學科第八冊第五單元長方體與正方體

参、研究目的

研究一：正多邊形組合的串珠與平面的關係

研究二：擴充串珠球體的設計

研究三：串珠立體造型與尤拉公式的關係

研究四：串珠產生立體三面直角

肆、器材

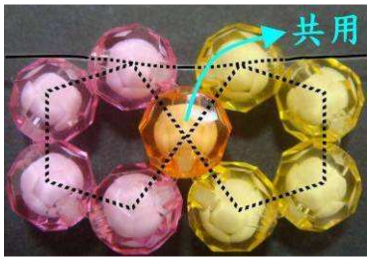
珠珠、釣魚線、量角器、直尺、立體模型片、電腦軟體。

伍、研究過程、結果、與討論

研究一：正多邊形組合的串珠與平面的關係

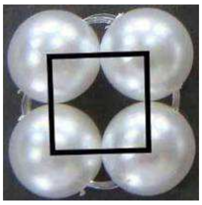
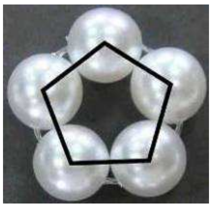
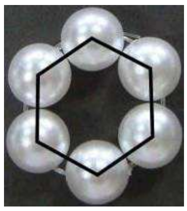
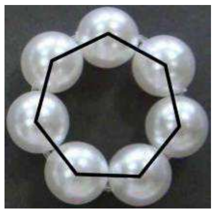
一、「點→線→面」的組合方式

實際串珠的動作中，我們發現串珠中的珠珠經由釣魚線連接，由點變成了線，只要在最後一顆珠交換線，就可以隨意決定由幾顆珠串成一個平面，然後平面再與平面進行組合連接，所以串珠基本上是由「點→線→面」的方式形成各種造型。

			
點：一顆珠	線：二顆珠以上	面：最後一顆珠交換線	2 個五邊形面與面的組合

二、大小相同的珠珠串成的是正多邊形

珠珠串成的多邊形，因為珠珠大小相同，所以串成的多邊形是正多邊形，那我們很容易推算各種多邊形串珠的內角。內角分別為：三角形是 60°、四邊形是 90°、五邊形是 108°、六邊形是 120°、七邊形是 129°…。

圖片					
內角	60°	90°	108°	120°	129°

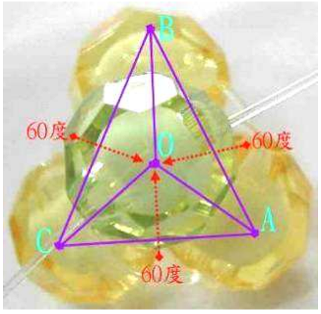
三、分析正多邊形組合形成平面的條件

進行串珠時，我們會決定以幾顆珠串成一個平面，以此平面繼續做面與面的組合。觀察串珠作品，發現大多是各種正多邊形和三角形的組合，我們**發現到一些常見的組合會形成平面，但某些組合卻無法形成平面**，因此，我們針對此現象進行探討。

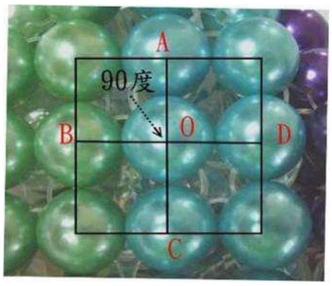
以某顆珠為中心點，分析其周圍角度，如果角度和是 360°，就可以形成平面；如果角度和不是 360°，就會拱起。

(一)以 n 顆珠為一組，串成一個平面，再繼續面與面的組合。

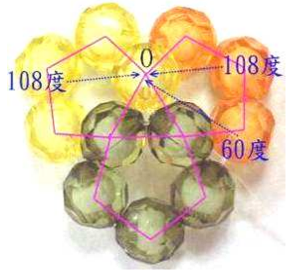
1.以 3 顆珠串成一個平面(三角形)

組合方式	圖片	說明
三角形 ＋ 三角形		以 O 為中心點， 周圍有 3 個正三角形。 其周圍的角度 $60^\circ \times 3 = 180^\circ < 360^\circ$ 180°小於 360°，所以會拱起。

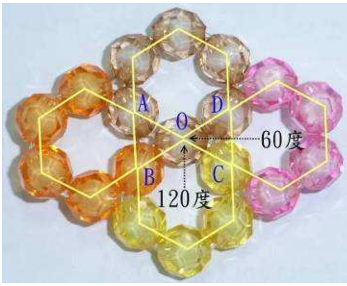
2. 以 4 顆珠串成一個平面(四邊形)

