

中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

080404

棋形怪狀

學校名稱：台南市北區文元國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳皓苓	吳秋燕
小六 吳嫻宜	謝宇笙
小六 蔡昀軒	

關鍵詞：方位、座標、三角形與四邊形

棋形怪狀

摘要

班上同學總是喜歡一起下棋的感覺，其中又以五子棋最吸引我們，我們也發現當某方先達到三子連線或是四子連線的時候，最後都常常會是勝利的一方。

爲了分析研究出各種能先完成三子連線的下法，我們將五子棋的棋盤縮小爲 3X3 與 4X4 的大小以方便討論，並歸納出「活二連線」、「雙死二連線」等棋子的分佈是 3X3 棋盤獲勝的條件，而在 4X4 當中，亦發現了許多想要獲勝所需要的條件。

有了這些基礎，在往後與同學的對奕之中，更多了許多自信與樂趣，值得一提的，當我們在方格紙上分析畫圖的過程中，也發現獲勝棋子分佈所形成的有趣圖案呢！

壹、研究動機

上學期末時，班上掀起了一波下棋風，幾乎各式各樣的棋子都出現在同學的桌上，然而，玩來玩去還是五子棋最吸引我們。

雖然五子棋的棋盤很大，卻只能讓一組人對奕，於是我們突發奇想，在一張棋盤上讓幾組人同時對奕，這麼一來可讓我們的下課時間增加了許多笑聲。我們知道若是五子棋先取得三連線的人會佔上風，所以乾脆把遊戲規則改爲三子棋又瘋狂的玩了開來。

於是，科展的各位成員，也對這個主題產生了濃厚的興趣，因此決定要以五子棋縮小版模式，當作我們研究的主題；在研究的過程中，憑藉著同學們對下棋的喜愛，讓我們在三連線的下法上更熟練，也都更喜歡下棋了，最棒的是：在下棋時，使出我們自己辛苦研究出來的「神棋魔法」心得，就會感到很有榮譽感，也讓我們成爲班上下棋的佼佼者呢！

貳、研究目的

- 一、在 3x3 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋可以先形成三子連線的走法。
- 二、在 3x3 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋可以獲得勝利的最少步數爲何。
- 三、在 4x4 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋可以先形成三子連線的走法。
- 四、在 4x4 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋可以獲得勝利的最少步數爲何。
- 五、在黑棋先下的情況之下，是否有白棋獲勝的走法。

參、研究設備及器材

自製方格棋盤、五子棋、白紙（方格紙）、筆

肆、研究過程或方法

在這個段落裡，我們分成三個部份：

第一部份是先介紹「五子棋的遊戲規則」，以及我們討論的重點縮小版棋盤的說明；

第二部份是整個研究觀察的步驟流程圖，並規定出我們團隊自創的下棋規則；

第三部份是重點所在，也就是介紹每一個研究活動。

請看我們以下分段說明。

第一部份：五子棋的遊戲規則

一、五子棋的遊戲規則：

- 1.五子棋是由兩位對手在棋盤上進行著手黑子與白子的競技，先下的人持黑子，而另後下的人持白子。
- 2.二人輪流將棋子置於棋盤縱線橫線交織成的點上。
- 3.先把自己五顆棋子連成一條線者，不論是橫線、縱線還是斜線，都算獲勝。
- 4.當所有棋盤交點全部下滿時，則為和局。

二、五子棋的遊戲分析：

在下五子棋時，當一方的三個連續棋子，前後皆無對方的棋子擋住，而對方也未查覺，疏於防堵，此時只要再下一子，形成四子連線，就幾乎勝利了，因為這時對方不可能一步棋下兩個地方，除非自己未察覺四子連線情形，或對方也剛好有四子連線的情形，才有可能讓對方獲勝。

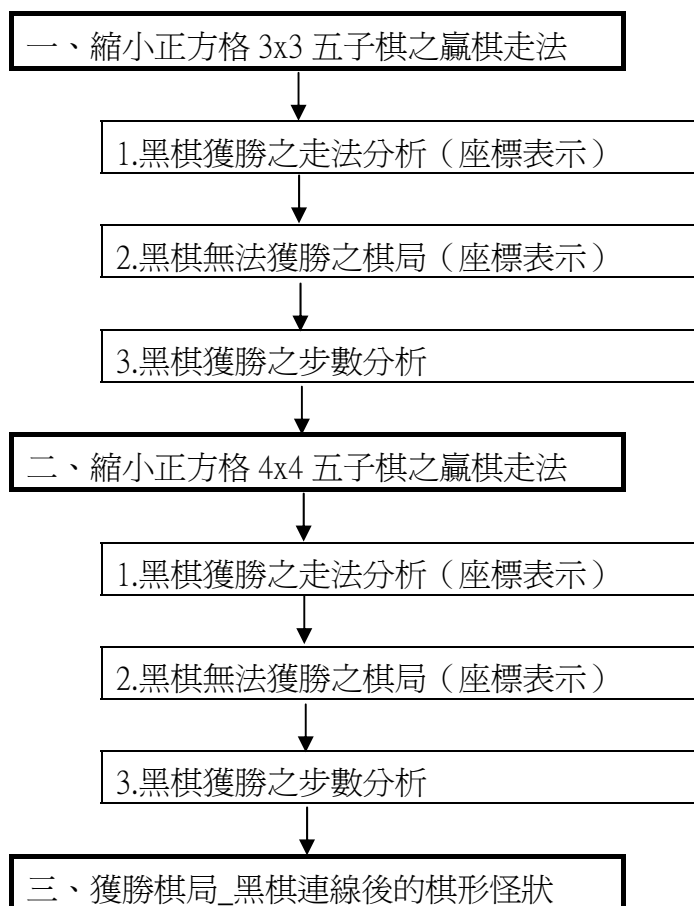
三、將五子棋的棋盤縮小來看：

因為一般的棋盤是由縱橫各十五條線，形成二百二十五個交點，範圍很大，於是我們決定先縮小棋盤範圍，試著在小範圍中找出三子連線的可能情形，而在 2x2 的棋盤中，能下的棋子數太少，因此我們從 3x3 的棋盤開始討論起，希望我們這群科展的成員，能藉著在研究三子連線的下法上有所收穫與心得，使大家的棋藝能更加進步。

第二部份：研究流程與步驟

【一、研究流程】

縮小正方格五子棋的研究流程



【二、研究規則說明】

- 1.在玩家對奕中，我們規定皆由黑棋先下，白棋後下。故計算總步數時，黑棋是必為單數、白棋必為偶數。
- 2.研究進行中，當黑棋先達成三子連線時，我們便稱「黑棋獲勝」，反之亦然，當白棋先達成三子連線時，我們便稱白棋獲勝。
- 3.在本研究中，棋盤座標的表示法為（棋座標、縱座標），每個座標也代表黑棋或白棋可以落子的地方。
- 4.在 3x3 的棋盤中，棋盤內圈是指座標（1,1）、（2,1）、（1,2）、或（2,2）的位置；而（0,0）… 等其他的位置，便是指棋盤外圈（邊線）。
- 5.在 4x4 的棋盤中，正中央是指座標（2,2）的位置；其他正方格的棋盤位置則類推。
- 6.我們研究的範圍裡，不論是黑子或白子，都不考慮下「失誤棋」的情形，如下圖 1 及圖 2：

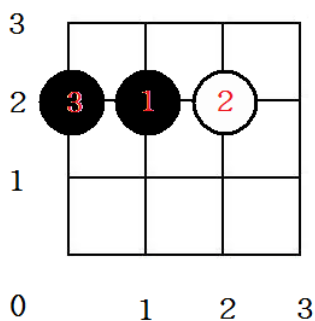


圖 1：黑棋第二著為失誤棋

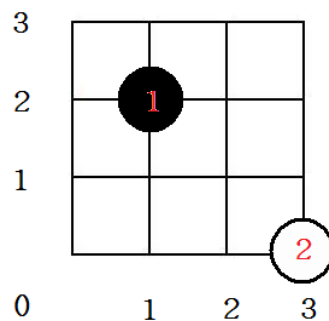


圖 2：白棋下的位置為失誤棋

- 7.研究活動是希望黑子能以「最少的步驟」達成三子連線，故我們在考慮黑棋時，僅僅討論「每步黑棋的位置，皆與前一步黑棋相鄰」的走法。（因為若黑棋走法前後不相連時，會徒增獲勝所需要的步數），如下圖 3 與圖 4：

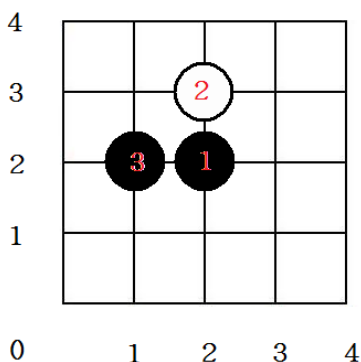


圖 3：黑棋第二著有相鄰

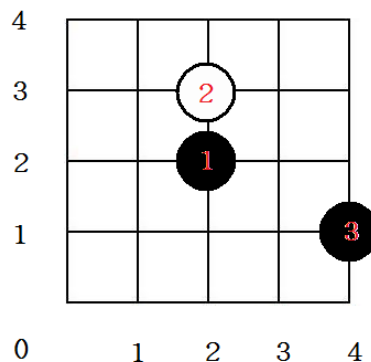


圖 4：黑棋第二著沒有相鄰（不討論）

- 8.研究裡所有的棋盤都是「縮小正方格」，故排列組合相同的圖形，便不予重覆討論，如下圖 5 與圖 6：

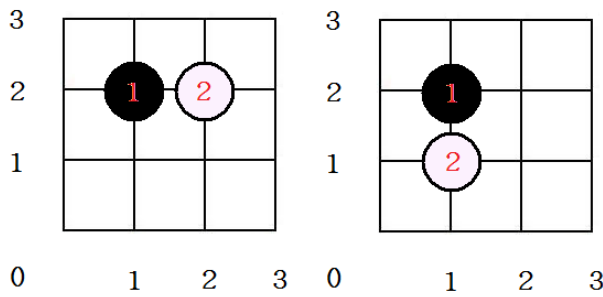


圖 5：兩個棋盤是相同的圖形

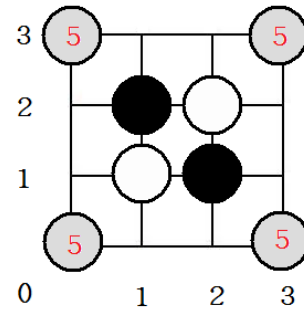


圖 6：灰子四個位置意義相同

第三部份：研究活動

【活動一】：在 3x3 棋盤中，當黑棋第一步下在棋盤內圈的位置時，是否有使黑棋能在 5 步以內形成三子連線，以獲得勝利的走法？

【研究目的】

在 3x3 的棋盤中，我們皆由黑棋先下，且當黑棋第一步下在棋盤內圈的位置，包括(1,1)、(2,1)、(1,2)、及 (2,2)，研究出如何在總步數 5 步以內，可以使黑棋連成三子連線的走法，以獲得勝利。

【研究方法一】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (1,2) 的位置 (其他位置 (2,1)、(1,1)、及 (2,2) 皆為對稱，僅需以 (1,2) 代表討論便可以)。
2. 第二步將第一顆白棋的擋在棋盤內圈的地方 (2,2) (位置 (1,1) 同理)。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，故第三步讓第二顆黑棋下在棋盤內圈的位置，就會形成「活二連線」，如圖 8 的綠棋 (1,1) 或 (2,1)。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋剛剛形成的活二連線的一端 (3,0) 或 (0,3)。
5. 在這樣的情形下，第五步下第三顆黑棋時，必能使得黑棋先三子連線成功！

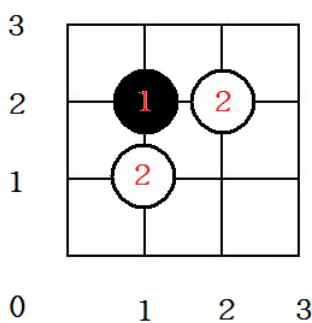


圖 7：白子檔棋盤內圈

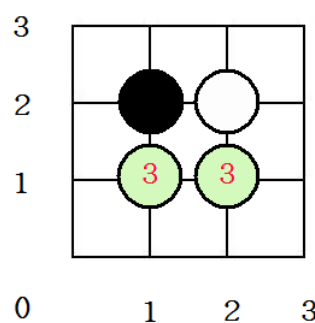


圖 8：第三步為活二連線

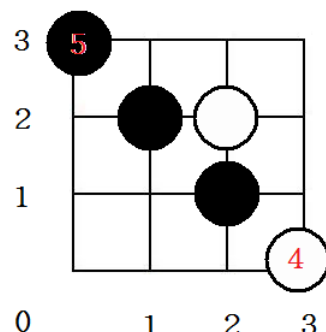


圖 9：黑棋獲勝 1(活二)

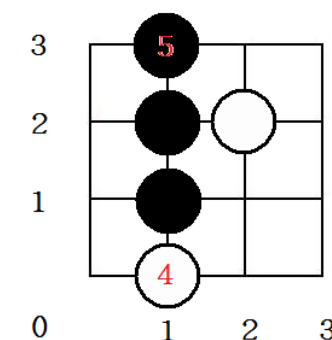
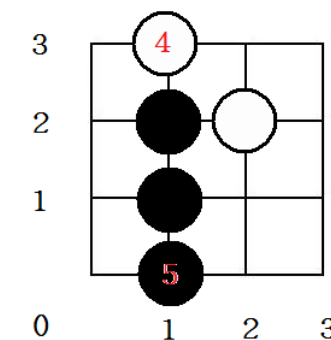
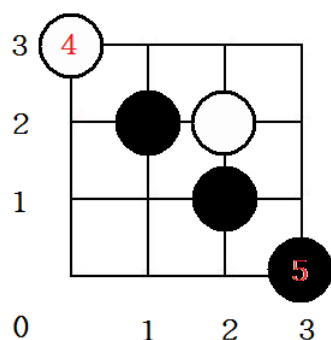


圖 10：黑棋獲勝 2(活二)

圖 11：黑棋獲勝 3(活二)

圖 12：黑棋獲勝 4(活二)

【結果】

- 1.此方法是將第一顆黑棋下在 (1,2) 棋盤內圈的位置，在下第二顆黑棋時，若是同樣下在棋盤內圈，就會形成「活二連線」。
- 2.此時不管白棋怎麼防守，黑棋都可在第五步時獲得勝利（黑棋第三顆必定可以形成三子連線）
- 3.黑棋如果形成「活二連線」，必可在下一回合取得勝利。

表 1：縮小正方形格 3x3 五子棋之贏棋走法研究（第一步黑棋下在棋盤內圈）

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(2,2)	(2,1)→(3,0)→(0,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(2,1)→(0,3)→(3,0)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(1,1)→(1,3)→(1,0)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(1,1)→(1,0)→(1,3)	黑棋勝 (5)	活二連線

【研究方法二】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在 (1,2) 的位置（其他位置 (2,1)、(1,1)、及 (2,2) 皆為對稱，僅需以 (1,2) 代表討論便可以）。
- 2.第二步將第一顆白棋的擋在棋盤內圈的地方 (2,2)（位置 (1,1) 同理），以上步驟與【研究方法一】是相同的。
- 3.因為要使黑棋三子連線，但是我們第二顆黑棋改下在棋盤外圈的位置，便會形成「死二連線」，如圖○○的灰棋 (0,1) 或 (0,2) 或 (0,3) 或 (1,3) 或 (2,3)。
- 4.第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋剛剛形成的「死二連線」有機會連成三子連線的那一端 (0,1)，此時，可以確定黑棋無法在第五步連成三子。
- 5.因此，黑棋在第五步有三種下法，(1) 可下在 (1,3) 改與前兩顆黑棋製造出「三角形」，如圖 15 所示；(2) 可下在 (0,3) 與前兩顆黑棋製造出「三角形」，如圖 16 所示；(3) 黑棋下在棋盤內圈的位置，就會形成「活二連線」，如圖 17 的粉紅色棋 (1,1) 或 (2,1)。
- 6.下到這裡，不論接下來的白棋如何防守，黑棋都可在第七步完成三子連線成功！

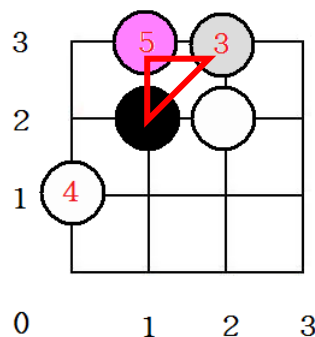
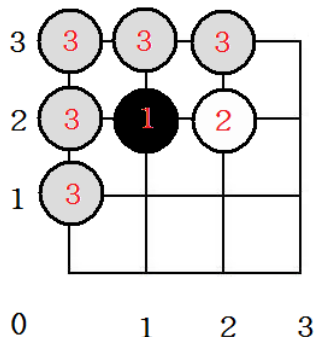
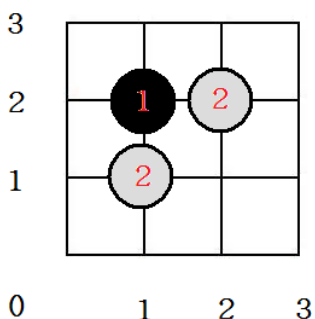