組合方式	圖片	說明
四邊形 ＋ 四邊形		以 O 為中心點， 周圍有 4 個正方形， $90^\circ \times 4 = 360^\circ$， 等於 360°，所以會形成平面。
四邊形 ＋ 三角形		以 O 為中心點， 周圍有 2 個正四邊形、 2 個正三角形。 周圍的角度 $90^\circ \times 2 + 60^\circ \times 2 = 300^\circ < 360^\circ$ 300°小於 360°，所以會拱起。

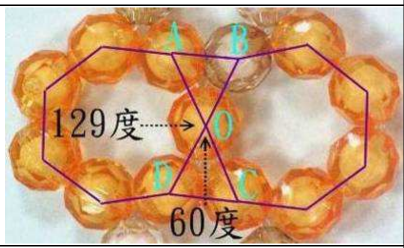
3. 以 5 顆珠串成一個平面(五邊形)

<table>
<tr><th>組合方式</th><th>圖片</th><th>說明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">五邊形
＋
三邊形</td><td>
</td><td>以 O 為中心點，
周圍有 2 個五邊形、2 個正三角形，
周圍的角度
$(108^\circ+60^\circ)\times 2=336^\circ<360^\circ$
336°小於 360°，所以會拱起。</td></tr>
<tr><td></td><td>從側面明顯看到拱起。</td></tr>
</table>

4. 以 6 顆珠串成一個平面(六邊形)

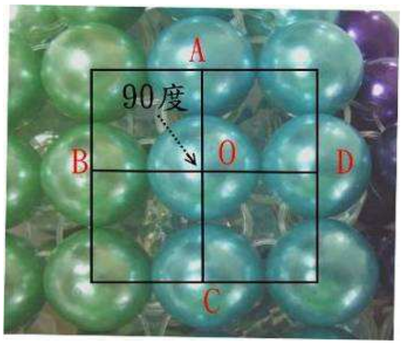
<table>
<tr><th>組合方式</th><th>圖片</th><th>說明</th></tr>
<tr><td>六邊形
＋
三邊形</td><td>
</td><td>以 O 為中心點，
周圍有 2 個六邊形、2 個正三角形，
$(120^\circ+60^\circ)\times 2=360^\circ$，
等於 360°，所以可以形成平面。</td></tr>
</table>

5. 以 7 顆珠串成一個平面(七邊形)

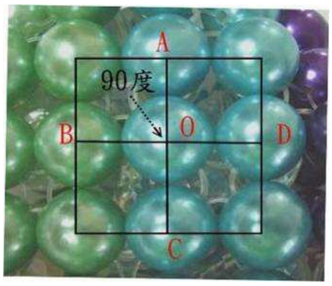
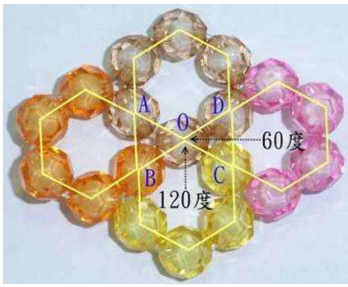
<table>
<tr><th>組合方式</th><th>圖片</th><th>說明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">七邊形
＋
三邊形</td><td>
</td><td>以 O 為中心點，
周圍有 2 個七邊形、2 個三角形，
$(129^\circ+60^\circ)\times 2=378^\circ$，
$378^\circ>360^\circ$
無法形成平面，會凹凸不平。</td></tr>
<tr><td></td><td>從側面可明顯看到凹凸不平。</td></tr>
</table>

(二)分析

1.當我們在進行串珠時，通常以「面與面的組合」爲主，**當三個面接連時，自然形成一個三角形，我們稱爲「連接處」**。但是，如果刻意四邊形+四邊形的組合，就不會形成三角形。



2.**以任一顆珠爲中心點，其周圍角度和是 360°，只有四邊形＋四邊形、六邊形＋三角形**，這二種平面的組合，**可以使串珠形成平面**；而其他的組合會使平面拱起；甚至七邊形以上的串法就會造成凹凸不平。

	
四邊形＋四邊形	六邊形＋三角形

研究二：擴充串珠球體的設計

一、五邊形組合的「二十面十二面體」

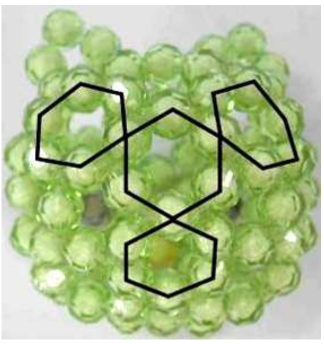
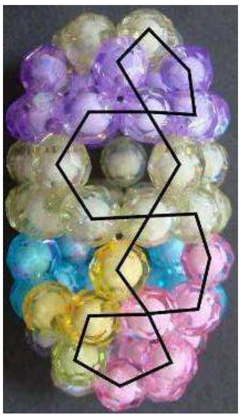
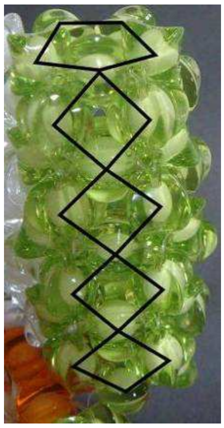
義工媽媽教導我們串出的各種造型中，最常用的就是以五邊形爲平面的串法，如果繼續串下去，就會形成一個漂亮的球體。在串法上就是讓五顆珠爲一組，如果遇到面與面的組合時，必須扣除共用珠的數量，如此串出的成品就是正五邊形＋三角形組合而成的「二十面十二面體」，屬於阿基米得多面體的一種。

		
五顆珠爲一組	扣除共用珠的數量	二十面十二面體

二、增加四邊形或六邊形可以擴充五邊形球體

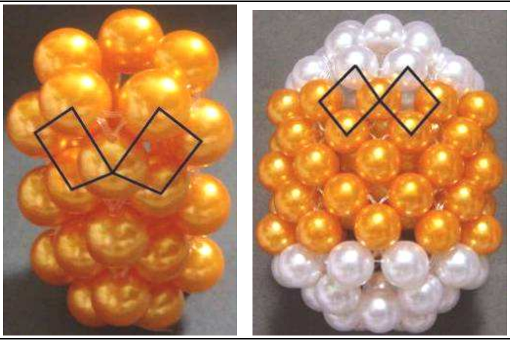
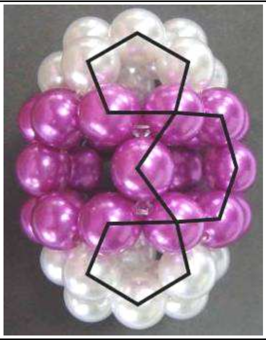
(一)觀察串珠成品

二十面十二面體，我們自己稱爲「五邊形球體」，是串珠最基本入門的造型，後來再繼續觀察其他造型，例：Kitty 的頭、豬的身體、沙發的扶手，發現如果要擴充變成橢圓形球體或柱體等，可以增加四邊形或六邊形。

			
五邊形球體	Kitty 的頭 (橢圓形球體)	豬的身體 (圓柱體)	沙發的扶手 (五邊形柱)
無增加	增加六邊形	增加六邊形	增加四邊形

(二)分析

1.由研究一的結論恰巧也得知，**四邊形或六邊形這二種串法的每一顆珠周圍的角度和是360˚，會形成平面，所以就能達到擴大拉長的效果。**

		
五邊形球體	增加四邊形	增加六邊形

2.雖然增加四邊形或六邊形都能達到擴大拉長的效果，但是，爲了符合經濟效益，使用六邊形可以節省珠珠的使用數量，所以串珠中最常見就是**增加六邊形組合來擴大變形**。

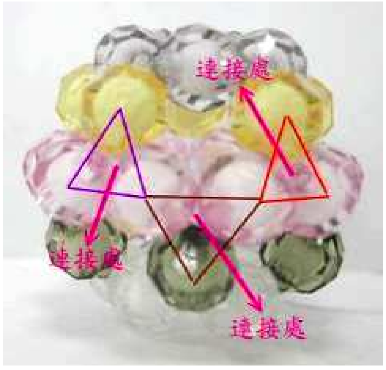
研究三：串珠立體造型與尤拉公式的關係

一、分析以五邊形球體擴大拉長後柱體的面數與珠數

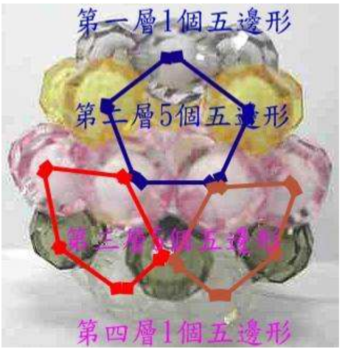
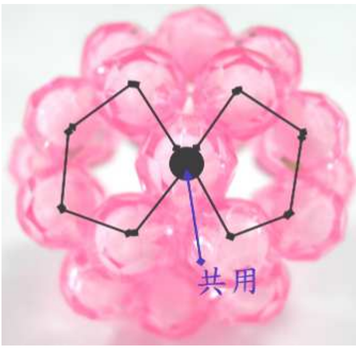
名詞解釋：

「連接處」的意思爲

串珠中 3 顆珠的連接點形成的面(三角形)(如右圖)