圖 13：白子檔棋盤內圈

圖 14：第三步為死二連線

圖 15：第五步製造三角形(勝 7)

棋形怪狀

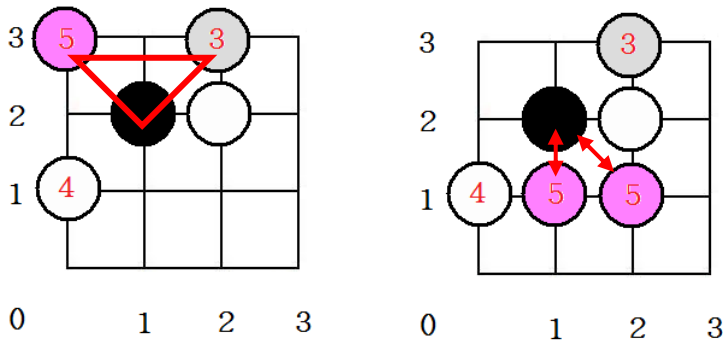


圖 16：第五步製造三角形(勝 7) 圖 17：第五步製造活二(勝 7)

【結果】

- 1.此方法是將第一顆黑棋下在 (1,2) 棋盤內圈的位置，在下第二顆黑棋時，若是下在棋盤外圈，黑棋就確定無法在五步之內完成三子連線。
- 2.黑棋在死二連線之後，可製造三角形或重新走回【研究方法一】的活二連線，讓白棋無法防守，以取得勝利，這時，黑棋可在第七步時獲得勝利（黑棋到第四顆才可以形成三子連線）
- 3.黑棋如果形成「死二連線」，則必需再多走一回合才可能取得勝利。
- 4.黑棋如果形成「三角形」，則黑棋可以再下一個回合獲得勝利。

表 2：縮小正方形 3x3 五子棋之贏棋走法研究（第一步黑棋下在棋盤內圈）

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(2,2)	(2,3)→(0,1)→(1,3)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(2,2)	(2,3)→(0,1)→(0,3)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(2,2)	(2,3)→(0,1)→(1,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(1,1)→(1,0)→(2,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線

【研究方法三】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在 (1,2) 的位置。
- 2.第二步將第一顆白棋的擋在棋盤外圈的地方 (1,3) (位置 (0,2) 同理)。
- 3.因為白棋第一顆是擋在棋盤外圈，故黑棋第二顆可下在 (2,1) 或是 (2,2) 使黑棋形成「活二連線」，如圖 19 的藍棋。
- 4.如此一來，不論白棋第四步如何防守，第五步下第三顆黑棋時，必能使得黑棋先三子連線成功！

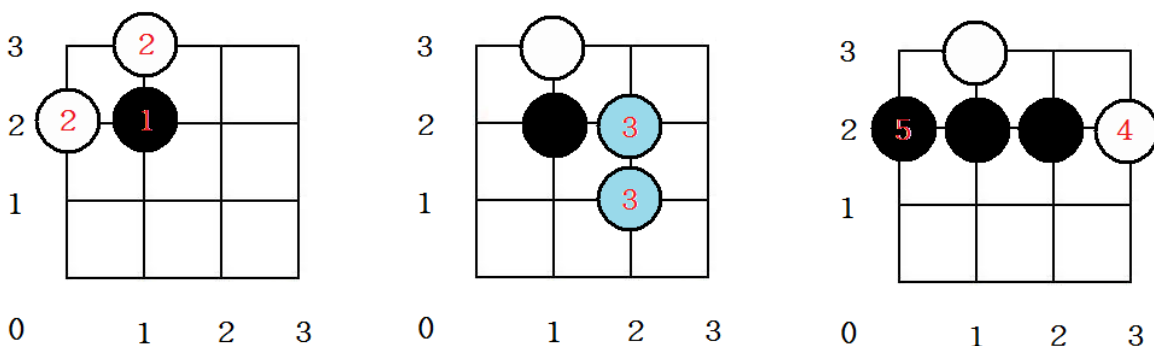


圖 18：白子檔棋盤外圈

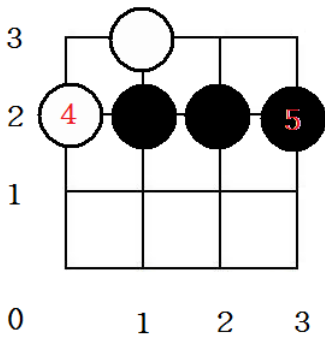


圖 19：第三步為活二連線

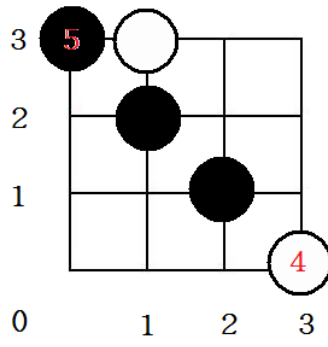


圖 20：黑棋獲勝 1(活二)

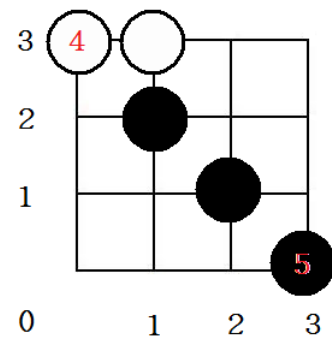


圖 21：黑棋獲勝 2(活二)

圖 22：黑棋獲勝 3(活二)

圖 23：黑棋獲勝 4(活二)

【結果】

- 1.此方法可知，白棋防守若是下在外圈，會讓黑棋第二顆就形成「活二連線」。
- 2.此時不管白棋怎麼防守，黑棋都可在第五步時獲得勝利
- 3.黑棋如果形成「活二連線」，必可在下一回合取得勝利。

表 3：縮小正方形 3x3 五子棋之贏棋走法研究（第一步黑棋下在棋盤內圈）

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(1,3)	(2,2)→(3,2)→(0,2)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(2,2)→(0,2)→(3,2)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(2,1)→(3,0)→(0,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(2,1)→(0,3)→(3,0)	黑棋勝 (5)	活二連線

【研究方法四】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在 (1,2) 的位置。
- 2.第二步將第一顆白棋的擋在棋盤外圈的地方 (1,3) (位置 (0,2) 同理)。
- 3.因為白棋第一顆是擋在棋盤外圈，但是不考慮【研究方法三】所下過的位置，黑棋第二顆改下成「死二連線」之處，如圖 25 的黃棋的地方 (此時可確定黑棋無法在第五步獲勝)
- 4.第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋剛剛形成的「死二連線」的活端 (2,2)。
- 5.接著，有兩種可能性，(1) 黑棋在第五步製造「活二連線」、或是「雙死二連線」，如圖 26 與圖 27 的情形，則黑棋可在第七步獲勝。(2) 黑棋在第五步製造「死二連線」，如圖 28 表示，則黑棋只能在第九步才能獲勝。

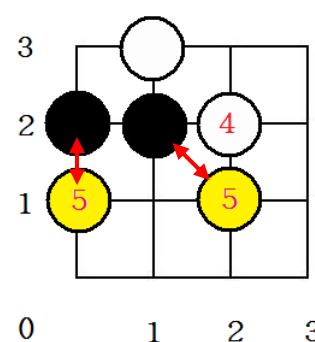
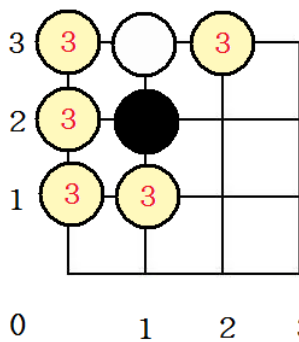
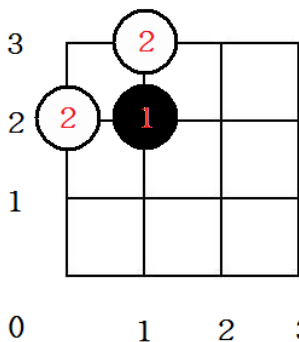