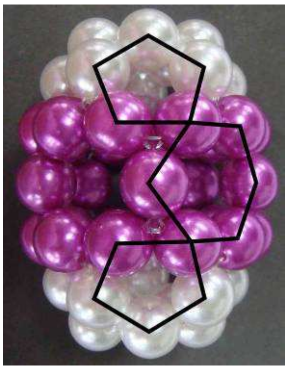
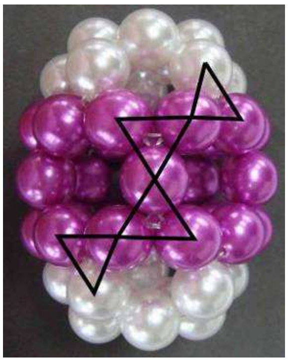


(一)五邊形球體

	五邊形數量	第一層(頂層)：1 個五邊形 第二層：5 個五邊形 第三層：5 個五邊形 第四層(底層)：1 個五邊形 **共 12 個五邊形**
	珠珠數	每個五邊形有 5 顆珠，而且 每顆珠都是 2 個五邊形所共用。 所以 12x5÷2＝30(顆)
	三角形數量 (連接處)	第一層：5 個三角形 第二層：5 個三角形 第三層：5 個三角形 第四層：5 個三角形 **共 20 個三角形**

(二)增加 5 個六邊形的球體

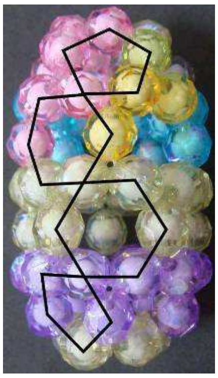
我們以六邊形來擴充球體，發現每次增加的六邊形必須是 5 的倍數，最後才能串成一個完整的立體造型。

	五邊形、六邊形的數量	第一層(頂層)：1 個五邊形 第二層：5 個五邊形 第三層：5 個六邊形 第四層：5 個五邊形 第五層(底層)：1 個五邊形 **共 12 個五邊形和 5 個六邊形**
	珠珠數	五邊形有 5 顆珠， 六邊形有 6 顆珠， 而且每顆珠都會被共用一次。 所以 珠珠數＝（5×12+6×5）÷2＝45(顆)
	三角形數量(連接處)	第一層：5 個三角形 第二層：5 個三角形 第三層：5 個三角形 第四層：5 個三角形 第五層：5 個三角形 第六層：5 個三角形 **共 30 個三角形**

(三)增加 10 個六邊形的球體

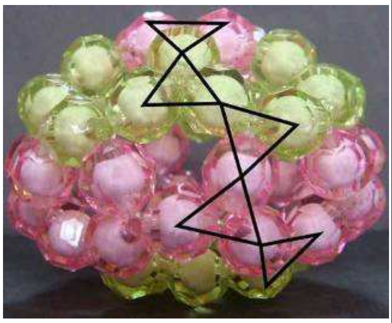
拼湊結構的不同，會有二種形狀的球體。

1.長球體：

	五邊形、六邊形的數量	第一層(頂層)：1 個五邊形 第二層：5 個五邊形 第三層：5 個六邊形 第四層：5 個六邊形 第五層：5 個五邊形 第六層(底層)：1 個五邊形 **共 12 個五邊形和 10 個六邊形**

	珠珠數	五邊形有 5 顆珠， 六邊形有 6 顆珠， 而且每顆珠都會被共用一次。 所以 珠珠數＝（5×12+6×10）÷2＝60(顆)
	三角形數量 (連接處)	第一層：5 個三角形 第二層：5 個三角形 第三層：5 個三角形 第四層：5 個三角形 第五層：5 個三角形 第六層：5 個三角形 第七層：5 個三角形 第八層：5 個三角形 **共 40 個三角形**

2.扁球體：

	五邊形、六邊形的數量	第一層(頂層)：1 個五邊形 第二層：5 個六邊形 第三層：10 個五邊形 第四層：5 個六邊形 第五層(底層)：1 個五邊形 **共 12 個五邊形和 10 個六邊形**
	珠珠數	五邊形有 5 顆珠， 六邊形有 6 顆珠， 而且每顆珠都會被共用一次。 所以 珠珠數＝（5×12+6×10）÷2＝60(顆)
	三角形數量 (連接處)	第一層： 5 個三角形 第二層： 5 個三角形 第三層：10 個三角形 第四層：10 個三角形 第五層： 5 個三角形 第六層： 5 個三角形 **共 40 個三角形**

二、尤拉公式的套用

串珠造型本身也是一種多面體的組合，因此我們參考多面體的數學資料中發現「所有的多面體都會符合<u>尤拉公式</u>」，即以下：

稜邊數(E) ＋ 2 ＝ 頂點數(V) ＋ 面數(F)

我們嘗試根據研究二中的各種立體造型，分析五邊形和六邊形的面數、三角形(連接處)個數、珠珠個數後，套用尤拉公式，竟然可以成立。只是一些名詞必須轉換：

尤拉公式中的稜邊數(E) ＝ 串珠中的珠數

頂點數(V) ＝ 串珠中的連接處(三角形)

因此公式改寫如下：

尤拉公式→ 稜邊數(E) ＋ 2 ＝ 頂點數(V) ＋ 面數(F)

串　　珠→　<u>珠 數　＋ 2　＝　連接處　＋ 面數</u>

我們將上述串珠成品整理如下表，完全符合公式。

多面體	珠珠數	連接處	面數			公式：
			五邊形	六邊形	總面數	**珠數＋ 2＝連接處＋面數**
五邊形球體	30	20	12	0	12	30＋2＝20＋12
增加 5 個六邊形	45	30	12	5	17	45＋2＝30＋17
增加 10 個六邊形	60	40	12	10	22	60＋2＝40＋22

			
五邊形球體	增加 5 個六邊形	增加 10 個六邊形	

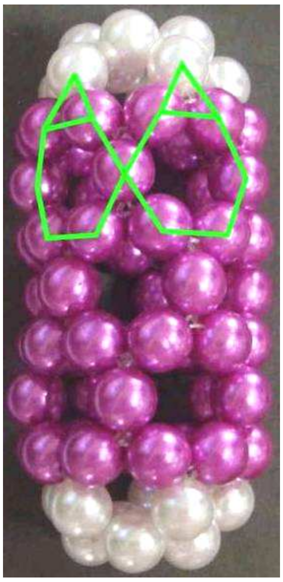
三、繼續增加六邊形的數量，球體變成柱體。

(一)觀察成品

由研究一得知，**六邊形構成的串珠會變成平面，所以如果增加六邊形的數量，就可以使原本的球體拉長，變成柱體**。

(二)分析

1.**擴充五邊形球體的六邊形之所以是以 5 的倍數增加**，我們觀察到是以延伸出來的連接處有幾個而定。例如下圖中，每一層會有 5 個連接處，所以每增加一層，就是增加 5 個六邊形。



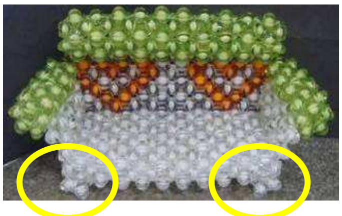
2.我們計算出珠數、連接處、面數，可以套用尤拉公式。

珠珠數	連接處	面數			公式
		五邊形	六邊形	總面數	珠數＋ 2＝連接處＋面數
30	20	12	0	12	30＋2＝ 20＋12
45	30	12	5	17	45＋2＝ 30＋17
60	40	12	10	22	60＋2＝ 40＋22
75	50	12	15	27	75＋2＝ 50＋27
90	60	12	20	32	90＋2＝ 60＋32
105	70	12	25	37	105＋2＝ 70＋37
120	80	12	30	42	120＋2＝ 80＋42
135	90	12	35	47	135＋2＝ 90＋47
150	100	12	40	52	150＋2＝100＋52
165	110	12	45	57	165＋2＝110＋57
180	120	12	50	62	180＋2＝120＋62

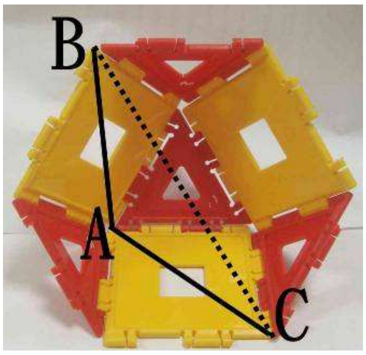
研究四：串珠產生立體三面直角

義工媽媽教導我們沙發造型的串珠，觀察到轉角處像是一個三面的直角，但真正的角度為何？要如何證明？這引發我們研究立體三面直角中的問題。

我們先串簡單的盒子造型，再仔細觀察轉角處發現，它是由 3 個四邊形和 1 個三角形構成一半的立方八面體。但是珠珠是圓球體，很難用眼睛觀察珠與珠的角度，所以改用組合立體模型片，老師教我們畢氏定理，利用畢氏定理證明出直角。

			
沙發照片	盒子	3 個四邊形和 1 個三角形	立方八面體(一半)

證明過程如下：



圖四-1

想法：求出圖四-1 中△ABC **各邊長，如果** $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$，

能符合畢氏定理，則∠A＝90°。

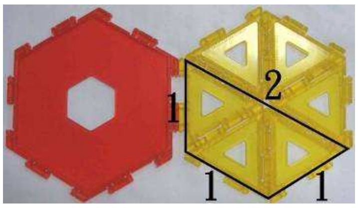
設立體模型的邊長為 1

(一)求 $\overline{BC}$ 長度?