圖 24：白子檔棋盤外圈

圖 25：第三步為死二連線

圖 26：第五步製造活二(勝 7)

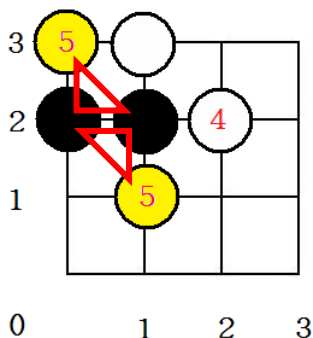


圖 27：第五步製造雙死二（三角形）(勝 7)

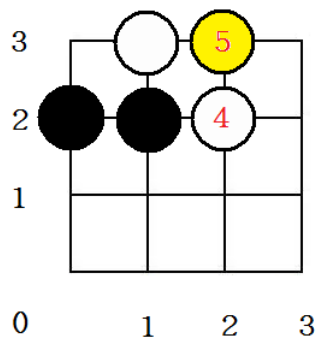


圖 28：第五步製造死二(勝 9)

【結果】

- 1.再怎麼快速，因此第三步黑棋還只能「死二連線」，故最快需再加四步才能得勝。(共七步)
- 2.若出現「活二連線」、或是「雙死二連線（也就是三角形）」，則黑棋可在下一回合獲勝（七步）。
- 3.第五步黑棋還在死二連線的情形，最快也只能第九步才會獲勝（加四步）。

表 4：縮小正方形格 3x3 五子棋之贏棋走法研究（第一步黑棋下在棋盤內圈）

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(0,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(2,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(0,3)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(1,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(2,3) →○→○→○→◎	黑棋勝 (9)	五步死二

【活動二】：在 3x3 棋盤中，當黑棋第一步下在棋盤外圈的位置時，是否有使黑棋能在 5 步以內形成三子連線，以獲得勝利的走法？

【研究目的】

在 3x3 的棋盤中，我們皆由黑棋先下，且當黑棋第一步下在棋盤外圈的位置，包括(1,1)、(2,1)、(1,2)、及(2,2)，研究出如何在總步數 5 步以內，可以使黑棋連成三子連線的走法，以獲得勝利。

【研究方法一】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在 (0,3) 的位置（其他位置 (0,0)、(3,0)、及 (3,3) 皆為對稱，僅需以 (0,3) 代表討論便可以）。
- 2.第二步將第一顆白棋的擋在 (1,3) 如圖 29；或是擋在 (1,2) 的地方如圖 30。
- 3.承上，如果白棋擋在 (1,3)，則黑棋可在第五步時形成「活二連線」或是「三角形」，可在第七步獲勝。
- 4.承上，如果白棋擋在 (1,2)，則黑棋第二顆不論是擋 (0,2) 還是 (1,3)，白棋會在第六步時取得三子連線，黑棋失敗！如圖 31 所見。5.在這樣的情形下，第五步下第三顆黑棋時，必能使得黑棋先三子連線成功！

棋形怪狀

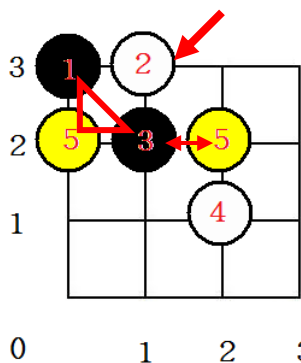


圖 29：活二或三角形(勝 7)

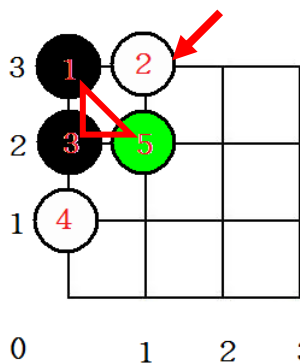


圖 30：三角形(勝 7)

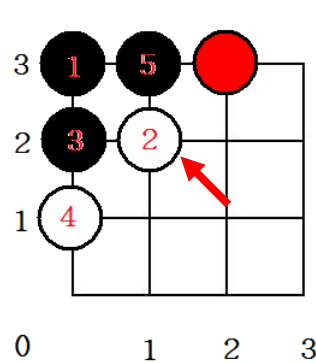


圖 31：黑棋失敗(白棋三連線)

【結果】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (0,3) 的位置，會因為第二步白棋的下法呈現兩種情形，黑棋與白棋都有可能獲勝。
2. 黑棋獲勝的情形，是因為第五步所製造的活二連線或是三角形。
3. 白棋獲勝的情形，是因為黑棋完全被白棋擋死了（第六步敗）。

表 5：縮小正方格 3x3 五子棋之贏棋走法研究（第一步黑棋下在棋盤外圈）

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(0,3)	(1,3)	(1,2)→(2,1)→(0,2)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(0,3)	(1,3)	(1,2)→(2,1)→(2,2)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(0,3)	(1,3)	(0,2)→(0,1)→(1,2)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(0,3)	(1,2)	(0,2)→(0,1)→(1,3)→(2,3)	白棋勝 (6)	白棋三連線

【研究方法二】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (1,3) 的位置（其他對稱位置省略不予討論）。
2. 第二步白棋的下法有三種情形，分別是 (1) 下在 (0,3) 位置、(2) 下在 (1,2) 的位置、(3) 下在 (2,3) 的位置。
3. 承上，若是下在 (0,3) 位置，黑棋可在第五步製造「活二連線」或「三角形」在第七步獲勝，如圖 32 所表示。
4. 承上，若是下在 (1,2) 位置，黑棋可在第三步製造「活二連線」或「三角形」在第五步獲勝，如圖 33 所表示。
5. 承上，若是下在 (2,3) 位置，黑棋可在第五步製造「活二連線」或「三角形」在第七步獲勝，如圖 34 所表示。

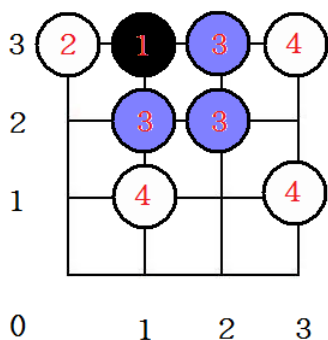


圖 32：活二或三角形(勝 7)

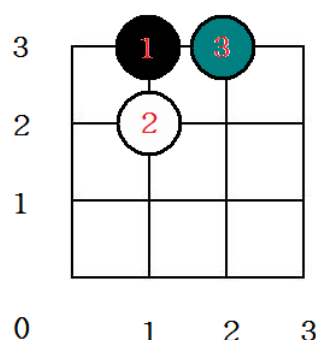


圖 33：活二(勝 5)

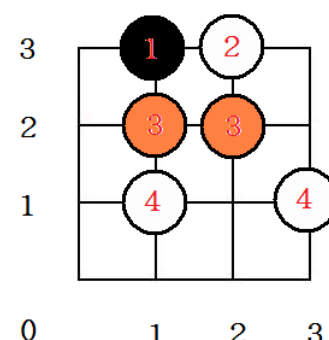


圖 34：活二或三角形(勝 7)

【結果】

- 1.此研究方向發現，黑棋都可藉由「活二連線」或「三角形」來獲勝。
- 2.若是在第三步製造「活二連線」或「三角形」，會在第五步獲勝；若是第五步製造「活二連線」或「三角形」，會在第七步獲勝。

表 6：縮小正方形 3x3 五子棋之贏棋走法研究（第一步黑棋下在棋盤外圈）

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,3)	(0,3)	(1,2)→(1,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(0,3)	(2,2)→(3,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(0,3)	(2,3)→(3,3)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(1,2)	(2,3)→(0,3)→(3,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,3)	(1,2)	(2,3)→(3,3)→(0,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,3)	(2,3)	(1,2)→(1,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(2,3)	(2,2)→(3,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角

【活動三】：在 4x4 棋盤中，當黑棋第一步下在棋盤中心位置 (2,2) 時，是否有使黑棋能在 5 步以內形成三子連線，以獲得勝利的走法？

【研究目的】

在四乘四的棋盤中，我們皆由黑棋先下，且當黑棋第一步下在 (2,2) 時，研究出如何在總步數 5 步以內，可以使黑棋連成三子連線的走法，以獲得勝利。

【研究方法一】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在 (2,2) 的位置（黑棋第一步下在棋盤正中央）。
- 2.第二步將第一顆白棋的擋在 (3,2) 的地方。
- 3.因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步讓第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置，如圖 35 的灰棋。
- 4.第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
- 5.第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