$\overline{BC}$ 是六邊形的對角線，

設立體模型的邊長為 1，

所以 $\overline{BC}=2$ (圖四-2)

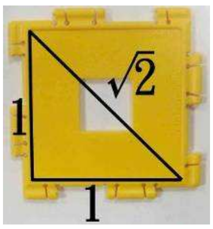


圖四-2

(二)求 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 長度?

$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 是正方形的對角線

由畢氏定理算出斜邊 $\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{2}$ (圖四-3)



圖四-3

(三) $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 符合畢氏定理嗎?

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2=2$

$\overline{BC}^2=2^2=4$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2+2=4$

$\overline{BC}^2=4$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$，符合畢氏定理，所以∠A＝90°。

由證明得知，沙發或盒子的造型轉角處確實是直角。

陸、結論

我們身邊常可以看到美麗的串珠作品，甚至手工藝店、網路、書籍也教大家如何串出美麗的作品，但是卻未見有關串珠的數學研究，我們進行了二年時間的探索，從串珠作品探討其中的數學原理。結論如下：

研究一：相同大小的珠珠，由「點→線→面」的操作方式串成平面，若以某顆珠為中心點，其周圍角度和是 360°的有：**四邊形＋四邊形、六邊形＋三角形**，這些串法可以形成平面；而其他的組合會使平面拱起，甚至七邊形以上的串法就會造成凹凸不平。

研究二：五邊形組合的「二十面十二面體」是最常見的造型，增加**四邊形**或**六邊形**可以擴充五邊形球體。使用六邊形比四邊形更節省珠珠的使用數量，所以串珠中最常見的就是增加六邊形組合來擴大變形。

研究三：增加六邊形擴大球體時，其中五邊形仍然維持 12 面，六邊形會以 5 的倍數增加。而且串珠作品只要進行名詞轉換，也符合尤拉公式：

珠珠數(稜邊數) ＋２ ＝ 三角形連接處(頂點數) ＋ 面數。

研究四：利用四邊形再加上一個三角形的串法，就可以形成一個立體的三面直角，以畢氏定理檢驗，證實確定為直角。

柒、參考資料

王麗芳(民 88)。**串珠方程式**。台北縣：民勝文化。

葉偉文譯(民 93 年)。典雅的幾何。頁 137-139。台北市：天下遠見。

萊昂哈德·尤拉 - 維基百科，自由的百科全書。民國 98 年 6 月 23 日取自 http://zh.wikipedia.org/w/index.php 。

附件

我們進行串珠的研究已經二年，其實不止只有上述的研究，還有其他的研究內容，我們放在附件提供參考。

※串珠與「一筆畫」原理之間的關係

串珠的線只有一條，卻可以將珠珠連接起來，所以我們猜測這與「一筆畫」原理有關，因此深入探討。

一、介紹「一筆畫」原理：

數學家尤拉提出，交於點的線如果是兩條或四條，那個點就稱為偶數點；交於點的線如果是三條或五條，那個點就稱為奇數點。

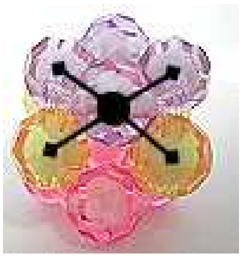
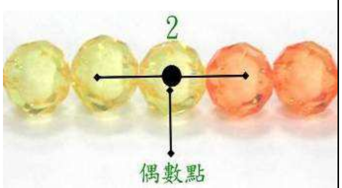
一個圖形包括 3 個以上的奇數點，這個圖形就無法以一筆畫完成，所以一個圖形是否能用一筆畫完成與奇數點數目有關，奇數點必定等於 2 或完全沒有。

組合情形:

1.圖形由偶數點組成，一定可以一筆畫完成，畫的時候可以任一偶數點為起點，最後仍會回到這一點。

2.只有二個奇數點的圖形，其餘為偶數點，一定可以一筆畫完成，畫的時候必須以一個奇數點為起點，以另一個奇數點為終點。

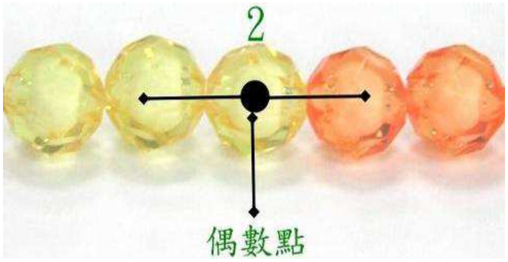
二、觀察偶數點的串珠成品：

		
四邊形球(4)	五邊形球(4)	KITTY 頭(4)
		
一串(2)	蟹老闆(底部)(4)	彩虹魚(4)

三、分析

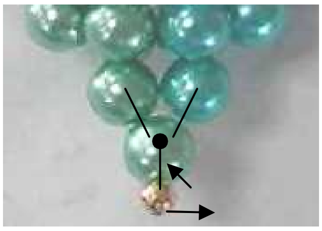
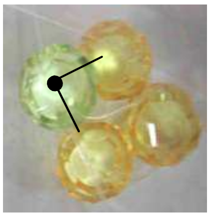
1.幾乎所有的串珠成品，交會處都是偶數點，不是 2、就是 4，並沒有奇數點。

2.串珠只由一條線串成，但沒有重複串珠的情形，所以完全符合一筆畫原理。

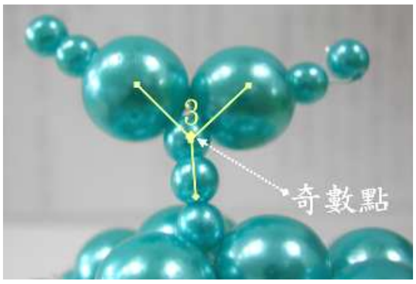
	

四、特殊情況

(一)以下作品是以同一條線，但是重覆穿過珠珠，不符合一筆畫「不能重覆走」的條件。

	同一條線穿過下面銅色小珠後，必須繞過外側再穿回綠珠，所以重覆穿過珠珠。
 	1.由最下面的黃珠(第 1 顆)開始串，當最後一顆是綠珠，它會連接到第 1 顆黃珠後，只是形成一個平面，所以對綠珠而言，仍是偶數點(2)。 2.再重覆將線穿過別的黃色珠，才能將綠色珠固定在黃色 3 顆珠的上方。

(二)我們發現有些串珠作品出現奇數點，但是這些作品是採用另外加線的方式完成的。(如右圖所示)



※立體串珠球體中面和邊的角度

我們發現串珠成品並非是正多面體，大多是由二種以上的正多邊形所組合而成的立體造型，而且通常含有三角形的存在。因此，我們嘗試將三角形＋三角形、三角形＋四方形、三角形＋五邊形等組合，串成簡單的立體造型，分析邊與邊的角度、面與面之間的角度。

我們利用電腦軟體找到以下這些串珠造型在數學上的名稱，並且電腦軟體可以看到展開圖和透視圖，有助於分析角度，我們再以 Phtoimpact 加上中線或角度數據來呈現報告。

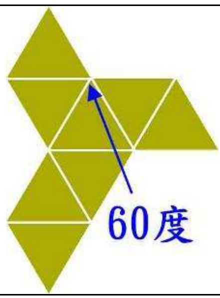
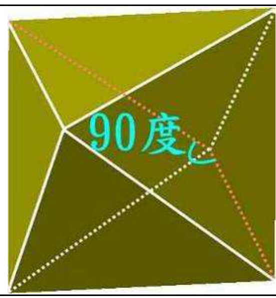
探究一：邊與邊的角度

我們發現串珠多面體的造型中，是正多邊形＋三角形的組合，因此分析邊與邊的角度很簡單，只要計算多邊形的內角即可。但是，我們也發現串珠造型的中線(稱爲立體中線)，也會形成一個多邊形，所以，以下針對這二種進行分析：

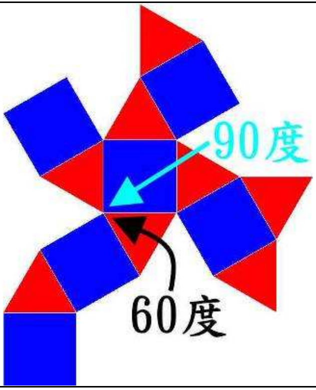
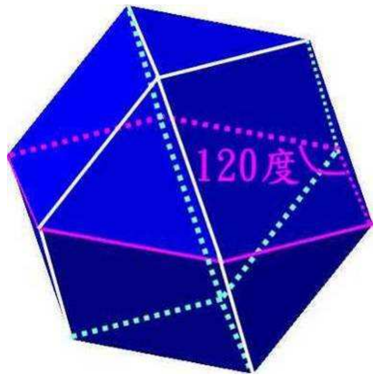
一、平面形狀爲三角形：三角錐體