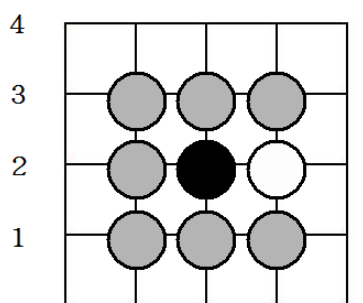


圖 35

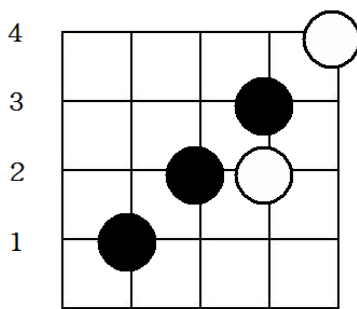


圖 36

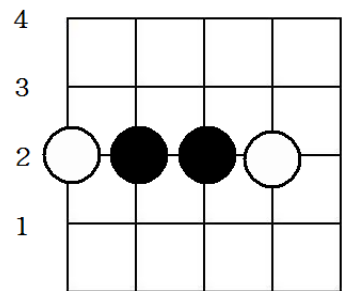


圖 37

【結果】

- 1.當第二顆黑棋在 (3,3) (2,3) (1,3) (1,2) (1,1) (2,1) 或 (3,1) 的位置時，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝，圖 36 則以第二顆黑棋在 (3,3) 為例子。
- 2.當第二顆黑棋在 (1,2) 的位置時，第二顆白棋可以輕易擋住黑棋連線，如圖 37，此時無法讓黑棋在第五步獲勝。

【研究方法二】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (2,2) 的位置 (黑棋第一步下在棋盤正中央)。
2. 第二步將第一顆白棋的擋在 (3,3) 的地方。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步讓第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置，如圖 38 的灰棋。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
5. 第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

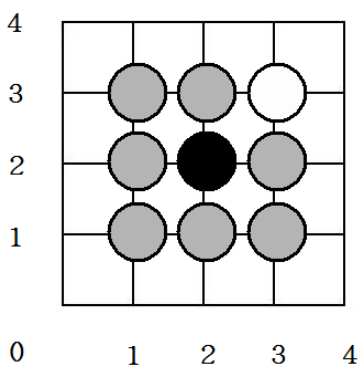


圖 38

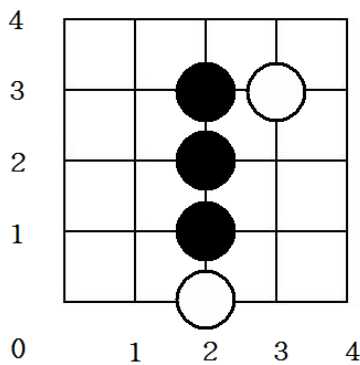


圖 39

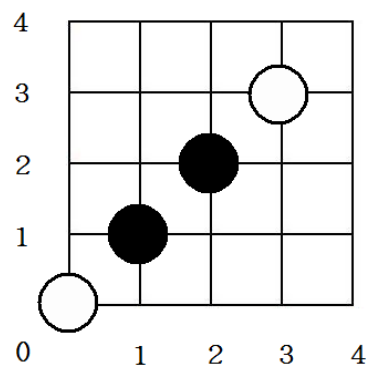


圖 40

【結果】

1. 當第二顆黑棋在 (2,3) (1,3) (1,2) (1,1) (2,1) (3,1) 或 (3,2) 的位置時，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝，圖 39 則以第二顆黑棋在 (2,1) 為例子。
2. 當第二顆黑棋在 (1,1) 的位置時，第二顆白棋可以輕易擋住黑棋連線，如圖 40，此時無法讓黑棋在第五步獲勝。

【研究方法三】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (2,2) 的位置 (黑棋第一步下在棋盤正中央)。
2. 第二步分別將第一顆白棋的擋在 (2,3) (1,3) (1,2) (1,1) (2,1) 或 (3,1) 的地方。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步讓第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
5. 第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

當第一顆白棋分別擋在 (2,3) (1,3) (1,2) (1,1) (2,1) 或 (3,1) 的地方時，發現同【研究方法一、二】中的結果，只要黑白棋呈現「○●●○」的排列時，不論是排列成橫線、縱線還是斜線，均無法讓黑棋在第五步獲勝。

【活動四】：在 4x4 棋盤中，當黑棋第一步下在棋盤內非正中央及邊線位置時，是否有使黑棋能在 5 步以內形成三子連線，以獲得勝利的走法？

【研究目的】

在四乘四的棋盤中，我們皆由黑棋先下，且當黑棋第一步下在 (1,1) (2,1) (3,1) (3,2) (3,3) (2,3) (1,3) 或 (1,2) 時，研究出如何在總步數 5 步以內，可以使黑棋連成三子連線的走法，以獲得勝利。

【研究方法一】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (1,1) 的位置 (黑棋第一步下在棋盤非正中央及邊線的位置)。
2. 第二步將第一顆白棋的擋在 (2,1) 的地方。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置，如圖 41 的灰棋。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
5. 第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

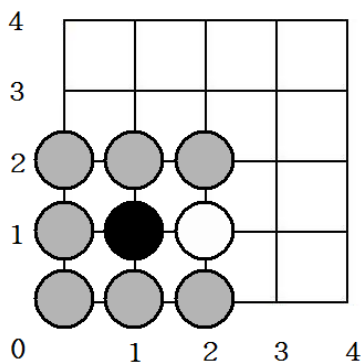


圖 41

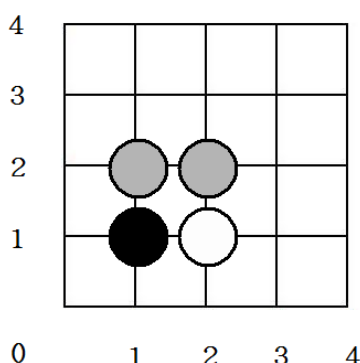


圖 42

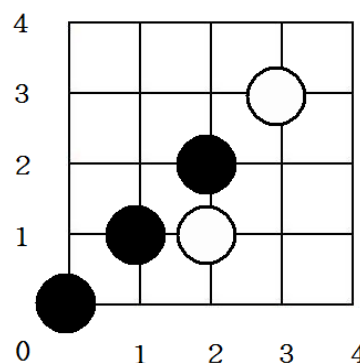


圖 43

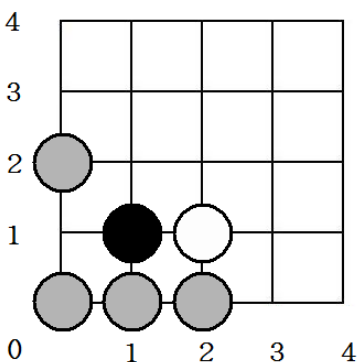


圖 44

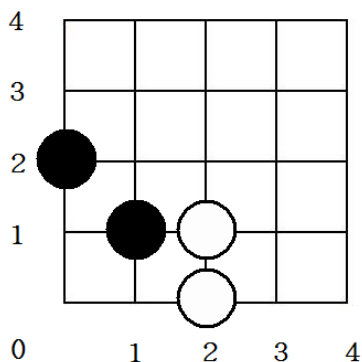


圖 45

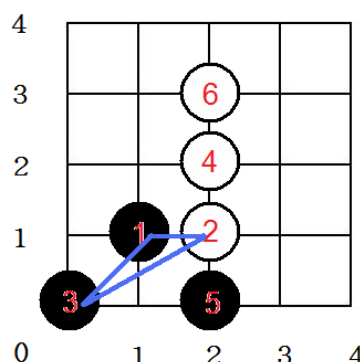


圖 46

【結果】

1. 當第二顆黑棋在 (2,2) 或 (1,2) 的位置時，即圖 42 中的灰棋位置，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝，圖 43 則以第二顆黑棋在 (2,2) 為例子。
2. 當第二顆黑棋在 (0,2) (0,0) (1,0) 或 (2,0) 等邊界位置時，即圖 44 中的灰棋位置，是無法讓黑棋在第五步就獲勝，需再繼續往下進行才有獲勝的可能，圖 45 則以第二顆黑棋在 (0,2) 為例子。
3. 當第二顆黑棋在 (0,1) 這個邊界位置時，使第一步到第三步的黑白棋的連線成鈍角三角形，此時不僅無法讓黑棋在第五步就獲勝，反而最快在第六步就能讓第三顆白棋先形成白子三連線而獲勝，即圖 46。