串珠 柏拉圖四面體	邊與邊的角度
	
	因爲邊線都是三角形的邊，所以邊與邊的角度是 60 度。

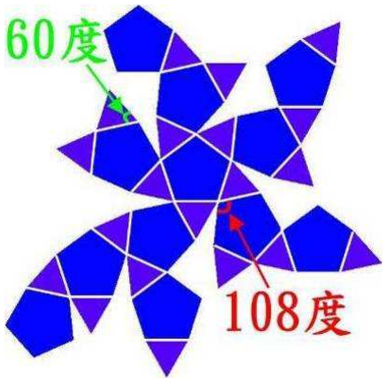
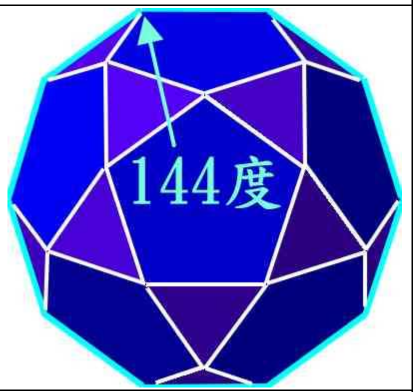
二、平面形狀爲三角形：立體菱形

串珠 八面體網格球	邊與邊的角度	
	展開圖	立體中線
		
	因爲邊線都是三角形的邊，所以邊與邊的角度是 60 度。	中間有一個正方形，所以是 90 度(橘線)。

三、平面形狀爲三角形和正方形：立方八面體

串珠 立方八面體	邊與邊的角度	
	展開圖	立體中線
		
	平面形狀有三角形、 正方形二種，所以邊與邊的角 度分別有 60 度、90 度。	中間六邊形， 所以是 120 度(紅線)。

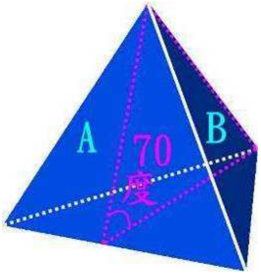
四、平面形狀爲三角形和五邊形：二十面十二面體

串珠二十面十二面體	邊與邊的角度(3 種)	
	展開圖	立體中線
 半球		
	1.三角形：60 度(綠線) 2.五邊形：108 度(紅線)	3.正 10 邊形：計算得知一個 角爲 144 度(藍線)

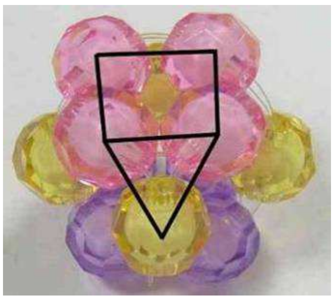
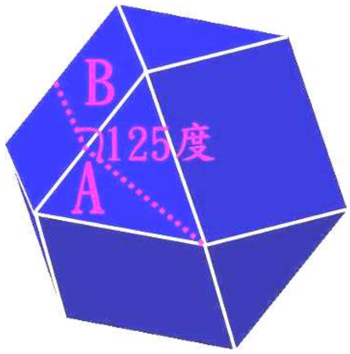
探究二：面與面的角度

串珠多面體中大多是正多邊形＋三角形的組合，所以求相鄰面與面之間的角度，先畫二個平面的中線，測量二個平面的中線的夾角，但是，因爲都不是很特殊的角度，所以只能使用立體模形片拼出相同的造型後，以量角器及尺測量 10 次，取平均值，以得知面與面的角度。

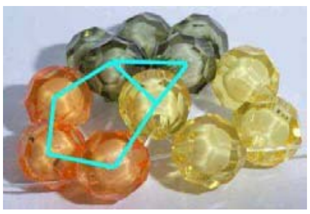
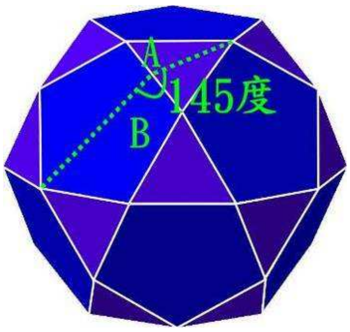
一、平面形狀爲三角形：三角錐體　　**二、平面形狀爲三角形：立體菱形**

串珠 (柏拉圖四面體)	面與面的角度	串珠 八面體網格球	面與面的角度
	 A 面和 B 面之間面與面的角度是 70 度。		 A 面和 B 面之間面與面的角度是 110 度。

三、平面形狀爲三角形和正方形：立體菱形(立方八面體)

面的形狀	串珠照片	模型圖	面與面的角度
三角形與四邊形			125 度

四、平面形狀爲三角形和五邊形：圓球形（二十面十二面體）

面的形狀	串珠照片	模型圖	面與面的角度
三角形與五邊形			145 度

【評語】080407

1、 能由串珠球體中發掘出相關的幾何概念，並察覺其與尤拉公式相關式，進而利用這個定理推算出製作各種成品造型所需的珠數，立意頗佳，是個很道地的生活數學，惟數學的內容方面可以再予以深化。

2、 作者從不顯眼處察覺到立體角，並利用替代的模型片以畢氏定理來驗證其角度，充分展現觀察的敏銳度及科學探究的精神。