【研究方法二】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (1,1) 的位置。
2. 第二步將第一顆白棋的擋在 (2,2) 的地方。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置，如圖 47 的灰棋。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。

5.第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

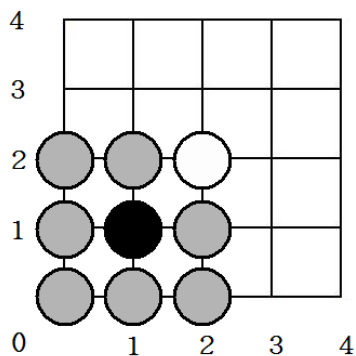


圖 47

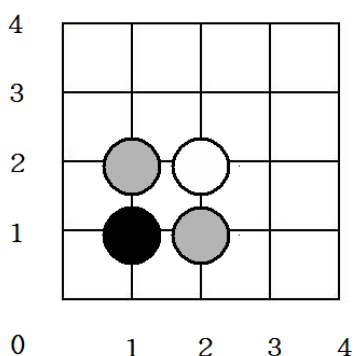


圖 48

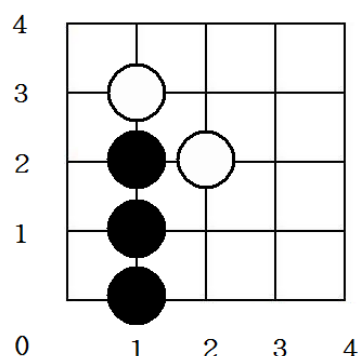


圖 49

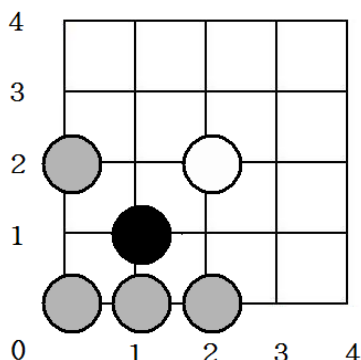


圖 50

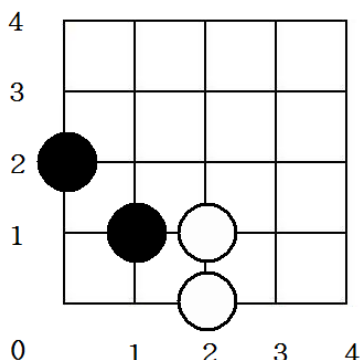


圖 51

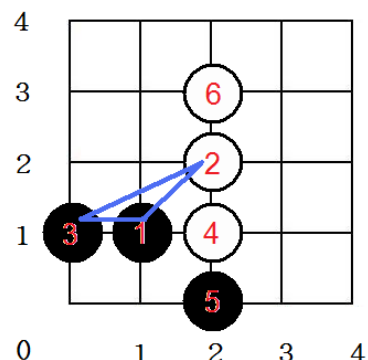


圖 52

【結果】

- 1.當第二顆黑棋在 (2,2) 或 (1,2) 的位置時，即圖 48 中的灰棋位置，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝，圖 49 則以第二顆黑棋在 (1,2) 為例子。
- 2.當第二顆黑棋在 (0,2) (0,0) (1,0) 或 (2,0) 等邊界位置時，即圖 50 中的灰棋位置，是無法讓黑棋在第五步就獲勝，需再繼續往下進行才有獲勝的可能，圖 51 則以第二顆黑棋在 (0,2) 為例子。
- 3.當第二顆黑棋在 (0,1) 這個邊界位置時，使第一步到第三步的黑白棋的連線成鈍角三角形，此時不僅無法讓黑棋在第五步就獲勝，反而最快在第六步就能讓第三顆白棋先形成白子三連線而獲勝，即圖 52。

【研究方法三】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在 (1,1) 的位置。
- 2.第二步分別將第一顆白棋的擋在 (1,2) (0,2) (0,1) (0,0) (1,0) 或 (2,0) 的地方。
- 3.因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置。
- 4.第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
- 5.第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

- 1.當第三步的第二顆黑棋在棋盤內非邊界的位置時，且和第一顆黑棋相連，並且避免黑白棋呈現「○●●○」的排列時，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝。
- 2.當第三步的第二顆黑棋在棋盤內邊界位置時，是無法讓黑棋在第五步就獲勝，需再繼續往下進行才有獲勝的可能。

3.當第二步的第一顆白棋分別擋在(1,2)(0,1)或(1,0)這些地方，而第三步的第二顆黑棋分別在圖54~圖55的位置，使第一步到第三步的黑白棋的連線成鈍角三角形，此時不僅無法讓黑棋在第五步就獲勝，反而最快在第六步就能讓第三顆白棋先形成白子三連線而獲勝。

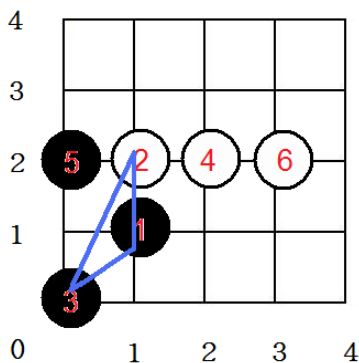


圖 53

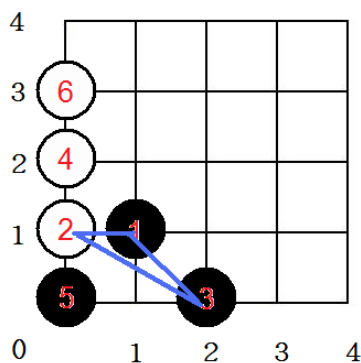


圖 54

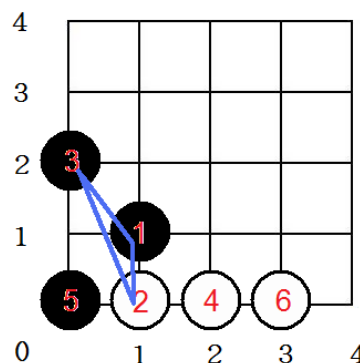


圖 55

【研究方法四】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在(2,1)的位置。
- 2.同【研究方法一】~【研究方法三】，第二步分別將第一顆白棋的擋在第一顆黑棋四周(3,2)(2,2)(1,2)(1,1)(1,0)(2,0)(3,0)或(3,1)等地方，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁四周的位置，讓黑子能二子連線，第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線，第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

- 1.當第三步的第二顆黑棋在棋盤內非邊界的位置時，且和第一顆黑棋相連，並且避免黑白棋呈現「○●●○」的排列時，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝。
- 2.當第三步的第二顆黑棋在棋盤內邊界位置時，是無法讓黑棋在第五步就獲勝，需再繼續往下進行才有獲勝的可能。
- 3.當第一步到第三步的黑白棋的連線成鈍角三角形時，就有機會最快在第六步就能讓第三顆白棋先形成白子三連線而獲勝。

【研究方法五】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在(2,1)(3,1)(3,2)(3,3)(2,3)和(1,3)的位置。
- 2.同【研究方法四】，第二步分別將第一顆白棋的擋在第一顆黑棋，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁四周的位置，讓黑子能二子連線，第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線，第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

我們找到和【研究方法四】相同的結果。

【活動五】：在 4x4 棋盤中，當黑棋第一步下在棋盤內邊線位置時，是否有使黑棋能在 5 步以內形成三子連線，以獲得勝利的走法？

【研究目的】

在四乘四的棋盤中，我們皆由黑棋先下，且當黑棋第一步下在(0,0)(0,1)(0,2)(0,3)(0,4)(1,4)(2,4)(3,4)(4,4)(4,3)(4,2)(4,1)(4,0)(3,0)(2,0)或(1,0)時，研究出如何在

總步數 5 步以內，可以使黑棋連成三子連線的走法，以獲得勝利。

【研究方法一】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (0,0) 的位置。
2. 第二步將第一顆白棋的分別擋在 (0,1) (1,0) 或 (1,1) 等地方。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
5. 第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

1. 發現第一顆黑棋位於 (0,0) 時位置，當黑棋成二子連線後，就會被白棋輕易擋住，無法三子連線，如圖 56~圖 61。
2. 發現第一顆黑棋位於 (0,4) (4,4) 和 (4,0) 等位置時，也會有相同的結果。

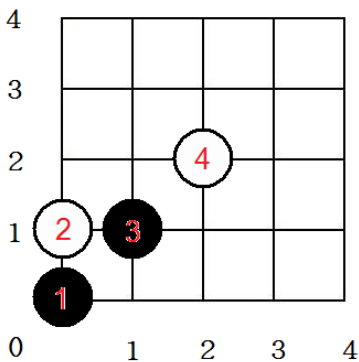


圖 56

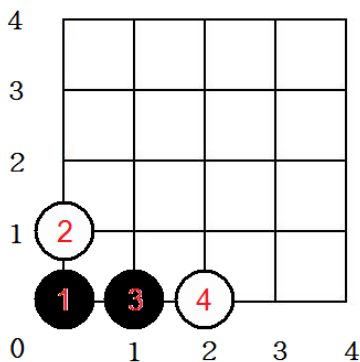


圖 57

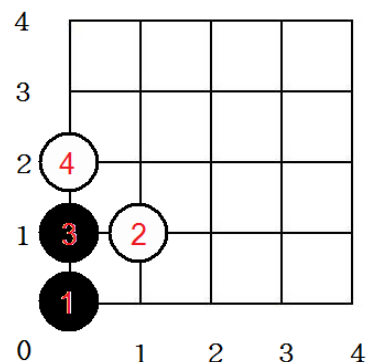


圖 58

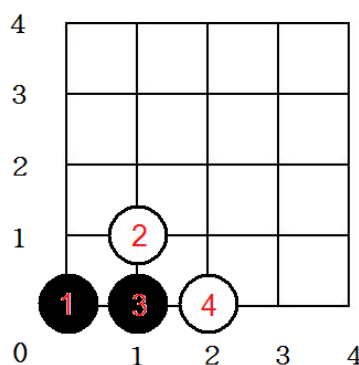


圖 59

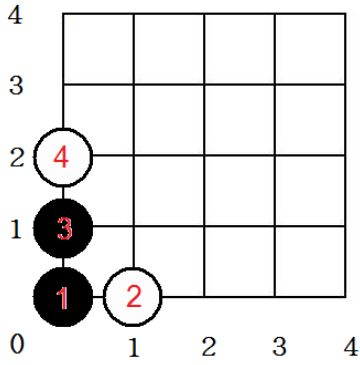


圖 60

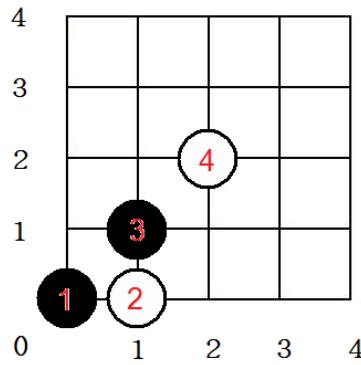


圖 61

【研究方法二】

1. 第一步將第一顆黑棋下在 (1,0) 的位置。
2. 第二步將第一顆白棋的分別擋在 (0,0) (0,1) (1,1) (2,1) 或 (2,0) 等地方。
3. 因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置。
4. 第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
5. 第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

1.當第二步的第一顆白棋分別擋在(0,0)和(2,0)這兩個位置時，當第三步的第二顆和第一顆黑棋成二子連線後，就會被白棋輕易擋住，無法三子連線，下圖則以第一顆白棋擋在(0,0)為例(圖62~圖65)。

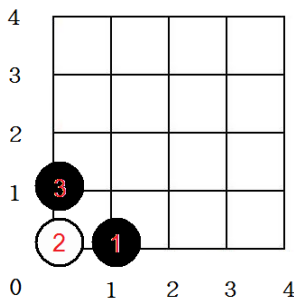


圖 62

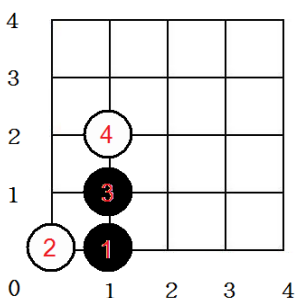


圖 63

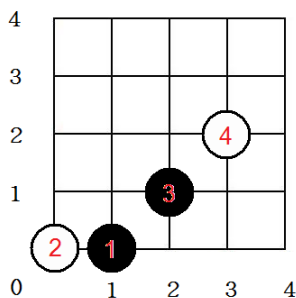


圖 64

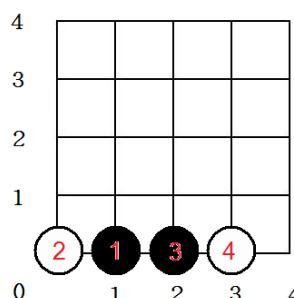


圖 65

2.當第二步的第一顆白棋分別擋在(0,1)(1,1)和(2,1)這三個位置時，當第三步的第二顆黑棋同樣位於棋盤的邊線上，且位於第一顆黑棋左右空位較大的那一方時，則可讓黑棋在第五步獲勝，如下圖66~圖68。

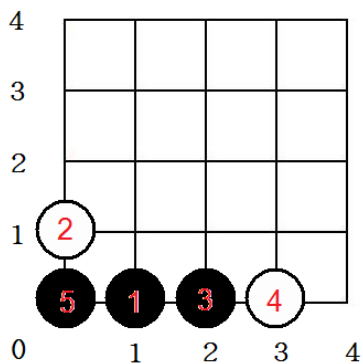


圖 66

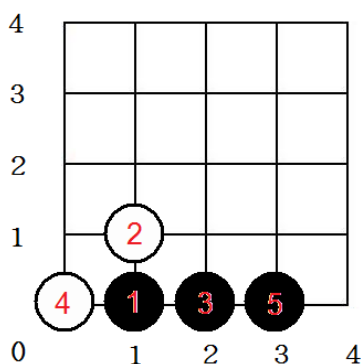


圖 67

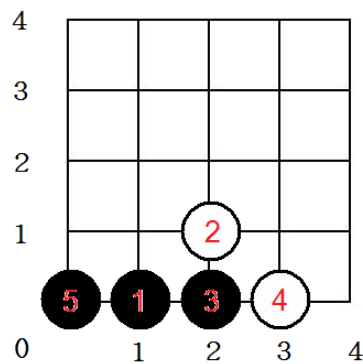


圖 68

【研究方法三】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在(2,0)的位置。
- 2.第二步將第一顆白棋的分別擋在(1,0)(1,1)(2,1)(3,1)或(3,0)等地方。
- 3.因為要使黑棋三子連線，因此我們先試著讓黑子能二子連線，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置。
- 4.第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線。
- 5.第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

1.當第二步的第一顆白棋分別擋在(1,0)和(3,0)這兩個位置時，當第三步的第二顆黑棋和第一顆黑棋成二子連線後，就會被白棋輕易擋住，無法三子連線，下圖則以第一顆白棋擋在(0,1)為例(圖69~圖72)。

棋形怪狀

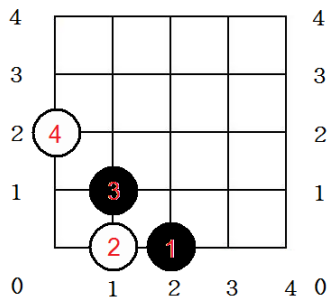


圖 69

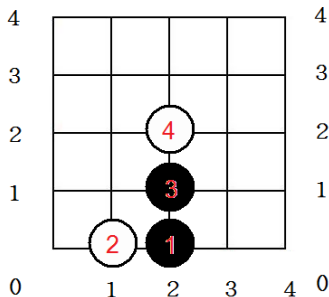


圖 70

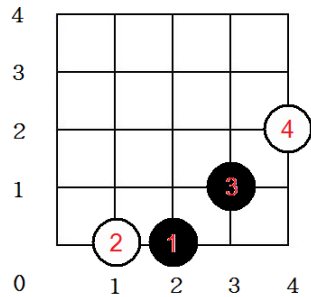


圖 71

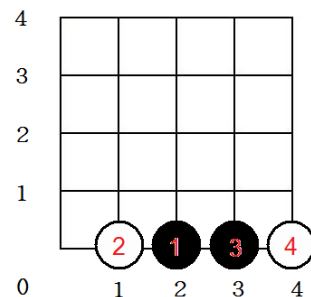


圖 72

2.當第二步的第一顆白棋分別擋在(1,1)(2,1)和(3,1)這三個位置時，此時第一顆黑棋的左右空間一樣大，當第三步的第二顆黑棋同樣位於棋盤的邊線上，則可讓黑棋在第五步獲勝，下圖則以第一顆白棋擋在(2,1)為例(圖73~圖74)。

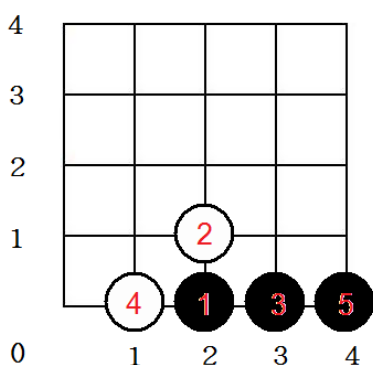


圖 73

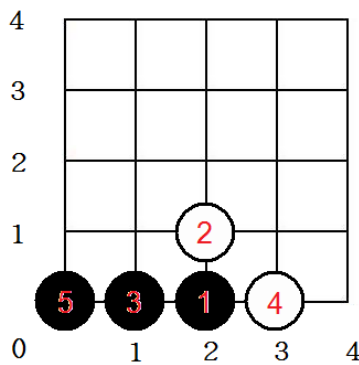


圖 74

【研究方法四】

- 1.第一步將第一顆黑棋下在(0,3)(4,1)(4,2)(4,3)(3,4)(2,4)(1,4)(0,3)(0,2)和(0,1)的位置。
- 2.同【研究方法一】~【研究方法三】，第二步分別將第一顆白棋擋在第一顆黑棋四周的地方，第三步的第二顆黑棋下在第一顆黑棋旁的位置，讓黑子能二子連線，第四步利用第二顆白棋去阻擋黑棋三子連線，第五步下第三顆黑棋，試試看是否能形成三子連線。

【結果】

- 1.依排列組合的觀點來看，在本【研究方法四】中，可以看出當黑棋的第一顆下在棋盤內邊線位置時，僅出現三種情形，分別是：(1)第一顆黑棋下在(0,0)(0,4)(4,4)(0,4)的位置，那麼研究結果便與【研究方法一】相同、(2)第一顆黑棋下在(1,0)(3,0)(4,1)(4,3)(3,4)(1,4)(0,3)(0,1)的位置，研究結果便與【研究方法二】相同、(3)第一顆黑棋下在(2,0)(4,2)(2,4)(0,2)的位置，研究結果便與【研究方法三】相同。
- 2.當黑棋的第一顆下在棋盤內邊線位置，黑棋想要在五步內達到三子連線而勝利，必須要在下第三步，也就是下第二顆黑棋時，讓前兩顆黑棋的連線成爲「活二連線」，才有可能。
- 3.承上，若下第二顆黑棋時，前兩顆黑棋連線僅是「死二連線」，則至少要七步以上，黑棋才有可能獲勝。

伍、結論

- 1.綜合來看，黑棋想要形成三子連線，必須在兩顆黑棋時先達成下面的連線：
 - (1) 活二連線：兩顆黑棋連線之前面、後面皆沒有白棋阻擋。
 - (2) 雙死二連線：已經形成兩條黑棋連線，其中任一兩顆黑棋連線之兩端，各有一端是被白棋阻擋。
- 2.3x3 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋可以先形成三子連線的走法，一是「活二連線」、另一是「雙死二連線」也就是黑棋呈現三角形的樣子。
- 3.經過研究發現，3x3 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋達成三子連線的步數計算如下：
 - (1) 黑棋若達到活二連線，則下一顆黑棋必定可以得勝（加 2 步）
 - (2) 黑棋若達到雙死二連線（三角形），則黑棋想要獲勝，必需再多等一回合（加四步）
 - (3) 舉例來說，當黑棋達到活二連線是第三步，則在第五步可獲勝；若黑棋達到雙死二連線是第五步，則黑棋達到三子連線時，最快要第九步才行。
- 4.透過研究，分析在 3x3 縮小的五子棋盤上，黑棋可以獲得勝利的最少步數：
 - (1) 第一顆黑棋下在 (1,2) 棋盤內圈的位置，第二顆也是下在內圈，則五步獲勝。
 - (2) 第一顆黑棋下在 (1,2) 棋盤內圈的位置，第二顆若下在外圈，則最快七步獲勝。
 - (3) 黑棋第一步下在棋盤外圈的位置，則因為白棋阻擋與黑棋第二顆的走法，會出現黑棋五步獲勝、七步以上獲勝，但也有可能讓白子在第六步獲勝的特殊情形。
- 5.4x4 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋可以先形成三子連線的走法，同樣是「活二連線」與「雙死二連線」這兩種。
- 6.經過研究發現，4x4 縮小的五子棋盤上，分析出黑棋達成三子連線的步數計算如下：
 - (1) 黑棋若達到活二連線，則下一顆黑棋必定可以得勝（加 2 步）
 - (2) 黑棋若達到雙死二連線（三角形），則黑棋想要獲勝，必需再多等一回合（加四步）
- 7.透過研究，分析在 4x4 縮小的五子棋盤上，黑棋可以獲得勝利的最少步數：
 - (1) 第一顆黑棋下在棋盤中心位置 (2,2)，除了第二顆黑棋下在 (1,2) 或 (1,1) 之外，黑棋都可在第五步獲勝。
 - (2) 第一顆黑棋下在棋盤中心位置 (2,2)，若棋盤當中黑白棋呈現「○●●○」的排列時，不論是排列成橫線、縱線還是斜線，均無法讓黑棋在第五步獲勝，最快第七步黑棋才能三子連線。
 - (3) 當第一顆黑棋下在棋盤非正中央及邊線位置時，第二顆黑棋在棋盤內非邊界的位置時，且和第一顆黑棋相連，並且避免黑白棋呈現「○●●○」的排列時，均可以輕鬆讓黑棋在第五步獲勝。
 - (4) 當第二顆黑棋在邊界位置時，使第一步到第三步的黑白棋的連線成鈍角三角形，此時不僅無法讓黑棋在第五步就獲勝，反而最快在第六步就能讓白棋形成三連線
 - (5) 當第一顆黑棋下在棋盤非正中央及邊線位置時，且不是 (3) 與 (4) 的情形，則黑棋終會三子連線，但最快要七步以上。
 - (6) 當黑棋的第一顆下在棋盤內邊線位置，黑棋想要在五步內獲勝，同上需「活二連線」，才有可能。
- 8.在黑棋先下的情況之下，白棋先達成三子連線的情形，為當第一顆與第二顆黑子的連線，沒有形成任何「活二連線」或是「死二連線」，全被白子阻擋的情況下，便會發生。

附表一：周長和及面積和統計表（摘錄）

附表：縮小正方形 3x3 五子棋之贏棋走法研究統計表

第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(2,2)	(2,1)→(3,0)→(0,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(2,1)→(0,3)→(3,0)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(1,1)→(1,3)→(1,0)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(1,1)→(1,0)→(1,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(2,2)	(2,3)→(0,1)→(1,3)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(2,2)	(2,3)→(0,1)→(0,3)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(2,2)	(2,3)→(0,1)→(1,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
(1,2)	(2,2)	(1,1)→(1,0)→(2,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(1,3)	(2,2)→(3,2)→(0,2)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(2,2)→(0,2)→(3,2)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(2,1)→(3,0)→(0,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(2,1)→(0,3)→(3,0)	黑棋勝 (5)	活二連線
第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(0,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(2,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二連線
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(0,3)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(1,1)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(1,2)	(1,3)	(0,2)→(2,2)→(2,3) →○→○→○→◎	黑棋勝 (9)	五步死二
第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(0,3)	(1,3)	(1,2)→(2,1)→(0,2)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(0,3)	(1,3)	(1,2)→(2,1)→(2,2)→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(0,3)	(1,3)	(0,2)→(0,1)→(1,2)→○→◎	黑棋勝 (7)	三角形
(0,3)	(1,2)	(0,2)→(0,1)→(1,3)→(2,3)	白棋勝 (6)	白棋三連線
第一步(黑棋)	第二步(白棋)	第三步以後之佈局	結果(步數)	說明
(1,3)	(0,3)	(1,2)→(1,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(0,3)	(2,2)→(3,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(0,3)	(2,3)→(3,3)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(1,2)	(2,3)→(0,3)→(3,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,3)	(1,2)	(2,3)→(3,3)→(0,3)	黑棋勝 (5)	活二連線
(1,3)	(2,3)	(1,2)→(1,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角
(1,3)	(2,3)	(2,2)→(3,1)→○→○→◎	黑棋勝 (7)	活二或三角

【評語】 080404

本作品在「3x3」和「4x4」的五子棋盤上，針對三子連線的走法做了很完整的探討，也分析出獲得勝利的最少步數。但對五子棋的致勝走法尚有一段距離，可再接再勵。另外，透過在「3x3」和「4x4」棋盤上的探討結果，如何擴充到「nxn」的棋盤也可繼續努力。